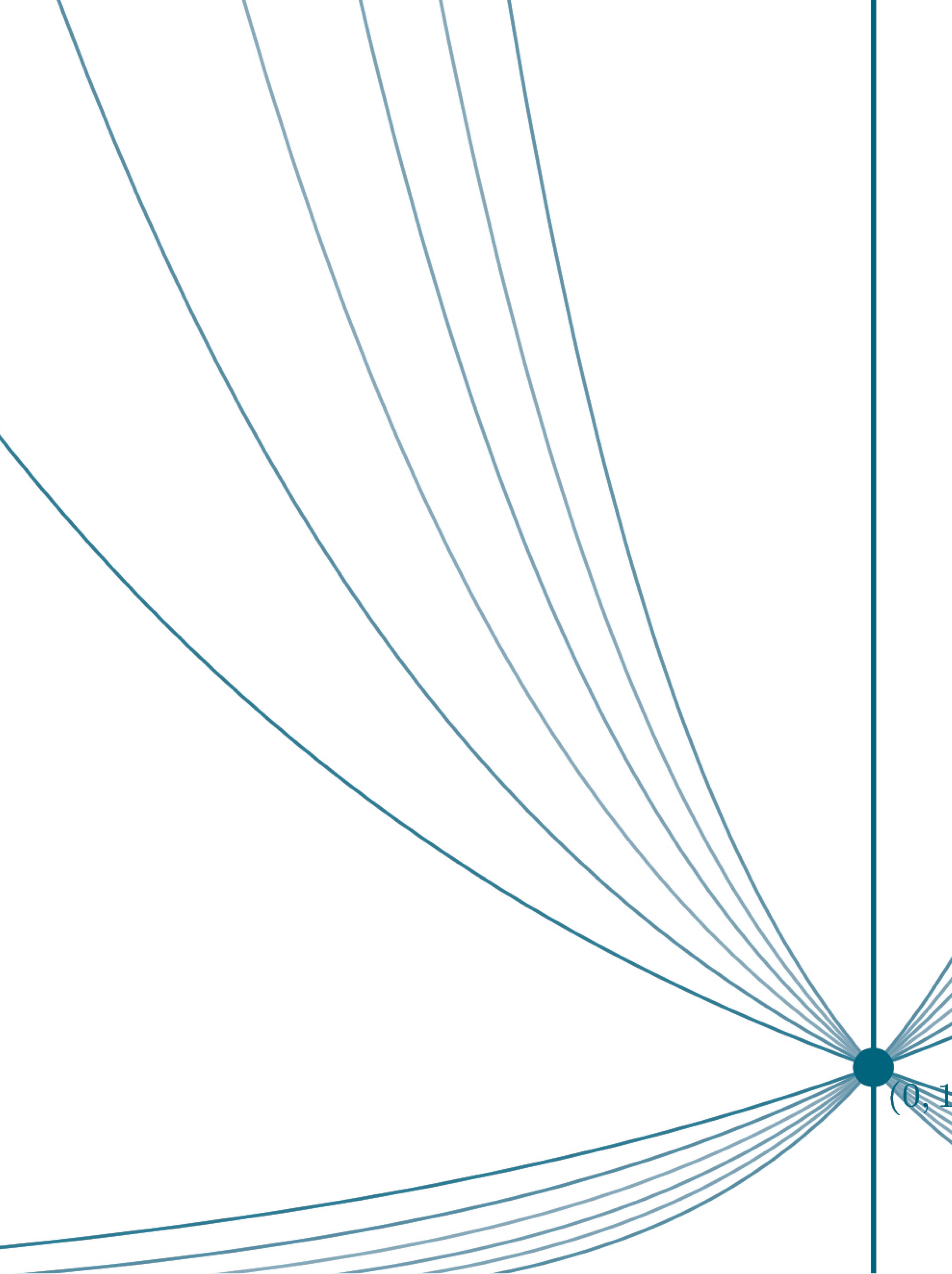
MAGNO

UN CURSO DE PRECÁLCULO

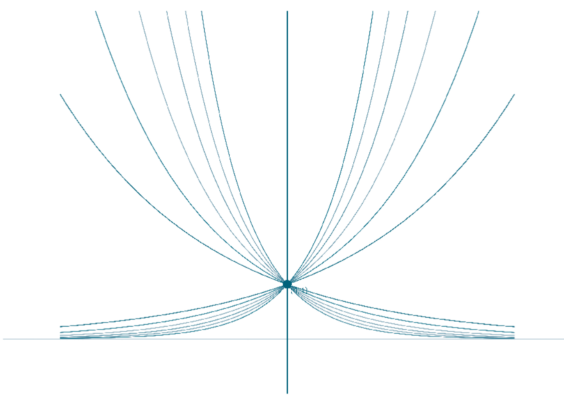
La teoría

ZELJKA LJUJIC
ALICIA PÉREZ

Esta figura representa las gráficas de varias funciones exponenciales $f(x) = a^x$ para distintos valores de a.


(0, 1

MAGNO



UN CURSO DE PRECÁLCULO

La teoría

ZELJKA LJUJIC
ALICIA PÉREZ

FACULTAD
DE CIENCIAS
Matemáticas

Nombre: Ljujic, Zeljka, autor. | Pérez Gutiérrez, Alicia, autor.
Título: Un curso de precálculo: la teoría / Zeljka Ljujic, Alicia Pérez.
Descripción: Bogotá: Universidad de los Andes, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Ediciones Uniandes, 2026. | 286 páginas: ilustraciones; 23 X 31,7 cm. | Magno

Identificadores: ISBN 978-958-798-951-9 (rústica) | 978-958-798-952-6 (e-book) | 978-958-798-953-3 (e-pub)

Materias: Álgebra – Problemas, ejercicios, etc. | Ecuaciones – Problemas, ejercicios, etc. | Desigualdades (Matemáticas) – Problemas, ejercicios, etc. | Funciones – Problemas, ejercicios, etc. | Trigonometría – Problemas, ejercicios, etc.

Clasificación: CDD 510.76-dc23 SBUA

Primera edición: enero del 2026

Ediciones Uniandes
Carrera 1.ª n.º 18A-12, bloque Tm
Bogotá, D. C., Colombia
Teléfono: 601 339 4949, ext. 2133
http://ediciones.uniandes.edu.co
ediciones@uniandes.edu.co

ISBN: 978-958-798-951-9
ISBN *e-book*: 978-958-798-952-6
ISBN epub: 978-958-798-953-3
DOI: http://doi.org/10.51573/Andes.9789587989519.9789587989526.9789587989533

Corrección de estilo: Laura Porras
Diagramación: Patricia Chávez Rojas
Diseño de colección y diagramación de cubierta: Camila Cardeñosa

Impresión
Linotipia Martínez
Carrera 30 n.º 4-23
Teléfono: 601 745 22 06
Bogotá, D. C., Colombia

Impreso en Colombia - *Printed in Colombia*

Universidad de los Andes | Vigilada Mineducación. Reconocimiento como universidad: Decreto 1297 del 30 de mayo de 1964. Reconocimiento de personería jurídica: Resolución 28 del 23 de febrero de 1949, Minjusticia. Acreditación institucional de alta calidad, 10 años: Resolución 000194 del 16 de enero del 2025, Mineducación.

Módulo 1

Álgebra

Módulo 2

Ecuaciones y desigualdades

Módulo 3

Funciones

Módulo 4

Trigonometría

Módulo 1

Álgebra

1.1 Operaciones de números reales

Esta sección es un repaso de las operaciones de fracciones, el valor absoluto de los números reales y el orden de operaciones en los números reales.

Operaciones de fracciones

Simplificar una fracción

Cuando el numerador y el denominador de una fracción son divisibles por un mismo número podemos dividirlos entre este número y así obtenemos una fracción equivalente.

Ejemplo 1. Simplifique la fracción $\frac{15}{24}$.

Solución.
$$\frac{15}{24} = \frac{15 \div 3}{24 \div 3} = \frac{5}{8}$$

En el ejemplo anterior, $\frac{15}{24}$ y $\frac{5}{8}$ son fracciones equivalentes. Obtenemos $\frac{5}{8}$ al dividir el numerador y el denominador de $\frac{15}{24}$ entre 3 y, similarmente, obtenemos $\frac{15}{24}$ al multiplicar el numerador y el denominador de $\frac{5}{8}$ por 3.

Para obtener fracciones equivalentes podemos multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número o dividirlos entre un mismo número, siempre que este número sea distinto de cero. No obtenemos fracciones equivalentes si le sumamos o le restamos el mismo número al numerador y al denominador de una fracción. Este es un error que debemos evitar.

Producto de fracciones

El producto de dos fracciones es la fracción que tiene como numerador al producto de los dos numeradores y como denominador al producto de los dos denominadores. Esto es:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ejemplo 2. Multiplique las fracciones $\frac{11}{4} \cdot \frac{6}{5}$ y simplifique el resultado.

Solución.

$\frac{11}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{11 \cdot 6}{4 \cdot 5}$ multiplicamos los numeradores y los denominadores

$= \frac{66}{20}$ 66 y 20 son divisibles entre 2

$= \frac{\cancel{66}^{33}}{\cancel{20}^{10}}$ dividimos el numerador y el denominador entre 2

$= \frac{33}{10}$ esta fracción es irreducible, pues 33 y 10 no tienen divisor mayor que 1 en común.

A veces, en un producto de fracciones, es conveniente simplificar antes de multiplicar los numeradores y los denominadores. Esto nos permitirá trabajar con números más pequeños.

Ejemplo 3. Multiplique las fracciones $\frac{24}{25} \cdot \frac{15}{16}$ y simplifique el resultado.

Solución.

$\frac{24}{25} \cdot \frac{15}{16} = \frac{24 \cdot 15}{25 \cdot 16}$

$= \frac{\cancel{24}^{3} \cdot 15}{25 \cdot \cancel{16}^{2}}$ dividimos a 24 y a 16 entre 8

$= \frac{3 \cdot \cancel{15}^{3}}{\cancel{25}^{5} \cdot 2}$ dividimos a 15 y a 25 entre 5

$$= \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 2}$$

$$= \frac{9}{10}$$ multiplicamos los numeradores y los denominadores.

Ahora intente hacer el **ejercicio 1** para la clase de **La práctica 1.1**

División de fracciones

Para dividir una fracción entre otra debemos multiplicar la primera fracción por el inverso multiplicativo de la fracción que está dividiéndola. Es decir:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo 4. Divida las fracciones $\frac{12}{5} \div \frac{11}{4}$ y simplifique el resultado.

Solución.

$$\frac{12}{5} \div \frac{11}{4} = \frac{12}{5} \cdot \frac{4}{11}$$ multiplicamos por la fracción inversa

$$= \frac{48}{55}$$

Para la división de fracciones también podemos utilizar la notación de fracción compuesta por fracciones. Es decir, podemos escribir la división de fracciones como una gran fracción cuyo numerador y denominador son a su vez fracciones. En este caso podemos utilizar la "ley de las orejas" como ayuda visual.

Ejemplo 5. Divida las fracciones $\frac{3}{8} \div \frac{7}{15}$ y simplifique el resultado.

Solución.

$$\frac{3}{8} \div \frac{7}{15} = \cfrac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{15}}$$ escribimos esta división como una fracción compuesta por fracciones

$$= \frac{3 \cdot 15}{8 \cdot 7}$$ multiplicamos los números que conectan las orejas: el producto indicado por la oreja grande es el numerador y el producto indicado por la oreja pequeña es el denominador

$$= \frac{45}{56}$$

En el numerador de la fracción que resulta escribimos el producto indicado por la oreja grande y en el denominador, el que indica la oreja pequeña.

Ahora intente hacer el **ejercicio 2** para la clase de **La práctica 1.1**

Suma y resta de fracciones

Primero, haremos sumas y restas de fracciones que tienen el mismo denominador. En este caso, dejamos el denominador común y sumamos o restamos los numeradores, según el caso.

Ejemplo 6. Sume las fracciones $\frac{13}{9} + \frac{22}{9} + \frac{4}{9}$ y simplifique el resultado.

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{13}{9} + \frac{22}{9} + \frac{4}{9} &= \frac{13+22+4}{9} \\ &= \frac{39}{9} && \text{sumamos los numeradores} \\ &= \frac{\cancel{39}^{13}}{\cancel{9}^{3}} && \text{dividimos a 39 y a 9 entre 3} \\ &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 7. Reste las fracciones $\frac{12}{5} - \frac{9}{5}$ y simplifique el resultado.

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{12}{5} - \frac{9}{5} &= \frac{12-9}{5} \\ &= \frac{3}{5} && \text{restamos los numeradores} \end{aligned}$$

Si las fracciones tienen denominadores diferentes, debemos hallar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Una manera de hacer esto es utilizando las fracciones equivalentes cuyo denominador es el producto de los denominadores. Es decir, multiplicamos el numerador y el denominador de cada fracción por el denominador de la otra fracción. El denominador común será, en este caso, el producto de los denominadores.

Ejemplo 8. Sume las fracciones $\frac{11}{6} + \frac{4}{9}$ y simplifique el resultado.

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{11}{6} + \frac{4}{9} &= \frac{11 \cdot 9}{6 \cdot 9} + \frac{4 \cdot 6}{9 \cdot 6} && \text{multiplicamos el numerador y el denominador de cada fracción por el denominador de la otra fracción} \\
&= \frac{99}{54} + \frac{24}{54} && \text{obtenemos fracciones con el mismo denominador} \\
&= \frac{99 + 24}{54} && \text{sumamos los numeradores} \\
&= \frac{123}{54} \\
&= \frac{\cancelto{41}{123}}{\cancelto{18}{54}} && \text{dividimos a 123 y a 54 entre 3} \\
&= \frac{41}{18}
\end{aligned}$$

El método que acabamos de utilizar se llama método de los productos cruzados y en general se utiliza así:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}$$

En lugar de trabajar con el producto de los denominadores como denominador común, podemos utilizar un número más pequeño que llamaremos el mínimo común denominador. Este mínimo común denominador es justamente el mínimo común múltiplo de los denominadores, es decir, el número más pequeño que es divisible entre los denominadores.

En el ejemplo anterior utilizamos como denominador común el 54 que es el producto de 6 y 9, por lo tanto, es divisible entre 6 y entre 9. Sin embargo, podríamos haber utilizado el mínimo común múltiplo de 6 y 9. Para hallarlo debemos descomponer a 6 y a 9 en productos de números primos.

Un número natural (entero y positivo) mayor que 1 es **primo** si es divisible únicamente por 1 y por él mismo. Los primeros diez números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Para descomponer un número como producto de números primos usamos el siguiente algoritmo. Verificamos si el número es divisible por 2. Si no lo es, intentamos con el siguiente número primo, 3. Seguimos así, sucesivamente, hasta encontrar un número primo que divida a este número. Cuando lo encontramos, dividimos el número entre este número primo y repetimos el algoritmo con el cociente obtenido, hasta obtener 1 como cociente.

Este algoritmo aplicado al número 6 se puede presentar de la siguiente manera.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 6 \text{ es divisible por } 2 \text{ y } 6 \div 2 = 3 \\ 3 \text{ no es divisible por } 2\text{, pero es divisible por } 3 \text{ y } 3 \div 3 = 1 \\ \end{array}$$

Los números de la columna derecha son los factores primos de 6, así $6 = 2 \cdot 3$. Similarmente,

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

y $9 = 3 \cdot 3$.

El mínimo común múltiplo es el producto de todos los números primos comunes y no comunes que aparezcan en la descomposición de ambos números, el mayor número de veces que aparezca en ambas descomposiciones. En este caso, el mínimo común múltiplo de 6 y 9 es

$$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18.$$

18 es divisible entre 6 y entre 9 y es menor que 54. Veremos que al utilizar este mínimo común denominador, obtendremos fracciones equivalentes que tienen numeradores más pequeños y esto puede facilitar los cálculos. Si trabajamos con 18 como denominador común para las nuevas fracciones equivalentes, debemos hallar el factor por el que que debemos multiplicar al numerador y al denominador de cada una de las fracciones originales. Para obtener una fracción equivalente a $\dfrac{11}{6}$ que tenga un denominador de 18, debemos multiplicar su numerador y su denominador por 3, ya que $6 \cdot 3 = 18$ (o $18 \div 6 = 3$). Para obtener una fracción equivalente a $\dfrac{4}{9}$ que tenga un denominador de 18, debemos multiplicar su numerador y su denominador por 2, ya que $9 \cdot 2 = 18$ (o $18 \div 9 = 2$).

Ejemplo 9. Sume las fracciones $\dfrac{11}{6} + \dfrac{4}{9}$ y simplifique el resultado.

Solución.
El mínimo común denominador es 18.

$$\frac{11}{6}+\frac{4}{9}=\frac{11\cdot 3}{6\cdot 3}+\frac{4\cdot 2}{9\cdot 2}$$ multiplicamos el numerador y el denominador de cada fracción por el número necesario para obtener fracciones equivalentes que tengan denominador 18

$$=\frac{33}{18}+\frac{8}{18}$$

$$=\frac{41}{18}$$ sumamos los numeradores

Obtuvimos el mismo resultado que con el método de los productos cruzados, pero al final no tuvimos que simplificar la fracción.

Ejemplo 10. Reste las fracciones $\frac{13}{20}-\frac{7}{15}$ utilizando el mínimo común denominador. Simplifique el resultado.

Solución.
Primero debemos encontrar el mínimo común denominador, descomponiendo los denominadores en productos de números primos.

$20 = 2\cdot 2\cdot 5$ y $15 = 3\cdot 5$, así que el mínimo común denominador es $2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 60$.

$$\frac{13}{20}-\frac{7}{15}=\frac{13\cdot 3}{20\cdot 3}-\frac{7\cdot 4}{15\cdot 4}$$ multiplicamos el numerador y el denominador de cada fracción por el número necesario para obtener fracciones equivalentes que tengan denominador 60

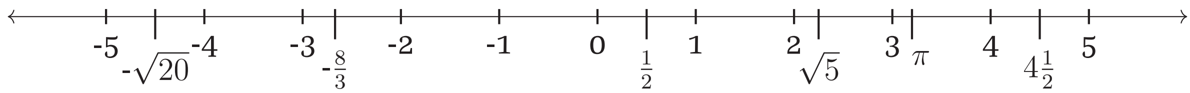
$$=\frac{39}{60}-\frac{28}{60}$$

$$=\frac{11}{60}$$ restamos los numeradores

Ahora intente hacer el **ejercicio 3** para la clase de **La práctica 1.1**

Valor absoluto

Cuando hablamos del valor absoluto de un número real, debemos pensar en los números ordenados sobre la recta real. Esta es una recta real con algunos números marcados:

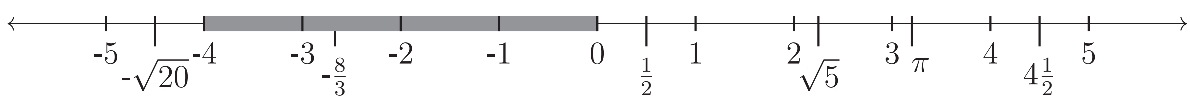


El **valor absoluto** de un número es la distancia que hay entre dicho número y 0. Lo denotamos con una línea vertical a cada lado del número. Por ejemplo, el valor absoluto de 3 lo denotamos $|3|$ y es la distancia que hay entre 3 y 0, es decir, 3 unidades.

$$|3| = 3$$

Ejemplo 11. Halle el valor absoluto de -4.

Solución.
El valor absoluto de -4 es la distancia que hay entre -4 y 0.



Hay 4 unidades entre -4 y 0. Entonces tenemos que $|-4| = 4$.

En general, si un número real a es positivo, $|a| = a$ y si un número real b es negativo, su valor absoluto es el mismo número pero positivo, esto es $|b| = -b$.

Orden de operaciones

Cuando realizamos varias operaciones de números reales a la vez debemos tener en cuenta el orden en el que las debemos hacer. Algunas veces el orden en que las realicemos afectará el resultado final. Cuando no hay paréntesis, debemos realizar primero las multiplicaciones y las divisiones y después las sumas y las restas.

Ejemplo 12. Realice las operaciones $\dfrac{3}{4} + 2 \cdot 5$ y simplifique el resultado.

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4} + 2 \cdot 5 &= \frac{3}{4} + 10 && \text{primero multiplicamos } 2 \cdot 5 \\
&= \frac{3}{4} + \frac{40}{4} && \text{hallamos una fracción equivalente a } 10 \text{ con denominador } 4 \\
&= \frac{43}{4} && \text{sumamos los numeradores}
\end{aligned}$$

Si quisiéramos realizar la suma antes de la multiplicación debemos utilizar unos paréntesis para indicarlo, así:

$$\left(\frac{3}{4}+2\right)\cdot 5=\left(\frac{3}{4}+\frac{8}{4}\right)\cdot 5=\frac{11}{4}\cdot 5=\frac{55}{4}$$

El resultado es diferente.

Ahora intente hacer el **ejercicio 4** para la clase de **La práctica 1.1**

Ejemplo 13. Realice las operaciones $21-9\div 3+5$ y simplifique el resultado.

Solución.

$$\begin{aligned} 21-9\div 3+5 &= 21-3+5 && \text{primero dividimos a 9 entre 3}\\ &= 23 && \text{sumamos y restamos} \end{aligned}$$

Podemos realizar la resta y la suma del final en el orden que queramos, $(21-3)+5=18+5$, $(21+5)-3=26-3$ o $(-3+5)+21=2+21$.

En caso de que tengamos multiplicación y división, seguimos el orden en el que aparezcan, es decir, el mismo orden de lectura.

Ejemplo 14. Realice las operaciones indicadas y simplifique el resultado.

a) $15\div 5\cdot 4$

b) $-60\div 2\div 6$

Solución.

a) $$\begin{aligned} 15\div 5\cdot 4 &= 3\cdot 4 && \text{primero dividimos a 15 entre 5}\\ &= 12 && \text{multiplicamos} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -60\div 2\div 6 &= -30\div 6 && \text{primero dividimos a } -60 \text{ entre 2}\\ &= -5 && \text{dividimos nuevamente} \end{aligned}$$

El valor absoluto también actúa como un paréntesis en el sentido de que agrupa operaciones, pero además vuelve los valores positivos.

Ejemplo 15. Realice las operaciones $18-|3-2\cdot 5|$ y simplifique el resultado.

Solución.
Primero resolveremos las operaciones que están dentro del valor absoluto, en el orden correcto.

$$\begin{aligned}
18 - |3 - 2 \cdot 5| &= 18 - |3 - 10| && \text{primero multiplicamos} \\
&= 18 - |-7| && \text{restamos} \\
&= 18 - 7 && \text{hallamos el valor absoluto de } -7 \\
&= 11 && \text{restamos nuevamente}
\end{aligned}$$

Debemos realizar primero las operaciones que están dentro del valor absoluto, luego calcular el valor absoluto de este resultado y después realizar las demás operaciones.

Ahora intente hacer el **ejercicio 5** para la clase de **La práctica 1.1**

1.2 Exponentes enteros

Cuando queremos multiplicar a un número por sí mismo varias veces podemos utilizar la notación de exponentes en lugar de escribir todas las multiplicaciones.

Escribimos a^n para expresar que a está multiplicado por sí mismo n veces, es decir,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Lo decimos "a elevado a la n" o simplemente "a a la n". A n lo llamamos el **exponente** y a a la **base**.

En este caso, n representa un entero positivo y a representa cualquier número real.

Ejemplo 1. Evalúe la expresión 3^5.

Solución.
3^5 representa 3 multiplicado por sí mismo 5 veces, es decir:

$$\begin{aligned}
3^5 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\
&= 243
\end{aligned}$$

Cuando evaluamos expresiones que involucran otras operaciones, debemos resolver primero lo que esté entre paréntesis, luego los exponentes, luego las multiplicaciones y las divisiones, y finalmente las sumas y las restas.

Ejemplo 2. Evalúe las expresiones.

a) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^4$

b) $(-2)^6$

c) -2^6

Solución.

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^4$ representa $\frac{1}{4}$ multiplicado por sí mismo 4 veces, es decir:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4}\right)^4 &= \left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{1}{256}\end{aligned}$$

b) $(-2)^6$ representa -2 multiplicado por sí mismo 6 veces, es decir:

$$\begin{aligned}(-2)^6 &= (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\\ &= 64\end{aligned}$$

c) -2^6 representa $-1\cdot 2^6$. Debemos resolver primero el exponente y después la multiplicación. Así que en este caso:

$$\begin{aligned}-2^6 &= -1\cdot 2^6\\ &= -1\cdot 64\\ &= -64\end{aligned}$$

En las partes b) y c) del ejemplo anterior hay que tener cuidado con el signo. Los paréntesis de la parte b) indican que -2 se multiplica por sí mismo (con su signo), y como esto se hace un número par de veces (6), así que el resultado es positivo. En la parte c) el resultado es diferente porque el número que está elevado a la 6 es 2 (no -2) y después de resolver el exponente colocamos el signo negativo. Por eso, el resultado es negativo en este caso.

Ahora intente hacer el **ejercicio 1** para la clase de **La práctica 1.2**

Propiedades de los exponentes

Ahora veremos las propiedades de los exponentes, que son las reglas que nos permiten evaluar y simplificar expresiones que tienen exponentes. Estas propiedades salen naturalmente de la definición de los exponentes. Sean $m, n > 0$ números enteros y a un número real.

$\boxed{1}$ $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ porque $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ veces}}$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ veces}}$$

$$= a^{n+m}$$

$\boxed{2}$ $a^0 = 1$ para todo número real a, $a \neq 0$, porque $a^0 \cdot a^n = a^{0+n}$

$$= a^n$$

para cualquier n

Como $a^0 \cdot a^n = a^n$ debemos tener que $a^0 = 1$.

$\boxed{3}$ $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ si $n > m$ porque $\dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ veces}}}$ hay más factores en el numerador que en el denominador

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m \text{ veces}}$$ simplificamos y nos sobran $n - m$ factores

$$= a^{n-m}$$

Ahora, ¿qué pasa si $n < m$? Obtendríamos un número negativo en el exponente, $n - m$. Queremos que la propiedad $\boxed{3}$ sea cierta para cualesquiera dos exponentes. Entonces ¿qué significa a^{-n} cuando n es un entero positivo?

$\boxed{4}$ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ porque $a^{-n} = a^{0-n}$

$$= \frac{a^0}{a^n}$$ para que se cumpla la propiedad $\boxed{3}$ con cualesquiera dos exponentes

$$= \frac{1}{a^n}$$

De esta forma, la propiedad $\boxed{3}$ es cierta para cualesquiera n y m, es decir,

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ para todos } n \text{ y } m \text{ números enteros}$$

En caso de que m sea mayor que n esto significa que tenemos más factores en el denominador que en el numerador y al simplificarlos, nos sobran $m-n$ factores en el denominador. Esto es $\dfrac{1}{a^{m-n}}$ que es equivalente a $a^{-(m-n)}$ o a^{n-m}.

De hecho, las propiedades $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$ y $\boxed{\mathbf{3}}$ se cumplen para cualesquiera m y n números enteros, aunque no sean positivos.

Ejemplo 3. Simplifique las expresiones dejando únicamente exponentes positivos.

a) $(3x^5)(x^6)$

b) $\dfrac{8x^3}{12x^5}$

Solución.

a)
$$\begin{aligned}(3x^5)(x^6) &= 3(x^5x^6) && \text{agrupamos los números y las expresiones que tengan la misma base } x\\ &= 3x^{5+6} && \text{utilizamos la propiedad } \boxed{\mathbf{1}}\\ &= 3x^{11}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\frac{8x^3}{12x^5} &= \frac{\cancelto{2}{8}}{\cancelto{3}{12}}\cdot\frac{x^3}{x^5} && \text{agrupamos los números y las expresiones que tengan la misma base } x\\ &= \frac{2}{3}x^{3-5} && \text{utilizamos la propiedad } \boxed{\mathbf{3}}\\ &= \frac{2}{3}x^{-2}\\ &= \frac{2}{3x^2} && \text{dejamos únicamente exponentes positivos utilizando la propiedad } \boxed{\mathbf{4}}\end{aligned}$$

Ejemplo 4. Simplifique las expresiones dejando únicamente exponentes positivos.

a) $(2x^5y^7)(5x^8y^7)$

b) $\dfrac{6x^9y^6z^4}{15xy^2z^9}$

c) $\dfrac{4x^{-5}y}{6x^5y^{-6}}\cdot(12x^7)$

Solución.

a) $(2x^5y^7)(5x^8y^7) = (2 \cdot 5)(x^5x^8)(y^7y^7)$ agrupamos los números y las expresiones que tengan la misma base

$= 10x^{5+8}y^{7+7}$ utilizamos la propiedad $\boxed{\mathbf{1}}$

$= 10x^{13}y^{14}$

b) $\dfrac{6x^9y^6z^4}{15xy^2z^9} = \dfrac{\cancelto{2}{6}}{\cancelto{5}{15}} \cdot \dfrac{x^9}{x} \cdot \dfrac{y^6}{y^2} \cdot \dfrac{z^4}{z^9}$ agrupamos los números y las expresiones que tengan la misma base

$= \dfrac{2}{5}x^{9-1}y^{6-2}z^{4-9}$ utilizamos la propiedad $\boxed{\mathbf{3}}$

$= \dfrac{2}{5}x^8y^4z^{-5}$

$= \dfrac{2x^8y^4}{5z^5}$ dejamos únicamente exponentes positivos utilizando la propiedad $\boxed{\mathbf{4}}$

c) $\dfrac{4x^{-5}y}{6x^5y^{-6}} \cdot (12x^7) = \dfrac{4 \cdot \cancelto{2}{12}}{\cancelto{1}{6}} \cdot \dfrac{x^{-5}x^7}{x^5} \cdot \dfrac{y}{y^{-6}}$ agrupamos los números y las expresiones que tengan la misma base

$= (4 \cdot 2)\, x^{-5+7-5}y^{1-(-6)}$ utilizamos las propiedades $\boxed{\mathbf{1}}$ y $\boxed{\mathbf{3}}$

$= 8x^{-3}y^7$

$= \dfrac{8y^7}{x^3}$ dejamos únicamente exponentes positivos utilizando la propiedad $\boxed{\mathbf{4}}$

Ahora intente hacer el **ejercicio 2** para la clase de **La práctica 1.2**

La siguiente propiedad nos dice que cuando una potencia se eleva a un exponente, el exponente del resultado es el producto de los exponentes.

$\boxed{5}$ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ porque

$$
\begin{aligned}
(a^n)^m &= \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m \text{ veces}} \\
&= \underbrace{(\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}}) \cdot (\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}}) \cdot \ldots \cdot (\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}})}_{m \text{ veces}} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \cdot m \text{ veces}} \\
&= a^{n \cdot m}
\end{aligned}
$$

Debemos tener cuidado, puesto que $(a^n)^m$ no es lo mismo que a^{n^m}. En la expresión a^{n^m} no hay paréntesis y se debe resolver primero la potencia n^m y después la otra. En otras palabras, se entiende que $a^{n^m} = a^{(n^m)}$. Por ejemplo, $(2^3)^2$ es 2^6, mientras que 2^{3^2} es 2^9.

Las propiedades que siguen hablan de cómo se comportan los exponentes cuando hay un producto o una división elevada a un exponente.

$\boxed{6}$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ porque

$$
\begin{aligned}
(a \cdot b)^n &= \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ veces}} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ veces}} \quad \text{reagrupamos} \\
&= a^n \cdot b^n
\end{aligned}
$$

$\boxed{7}$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ porque

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ veces}} \\
&= \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ veces}}} \quad \text{multiplicamos los numeradores y los denominadores} \\
&= \frac{a^n}{b^n}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5. Simplifique las siguientes expresiones dejando únicamente exponentes positivos.

a) $\left(\dfrac{a^2 b^{-4}}{2c^3}\right)^3$

b) $\dfrac{(-6x^{-4}y^5)^{-2}}{x^2 y^{-3}}$

Solución.

a)
$$\begin{aligned}
\left(\frac{a^2b^{-4}}{2c^3}\right)^3 &= \frac{(a^2b^{-4})^3}{(2c^3)^3} && \text{utilizamos la propiedad } \boxed{7}\\
&= \frac{(a^2)^3(b^{-4})^3}{2^3(c^3)^3} && \text{utilizamos la propiedad } \boxed{6}\\
&= \frac{a^6b^{-12}}{8c^9} && \text{utilizamos la propiedad } \boxed{5}\\
&= \frac{a^6}{8b^{12}c^9} && \text{dejamos únicamente exponentes positivos utilizando la propiedad } \boxed{4}
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\frac{(-6x^{-4}y^5)^{-2}}{x^2y^{-3}} &= \frac{(-6)^{-2}x^8y^{-10}}{x^2y^{-3}} && \text{utilizamos las propiedades } \boxed{5} \text{ y } \boxed{6}\\
&= \frac{x^8y^{-10}}{(-6)^2x^2y^{-3}} && \text{utilizamos la propiedad } \boxed{4}\\
&= \frac{x^{8-2}y^{-10-(-3)}}{36} && \text{utilizamos la propiedad } \boxed{3}\\
&= \frac{x^6y^{-7}}{36}\\
&= \frac{x^6}{36y^7} && \text{dejamos únicamente exponentes positivos utilizando la propiedad } \boxed{4}
\end{aligned}$$

Ahora intente hacer el **ejercicio 3** para la clase de **La práctica 1.2**

Ejemplo 6. Evalúe la expresión $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} &= \frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^3} && \text{utilizamos la propiedad } \boxed{4}\\
&= \frac{1}{\frac{1}{\frac{(-3)^3}{4^3}}} && \text{utilizamos la propiedad } \boxed{7}
\end{aligned}$$

$$= \frac{4^3}{(-3)^3} \quad \text{utilizamos la ley de las orejas}$$

$$= -\frac{64}{27}$$

En el ejemplo anterior podemos observar que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

Ahora intente hacer el **ejercicio 4** para la clase de **La práctica 1.2**

Las propiedades $\boxed{\mathbf{6}}$ y $\boxed{\mathbf{7}}$ se pueden pensar como que “el exponente se distribuye en la multiplicación y en la división”. Sin embargo, esto no es cierto en el caso de la suma ni de la resta. El exponente no se distribuye en la suma ni en la resta. Es decir, no es cierto que $(a+b)^n$ sea igual a $a^n + b^n$ ni que $(a-b)^n$ sea igual a $a^n - b^n$:

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n$$

$$(a-b)^n \neq a^n - b^n$$

Este es un error que debemos evitar.

Ejemplo 7. Evalúe la expresión $(2^{-2} - 3^{-2})^{-1}$.

Solución.
Evitamos distribuir el exponente en la resta, pues esto sería un error. Debemos seguir el orden de operaciones.

$$\begin{aligned}
(2^{-2} - 3^{-2})^{-1} &= \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)^{-1} && \text{utilizamos la propiedad } \boxed{\mathbf{4}} \\
&= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)^{-1} && \text{evaluamos los exponentes} \\
&= \left(\frac{9-4}{36}\right)^{-1} && \text{restamos las fracciones} \\
&= \left(\frac{5}{36}\right)^{-1} && \text{simplificamos} \\
&= \frac{1}{\frac{5}{36}} && \text{utilizamos la propiedad } \boxed{\mathbf{4}} \\
&= \frac{36}{5} && \text{simplificamos}
\end{aligned}$$

Ahora intente hacer el **ejercicio 5** y el **ejercicio 6** para la clase de **La práctica 1.2**

Tabla 1. Resumen de las propiedades de los exponentes

N.º	Propiedad	Ejemplo
1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$
2	$a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$	$6^0 = 1$
3	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{3^6}{3^2} = 3^4 = 81$
4	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$
5	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(10^2)^4 = 10^8 = 100\,000\,000$
6	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(4 \cdot 5)^2 = 4^2 \cdot 5^2 = 16 \cdot 25 = 400$
7	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$

1.3 Exponentes racionales

En la sección anterior vimos las potencias que tenían exponentes enteros, positivos y negativos. En esta sección veremos aquellas que tienen exponentes racionales, es decir, expresiones de la forma $a^{m/n}$, donde m y n son números enteros sin divisor común, salvo 1, y $n > 0$.

Primero definiremos $a^{1/n}$ (con $n > 0$) de forma que se sigan cumpliendo las propiedades de los exponentes que vimos en la sección anterior. Más específicamente, si queremos que se cumpla la propiedad $\boxed{5}$ debemos tener que

$$\left(a^{1/n}\right)^n = a^{(1/n) \cdot n} = a^1 = a$$

Entonces $a^{1/n}$ es aquel número que, al elevarlo a la n, el resultado es a. Por convención, diremos que cuando n es par, $a^{1/n}$ es aquel número mayor o igual que cero que, al ser elevado a la n, el resultado es a.

Utilizamos también la notación de la raíz n-ésima para esta expresión, esto es

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

En el caso en que n es 2, la notación es simplemente $\sqrt{a}$.

Ejemplo 1. Evalúe las siguientes expresiones.

a) $16^{1/4}$

b) $(-64)^{1/3}$

Solución.

a) $16^{1/4}$ también lo podemos escribir como $\sqrt[4]{16}$, la raíz cuarta de 16. Es aquel número mayor o igual que cero que, cuando lo elevamos a la 4, obtenemos 16. Entonces

$$16^{1/4} = 2 \text{ porque } 2^4 = 16$$

b) $(-64)^{1/3}$ también lo podemos escribir como $\sqrt[3]{-64}$, la raíz cúbica de -64. Es aquel número que, cuando lo elevamos a la 3, obtenemos -64. Entonces

$$(-64)^{1/3} = -4 \text{ porque } (-4)^3 = -64.$$

A veces $a^{1/n}$ no existe. Por ejemplo, $(-16)^{1/4}$ no existe, ya que no hay ningún número real que al ser elevado a la 4, dé como resultado -16. De hecho, cualquier número real elevado a un exponente par da como resultado un número positivo. Por eso, si n es un número par y a es negativo, $a^{1/n}$ no existe.

Ahora intente hacer el **ejercicio 1** para la clase de **La práctica 1.3**

Ahora que ya hemos definido $a^{1/n}$ podemos definir $a^{m/n}$ por medio de la propiedad $\boxed{5}$:

$$a^{m/n} = \left(a^{1/n}\right)^m \quad \text{o} \quad a^{m/n} = (a^m)^{1/n}$$

Esta es otra forma de escribirlo:

$$a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \text{o} \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es un número par, a debe ser positivo para que $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ esté definida.

Se puede probar que con esta definición se seguirán cumpliendo las siete propiedades de los exponentes.

Ejemplo 2. Evalúe las siguientes expresiones.

a) $27^{\,2/3}$

b) $(-32)^{4/5}$

c) $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{-3/2}$

Solución.

a) $$\begin{aligned} 27^{\,2/3} &= \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 \\ &= 3^2 && \text{porque } \sqrt[3]{27} = 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

También podríamos evaluar esta expresión como $\sqrt[3]{27^2}$, aunque esto requeriría trabajar con un número mayor.

b) $$\begin{aligned} (-32)^{4/5} &= \left(\sqrt[5]{-32}\right)^4 \\ &= (-2)^4 && \text{porque } \sqrt[5]{-32} = -2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

También podríamos evaluar esta expresión como $\sqrt[5]{(-32)^4}$, aunque esto requeriría trabajar con un número mayor.

c) $$\begin{aligned} \left(\frac{9}{25}\right)^{-3/2} &= \left(\frac{25}{9}\right)^{3/2} && \text{utilizamos la propiedad } \boxed{\mathbf{4}} \\ &= \frac{25^{3/2}}{9^{3/2}} && \text{utilizamos la propiedad } \boxed{\mathbf{7}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{25}\right)^3}{\left(\sqrt{9}\right)^3} \\ &= \frac{5^3}{3^3} \\ &= \frac{125}{27} \end{aligned}$$

Ahora intente hacer el **ejercicio 2** para la clase de **La práctica 1.3**

Observación. Cuando evaluemos expresiones de la forma $\sqrt[n]{a^n}$, debemos tener cuidado cuando n sea par. Si n es par, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, ya que al elevar cualquier número real a a la n (par) obtenemos un número positivo. Por ejemplo, $\sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9$, no -9.

Ejemplo 3. Simplifique las siguientes expresiones dejando únicamente exponentes positivos.

a) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$

b) $\left(8a^6b^{3/2}\right)^{2/3}\cdot\left(a^{3/4}b^{-1/3}\right)$ con $a\geq 0$ y $b>0$

c) $\left(\dfrac{x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\dfrac{x^{-2}}{y^{-3}}\right)^{1/6}$ con $x,y>0$

d) $\sqrt[3]{t\sqrt{t}}$ con $t\geq 0$

Solución.

a) $\sqrt[4]{81x^8y^4} = \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{x^8}\sqrt[4]{y^4}$ utilizamos la propiedad $\boxed{\mathbf{6}}$ con la notación de $\sqrt[4]{\ }$

$= 3x^{8/4}\,|y|$

$= 3x^2\,|y|$

Ahora intente hacer el **ejercicio 3** para la clase de **La práctica 1.3**

b) $\left(8a^6b^{3/2}\right)^{2/3}\cdot\left(a^{3/4}b^{-1/3}\right) = 8^{2/3}\left(a^6\right)^{2/3}\left(b^{3/2}\right)^{2/3}\cdot\left(a^{3/4}b^{-1/3}\right)$

utilizamos la propiedad $\boxed{\mathbf{6}}$

$= \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 a^4b\cdot\left(a^{3/4}b^{-1/3}\right)$

utilizamos la propiedad $\boxed{\mathbf{5}}$

$= 4a^{4+3/4}\,b^{1-1/3}$

utilizamos la propiedad $\boxed{\mathbf{1}}$

$= 4a^{19/4}\,b^{2/3}$

Ahora intente hacer el **ejercicio 4** para la clase de **La práctica 1.3**

c) $\left(\dfrac{x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\dfrac{x^{-2}}{y^{-3}}\right)^{1/6} = \left(\dfrac{x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\dfrac{x^{-1/3}}{y^{-1/2}}\right)$ utilizamos las propiedades $\boxed{\mathbf{7}}$ y $\boxed{\mathbf{5}}$

$= \dfrac{x^{-2/3}\cdot x^{-1/3}}{y^{1/2}\cdot y^{-1/2}}$ multiplicamos las fracciones

$= \dfrac{x^{-1}}{y^{0}}$ utilizamos la propiedad $\boxed{\mathbf{1}}$

$= x^{-1}$ utilizamos la propiedad $\boxed{\mathbf{2}}$

$= \dfrac{1}{x}$ dejamos únicamente exponentes positivos

Ahora intente hacer el **ejercicio 5** para la clase de **La práctica 1.3**

d) $\sqrt[3]{t\sqrt{t}} = \left(t \cdot t^{1/2}\right)^{1/3}$

$= \left(t^{3/2}\right)^{1/3}$ utilizamos la propiedad $\boxed{\mathbf{1}}$

$= t^{1/2}$ utilizamos la propiedad $\boxed{\mathbf{5}}$

Ahora intente hacer el **ejercicio 6** para la clase de **La práctica 1.3**

1.4 Polinomios

En esta sección, estudiaremos los polinomios que son expresiones algebraicas de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde x la llamaremos la **variable** y $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales que llamaremos los **coeficientes**. Cada una de las expresiones que están separadas por el símbolo $+$ (los $a_j x^j$ para $j = 0, 1, 2, \ldots, n$) se llaman **términos** del polinomio. El término con coeficiente diferente de 0 que tenga el exponente más grande se denomina el **término principal**, y el coeficiente de este término se llama el **coeficiente principal** del polinomio (si $a_n \neq 0$, $a_n x^n$ es el término principal y a_n es el coeficiente principal).

El **polinomio nulo** es el polinomio que tiene todos sus coeficientes iguales a 0. El **grado** de un polinomio no nulo es el exponente más grande de todos los términos (si $a_n \neq 0$, el grado del polinomio

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ es } n).$$

Por lo general, para denotar a un polinomio escribimos

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Así aclaramos que x es la variable y que el polinomio se llama p.

Ejemplo 1. Considere el polinomio

$$p(x) = -3x^7 + \frac{5}{2}x^6 - \pi x^4 + 10x^3 - 1,4x^2 - \sqrt{2}.$$

Diga cuál es el grado de p. Haga una lista de sus coeficientes y de sus términos. Diga cuál es el término principal y el coeficiente principal del polinomio.

Solución.
El grado del polinomio es 7, pues es el mayor exponente de todos los términos. Vamos a dar la lista de coeficientes en orden según el exponente

de cada término, de mayor a menor. Observemos que a este polinomio le hace falta un término con exponente 5 y un término con exponente 1. En este caso, decimos que el coeficiente de x^5 y el de x son ambos 0 y los incluimos en la lista de coeficientes. Coeficientes: -3, $\frac{5}{2}$, 0, $-\pi$, 10, $-1{,}4$, 0 y $-\sqrt{2}$. Tenemos en total 8 coeficientes para un polinomio de grado 7. En general, si el polinomio es de grado n, este debe tener $n+1$ coeficientes. Términos: $-3x^7$, $\frac{5}{2}x^6$, $-\pi x^4$, $10x^3$, $-1{,}4x^2$ y $-\sqrt{2}$. Este polinomio tiene 6 términos. El término principal es $-3x^7$ y el coeficiente principal es -3.

Los polinomios que tienen un solo término se llaman **monomios**, los que tienen dos términos se llaman **binomios** y los que tienen tres términos se llaman **trinomios**. Por ejemplo, $12x^5$ es un monomio, $4x^3+8$ es un binomio y $-4x^2+6x-5$ es un trinomio.

Podemos sumar polinomios, restarlos, multiplicarlos y dividirlos. A continuación, veremos cómo hacerlo.

Suma de polinomios

Si tenemos dos polinomios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$, que no necesariamente tienen el mismo grado, los sumamos agrupando los términos que tengan el mismo grado y sumando sus coeficientes. Por ejemplo, si ambos polinomios tienen un término de grado 2, la suma de estos dos términos será el término $(a_2+b_2)x^2$.

Ejemplo 2. Sume los polinomios $p(x) = 4x^6 - 9x^5 + 8x^3 - 2x^2$ y $q(x) = 12x^5 - 5x^4 - x^3 + 6x^2 + 4$.

Solución.

$$
\begin{aligned}
p(x)+q(x) &= \left(4x^6 - 9x^5 + 8x^3 - 2x^2\right) + \left(12x^5 - 5x^4 - x^3 + 6x^2 + 4\right) \\
&= 4x^6 - 9x^5 + 8x^3 - 2x^2 + 12x^5 - 5x^4 - x^3 + 6x^2 + 4 \\
&= \left(4x^6\right) + \left(-9x^5 + 12x^5\right) + \left(-5x^4\right) + \left(8x^3 - x^3\right) + \left(-2x^2 + 6x^2\right) + (4) \\
&\qquad \text{agrupamos los términos que tengan el mismo grado} \\
&= 4x^6 + (-9+12)x^5 - 5x^4 + (8-1)\,x^3 + (-2+6)\,x^2 + 4 \\
&\qquad \text{sumamos los coeficientes de cada término} \\
&= 4x^6 + 3x^5 - 5x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 4
\end{aligned}
$$

Resta de polinomios

Para restar dos polinomios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$, que no necesariamente tienen el mismo grado, agrupamos los términos que tengan el mismo grado y restamos sus coeficientes. Por ejemplo, si ambos polinomios tienen un término de grado 2, el término de grado 2 de la resta $p(x) - q(x)$ será el término, $(a_2 - b_2)x^2$.

Ejemplo 3. Si $p(x) = 8x^5 - 3x^3 + 5x^2 + 4x + 3$ y $q(x) = 6x^4 + x^3 - 7x + 9$, halle la resta $p(x) - q(x)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
p(x) - q(x) &= \big(8x^5 - 3x^3 + 5x^2 + 4x + 3\big) - \big(6x^4 + x^3 - 7x + 9\big) \\
&= 8x^5 - 3x^3 + 5x^2 + 4x + 3 - 6x^4 - x^3 + 7x - 9 \\
&= \big(8x^5\big) + \big(0x^4 - 6x^4\big) + \big(-3x^3 - x^3\big) + \big(5x^2\big) + (4x + 7x) + (3 - 9) \\
&\qquad \text{agrupamos los términos que tengan el mismo grado} \\
&= 8x^5 + (0 - 6)\,x^4 + (-3 - 1)\,x^3 + 5x^2 + (4 + 7)\,x + (3 - 9) \\
&\qquad \text{restamos los coeficientes de cada término} \\
&= 8x^5 - 6x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 11x - 6
\end{aligned}$$

Ahora intente hacer el **ejercicio 1** para la clase de **La práctica 1.4**

Multiplicación de polinomios

Primero veamos cómo multiplicar dos monomios. Para esto utilizaremos la propiedad $\boxed{\mathbf{1}}$ de los exponentes. Al multiplicar el monomio $a_n x^n$ por el monomio $b_m x^m$ el resultado es

$$(a_n x^n) \cdot (b_m x^m) = (a_n b_m)x^{n+m}$$

tal como lo vimos en la sección 1.2.

Si queremos multiplicar un monomio $a_n x^n$ por un polinomio

$$p(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0$$

debemos utilizar la ley distributiva. Esto es,

$$\begin{aligned}
(a_n x^n) \cdot p(x) &= (a_n x^n) \cdot \big(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0\big) \\
&= (a_n x^n) \cdot (b_m x^m) + (a_n x^n) \cdot (b_{m-1}x^{m-1}) + \ldots + (a_n x^n) \cdot (b_1x) + (a_n x^n) \cdot (b_0) \\
&\qquad \text{multiplicamos cada término de } p \text{ por el monomio} \\
&= a_n b_m x^{n+m} + a_n b_{m-1} x^{n+m-1} + \ldots + a_n b_1 x^{n+1} + a_n a_0 x^n
\end{aligned}$$

Ejemplo 4. Multiplique el monomio $3x^4$ por el polinomio

$$p(x) = 5x^7 - 3x^5 + x^4 - 6x + 9.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
(3x^4) \cdot p(x) &= (3x^4) \cdot \left(5x^7 - 3x^5 + x^4 - 6x + 9\right) \\
&= (3x^4) \cdot \left(5x^7\right) + (3x^4) \cdot \left(-3x^5\right) + (3x^4) \cdot \left(x^4\right) + (3x^4) \cdot (-6x) + (3x^4) \cdot (9) \\
&\qquad \text{multiplicamos cada término de } p \text{ por } 3x^4 \\
&= 15x^{11} - 9x^9 + 3x^8 - 18x^5 + 27x^4
\end{aligned}$$

El resultado es un polinomio de grado 11 que es la suma de los grados del monomio y del polinomio ($4 + 7$).

Ahora veamos cómo multiplicar dos binomios $p(x)$ y $q(x)$. Llamemos A y B a los dos términos de p y llamemos C y D a los dos términos de q, es decir, supongamos que $p(x) = A + B$ y que $q(x) = C + D$. Esto nos simplificará la escritura por el momento. Entonces para multiplicar a p y a q utilizaremos la propiedad distributiva de la multiplicación dos veces, es decir:

$$\begin{aligned}
p(x) \cdot q(x) &= (A + B) \cdot (C + D) \\
&= (A + B) \cdot C + (A + B) \cdot D \\
&\qquad (A + B) \text{ se distribuye por izquierda en } (C + D) \\
&= A \cdot C + B \cdot C + A \cdot D + B \cdot D \\
&\qquad C \text{ se distribuye por derecha en } (A + B) \text{ y } D \text{ se} \\
&\qquad \text{distribuye por derecha en } (A + B)
\end{aligned}$$

En total, debemos hacer cuatro multiplicaciones de monomios, AC, AD, BC y BD, y sumar estos cuatro nuevos términos. Estas cuatro multiplicaciones las podemos representar con líneas curvas que unen los términos que debemos multiplicar, de la siguiente manera:

$$(A \; + \; B) \cdot (C \; + \; D)$$

Ejemplo 5. Multiplique los binomios $p(x) = 4x^2 + 5$ y $q(x) = 3x^2 - 8x$.

Solución.
Dibujemos las cuatro multiplicaciones de los términos, simplemente como ayuda visual:

$$(4x^2+5)\cdot(3x^2-8x)$$

De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned} p(x)\cdot q(x) &= (4x^2+5)\cdot(3x^2-8x) \\ &= \left(4x^2\cdot 3x^2\right)+\left(4x^2\cdot(-8x)\right)+\left(5\cdot 3x^2\right)+(5\cdot(-8x)) \\ &= 12x^4-32x^3+15x^2-40x \end{aligned}$$

Si queremos multiplicar un polinomio p que tenga n términos por un polinomio q que tenga m términos, debemos multiplicar cada uno de los términos de p por cada uno de los términos de q. De esta forma, debemos realizar $n\cdot m$ multiplicaciones de términos. Por ejemplo, si p tiene 4 términos, digamos $p(x)=A+B+C+D$ y si q tiene 3 términos, digamos $q(x)=E+F+G$ entonces las multiplicaciones de los términos las podemos representar con las siguientes líneas curvas:

$$(A+B+C+D)\cdot(E+F+G)$$

Son 12 multiplicaciones: AE, AF, AG, BE, BF, BG, CE, CF, CG, DE, DF y DG.

Ejemplo 6. Multiplique los polinomios $p(x)=4x^2-5x+9$ y $q(x)=7x^3-6x^2+10x$.

Solución.
Dibujemos las nueve multiplicaciones de los términos:

$$(4x^2-5x+9)\cdot(7x^3-6x^2+10x)$$

$$
\begin{aligned}
p(x) \cdot q(x) &= (4x^2 - 5x + 9) \cdot (7x^3 - 6x^2 + 10x) \\
&= 4x^2 \cdot 7x^3 + 4x^2 \cdot (-6x^2) + 4x^2 \cdot 10x + -5x \cdot 7x^3 \\
&\quad + (-5x) \cdot (-6x^2) + (-5x) \cdot 10x + 9 \cdot 7x^3 + 9 \cdot (-6x^2) + 9 \cdot 10x \\
&\qquad \text{multiplicamos los tres términos de } p \text{ por los tres términos de } q \\
&= 28x^5 - 24x^4 + 40x^3 - 35x^4 + 30x^3 - 50x^2 + 63x^3 - 54x^2 + 90x \\
&= 28x^5 + (-24x^4 - 35x^4) + (40x^3 + 30x^3 + 63x^3) + (-50x^2 - 54x^2) + 90x \\
&\qquad \text{agrupamos los términos que tengan el mismo grado} \\
&= 28x^5 - 59x^4 + 133x^3 - 104x^2 + 90x \\
&\qquad \text{sumamos los términos que tengan el mismo grado}
\end{aligned}
$$

Ahora intente hacer el **ejercicio 2** para la clase de **La práctica 1.4**

Productos notables

Las siguientes identidades son igualdades que son ciertas cuando reemplazamos A y B por cualquier valor o expresión algebraica.

Si elevamos al cuadrado la expresión $A + B$ obtenemos la siguiente identidad que llamamos cuadrado de una suma.

$\boxed{1}$ $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ porque

$$
\begin{aligned}
(A + B)^2 &= (A + B) \cdot (A + B) \\
&= A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B \\
&= A^2 + AB + BA + B^2 \\
&= A^2 + 2AB + B^2 \\
&\qquad \text{sumamos } AB + BA \text{ porque } AB = BA
\end{aligned}
$$

Ejemplo 7. Realice la operación $(2x + 3)^2$.

Solución.
En este caso tenemos cuadrado de una suma con $A = 2x$ y $B = 3$. Aplicamos la fórmula $\boxed{1}$ para desarrollar la operación

$$
\begin{aligned}
(2x + 3)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(3) + (3)^2 \\
&= 4x^2 + 12x + 9
\end{aligned}
$$

Si elevamos al cuadrado la expresión $A - B$ obtenemos la siguiente identidad que llamamos cuadrado de una diferencia.

$\boxed{2}$ $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ porque

$$
\begin{aligned}
(A-B)^2 &= (A-B)\cdot(A-B)\\
&= A\cdot A - A\cdot B - B\cdot A + B\cdot B\\
&= A^2 - AB - BA + B^2\\
&= A^2 - 2AB + B^2\\
&\quad \text{sumamos } (-AB)+(-BA) \text{ porque } AB = BA
\end{aligned}
$$

Ejemplo 8. Realice la operación $(3x^2-4)^2$.

Solución.
En este caso, tenemos cuadrado de una diferencia con $A = 3x^2$ y $B = 4$. Aplicamos la fórmula $\boxed{\mathbf{2}}$ para desarrollar la operación

$$
\begin{aligned}
(3x^2-4)^2 &= (3x^2)^2 - 2(3x^2)(4) + (4)^2\\
&= 9x^4 - 24x^2 + 16
\end{aligned}
$$

Ahora intente hacer el **ejercicio 3** para la clase de **La práctica 1.4**

Observación. Como $(3x^2-4)^2 = (3x^2+(-4))^2$, en este caso también podemos usar la fórmula $\boxed{\mathbf{1}}$ con $A = 3x^2$ y $B = -4$:

$$
\begin{aligned}
(3x^2-4)^2 &= (3x^2)^2 + 2(3x^2)(-4) + (-4)^2\\
&= 9x^4 - 24x^2 + 16
\end{aligned}
$$

Si multiplicamos las expresiones $A+B$ y $A-B$ obtenemos la siguiente identidad que llamamos diferencia de cuadrados.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$ porque

$$
\begin{aligned}
(A+B)\cdot(A-B) &=\\
&= A\cdot A + A\cdot(-B) + B\cdot A + B\cdot(-B)\\
&= A^2 - AB + BA - B^2\\
&= A^2 - B^2\\
&\quad \text{restamos } -AB + BA \text{ porque } AB = BA
\end{aligned}
$$

Ejemplo 9. Multiplique los binomios $(6x+5)\cdot(6x-5)$.

Solución.
En este caso, de diferencia de cuadrados tenemos que $A = 6x$ y $B = 5$. Aplicamos la fórmula $\boxed{\mathbf{3}}$ para desarrollar la operación

$$
\begin{aligned}
(6x+5)\cdot(6x-5) &= (6x)^2 - 5^2\\
&= 36x^2 - 25
\end{aligned}
$$

Observación. Como la multiplicación es conmutativa, la fórmula $\boxed{\mathbf{3}}$ también se usa para el caso $(A-B)\cdot(A+B)$. Es decir,

$$(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2.$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(x-3)\cdot(x+3)&=(x+3)\cdot(x-3)\\&=x^2-9\end{aligned}$$

Si elevamos al cubo la expresión $A+B$ obtenemos la siguiente identidad que llamamos cubo de una suma.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

$$\begin{aligned}\text{porque } (A+B)^3&=(A+B)\cdot(A+B)^2\\&=(A+B)\cdot(A^2+2AB+B^2)\\&=A\cdot A^2+A\cdot 2AB+A\cdot B^2+B\cdot A^2+B\cdot 2AB+B\cdot B^2\\&=A^3+2A^2B+AB^2+BA^2+2AB^2+B^3\\&=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3\\&\quad\text{sumamos } 2A^2B+BA^2 \text{ porque } AB^2=BA^2\end{aligned}$$

Ejemplo 10. Realice la operación $(3x^2+2)^3$.

Solución.
En este caso tenemos cubo de una suma con $A=3x^2$ y $B=2$. Aplicamos la fórmula $\boxed{\mathbf{4}}$ para desarrollar la operación

$$\begin{aligned}(3x^2+2)^3&=(3x^2)^3+3(3x^2)^2(2x)+3(3x^2)(2x)^2+(2x)^3\\&=27x^6+54x^5+36x^4+8x^3\end{aligned}$$

Si elevamos al cubo la expresión $A+B$ obtenemos la siguiente identidad que llamamos cubo de una diferencia.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$

$$\begin{aligned}\text{porque } (A+B)^3&=(A-B)\cdot(A-B)^2\\&=(A-B)\cdot(A^2-2AB+B^2)\\&=A\cdot A^2-A\cdot 2AB+A\cdot B^2-B\cdot A^2+B\cdot 2AB-B\cdot B^2\\&=A^3-2A^2B+AB^2-BA^2+2AB^2-B^3\\&=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3\\&\quad\text{sumamos } (-2A^2B)+(-BA^2) \text{ porque } A^2B=BA^2\end{aligned}$$

Ejemplo 11. Realice la operación $(2x-5)^3$.

Solución.
En este caso tenemos cubo de una diferencia con $A = 2x$ y $B = -5$. Aplicamos la fórmula $\boxed{\mathbf{5}}$ para desarrollar la operación

$$\begin{aligned}(2x-5)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(5) + 3(2x)(5)^2 - (5)^3\\ &= 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125\end{aligned}$$

Observación. Como $(2x-5)^3 = (2x+(-5))^3$, en este caso también podemos usar la fórmula $\boxed{\mathbf{4}}$ con $A = 2x$ y $B = -5$:

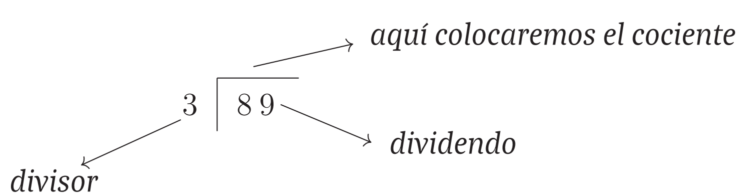
$$\begin{aligned}(2x-5)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(-5) + 3(2x)(-5)^2 + (-5)^3\\ &= 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125\end{aligned}$$

Tabla 2. Resumen de los productos notables

N.º	Fórmula	Ejemplo
1	$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$	$(3x+5)^2 = 9x^2 + 30x + 81$
2	$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$	$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$
3	$(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$	$(2x+7)\cdot(2x-7) = 4x^2 - 49$
4	$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$	$(4x+1)^3 = 64x^3 + 48x^2 + 12x + 1$
5	$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$	$(5x-2)^3 = 125x^3 - 150x^2 + 60x - 8$

División de polinomios

Finalmente veremos cómo dividir un polinomio $p(x)$ entre otro polinomio $d(x)$. El proceso es muy similar al procedimiento utilizado para dividir dos números reales. Recordemos la división de números reales. Dividamos 89 entre 3.



En esta división, 89 se llama el dividendo y 3 el divisor. El resultado de la división se llamará el cociente y lo pondremos en el espacio que hay encima del dividendo.

Nos preguntamos, “¿cuántas veces cabe 3 en 8?” y escribimos 2 encima de 89 porque $2 \cdot 3 = 6 < 8$ y $3 \cdot 3 = 9 > 8$. Multiplicamos $2 \cdot 3$, escribimos el resultado debajo del 8 y restamos.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2 \\
\hline
3 & 8\,9 \\
 & \underline{-\,6} \longrightarrow \text{bajamos el siguiente dígito} \\
 & 2\,9
\end{array}
$$

Seguimos de la misma manera, 3 cabe 9 veces en 29 y escribimos 9 al lado del primer dígito del cociente. Multiplicamos $9 \cdot 3$, lo ponemos debajo de 29 y restamos.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2\,9 \longrightarrow \textit{cociente} \\
\hline
3 & 8\,9 \\
 & \underline{-\,6} \\
 & 2\,9 \\
 & \underline{-\,2\,7} \\
 & 2 \longrightarrow \textit{residuo}
\end{array}
$$

En esta división, a 29 lo llamamos el cociente y a 2 el residuo. Podemos escribir esta división así:

$$\frac{89}{3} = 29 + \frac{2}{3}$$

o

$$89 = 3 \cdot 29 + 2$$

En general tenemos que

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$$

o

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{residuo}$$

Ahora explicaremos la división de polinomios con un ejemplo.

Ejemplo 12. Divida el polinomio $p(x) = 6x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 5$ entre el polinomio $d(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

Solución.
Primero escribamos la división en esta forma:

aquí colocaremos el cociente

$$\begin{array}{r|l} & \\ \hline 3x^2 - 6x + 2 & 6x^5 + 0x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 5 \end{array}$$

dividendo

divisor

Le agregamos a p el término $0x^4$, pues p no tiene término de grado 4. Esto lo hacemos para guardar el espacio de x^4 y no confundirnos más adelante cuando debamos restar los términos del mismo grado.

A p lo llamamos el **dividendo** y a q el **divisor**. El polinomio que resulta de esta división lo iremos poniendo encima de p y lo llamaremos **cociente**.

Para empezar la división miramos el término principal de p que es $6x^5$ y el de q que es $3x^2$. Debemos pensar cuál es el monomio que debemos multiplicar por $3x^2$ para obtener $6x^5$. En otras palabras, vamos a simplificar la expresión $\dfrac{6x^5}{3x^2}$. Obtenemos que $\dfrac{6x^5}{3x^2} = 2x^3$ y este será el primer término del cociente, ya que $(3x^2) \cdot (2x^3) = 6x^5$. Lo colocamos encima de p y luego lo multiplicamos por todos los términos de q. Debemos poner cada una de las tres multiplicaciones debajo del término que tenga su mismo grado, así:

$$\begin{array}{r|l} & 2x^3 \\ \hline 3x^2 - 6x + 2 & 6x^5 + 0x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 5 \\ & 6x^5 - 12x^4 + 4x^3 \end{array}$$

Ahora restamos los términos que tengan el mismo grado, teniendo en cuenta que debemos cambiarle el signo a todos:

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad 2x^3 \\
3x^2 - 6x + 2 & \big|\ 6x^5 + 0x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 5 \\
 & -(6x^5 - 12x^4 + 4x^3) \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 12x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 4x - 5
\end{array}
$$

bajamos los términos que sobran

residuo parcial

Llamamos al resultado de esta resta un **residuo parcial**. El residuo parcial en este paso es $12x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 4x - 5$.

Debemos repetir el paso anterior, pero ahora miraremos el término principal del residuo parcial, que es $12x^4$, y el término principal de q, que siempre será $3x^2$. El siguiente término del cociente es entonces $\dfrac{12x^4}{3x^2} = 4x^2$. Lo colocamos encima de p, sumado al término anterior, lo multiplicamos por todos los términos de q, ponemos cada una de estas multiplicaciones debajo del término del residuo parcial que tenga el mismo grado y restamos.

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad 2x^3 + 4x^2 \\
3x^2 - 6x + 2 & \big|\ 6x^5 + 0x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 5 \\
 & -(6x^5 - 12x^4 + 4x^3) \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 12x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 4x - 5 \\
 & \qquad\quad -(12x^4 - 24x^3 + 8x^2) \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\quad 15x^3 - 6x^2 + 4x - 5
\end{array}
$$

bajamos los términos que sobran

residuo parcial

El residuo parcial en este paso es $15x^3 - 6x^2 + 4x - 5$, repetimos nuevamente el proceso. El siguiente término del cociente es $\dfrac{15x^3}{3x^2} = 5x$. Lo colocamos encima de p, sumado a los términos anteriores, lo multiplicamos por todos los términos de q, ponemos cada una de estas multiplicaciones debajo del término del residuo parcial que tenga el mismo grado y restamos.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^3 + 4x^2 + 5x \\ \hline
3x^2 - 6x + 2 & 6x^5 + 0x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 5 \\
 & \underline{-(6x^5 - 12x^4 + 4x^3)} \\
 & \qquad 12x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 4x - 5 \\
 & \qquad \underline{-(12x^4 - 24x^3 + 8x^2)} \\
 & \qquad\qquad 15x^3 - 6x^2 + 4x - 5 \\
 & \qquad\qquad \underline{-(15x^3 - 30x^2 + 10x)} \\
 & \qquad\qquad\qquad 24x^2 - 6x - 5
\end{array}
$$

bajamos los términos que sobran

residuo parcial

Aún podemos hacer un paso más. El siguiente término del cociente es $\dfrac{24x^2}{3x^2} = 8$. Lo colocamos encima de p, sumado a los términos anteriores, lo multiplicamos por todos los términos de q, ponemos cada una de estas multiplicaciones debajo del término del residuo parcial que tenga el mismo grado y restamos.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^3 + 4x^2 + 5x + 8 \\ \hline
3x^2 - 6x + 2 & 6x^5 + 0x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 5 \\
 & \underline{-(6x^5 - 12x^4 + 4x^3)} \\
 & \qquad 12x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 4x - 5 \\
 & \qquad \underline{-(12x^4 - 24x^3 + 8x^2)} \\
 & \qquad\qquad 15x^3 - 6x^2 + 4x - 5 \\
 & \qquad\qquad \underline{-(15x^3 - 30x^2 + 10x)} \\
 & \qquad\qquad\qquad 24x^2 - 6x - 5 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{-(24x^2 - 48x + 16)} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 42x - 21
\end{array}
$$

cociente

residuo

En este paso hemos terminado la división, pues el residuo parcial tiene un grado estrictamente menor que el divisor. El residuo parcial de este paso se llama **residuo** y lo denotamos $r(x)$ y el polinomio que resulta encima de p se llama **cociente** y lo denotamos $q(x)$.

Al realizar la división $(6x^5-5x^3+2x^2+4x-5)\div(3x^2-6x+2)$ obtenemos el cociente $q(x)=2x^3+4x^2+5x+8$ y el residuo $r(x)=42x-21$. Al igual que en el caso de la división de números reales, esto lo podemos escribir así:

$$6x^5-5x^3+2x^2+4x-5=(3x^2-6x+2)\cdot(2x^3+4x^2+5x+8)+(42x-21)$$

Ahora intente hacer el **ejercicio 4** para la clase de **La práctica 1.4**

En general, cuando dividimos un polinomio p entre un polinomio d, obtenemos un cociente q y un residuo r tales que

$$p(x)=d(x)\cdot q(x)+r(x)$$

Como el grado de r, es estrictamente menor que el grado de d, los polinomios q y r son únicos.

1.5 Factorización de polinomios

La factorización de polinomios es el proceso inverso de la multiplicación. En la sección anterior vimos cómo multiplicar dos polinomios y el resultado era otro polinomio que quedaba expresado en su forma expandida $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$. En esta sección queremos, dado un polinomio en su forma expandida, poder encontrar polinomios que, al multiplicarlos, el resultado sea dicho polinomio. Por ejemplo,

$$\xrightarrow{\text{multiplicamos}}$$
$$(3x+2)\cdot(4x-5)=12x^2-7x-10$$

$$\xrightarrow{\text{factorizamos}}$$
$$12x^2-7x-10=(3x+2)\cdot(4x-5)$$

Veremos varios casos de factorización que debemos tener en mente cuando queramos factorizar un polinomio.

Factor común

Lo primero que debemos hacer cuando queramos factorizar un polinomio es mirar si todos sus términos tienen algún factor en común. Un factor en común es una expresión que está multiplicando a todos los términos. Si lo tienen, el polinomio se puede expresar como el producto de este factor común y un polinomio cuyos términos son iguales a los términos del polinomio original divididos entre el factor común.

Ejemplo 1. Halle el factor común de lo términos del polinomio $16x^5 - 20x^4 + 12x^3$ y factoricelo.

Solución.
Para hallar el factor común de los términos de este polinomio primero miramos si los coeficientes tienen un factor en común. El factor más grande que tienen en común los coeficientes es el máximo común divisor que en este caso es 4, pues 4 divide a 16, a -20 y a 12 y es el número entero más grande que divide a los tres. Ahora miramos las potencias de x. La potencia más grande que está multiplicando a los tres términos es x^3 (es la potencia que tenga el menor exponente, pues debe ser factor de todos los términos). Así, el factor común de los términos de este polinomio es $4x^3$. Ahora debemos factorizarlo. Como los tres términos del polinomio tienen como factor a $4x^3$, entonces $16x^5 - 20x^4 + 12x^3$ debe ser igual a $4x^3 \cdot (A + B + C)$, de tal forma que al multiplicar $4x^3$ por $(A+B+C)$ obtengamos $16x^5-20x^4+12x^3$. Por lo tanto, $A = \dfrac{16x^5}{4x^3} = 4x^2$, $B = \dfrac{-20x^4}{4x^3} = -5x$ y $C = \dfrac{12x^3}{4x^3} = 3$. Entonces

$$16x^5 - 20x^4 + 12x^3 = 4x^3 \cdot (4x^2 - 5x + 3).$$

Ejemplo 2. Factorice el polinomio $(2x + 1)(x + 2) - 3(2x + 1)$.

Solución.
El factor común de los productos $(2x + 1)(x + 2)$ y $3(2x + 1)$ es $(2x + 1)$. Factorizándolo obtenemos

$$(2x + 1)(x + 2) - 3(2x + 1) = (2x + 1)(x + 2 - 3) = (2x + 1)(x - 1)$$

Trinomios de grado 2

Ahora veremos cómo factorizar los trinomios de grado 2. Estos son los polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$. Primero debemos estudiar cómo se factorizan estos trinomios cuando el coeficiente principal es 1, es decir, primero estudiaremos la factorización de los polinomios de la forma $x^2 + bx + c$.