

INTRODUCCIÓN

La geometría es una rama fundamental de las matemáticas que desempeña un papel vital en la vida cotidiana porque permite comprender el mundo que nos rodea, desde las formas y tamaños de los objetos corrientes hasta la arquitectura y el diseño de nuestros edificios y ciudades. Por tal razón, desarrollar una base sólida en el razonamiento geométrico es esencial para que los estudiantes sobresalgan en matemáticas superiores, así como para que se preparen de cara a distintas carreras en los campos de la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas.

Para ayudar al desarrollo del razonamiento geométrico, esta unidad didáctica contiene tres actividades basadas en la resolución de problemas. La primera se centra en las relaciones entre conceptos geométricos a partir de axiomas y definiciones; la segunda trata sobre conceptos y procedimientos geométricos; y la tercera se enfoca en la construcción de demostraciones formales e informales para validar enunciados geométricos. Estas actividades están diseñadas para involucrar a los alumnos y fomentar su curiosidad, al tiempo que desarrollan su capacidad de pensamiento crítico.

Esta unidad didáctica tiene en cuenta las teorías de varios autores que han realizado aportes significativos al campo de la educación matemática. En este sentido, se contempla la teoría de la representación semiótica de Raymond Duval, que destaca la importancia de la representación simbólica en el desarrollo de una comprensión más profunda de los conceptos geométricos. También se incorporan las contribuciones de Carmen Samper en el uso de problemas contextualizados para promover la comprensión y la transferencia de conocimientos a nuevas situaciones. Asimismo, se sigue el trabajo de Cecilia Leguizamón, que reconoce el valor de la modelización matemática como herramienta para desarrollar las habilidades de resolución de problemas de los alumnos.

Al incorporar estas teorías a la unidad didáctica, se proporciona a los alumnos un enfoque holístico del desarrollo del razonamiento geométrico, diseñado para crear una experiencia de aprendizaje inmersiva y atractiva que fomentará una comprensión más profunda de la geometría y permitirá a los estudiantes mejorar sus habilidades de resolución de problemas. Mediante el uso de problemas contextualizados, demostraciones formales e informales y la integración de la tecnología como herramienta de visualización y solución de problemas, los alumnos podrán aplicar sus conocimientos de geometría en entornos prácticos y apreciar su importancia en el mundo real.

La primera actividad de la unidad didáctica se centra en las relaciones entre conceptos geométricos basadas en axiomas y definiciones. Esta sección está diseñada para ayudar a los alumnos a comprender los conceptos fundamentales de la geometría, como puntos, rectas, planos y ángulos. Mediante el uso de actividades prácticas y ayudas visuales, los estudiantes explorarán las relaciones entre estas nociones y sus propiedades.

La segunda actividad de la unidad didáctica se centra en el desarrollo de conceptos y procedimientos geométricos, y está diseñada para ayudar a los alumnos a comprender con mayor

profundidad los conceptos y procedimientos geométricos y cómo se pueden aplicar para resolver problemas. Con ese fin, se proponen problemas contextualizados y escenarios de la vida real, a través de los cuales los estudiantes aprenderán a utilizar sus conocimientos de geometría para resolver casos prácticos.

La tercera actividad de la unidad didáctica está diseñada con el propósito de ayudar a los estudiantes a desarrollar sus habilidades de resolución de problemas y su capacidad para construir demostraciones formales e informales para validar enunciados geométricos. En esta exploración, los alumnos podrán aplicar distintos métodos de demostración, como el directo, el indirecto y por contradicción. Igualmente, se examinará la estructura de una demostración formal y se resaltarán la importancia de utilizar un lenguaje claro y conciso.

La cuarta actividad de la unidad didáctica se centra en analizar la relación entre el perímetro y el área de figuras como triángulos, cuadrados, rectángulos, círculos y polígonos regulares. Además, aborda la relación entre la superficie y el volumen en el estudio de cuerpos geométricos.

En conclusión, esta unidad didáctica proporciona un enfoque holístico para el desarrollo del razonamiento geométrico al abordar distintos ejercicios. De esa forma, se puede convertir en una experiencia de aprendizaje inmersiva y atractiva que fomenta una comprensión más profunda de la geometría y permite adquirir habilidades para la resolución de problemas.

Estimado lector:

El presente documento es un recurso educativo valioso que ha sido cuidadosamente diseñado para facilitar su aprendizaje en geometría. Este texto consiste en una unidad didáctica que se centra en la resolución de problemas, con el objetivo específico de desarrollar y fortalecer los niveles de razonamiento geométrico del estudiante a lo largo de su proceso de aprendizaje.

La unidad didáctica está organizada de tal manera que cada actividad presentada permite avanzar de forma gradual y lógica en la comprensión de la geometría. Las tareas y ejercicios han sido diseñados para desafiar al lector a aplicar conceptos previamente aprendidos, y al mismo tiempo para introducir nuevos niveles de complejidad. Esto asegura un aprendizaje continuo, que va consolidando su pensamiento geométrico a cada paso.

Es fundamental dedicar tiempo a leer detenidamente cada capítulo del texto. La comprensión de los conceptos en cada sección es clave para poder avanzar de manera efectiva en las siguientes. Además de completar las tareas propuestas, es importante explorar y profundizar de manera independiente en los conceptos presentados.

Este enfoque autodirigido no solo reforzará lo aprendido, sino que también le permitirá desarrollar una mayor autonomía en su aprendizaje, una habilidad que será invaluable en su futuro académico y profesional.

Se espera que el lector enfrente estos desafíos con dedicación y esfuerzo, entendiendo que el desarrollo de un razonamiento geométrico sólido es un proceso que requiere práctica constante y reflexión profunda. Este texto no solo es una herramienta de estudio, sino también una guía para el crecimiento intelectual en el campo de la geometría.

3.1 Enseñanza y aprendizaje de la geometría

Uno de los retos fundamentales que enfrenta la educación en todos los niveles de enseñanza es el desarrollo de procesos de razonamiento en los estudiantes, sobre todo en las matemáticas, donde se requiere pensamiento crítico y toma de decisiones con base en información confiable. Asimismo, Samper *et al.* (2001) consideran que las matemáticas son una herramienta fundamental para el desarrollo científico y tecnológico, ya que proporcionan el lenguaje universal de la ciencia, que permite describir y comprender fenómenos naturales, formular teorías y resolver problemas, desde el campo de la física hasta el de la biología.

Las matemáticas, además de ser la columna vertebral que sustenta el progreso en todas las disciplinas científicas, son importantes en la toma de decisiones y en la resolución de problemas de la vida diaria, desde el manejo de las finanzas personales hasta la planificación de proyectos de ingeniería. Por lo tanto, la alfabetización matemática es un componente crítico de la ciudadanía activa, que toma decisiones informadas y eficientes, y para la participación

en la sociedad moderna. Sin embargo, el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina ha presentado diversas dificultades. Estos problemas tienen que ver con ciertas deficiencias en las prácticas pedagógicas tradicionales como el uso memorístico de fórmulas o la instrucción sin diálogo, desligada del contexto del estudiante (Herrera *et al.*, 2012).

En cuanto a la geometría en particular, se destaca por despertar en el estudiante habilidades para comprender el mundo que lo rodea y, con ello, otras áreas de las matemáticas (Vargas y Gamboa, 2013). Esta disciplina, además, se encuentra presente en la enseñanza de las matemáticas en todos los grados de la educación y en carreras profesionales como ingenierías, arquitectura o educación, debido a la importancia que tiene el estudio del espacio y de las dimensiones. No obstante, en este campo los estudiantes también presentan dificultades de aprendizaje que responden a diversos factores; entre ellos, que la enseñanza es meramente tradicional y se imparte hacia el final del año escolar o es ignorada por los docentes (Barrantes y Blanco, 2005).

Al respecto, Malloy (1999) afirma que históricamente los profesores dividen en dos momentos el proceso de enseñanza de la geometría; primero presentan el tema que se va a estudiar y luego plantean un grupo de ejercicios que los estudiantes deben solucionar para poner en práctica lo aprendido. Ahora bien, esta forma de enseñar ha causado problemas en los alumnos porque no logran una conceptualización o un aprendizaje robusto de los conceptos y procesos geométricos, lo que en definitiva conduce a la desmotivación y a una pérdida del gusto por el aprendizaje.

A la luz de lo anterior, el mismo autor sugiere basarse en la propuesta de Van Hiele como método para mejorar los procesos de aprendizaje y aumentar la motivación y el gusto por el estudio de la geometría (Malloy, 1999). Según este, el modelo Van Hiele brinda a los profesores estrategias basadas en la investigación empírica usadas para diseñar planes de estudio y actividades pedagógicas.

Es evidente que para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y en particular de la geometría, se hace necesario explorar nuevas y efectivas estrategias. En ese sentido, la resolución de problemas ha llegado a ser considerada como una parte esencial de la educación en esta área. Mediante este enfoque los estudiantes son protagonistas de su propio aprendizaje, desarrollan su pensamiento matemático y experimentan la utilidad y potencia de las matemáticas en el mundo que les rodea (Schoenfeld, 1985).

Asimismo, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) ha considerado la resolución de problemas como uno de los aspectos más relevantes de la actividad matemática, debido a que soporta la comprensión de diferentes situaciones de la vida cotidiana y cobra sentido en la medida en que las situaciones analizadas se asemejan a la realidad. En esa misma dirección, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2014) sitúa la resolución de problemas como el eje central de toda actividad de enseñanza matemática, y esta debe proponer actividades que involucren a los estudiantes en la resolución de problemas que promuevan el razonamiento matemático.

Además, la formulación y resolución de problemas permite al estudiante implementar estrategias para abordar distintos ejercicios y formular preguntas, con el fin de fortalecer cada vez más su capacidad de análisis, de manera que asume un papel activo mediante el cual puede obtener aprendizajes significativos. Por tanto, en todos los niveles del contexto educativo colombiano en los últimos años se ha venido reflexionado acerca de la importancia de resolver problemas matemáticos, más aún cuando las matemáticas ocupan un lugar central y transversal a todas las áreas del saber.

Las consideraciones anteriores ponen de manifiesto la necesidad de elaborar materiales o recursos educativos que permitan favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, así como el desarrollo del razonamiento geométrico.

3.2 Algunos antecedentes

La enseñanza de la geometría ha experimentado importantes avances en los últimos años gracias al uso de la tecnología, el enfoque en el razonamiento espacial y el desarrollo del pensamiento geométrico. Estos aspectos se han convertido en temas centrales de investigación y se han explorado en numerosos estudios. En este estado del arte, se examinarán quince trabajos de investigación que abordan estas temáticas desde diferentes perspectivas.

Uno de los aspectos destacados es el impacto de herramientas tecnológicas en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Los estudios relacionados han demostrado que el uso de estos entornos tiene un efecto positivo en los estudiantes, que les permite explorar conceptos geométricos de forma interactiva, facilitando la comprensión y el desarrollo del pensamiento geométrico.

Asimismo, se ha explorado la importancia de incorporar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. De tal forma, se propone un marco integral para dichos recursos en la instrucción, destacando la importancia de alinear los objetivos pedagógicos con el uso de la tecnología y de proporcionar tareas matemáticas significativas. Con el uso de las tecnologías se favorece no solo el aumento de la comunicación gráfico-visual y la obtención de las habilidades de visualización espacial de los alumnos, sino también el desarrollo del razonamiento deductivo y el aprovechamiento de ayudas y herramientas en la enseñanza de las matemáticas (Kovacevic, 2019).

Otros estudios han explorado el análisis de demostraciones geométricas y su papel en el desarrollo del pensamiento matemático y la resolución de problemas. Para Lárez (2014), las demostraciones, sobre todo en geometría, son una forma de aprender a resolver problemas de manera profunda. No obstante, cuando un estudiante se enfrenta a una nueva demostración, se encuentra con un desafío al no tener un modelo claro por seguir, lo que estimula su pensamiento crítico y creativo.

En la misma línea de investigación en torno a la incorporación de tecnologías digitales en la enseñanza de geometría, se ha resaltado el uso de herramientas como manipulativos virtuales y software interactivo. Estos recursos permiten a los estudiantes visualizar y manipular objetos geométricos, lo que facilita la comprensión de conceptos abstractos y fomenta un pensamiento geométrico más profundo (Sunzuma, 2023).

Otra línea de investigación es la que se ha centrado en el uso de la realidad virtual en el aprendizaje de la geometría. En este contexto, se ha comparado el impacto de este método con el de otros tradicionales, observándose mejoras significativas en el rendimiento de los alumnos y en sus habilidades espaciales. Por ejemplo, Moral-Sánchez *et al.* (2023) utilizaron la realidad virtual como una herramienta para enseñar y mejorar las habilidades espaciales de los estudiantes. En este sentido, es clave identificar primero los errores que cometen las personas en una prueba, para luego crear actividades personalizadas en un entorno virtual que aborden específicamente esas dificultades.

Asimismo, se ha explorado el papel de la visualización en la enseñanza de la disciplina. Por un lado, se ha evaluado el impacto de esta herramienta en la construcción de demostraciones geométricas, a la vez que se ha examinado su papel en el aprendizaje general de la geometría. Duval (1998), por ejemplo, es uno de los autores que destacan la importancia de la visualización para la comprensión y comunicación de conceptos geométricos.

La coordinación de procesos cognitivos sugiere mejoras en las habilidades de resolución de problemas de contenido geométrico. Para Torregrosa y Quesada (2007), comprender cómo se piensa y cómo se usa la mente cuando se resuelven problemas de geometría permite desarrollar estrategias efectivas para la enseñanza de esta área y ayudar a los alumnos a mejorar sus habilidades en ella. Procesos como la visualización, que se refiere a la capacidad de crear imágenes mentales de las figuras geométricas y manipularlas

mentalmente, son fundamentales en el desarrollo del razonamiento y la resolución de problemas.

En resumen, la investigación ha demostrado que el uso de la tecnología y el desarrollo del razonamiento espacial y del pensamiento geométrico son aspectos fundamentales en la enseñanza de la geometría. La integración de herramientas de geometría dinámica, el enfoque en el razonamiento espacial, el uso de la realidad virtual, la comprensión de las demostraciones geométricas, el fomento de la visualización, el discurso en el aula y la utilización de materiales manipulativos son estrategias efectivas para mejorar el aprendizaje en esta área y promover un razonamiento en la disciplina más sólido entre los estudiantes.

Para determinar de qué forma se puede favorecer el desarrollo del razonamiento geométrico a través del planteamiento y la resolución de problemas, es preciso identificar primero qué se entiende, precisamente, por «razonamiento geométrico» y, luego, por «resolución de problemas». A continuación, se presentan algunos elementos teóricos que fundamentan estos conceptos, así como los aprendizajes propuestos en la unidad didáctica.

4.1 El razonamiento geométrico

Actualmente, muchos investigadores coinciden en que el papel central de la educación matemática está en promover el desarrollo del pensamiento matemático, el cual está asociado a las acciones que se llevan a cabo cuando se resuelve una tarea de esta área. En ese sentido, Rico *et al.* (2000) relacionan el razonamiento con la habilidad para establecer nuevas conexiones entre conceptos, las cuales se manifiestan a través de argumentos sólidamente fundamentados que explican o justifican una propiedad.

Por otro lado, Sierpínska (1994) plantea un vínculo inherente en el que cada acto de comprensión va acompañado de uno de razonamiento. Mientras tanto, en el NCTM (2014) se plantea que el razonamiento matemático comprende una serie de acciones que incluyen justificar, conjeturar, explicar y predecir, entre otras.

Según el MEN (1998), el razonamiento geométrico o espacial es aquella serie de procesos cognitivos que le permiten a un individuo interactuar con los objetos en el espacio y desarrollar representaciones mentales de ellos, a partir de su naturaleza material, para manipularlos y establecer así otras configuraciones. Ahora bien, esta forma de pensar exige el estudio de conceptos y propiedades de objetos en el espacio físico, así como en el geométrico, en relación con los movimientos del cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los sentidos.

En un entorno de aprendizaje donde se incentiva la participación de los estudiantes, es común observar cómo, aunque la tarea sea realizar una demostración formal, surgen argumentos de naturaleza informal, como razonamientos no estructurados. Por lo tanto, los tipos de razonamiento que se pueden identificar en el trabajo geométrico son:

- El razonamiento visual.
- El razonamiento intuitivo o informal.
- El razonamiento inferencial.

Estas formas de razonamiento no se excluyen mutuamente y, según la complejidad cognitiva de la tarea, se complementan entre sí. A continuación, se presenta una descripción inicial de estos tipos de razonamiento.

4.1.1 El razonamiento visual

El razonamiento visual implica llegar a conclusiones a partir de representaciones mentales de objetos bi o tridimensionales, así como de las relaciones y transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones (Clements y Battista, 1992). Este

tipo de razonamiento está estrechamente relacionado con lo que Duval (1998) denomina el proceso de visualización, que implica la representación del espacio, la exploración heurística y la visión sinóptica de situaciones complejas.

El razonamiento visual en sí mismo supone la conexión de la percepción visual con características, propiedades o relaciones geométricas. Surge como resultado de una actividad mental compleja de análisis y síntesis que destaca aspectos esenciales de lo observado y suprime otros menos relevantes. Las características del razonamiento visual incluyen:

- Establecer relaciones entre conceptos geométricos o información geométrica conocida.
- Dar significado a los conceptos y procedimientos geométricos.
- Argumentar con razones fundadas acerca de una propiedad, relación o situación geométrica.
- Comunicar, en forma convincente, los resultados de indagaciones en geometría.
- Identificar el papel de los distintos elementos que dan estructura a una teoría axiomática.

4.1.2 El razonamiento intuitivo o informal

El razonamiento intuitivo o informal se relaciona con la expresión de ideas espontáneas a través del lenguaje natural, mediante la descripción, la explicación y la formulación de argumentos que surgen del establecimiento de asociaciones u oposiciones. En el contexto de la geometría, este tipo de razonamiento se promueve mediante lo que Duval (1998) llama procesos constructivos de configuraciones, los cuales sirven como modelos para experimentar con propiedades geométricas y, al mismo tiempo, verificar, explicar o clarificar un resultado.

A través de la exploración, se formulan conjeturas basadas en la experiencia, las cuales pueden derivar en criterios o asociarse