

Carácter didáctico del libro

A continuación se describen los aspectos didácticos que caracterizan este texto. Estos se relacionan con los propósitos generales de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en el nivel de educación superior, tales como facilitar la comprensión y aplicación de conceptos propios del cálculo integral en contextos de las ciencias empresariales y económicas. En el libro se resaltan en particular los *elementos conceptuales y procedimentales*, y las *ayudas pedagógicas*.

Elementos conceptuales y procedimentales

Definiciones

En cada uno de los capítulos se presentan las definiciones más relevantes del cálculo integral de una manera clara y explícita, con el propósito de que el lector encuentre descritos de forma rigurosa los conceptos fundamentales.

Teoremas

La fundamentación teórica de este libro se soporta en los teoremas asociados con el cálculo integral. Cada uno de ellos está enunciado con el rigor necesario y es utilizado para la comprensión de conceptos y problemas. Las demostraciones de algunos se omiten por estar fuera de los objetivos de este libro.

Procedimientos

En el desarrollo de los ejemplos, ejercicios y problemas se presentan, paso a paso, las instrucciones de la aplicación de definiciones, propiedades y teoremas necesarios para su solución. La intención de esta forma detallada de la presentación de los procedimientos es contribuir con la identificación y comprensión de herramientas matemáticas para la solución eficiente de nuevos ejercicios y problemas de aplicación.

Ayudas pedagógicas

Uso de actividades de exploración

Las exploraciones proporcionan a los estudiantes la oportunidad de analizar de manera intuitiva y anticipada los conceptos que se desarrollarán de manera formal durante cada capítulo.

Recuadros de explicación sobre conocimientos previos

Durante el desarrollo de algunos ejemplos relacionados con los ejercicios y problemas de aplicación se brindan informaciones sobre conocimientos básicos de álgebra y cálculo diferencial necesarios para la solución. El propósito de estas informaciones adicionales es evitar dudas y confusión en el desarrollo de los ejemplos. Estas informaciones se presentan en recuadros ubicados al lado derecho de la solución para facilitar una inmediata referencia visual.

Utilización de TIC mediante softwares matemáticos

En algunos apartes del libro se utilizan algunas herramientas tecnológicas de dos maneras. Por un lado, se recurre a un software matemático (Winplot) como herramienta de exploración de conceptos y, por otro lado, se emplean la calculadora, el software matemático o las *apps* que se instalan en dispositivos móviles o tabletas para la verificación de ejercicios propuestos en las actividades.

Conjunto de actividades

Para cada uno de los principales contenidos de este libro de texto se presenta un conjunto de actividades que contiene:

- Preguntas sobre teoría, es decir, enunciados que exploran la comprensión conceptual de la teoría.
- Ejercicios, los cuales buscan el desarrollo de habilidades procedimentales. Algunos de ellos presentan la respuesta con la intención de facilitar la verificación de su solución.
- Uso de software matemático en actividades de verificación o exploración de algunos ejercicios.
- Problemas de aplicación, esto es, problemas propios del contexto de las ciencias empresariales y económicas. Algunos de ellos presentan la respuesta con la intención de facilitar la verificación de su solución.

Ejemplos de problemas de aplicación

Este libro ofrece varios ejemplos de problemas de aplicación con su respectiva solución desarrollada de manera detallada. El propósito de estos es contribuir con la comprensión de conceptos propios del cálculo integral manteniendo el rigor matemático.

Evaluación tipo Saber Pro

A finalizar el desarrollo de los capítulos de este libro se encuentra una actividad evaluativa llamada *evaluación tipo Saber Pro*. Esta contiene preguntas acordes al enfoque dado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia en lo correspondiente a la evaluación por competencias en educación superior a través del examen denominado Saber Pro. Uno de los propósitos de esta evaluación en este libro es familiarizar a los estudiantes con la estructura de preguntas que posiblemente deberán enfrentar al presentar el examen propuesto por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES) finalizando su carrera profesional. De igual manera, estas preguntas permiten explorar competencias matemáticas tanto básicas como específicas del cálculo integral. Por otra parte, estas actividades serán útiles para profesores en la orientación del proceso de enseñanza y aprendizaje del curso de cálculo integral.

Promoción del razonamiento cuantitativo

Atendiendo a las necesidades actuales en materia del desarrollo de competencias básicas para futuros profesionales en Colombia, en este libro se intenta promover el razonamiento cuantitativo. Uno de los intereses de los autores es articular el contenido del cálculo integral con las competencias del razonamiento cuantitativo dadas por el ICFES (2016), las cuales son: interpretación y representación, formulación y ejecución, y argumentación (descritas más adelante). Para ello se dispone de explicaciones de conceptos y se recurre al uso de contextos — propios de las ciencias empresariales y económicas— en el desarrollo de ejemplos, ejercicios y problemas.

Contenidos básicos de matemáticas

En este libro se presentan algunos contenidos básicos de matemáticas relacionados con el álgebra y el cálculo diferencial, ubicados en la sección de apéndice. Si bien estos contenidos no forman parte de los temas del cálculo integral, facilitan la comprensión del desarrollo de los ejemplos y de su utilidad en la solución de ejercicios y problemas planteados en cada una de las actividades.

Desarrollo de competencias

Los autores de este libro asumen el término competencia como

[...] una red conceptual amplia, que hace referencia a una formación integral del ciudadano, por medio de nuevos enfoques, como el aprendizaje significativo, en diversas áreas: cognoscitiva (saber), psicomotora (saber hacer, aptitudes), afectiva (saber ser, actitudes y valores). En este sentido, la competencia no se puede reducir al simple desempeño laboral, tampoco a la sola apropiación de conocimientos para saber hacer, sino que abarca todo un conjunto de capacidades, que se desarrollan a través de procesos que conducen a la persona responsable a ser competente para realizar múltiples acciones (sociales, cognitivas, culturales, afectivas, laborales, productivas), por las cuales proyecta y evidencia su capacidad de resolver un problema dado, dentro de un contexto específico y cambiante (Beneitone *et al.*, 2007, p. 36).

Se espera que los ejemplos y las actividades propuestas en cada uno de los capítulos de este libro contribuyan con el desarrollo de las competencias genéricas —comunes a cualquier carrera— y de aquellas asociadas con la formación matemática de profesionales de los diferentes programas de las ciencias empresariales

y económicas. En particular, el interés de este libro de texto se direcciona al beneficio de los estudiantes de Economía, Administración de Empresas, Contaduría Pública y Negocios Internacionales de la Facultad de Ciencias Empresariales y Económicas de la Universidad del Magdalena.

En el marco del Proyecto Tuning sobre reflexiones y perspectivas de la educación superior en América Latina (Beneitone *et al.*, 2007), se consideraron veintisiete competencias genéricas para las diferentes carreras profesionales. De ellas, este libro intenta promover las siguientes:

- Capacidad de abstracción, análisis y síntesis.
- Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica.
- Capacidad de comunicación oral y escrita.
- Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y de la comunicación.
- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.
- Capacidad para tomar decisiones.
- Habilidad para trabajar en forma autónoma.
- Capacidad para el trabajo en equipo.

Para el caso de Colombia, se encuentran otras competencias definidas por el ICFES en el módulo de razonamiento cuantitativo, el cual hace parte del grupo de los cinco módulos genéricos del examen Saber Pro que deben responder todos los estudiantes de carreras profesionales. Entre esas competencias se tienen:

- Interpretación y representación: Es la capacidad de comprender y manipular representaciones de datos cuantitativos o de objetos matemáticos, en distintos formatos (textos, tablas, gráficos, diagramas, esquemas) [...]
- Formulación y ejecución: Es la capacidad de establecer, ejecutar y evaluar estrategias para analizar o resolver problemas que involucren información cuantitativa y objetos matemáticos [...]
- Argumentación: Es la capacidad de justificar o dar razón de afirmaciones o juicios a propósito de situaciones que involucren información cuantitativa u objetos matemáticos (las afirmaciones y los juicios pueden referirse a representaciones, modelos, procedimientos, resultados, etc.) a partir de consideraciones o conceptualizaciones matemáticas (ICFES, 2016, p. 3-4).

Cada una de estas competencias, tanto las seleccionadas en el Proyecto Tuning como las propuestas por el ICFES, han sido consideradas en algunos ejemplos, ejercicios y problemas de las actividades de este libro. De igual forma, se presenta al final de la publicación un cuestionario con preguntas cuya estructura está relacionada con las orientaciones para preguntas tipo Saber Pro.

Prólogo

Este libro, denominado *Cálculo integral aplicado a las ciencias empresariales y económicas*, surge como una respuesta a las necesidades de estudiantes y profesores de la Facultad de Ciencias Empresariales y Económicas de la Universidad del Magdalena acerca de la formación matemática de futuros profesionales. Entre esas necesidades se encuentran las relacionadas con intervenir los problemas de deserción y mortalidad académica en el área de matemáticas y, con ello, la utilización de materiales tipo libro de texto que se enmarquen en las orientaciones institucionales y que sirvan de apoyo para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La intención de este libro es contribuir con el trabajo en el aula de clase, tanto para el profesor como para los estudiantes, y con los procesos de aprendizaje de estos últimos en su trabajo autónomo para el desarrollo de la asignatura de Cálculo Integral. El contenido de este texto se articula con asignaturas de las diferentes carreras de las ciencias empresariales y económicas que son previas y posteriores al curso de Cálculo Integral, como por ejemplo Cálculo Diferencial, Microeconomía, entre otras. Se ha procurado que la estructura del libro incluya contenidos básicos necesarios para el desarrollo de temas propios del cálculo integral, de tal manera que al lector se le facilite la comprensión y aplicación de los temas tratados.

Los diferentes contenidos relacionan diversas funciones trascendentes, haciendo énfasis en aquellas que son de uso frecuente en las ciencias empresariales y económicas. Las aplicaciones están orientadas al campo de acción de los profesionales de carreras como: Administración de Empresas, Economía, Contaduría Pública, Negocios Internacionales y áreas afines. Asimismo, se ha buscado que cada contenido sirva como pretexto para desarrollar las competencias genéricas y las competencias específicas de la formación matemática de este tipo de carreras profesionales. En particular, entre las competencias genéricas se tienen las siguientes: la abstracción, el análisis y la síntesis; trabajo en equipo; identificar, plantear y resolver problemas; trabajo autónomo; aplicación de los conocimientos en la práctica; uso de las tecnologías de la información y de la comunicación, entre otras. Por su parte, dentro de las competencias específicas —definidas en el microdiseño del curso de Cálculo Integral de la Facultad de Ciencias Empresariales y Económicas de la Universidad del Magdalena— se consideran en este libro las siguientes: desarrollo y profundización del pensamiento lógico matemático; identificación de regularidades, modelos y estructuras matemáticas en procesos y situaciones problemáticas; habilidad de conversión de un objeto matemático a

los diferentes lenguajes, registros y representaciones matemáticas, cuando sea posible, y representar objetos matemáticos en diferentes registros o sistemas de notación para crear, expresar y representar ideas matemáticas.

Los capítulos de este libro siguen la estructura descrita a continuación: el capítulo uno introduce el concepto de antiderivada y de integral indefinida. Allí se desarrollan aspectos asociados con el manejo de propiedades de la integral indefinida, junto con algunas fórmulas básicas de integración. Entre los conceptos de las ciencias empresariales y económicas estudiados en este capítulo se encuentra el cálculo de funciones de costo, ingreso y utilidad, dada la función de costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal.

El capítulo dos presenta algunas técnicas de integración como: sustitución de la variable (cambio de variable), integración por partes e integración mediante fracciones parciales. Estas permiten ampliar el conjunto de herramientas para calcular la integral indefinida de una función.

El capítulo tres analiza la integral definida y, como aplicación de esta, se estudia el cálculo de área entre curvas. Entre los contextos que se utilizan para el desarrollo de problemas se encuentran el de variación total, excedente del consumidor y del productor, maximización de la utilidad con respecto al tiempo y costo promedio, entre otros.

El capítulo cuatro aborda las ecuaciones diferenciales, introduciendo técnicas para resolver ecuaciones diferenciales básicas y de variables separables. Luego, al final del libro se agregan varios apéndices relacionados con: propiedades y operaciones con números reales, propiedades de la potenciación y de la radicación, productos notables, fórmulas de factorización, propiedades de logaritmos, fórmulas de derivación y propiedades de la sumatoria. La intención de esta última parte es ayudar a complementar algunos conocimientos básicos que son necesarios para el desarrollo de ejemplos, ejercicios y problemas tratados en los capítulos.

De esta manera, se espera que el uso de este libro contribuya con la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo integral a nivel universitario.

Los autores

Capítulo 1. Integral indefinida

Introducción

En este capítulo se presentan los conceptos de antiderivada y de integral indefinida relacionada con los procesos de derivación. Asimismo, se detalla una serie de ejemplos asociados con ejercicios procedimentales para el manejo de algunas propiedades de la integral indefinida, junto con un listado de fórmulas básicas de integración.

Los conceptos tratados en este capítulo se articulan con situaciones propias de las ciencias empresariales y económicas, como por ejemplo el cálculo de funciones de costo, ingreso y utilidad, dada la función de costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal.

Los objetivos de este capítulo son:

1. Reconocer la integral indefinida como una operación inversa a la derivación.
2. Comprender los conceptos de antiderivada y de integral indefinida.
3. Identificar las propiedades de la integral indefinida y aplicarlas en el cálculo de integrales indefinidas.
4. Relacionar la estructura del integrando con alguna fórmula básica de integración.
5. Aplicar la integral indefinida en problemas asociados con costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal, entre otras.

Antiderivada

El estudio del cálculo diferencial se ha ocupado del proceso de diferenciación, destacando el cálculo y la aplicación de las derivadas de funciones. Por el contrario, en esta sección se exponen situaciones donde se pretende buscar una función cuando se conoce su derivada; tal función se conoce como *antiderivada*.

Definición 1. Antiderivada

Se dice que una función $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$ para cada x en el dominio de $f(x)$.

Exploración 1

Verifique que $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5x$ es una antiderivada de $f(x) = x^2 + 5$.

Solución

$F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ si y solo si $F'(x) = f(x)$. Por lo tanto, derivando a $F(x)$ se tiene:

$$F'(x) = \frac{1}{3}(3x^2) + 5 = x^2 + 5 = f(x).$$

¿Se puede construir otra antiderivada de la función $f(x) = x^2 + 5$? Analice los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

$F(x) = x^3$ es una antiderivada de $f(x) = 3x^2$ puesto que $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.

Ejemplo 2

$G(x) = x^3 + 12$ es una antiderivada de $f(x) = 3x^2$ puesto que $G'(x) = 3x^2 = f(x)$.

Ejemplo 3

$H(x) = x^3 - \pi$ es una antiderivada de $f(x) = 3x^2$ puesto que $H'(x) = 3x^2 = f(x)$.

En general, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces también lo es cualquier función de la forma $G(x) = F(x) + k$, donde k es una constante. Esto se puede plantear en el siguiente teorema:

Teorema 1

Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en un intervalo I , entonces $G(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en el intervalo I si y solo si $G(x)$ es de la forma $G(x) = F(x) + k$, para todo $x \in I$, donde k es una constante.

Demostración

(\rightarrow) Si $G(x) = F(x) + k$, $F'(x) = f(x)$ y k es constante, entonces: $G'(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + k] = F'(x) + 0 = f(x)$.

(\leftarrow) Supongamos que G es una antiderivada de f y definamos una función H tal que $H(x) = G(x) - F(x)$.

Para cualesquiera dos puntos a y b , con $(a < b)$ en el intervalo, H es continua dentro de $[a, b]$ y diferenciable dentro de (a, b) . Utilizando el teorema del valor medio, se tiene que

$$H'(c) = \frac{H(b) - H(a)}{b - a}$$

para algún c en (a, b) . Sin embargo, $H'(c) = 0$, y por tanto $H(a) = H(b)$. Ahora, como a y b son puntos arbitrarios en el intervalo, se sabe que H es una función constante k . Así, $G(x) - F(x) = k$, lo cual conlleva a que $G(x) = F(x) + k$.

Ejemplo 4

De acuerdo con el teorema 1, muestre que la función $F(x) = x^2$ es una antiderivada de la función $f(x) = 2x$. Escriba una expresión general para las antiderivadas de $f(x)$.

Solución

Puesto que $F'(x) = 2x = f(x)$, se tiene que $F(x) = x^2$ es una antiderivada de la función $f(x) = 2x$.

Para escribir una expresión general para las antiderivadas de $f(x)$, debemos tener en cuenta que si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces también lo es cualquier función de la forma $G(x) = F(x) + k$; luego cada antiderivada de la función $f(x) = 2x$ tiene la forma $G(x) = x^2 + k$, donde k es alguna constante.

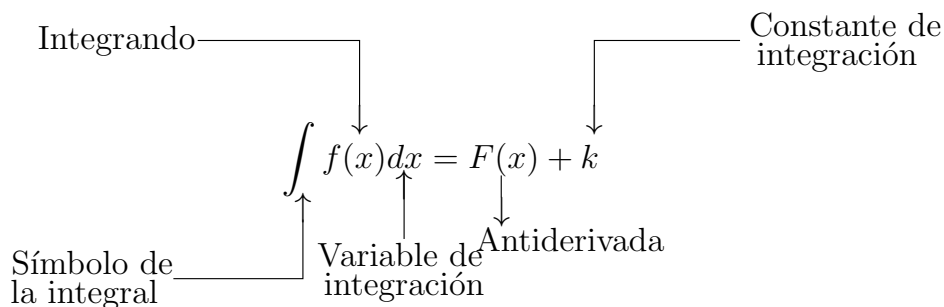
Integral indefinida

El conjunto de todas las antiderivadas de la función f se denomina *integral indefinida* de f respecto a \mathcal{X} y se denota con la expresión

$$\int f(x)dx = F(x) + k(1),$$

donde $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, y k , una constante.

El término “indefinida” se puede asociar con el hecho de que en la expresión (1) la constante k puede tomar cualquier valor. El símbolo \int (integral) representa la operación antiderivación. La función f es el *integrand* de la integral, y x es la variable de integración. El integrando se ubica siempre entre el signo de la integral y la diferencial de la variable de integración. Esto lo podemos mostrar de la siguiente manera:



Definición 2. Integral indefinida

Si $F(x)$ es una antiderivada de la función $f(x)$, entonces $\int f(x)dx = F(x) + k$, donde $F'(x) = f(x)$, y k es una constante real arbitraria.

Para una *ecuación diferencial* —la cual es una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes— la integral indefinida se puede entender como la operación que permite encontrar las soluciones de una ecuación diferencial $dy = f(x)dx$, de tal manera que

$$y = \int f(x)dx = F(x) + k.$$

En el capítulo 4 se ampliará la definición de ecuación diferencial y su relación con la integración.

La integración, como operación inversa a la derivación, puede comprobarse mediante la igualdad $F'(x) = f(x)$ en la definición de integral indefinida, es decir,

$$\int F'(x)dx = F(x) + k.$$

Por otra parte, la derivación como operación inversa de la integración se puede representar como

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x)dx \right) = f(x).$$

Una consideración importante entre estas dos operaciones (derivación e integración) es que, si bien la derivación de funciones elementales conduce siempre a funciones elementales, la integración no siempre puede conducir a funciones elementales. Son *funciones elementales* las funciones algebraicas (polinomiales, racionales, con radicales) y las funciones trascendentes (logarítmicas, exponenciales, trigonométricas, trigonométricas inversas) o aquellas que se obtienen a partir de adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones o composiciones de estas.

Algunas integrales, como las siguientes, no se pueden expresar mediante funciones elementales (no tienen antiderivada):

$$\int e^{-x^2} dx \quad (\text{la integral de Poisson}).$$

$$\int \text{sen}x^2 dx, \int \text{cos}x^2 dx \quad (\text{la integral de Fresnel}).$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}, \quad 0 < x \neq 1 \quad (\text{logaritmo integral}).$$

$$\int \frac{e^x}{x} dx$$

$$\int \frac{\text{sen}x}{x} dx, \quad x \neq 0 \quad (\text{seno integral}).$$