

# Introducción

La lógica es la ciencia que estudia el razonamiento, en el sentido de poder determinar si un argumento es válido (correcto) o no válido (incorrecto). Al considerar que en las ciencias empíricas se busca obtener conclusiones verdaderas a partir de una serie de datos y que, particularmente en matemáticas, todas las verdades (salvo los axiomas) deben deducirse lógicamente, puede afirmarse con propiedad que la lógica es la base de todas las ciencias. En consecuencia, con la aseveración anterior, un bien concebido plan de estudios de matemáticas o de licenciatura en matemática debe iniciarse con un buen curso de lógica.

Este libro contempla varios propósitos. El primero es servir de texto para la asignatura Lógica Matemática, que se ofrece a los estudiantes del primer semestre del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Magdalena. Para el efecto, el texto cubre, paso a paso, todo el contenido de la asignatura, con una prueba inicial y un gran número de ejercicios al final de cada tema. Además, se ha dedicado un capítulo a los métodos de demostración de teoremas, y otro a las demostraciones por el método de inducción matemática, así como una sección a la refutación de conjeturas. También se incluye un apartado que estudia la contradicción y el problema que esta genera en una argumentación. Como fundamento de la temática se ha utilizado la teoría de conjuntos, relativamente sencilla, conocida por los estudiantes desde la educación primaria, y sobre la cual se ha elaborado un pequeño apéndice. De esta manera, al finalizar el curso el estudiante deberá haber mejorado su argumentación en el lenguaje corriente, y estará capacitado para refutar conjeturas matemáticas y comprender lógicamente todas las demostraciones de las asignaturas de su plan de estudio.

Por otra parte, resulta asombroso que tantas personas, de todos los niveles sociales y educativos, sean engañadas por políticos que presumen de títulos de doctores que nunca obtuvieron, médicos que acreditan especializaciones que nunca realizaron, captadores de dinero que ofrecen ganancia fácil mediante pirámides insostenibles y perfiles en redes sociales que no corresponden a las personas reales. Todo esto es generado, principalmente, por un limitado uso de la razón, acompañado por el abuso de la axiomatización.

Además, el uso generalizado, tanto en el lenguaje hablado como en el escrito, del innecesario barbarismo “y/o” muestra un desconocimiento de los más elementales conectivos lógicos del idioma. Como si esto no fuese suficiente, persiste un constante

señalamiento, por parte de los profesores, con relación a la falta de coherencia entre los objetivos, las hipótesis y las conclusiones en los trabajos de los estudiantes.

Así las cosas, el segundo propósito de este libro es que cualquier persona que lo lea, con un poco de atención y un lápiz en la mano, logre elevar su nivel de lógica, hasta un punto que le permita hacer un uso racional de la duda y evitar la excesiva axiomatización. De igual modo, deberá ser capaz de detectar en un argumento las falacias más comunes y ser consciente de lo nefasta que es, en un argumento lógico, una contradicción.

# Presentación

Amigo lector: se encuentra usted ante un texto de introducción a la lógica matemática. Esto quiere decir que, si tiene el suficiente interés, disciplina y compromiso, al final adquirirá una buena formación lógica que, por una parte, le dará sólidas bases para continuar con su formación matemática, ya que a cada verdad matemática no evidente (teorema) se llega mediante un razonamiento lógico y, por otra, le permitirá utilizar en forma mucho más precisa el idioma.

El libro se encuentra dividido en siete capítulos, más un apéndice. El primero, denominado capítulo 0, presenta una breve reseña histórica sobre el desarrollo de la lógica y se puede considerar independiente del resto. Su objetivo es mostrar a la lógica como el resultado del trabajo de muchas personas, a lo largo de la historia.

El capítulo 1 comprende una descripción de lo que son los sistemas axiomáticos, estilo que se ha impuesto en la exposición de casi todas las ramas de la matemática y que, sin demasiado rigor, se tratará de utilizar en este texto para el desarrollo de la lógica. Además, se aprovecharán las ideas para mostrar que, aunque la axiomatización es muy importante en las ciencias, también genera problemas muy serios (en la vida práctica) cuando se axiomatiza precipitadamente, o sin fundamentos sólidos.

El capítulo 2 comprende los conceptos que se aceptarán como básicos en el desarrollo del texto. También expondrá las definiciones de las otras proposiciones compuestas fundamentales, utilizando las propuestas por Peirce, y con el formato de Wittgenstein.

El capítulo 3 relaciona las proposiciones con el idioma y trata sobre los procesos que permiten determinar los valores de verdad de una proposición compuesta del lenguaje corriente. Se estudian también las bases para la argumentación correcta: las tautologías. Además, se aborda el tema de la formación de proposiciones compuestas, la estructura de los enunciados y su relación con el lenguaje corriente. También se trabajan las tablas de verdad y se examinan las tautologías fundamentales. Por último, se trata el problema de la contradicción en un argumento.

El capítulo 4 estudia el proceso de deducción proposicional. Para dicho fin, se ha modificado el esquema de Patrick Suppes (1970), haciéndolo más coincidente con el razonamiento natural. Se plantean el criterio de validez lógica, las reglas de la deducción proposicional y la consistencia de un conjunto de premisas. De igual manera, se describe y se muestra la invalidez de las falacias formales más comunes.

El capítulo 5 trata sobre los teoremas, su estructura lógica y los métodos de demostración. Para los ejemplos se recurre a definir los números reales como cuerpo ordenado, y se consideran algunas de sus propiedades.

El capítulo 6 estudia el proceso de deducción cuantificacional, considerando en las proposiciones: cuantificadores y sintagmas nominal y verbal. Como base para la simbolización del lenguaje argumental se utiliza la teoría de conjuntos, tomando la idea de Allwood, *et al* (1981).

El capítulo 7 retoma el tema de demostración de teoremas, para estudiar el método de inducción matemática, tanto en la forma débil como en la fuerte.

Por último, el apéndice contiene unas nociones básicas de la teoría de conjuntos, precisamente las necesarias para comprender los temas del capítulo 6.

Cada capítulo, exceptuando el capítulo 0, se inicia con una prueba exploratoria del tema que se va tratar. Esto le permitirá al lector valorar qué tanto conoce sobre el tema. Si el resultado de esta exploración es satisfactorio, podrá pasar al siguiente capítulo. Además, en cada capítulo se presentan los objetivos que se pretende alcanzar y una introducción. Por otra parte, con la intención de hacer muy ágil la lectura, siempre que se haga alusión a temas anteriores, además de referenciar el apartado se indicará la página en la que se encuentra el contenido referenciado. También, al final de cada capítulo, y en algunos casos al final de temáticas importantes, se encuentra una lista numerosa de ejercicios cuyo propósito es lograr un dominio conceptual y contribuir con el desarrollo de destrezas en los temas correspondientes.

# Capítulo 0

## El desarrollo de la lógica matemática

### Objetivos

Los objetivos de este capítulo son:

1. Reconocer algunos avances del proceso evolutivo de las matemáticas como parte del desarrollo particular de la lógica.
2. Identificar algunas características de la lógica de Boole, Frege, Peano, Turing, Whitehead y Russell, y la lógica matemática en los últimos tiempos.

## 0.1. Introducción

En este capítulo se presenta un panorama histórico del desarrollo de la lógica, señalando su estado actual como una convergencia de, al menos, cinco avances del proceso evolutivo de las matemáticas. Estos avances son: la lógica antigua, la idea de un lenguaje completo y automático para el razonamiento, los progresos del álgebra y de la geometría después del año 1825, la idea de que las distintas ramas de la matemática pueden considerarse como sistemas deductivos y el desarrollo de nuevas lógicas.

## 0.2. La lógica antigua

Por ser sus trabajos los más antiguos que se conocen, puede decirse que la lógica empieza con Aristóteles (384 a. C.-332 a. C.). En sus escritos se encuentran varias referencias lógicas:

- Textos sobre el lenguaje común, relacionados con las categorías del ser: sustancia, cantidad, cualidad, lugar, tiempo, entre otros.
- Estudio sobre el arte de la argumentación, donde se trata de refutar los argumentos sobre los que no se está de acuerdo y de evitar que sean vulnerables los propios.
- Enseñanzas sobre la investigación de las ciencias naturales y, en particular, sobre el método científico.
- Opiniones sobre una organización de un sistema en la matemática, y una teoría de las formas de razonamiento correcto, que fue denominada silogismo por Aristóteles. Esta última parte es la que se conoce como lógica aristotélica.

En la lógica de Aristóteles, solo cuatro tipos de enunciados pueden ser utilizados como antecedentes o como consecuentes de implicaciones. Son los “enunciados categóricos”, que tienen las estructuras:

Todo $S$ es $P$	(tipo A)
Ningún $S$ es $P$	(tipo E)
Algún $S$ es $P$	(tipo I)
Algún $S$ no es $P$	(tipo O)

En ellos se denominaba a  $S$  el sujeto y a  $P$  el predicado.

En opinión de Aristóteles, los únicos nombres que tenían sentido en un enunciado categórico son los nombres comunes como *hombre*, *animal*, *flor* y *rojo*, por ejemplo, pero no los nombres de personas, lugares o cosas susceptibles de ser considerados como unidades reales. De acuerdo con esto, enunciados como “Cristóbal Colón descubrió América” o “Santa Marta es una bella ciudad” no pueden ser antecedentes o consecuentes de condicionales.

Dos cosas muy importantes para resaltar en Aristóteles son, por un lado, que consideró tanto el principio de identidad, “Para todo  $x$ , se tiene que:  $x = x$ ”, como el del tercero excluido, “Alguno de los dos,  $p$  o no  $p$ , pero no ambos”, y también el principio de la no contradicción: “no ( $p$  y no  $p$ )”. Por otro lado, otorgó importancia a los enunciados modales, o sea, aquellos enunciados donde se consideraba lo necesario o lo posible, tales como: “Todo  $S$  es  $P$ ” o “Algún  $S$  es posiblemente  $P$ ”. La lógica modal de Aristóteles no tuvo mucha influencia en el pensamiento posterior; sin embargo, hoy día es una parte importante de la lógica matemática.

Los principales defectos de la silogística de Aristóteles consistieron en no admitir como antecedentes más de dos enunciados categóricos; ni la intervención de más de tres nombres comunes. Sin embargo, hay condicionales que, siendo válidas, tienen más de dos enunciados categóricos como antecedentes. Por ejemplo, si se tiene que:

“Todo hombre blanco y rubio es racista”.

“Ninguna persona que odia a los negros es filántropo”.

“Todo racista odia a los negros”.

Se deduce que:

“Todo hombre blanco y rubio no es filántropo”.

Otra notable falla en la lógica de Aristóteles fue que este no les dio importancia a los términos de enlace: “no”, “y”, “o”, “Si \_\_\_\_ entonces \_\_\_\_”, “\_\_\_\_ si, y solo si \_\_\_\_”, de gran relevancia tanto en el lenguaje corriente como en la lógica. Por último, también se le critica a este enfoque que no llegó muy lejos en el uso de símbolos.

Casi al mismo tiempo en que se desarrolló la lógica de Aristóteles, también trabajaron en esta temática los megáricos y los estoicos entre el 300 y 200 a. C. A diferencia de Aristóteles, los megáricos-estoicos sí investigaron los juntores o partículas conectivas de los enunciados.

Los tipos de razonamientos a los cuales prestaron atención los megáricos-estoicos fueron:

“Si  $P$  entonces  $Q$ , y  $P$ , por tanto,  $Q$ ”.

“Si  $P$  entonces  $Q$ , y no  $Q$ , por tanto, no  $P$ ”.

“No ambos  $P$  y  $Q$ , y  $P$ , por tanto, no  $Q$ ”.

“ $P$  o  $Q$ , y  $P$ , por tanto, no  $Q$ ”.

“ $P$  o  $Q$ , y no  $P$ , por tanto,  $Q$ ”.

Como algunos de estos y otras formas de argumentos tienen como una de sus condiciones un enunciado de la forma: “Si \_\_\_\_ entonces \_\_\_\_”, resultaba necesario dar una respuesta a la pregunta: ¿cuándo es verdadero un enunciado “Si \_\_\_\_, entonces \_\_\_\_”? Sobre esta cuestión se discutió mucho en la escuela megárico-estoica; tanto, que Calímaco, uno de sus miembros, llegó a decir: “Hasta los cuervos discuten en los tejados este problema”.

De entre las varias respuestas que se adujeron a este respecto, se encuentra la de Filón, quien decía que todos los enunciados “Si \_\_\_\_, entonces \_\_\_\_” son verdaderos,

excepto aquellos que tienen una parte “si” verdadera y una parte “entonces” falsa, los cuales serían, por tanto, falsos. Así, por ejemplo, el enunciado “Si es de noche, entonces es de día” es verdadero en todo momento, mientras que el enunciado “Si es de día, entonces es de noche” es falso.

Este tipo de relación “Si \_\_\_\_\_, entonces \_\_\_\_\_” de Filón ha sido el normalmente utilizado en lógica matemática y ha sido denominado por Russell *implicación material*.

Por otra parte, Diodoro decía que un enunciado “Si \_\_\_\_\_, entonces \_\_\_\_\_” es verdadero si y solo si es tal que en ningún momento tiene una parte “si” verdadera y una parte “entonces” falsa. Así, “Si es de noche, entonces es de día” no es un enunciado verdadero (ni aunque se emitiera a la luz del día) porque hay momentos (por la noche) en que “es de noche” es verdadero y “es de día” es falso. A este tipo de implicación, de Diodoro, se le denominó *implicación material en todo momento*.

Por último, algunos consideraban que un enunciado “Si \_\_\_\_\_, entonces \_\_\_\_\_” es verdadero solo cuando hay alguna conexión entre los contenidos de sus dos partes. Es decir, el enunciado “Si P entonces Q” es verdadero cuando, y solamente cuando, Q es necesariamente verdadero si P es verdadero. Este tipo de enunciado “Si \_\_\_\_\_, entonces \_\_\_\_\_ necesariamente” fue lo que antiguamente se llamó implicación.

### 0.3. La idea de un lenguaje completo y automático para razonar

El primer paso en la dirección de un lenguaje completo y automático para el razonamiento fue dado por Ramón Llull (1232-1315) hacia el año 1270 en su libro *Ars Magna (El gran arte)*. Llull (citado en Casadesús, 2015) pensaba que todo conocimiento consiste en la unión o conjunción de una serie de ideas simples. En particular, el conocimiento científico es un agregado de ideas básicas. Para dicho autor, estas ideas básicas eran solo 54, de las cuales la tercera parte se refería al campo de la religión o de las teorías del buen o mal comportamiento. La unión o conjunción de grupos de estas ideas es el “gran arte” por el cual ha de ser efectuada la ciencia general.

Llull (citado en Casadesús, 2015) solo dio algunas reglas triviales para juzgar el valor cognoscitivo de los diferentes argumentos complejos posibles. Parece haber sido su opinión que ningún conocimiento científico tiene necesidad alguna de la guía o soporte de la experiencia sensible. Al sustentar esta opinión, Llull era representativo de buena parte del pensamiento de su época (racionalismo).

Después de Llull, las sugerencias de un lenguaje general para una ciencia general fueron frecuentes en filosofía, pero el desarrollo de tal lenguaje no tuvo lugar hasta la década de 1660, cuando se imprimieron las obras *Ars Signorum (El arte de los signos)* de George Delgarno, y *An Essay Towards a Real Character and Philosophical Language (Ensayo en pro de un alfabeto real y un lenguaje filosófico)*, de John Wilkins (Laborda, 1981). Las ideas del *essay* de Wilkins estaban, hasta cierto punto, tomadas de Delgarno, pero aquel proponía de forma detallada argumentos para la elaboración de un lenguaje conscientemente construido, mientras que la obra de Delgarno solo contenía un mero

esquema de ellos.

El propósito de Wilkins era, como él mismo advierte, ofrecer una lista regular y una relación de todas aquellas cosas e ideas a las que pudieran asignárseles marcas o nombres acordes con sus propiedades naturales. En este sentido, el fin y el propósito de las diferentes ramas de las ciencias es hacer que todas las cosas e ideas estén colocadas en un entramado tal que se pudiese revelar claramente el orden natural de ellas, sus dependencias mutuas y sus relaciones. Sin embargo, el intento de este autor de hacer del lenguaje un instrumento vivo de la ciencia –y del comercio y de la religión– fue completamente vano, exceptuando el hecho de que ayudó a que se mantuviese la idea de que es posible construir conscientemente un lenguaje mejor que los lenguajes ordinarios.

Se considera que uno de los primeros que imaginó un lenguaje general como una especie de aritmética fue René Descartes (1596-1650). Según Descartes (2010), debe ser posible hacer una lista de todas las palabras que son necesarias para hablar de todos los pensamientos humanos. Si se pudiese determinar cuáles son las ideas simples básicas para pensar, prácticamente se podría eliminar la posibilidad de error en los pensamientos complejos. Inexplicablemente, Descartes no procuró presentar una relación de todas las ideas simples, ni de poner los órdenes, de manera que pudiera constituirse una aritmética del razonamiento que permitiera obtener conocimientos ciertos y complejos de todo cuanto sea verdad.

Poco más tarde, Gottfried Leibniz (1646-1716) concibió el proyecto de un nuevo lenguaje general, semejante al de Descartes, pero llevándolo unos pasos adelante. Sostenía Leibniz (citado en Yambo, 2009) que si todas las ideas y las relaciones entre ellas pudiesen simbolizarse, cada cuestión podría tratarse como se tratan los conceptos matemáticos y se obtendrían descubrimientos muy importantes de manera muy fácil. Consecuente con esta línea de pensamiento, introdujo el signo de igualdad en la identificación de cada enunciado, y lo aprovechó con la ley de transitividad, para establecer una ley de sustitución. Por otra parte, utilizó el principio de reducción al absurdo (*reductio ad absurdum*) para establecer la validez de un argumento, comprobando que la negación de la conclusión conduce a una contradicción.

## 0.4. Nuevos descubrimientos en álgebra y geometría

En el período comprendido entre 1825 y 1900, el descubrimiento de múltiples álgebras y diversas geometrías desembocó en una nueva visión de la filosofía de las matemáticas. Aunque la geometría euclidea llegó a constituirse como un sistema axiomático-deductivo en un período muy temprano de su historia, la situación de la aritmética y del álgebra fue muy diferente. La necesidad de formar una tabla con las leyes del álgebra que dijera cuáles son las propiedades de las operaciones que tienen lugar en su seno y de dejarse guiar conscientemente por esas leyes fue vislumbrada solamente por George Peacock (1790-1888) en su obra *A Treatise on Algebra (Un tratado de álgebra)*. Peacock (Gallardo y Torres, 2005) sostenía la idea de que el álgebra es una ciencia deductiva, lo mismo que la geometría, fundamentando sus bases en consi-

deraciones estrictamente lógicas. De esta concepción surgió el nuevo tipo de álgebra, llamada por Peacock álgebra simbólica y, tiempo después, álgebra abstracta.

Por otra parte, el inesperado y sorprendente descubrimiento de Niels Abel (1802-1809) y otros de la imposibilidad de obtener una fórmula para la resolución de las ecuaciones de quinto grado y el intento de Évariste Galois (1811-1832) de demostrar que las conclusiones obtenidas por Abel eran ciertas, fueron determinantes del movimiento en la dirección del álgebra abstracta. Es así como Galois concibe la idea de “grupo” como una estructura algebraica y analiza algunas de sus más importantes propiedades. A partir de su trabajo, una parte del álgebra (la teoría de grupos) se convirtió en la base de lo que se conoce hoy en matemáticas como álgebra abstracta (Aznar, 2007).

No mucho tiempo después de la muerte de Galois aparecieron el álgebra de vectores y el álgebra de matrices, elaboradas por William R. Hamilton (1805-1865) y Arthur Cayley (1821-1895), respectivamente, que produjeron nuevas conmociones en el mundo matemático. Estas álgebras, cuyos elementos son distintos a los números que se habían utilizado siempre: reales y complejos, no satisfacen la propiedad conmutativa, rompiendo así con las ideas de un álgebra que se tenían hasta ese momento (Zea, 2012).

A pesar de que muchos años antes Gerolamo Saccheri (1667-1733), en un libro titulado *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus* (*Euclides libre de todo defecto*), contrario a lo que pretendía, logró desarrollar una geometría diferente a la euclidiana, no fue sino con la invención de dos geometrías radicalmente diferentes a la de Euclides, en 1825 por Nikolái Lobachevski (1792-1856) y en 1854 por Georg Riemann (1826-1866), que se produjo otro profundo impacto que dio lugar a que se cuestionara el objeto y finalidad de la matemática, y de sus relaciones con las cosas situadas en el espacio físico (Senior Martínez, 2013). Cuando se admitió que es posible disponer de varias geometrías en las que lo verdadero en una puede ser falso en la otra, antiguas opiniones según las cuales la matemática es una ciencia que da un conocimiento completamente cierto de la existencia (natural o supranatural, al menos de las cosas tal como parecen ser) dejaron de mantenerse en pie.

## 0.5. Existen partes de la matemática axiomatizables

La idea de que algunas partes de la matemática pueden construirse como sistemas axiomáticos se remonta a la obra de Euclides aproximadamente (325 a. C.-265 a. C.) en geometría, pues esta rama de la matemática fue la primera que se estableció como uno de tales sistemas (Euclides, 1991). Ya antes de la década de 1890, y en relación con la geometría, se prestó alguna atención a la pregunta “¿Es posible dentro de un sistema obtener, al término de una cadena de deducciones, un enunciado  $P$  que se convierte por ello en un teorema (un enunciado verdadero) del sistema y obtener, al término de otra cadena similar, el teorema no  $P$  (que afirma que  $P$  es, en definitiva, falsa)?”.

Se dice que un sistema deductivo es consistente si no da lugar a dos teoremas contradictorios:  $P$  y no  $P$ . Al principio, este problema no preocupó demasiado a las

matemáticas por ser general la creencia de que cualquier experto podría dar una respuesta a la pregunta por la consistencia de un sistema, sin necesidad de aducir un argumento que lo apoyase. No obstante, hacia los años 1890 la escuela italiana de matemática encabezada por Giuseppe Peano (1858-1932) otorgó gran importancia e interés a la cuestión.

Desde el punto de vista de la lógica, la cuestión de la consistencia es muy importante porque, en un sistema que no posea esta propiedad, cualquier enunciado del área científica sistematizada podría convertirse en teorema, con lo que resultaría que los enunciados de tal sistema serían indistintamente verdaderos y falsos, sin que pudieran separarse los unos de los otros.

Por lo demás, otra cuestión que cabe plantear respecto a un sistema deductivo, y que también fue tratada por Peano, fue lo concerniente a la posibilidad de que entre los axiomas de un sistema deductivo se tenga alguno que sea dependiente de los otros, en el sentido de que sea posible obtenerlo como teorema al término de una deducción que no haga uso de él como axioma. Fruto de estas discusiones fue la aparición de una nueva rama que estudia los fundamentos de la matemática: la metamatemática. En el caso de un sistema deductivo, son objetos de estudio de la metamatemática el determinar si el sistema es completo (que ningún axioma se obtenga como teorema a partir de los otros) y que el sistema sea consistente (que el sistema no contenga ninguna contradicción). La convergencia de estas corrientes de pensamiento desembocó en lo que podría considerarse como el comienzo de la lógica matemática.

### 0.5.1. *Los desarrollos de Boole, Peirce, Whitehead y Schröder*

George Boole (1815-1864) conocedor de las ideas de Peacock y de la teoría de Hamilton-De Morgan, fue el primero que tuvo la concepción de la lógica como un álgebra de conjuntos. En su ensayo *Mathematic Analysis of Logic (Análisis matemático de la lógica)* publicado en 1847 y luego en *An Investigation of the Laws of Thought (Una investigación sobre las leyes de los signos)* publicado en 1854, sostenía que las leyes de la lógica podían definirse a través del cálculo, relacionando de esta manera la lógica y el lenguaje. La lógica es posible en la medida en que nuestro intelecto es capaz de abstraer una clase (un conjunto) y designar sus miembros (elementos) con un nombre común (Ontiveros, 2015). De esta manera, Boole sustraía la lógica de la esfera de la metafísica y la colocaba dentro de la matemática. Aunque el álgebra lógica de Boole es una sola teoría, hay, cuando menos, dos sistemas de lectura o interpretaciones de ella: uno fundamentado con clases (conjuntos) y otro fundamentado con enunciados.

En los cien años siguientes a la aparición de los trabajos de Boole, las matemáticas se dedicaron a corregir errores en las ideas de este matemático, proporcionar un mayor grado de precisión a algunas partes de su teoría, poner el álgebra en la forma de un sistema deductivo y, por último, remontarse, partiendo de esa álgebra, a teorías aún más generales. Merecen destacarse en este período Jevons, Pierce, Schröder, Whitehead y Huntington. También fue importante la contribución del matemático y lógico británico Augustus De Morgan (1806-1871) en el estudio de la lógica, que incluye la formulación de las leyes conocidas hoy como de De Morgan, que relacionan la nega-

ción de la conjunción con la disyunción (y viceversa), y el desarrollo de la teoría de las relaciones.

La principal obra de William Jevons (1835-1882) *The Principles of Science: A Treatise on Logic and Scientific Method* (*Los principios de la ciencia: un tratado de lógica y métodos científicos*), publicada en 1874, expone conjuntamente, en su forma completa, los puntos de vista del autor sobre la lógica de la deducción y la lógica de las ciencias naturales. Jevons se interesó, entre otras cosas, por las “máquinas de razonar” y fue el primero en fabricar una.

Con el matemático, ingeniero y filósofo norteamericano Charles S. Peirce (1839-1914) varias partes de la lógica recibieron un fuerte impulso: la lógica de clases, la de relaciones, la de juntores (enunciados), la de predicados y la trivalente. Al mismo tiempo que Frege, pero sin tener conocimiento de su trabajo, Peirce hizo profundos descubrimientos en la lógica de proposiciones. Uno de los más conocidos y utilizados es el de las tablas de verdad (Barceló, 2012), con las cuales, utilizando las definiciones de los signos propuestos por él, es posible decidir sobre la validez de cualquier fórmula bien formada de la lógica proposicional mediante un número finito de pasos. Sin embargo, el formato de tabla de verdad más usado es el de Ludwig Wittgenstein (1889-1951), quien lo desarrolló en el *Tractatus lógico-philosophicus*, dado a conocer al público en 1918 por Bertrand Russell. Peirce también concedió mucha importancia a la lógica de variables libres o con cuantificadores y llegó, salvo por los símbolos utilizados, a las mismas definiciones actuales (Oostra, 2008).

Ernest Schröder (1841-1902) fue quien acuñó el término “lógica matemática”. En su obra *Vorlesungen über die algebra der logik* (*Secciones sobre el álgebra de la lógica*), realizó una completa recopilación del estado de la lógica en ese entonces, completando los trabajos de Boole, McColl, De Morgan y Peirce (Legris, 2003). Trabajó principalmente en cálculo de predicados y realizó nuevos aportes en estos temas, aunque basándose en material antiguo. Entre sus teoremas más importantes se encuentra el de dualidad, el cual plantea que todas las leyes del álgebra de la lógica pueden ser agrupadas por parejas.

Alfred Whitehead (1861-1947) en su libro *Universal Algebra* (*Álgebra universal*), intentó dar una teoría totalmente general del álgebra y exponer los cuerpos de axiomas y definiciones que serían admisibles como puntos de arranque para los diversos sistemas que comprendan a esta parte de la matemática. Para Whitehead, filósofo y lógico, la matemática en su sentido más amplio es el desarrollo de todos los tipos de razonamiento formales y deductivos. Además, consideraba que el único propósito de la matemática es la inferencia de una proposición a partir de otra. Con este punto de vista, toda la matemática puede deducirse de la lógica.

Por otra parte, Edward V. Huntington (1874-1952) elaboró el primer trabajo consciente a la metamatemática del álgebra lógica, al dar una demostración de la consistencia de un gran número de diferentes sistemas axiomáticos. Además, demostró que en dichos sistemas ningún axioma es susceptible de convertirse en teorema del resto de los axiomas del mismo sistema. Es decir, comprobó que estos sistemas gozan de la propiedad de completitud.

### 0.5.2. *Los desarrollos de Frege*

Gottlob Frege (1898-1925) fue profesor de matemática en la Universidad de Jena. Posiblemente por utilizar una escritura para los juntores de arriba hacia abajo, los escritos de él no fueron valorados hasta que Russell dio cuenta de ellos en su obra (San Millán, 2015). Otra razón pudo ser que lo que Frege estaba haciendo no era exactamente matemática normal, sino una fundamentación de la matemática.

En su libro *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen* (Conceptografía, un lenguaje simbólico al modo aritmético del pensamiento como tal), Frege ofrece un sistema axiomático de la lógica de enunciados. En este, a partir del cuantificador universal y la negación, da una definición del cuantificador existencial, con lo cual entra plenamente en la lógica de predicados (Soames, 2019). Así mismo, ofrece una exposición de algunas partes de la aritmética elaboradas con ayuda de definiciones basadas en la lógica, como, por ejemplo, las ideas de conjunto, elemento y relación. De hecho, la definición de función actualmente aceptada, una de las ideas más importantes que constituyen las bases de la matemática, es obra de Frege.

### 0.5.3. *Los aportes de Peano*

En un principio, como era natural, la lógica matemática solo abarcaba la lógica de predicados, basada en la teoría de conjuntos. El primero que comprendió y expuso que la teoría de enunciados, con o sin variables (la lógica de enunciados), era más importante fue Hugh Mc Coll (1837 - 1909), quien en una serie de artículos sobre *Cálculo de enunciados equivalentes* defendió el punto de vista de que el objetivo final de la lógica es la teoría de enunciados, y de que el principal conectivo lógico es el condicional (China, 2002).

Sin embargo, Giuseppe Peano (1858-1912) fue el primero que utilizó la lógica de enunciados para fundamentar los argumentos de la matemática ordinaria. De este modo formuló la definición de los números naturales y postuló incluso el principio de inducción matemática (Luque, 2002). Peano fue, además, el primero en dar a la nueva lógica el nombre de “lógica matemática”, por considerarla como un instrumento para la matemática. Según China (2002), entre sus descubrimientos e invenciones están:

- La definición de una clase por medio de un enunciado de la forma “La clase de los  $x$  tales que  $p(x)$ ”.
- La idea de que los enunciados con variables libres difieren de modo importante de los bivalentes.
- El uso de signos diferentes a los de la matemática para las operaciones y relaciones de la lógica.
- La primera llamada de atención sobre el hecho de que la relación de ser elemento de un conjunto es muy diferente a ser una parte del conjunto.
- La notación del cuantificador de existencia mediante el símbolo  $\exists$ , una  $E$  escrita en sentido contrario.

#### 0.5.4. *Los aportes de Turing*

El matemático y lógico Alan Turing (1912-1954) fue precursor en la teoría de la computación; y realizó importantes aportes en los análisis lógicos de procesos computacionales (Bagaria, 2013). Entre sus más relevantes contribuciones se encuentran las especificaciones para su computadora abstracta llamada máquina de Turing. Además, también trabajó en el desarrollo de las lógicas ordinales con la idea de superar la incompletitud de Gödel.

#### 0.5.5. *Las pretensiones de Whitehead y Russell*

La culminación de los primeros estadios del desarrollo de la lógica matemática lo constituyó la monumental obra de Alfred N. Whitehead (1861-1947) y Bertrand Russell (1872-1970) *Principia Mathematica* (volumen I, 1910, volumen II, 1912, y volumen III, 1913). Este trabajo fue el resultado del intento de los autores de eliminar las paradojas mediante una axiomática precisa, que denominaron teoría de los tipos. En este libro de 2.000 páginas, Russell y Whitehead prosiguieron con el programa logicista, que pretendía reducir la matemática a la lógica (Córdoba, 2020). En esta obra se unen en un sistema general el álgebra lógica de Boole-Schröder y las teorías de Frege, Cantor y Peano, cuyos propósitos difieren entre sí, y del álgebra lógica.

#### 0.5.6. *La lógica matemática en los últimos tiempos*

El punto de vista actual ha considerado necesario exponer cada rama de la matemática en la forma de un sistema axiomático perfectamente detallado.

Así, en 1920, Emil Post (1897-1954) proporcionó una demostración de las propiedades de consistencia y completitud del sistema axiomático de la lógica de enunciados, de *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell. Además, desarrolló una lógica  $n$ -valente de conectores enunciativos, en la que  $n$  puede tomar cualquier valor natural a partir de dos. Por lo tanto, en esta lógica los enunciados no solamente pueden tomar los dos valores  $V$  y  $F$ , sino cualquier número de valores de verdad (Velarde, 1978). Por ese mismo tiempo, también tuvo lugar la invención de una lógica trivalente (y, en general,  $n$  valente) por parte de Jan Lukasiewicz (1978-1956), utilizando como conectivos fundamentales la negación y el condicional (Oostra, 2006). En estos tipos de lógica (con  $n > 2$ ), por supuesto, no tiene validez el axioma del tercero excluido.

Posteriormente a 1920, David Hilbert (1862-1943) y Wilhelm Ackerman (1896-1962) dieron una demostración de la consistencia del sistema axiomático de la lógica de predicados. Luego, en 1930, Kurt Gödel (1906-1978) dio una demostración del hecho de que el sistema de la lógica de predicados es completo (Aranda, 2019).

El principal objetivo de Hilbert durante los años 20 del siglo XX era demostrar la consistencia de la aritmética elemental (teoría de números naturales). No obstante, en 1931 Gödel presentó al mundo el extraordinario y sorprendente trabajo de la demostración de un teorema en la metamatemática de la aritmética que desvanecía las expectativas de Hilbert (Da Silva, 2020). Este teorema, que ya había sido vislumbrado

por John von Neumann (1903-1957), es conocido como teorema de incompletitud de Gödel, que para el campo de la aritmética puede enunciarse de la siguiente manera: en todo sistema axiomático consistente con la aritmética elemental, si se supone su consistencia (que no contiene contradicciones), hay al menos una relación verdadera entre números naturales que no puede ser obtenida como teorema dentro de ese sistema, es decir, el sistema no es completo (Zamorano, 2021).

El teorema de Gödel hace gran uso de las funciones recursivas, teoría que tiene profundas conexiones con la teoría de funciones cuyos valores pueden ser todos, sin excepción, computados por máquinas (Williams, 2017). Los responsables del desarrollo de estas teorías, cuyos resultados más notables son las calculadoras electrónicas, el internet, los computadores electrónicos, la inteligencia artificial y los robots, han sido: Gödel, von Neumann, Skolem, Church, Kleene, Turing y Tarsky.

### 0.5.7. *La lógica difusa*

La lógica difusa (*fuzzy logic*) fue formulada por el matemático e ingeniero Lotfi A. Zadeh (1921-2017) y es un tipo de lógica que se adapta mejor al mundo real en el que vivimos, ya que permite expresar, en términos de funciones (no exactamente con la función característica), categorías propias del lenguaje corriente, como por ejemplo “baja”, “normal” y “alta” para determinar la presión sanguínea, o “muy pequeño”, “pequeño”, “normal”, “alto” y “muy alto”, para referirse a la estatura de las personas. En su teoría de *fuzzy sets*, Zadeh (1965) propone que, para cada conjunto difuso, existe asociada una función de pertenencia (con un rango que cubre el intervalo  $[0, 1]$ ) para sus elementos y que indica en qué medida el elemento forma parte de ese conjunto difuso. Las formas de las funciones de pertenencia más típicas son lineales, trapezoidales, sigmoides y gaussianas.

Igual que en la teoría clásica de conjuntos, en la teoría de conjuntos difusos se definen también las operaciones de unión, intersección, diferencia, complemento y otras, pero siempre utilizando como base la definición de conjunto difuso. Además, se definen reglas para la condicional “Si \_\_\_\_\_, entonces \_\_\_\_\_” donde, por supuesto, el antecedente y el consecuente son conjuntos difusos.

Puesto que la lógica difusa permite analizar categorías correspondientes al lenguaje corriente (impreciso o subjetivo) y también procesos complejos o no lineales, cada vez son más sus aplicaciones en ingeniería. Desde que el británico Ebrahim Mamdani empleó la lógica difusa por primera vez para el control de un sistema de regulación de un motor de vapor, sus aplicaciones han ido en aumento: control de circuitos integrados; control inteligente del servicio de trenes; conducción automática de vehículos; funcionamiento automático de lavadoras y de acondicionadores de aire; control automático de la temperatura del agua de la ducha; televisores con ajuste automático de brillo, contraste y color; sistemas de seguridad de reactores atómicos; mecanismos de robots; aprendizaje y toma de decisiones con inteligencia artificial, etcétera (Ortiz, 2006).