

Presentación

La lógica es la madre de las matemáticas. El lenguaje es el padre¹.

La lógica es una disciplina que cubre prácticamente todas las áreas del conocimiento humano. Su historia se remonta a los orígenes de la sociedad y su desarrollo es actualizado permanentemente por las contribuciones de la comunidad académica y profundos aportes de pensadores geniales. Muchos eruditos se han dado a la tarea de compilar, comparar y contrastar el pensamiento lógico de los más grandes filósofos de todos los tiempos -tres de ellos, Aristóteles, Leibniz, Godel- pasando por Crisipo, Duns Scoto, Spinoza y Ockham; los precursores de la lógica moderna, como de Morgan y Boole; los nuevos fundadores, Frege, Russell, Wittgenstein; y quienes la han colocado en un pedestal: Gentzen, Turing, C. S. Peirce, Quine, Tarski, Hilbert, Lukasiewicz, Robinson. Para hacer justicia, no solo hay una lógica llamada *clásica*, a la que le otorgan la supremacía y aparece como la oficial en los libros de texto. Están las lógicas: de la relevancia, modal, deóntica, difusa y para-consistente. Los pensadores que están vivos aún discuten si hay una o varias lógicas. Lo que no parece justo es denominar *clásica* a la lógica que perdió el trono, por la emergencia de otras nuevas lógicas. Cada una se ajusta, como el vestido del sastre, al contexto del lenguaje natural en el que se explica, se razona y se acomoda. Por tal razón, y sin ofender a nadie, se debería denominar *lógica convencional*, a la oficial, o sea, a la lógica ‘clásica’, y a las demás que le dieron sus autores. Gladys Palau cuenta que Miró Quesada postula la existencia de una lógica, “que es la que usamos espontáneamente cuando pensamos racionalmente y que además es el fundamento en torno al cual se han constituido todas las demás lógicas, a la que él denomina precisamente *nuestra lógica*” (Palau 2012, página 192).

1. Aforismo del autor de este libro.

De esta enorme cantidad de conocimiento, expongo el área que es una necesidad viva para todo aquel que quiera desarrollar creativamente el pensamiento con un pie sobre la tierra: se hace referencia, por supuesto, al área del *razonamiento lógico*. Este no es un libro sobre lógica. Mucho menos, sobre lógica matemática; es un libro sobre el razonamiento lógico. El razonamiento lógico obedece a un encadenamiento de premisas en las que las reglas aceptadas como válidas se aplican, eslabón por eslabón, hasta producir las conclusiones, que es lo que se denomina la *consecuencia lógica*. Aunque es inevitable que le pueda servir a un matemático, se encuentra escrito para los estudiantes de educación media y superior, docentes y todo profesional sin distingo alguno.

Mi libro se ha concentrado en el razonamiento y la argumentación deductiva, o sea, en lo que tradicionalmente corresponde al cálculo proposicional y de predicados, o como ahora se le llama, *lenguaje de primer orden*; enfocado en el ámbito del *sistema de la deducción natural*, para relieves, críticamente, su íntima relación con la lógica del lenguaje natural; ambos lenguajes, desde sus ámbitos, están entrelazados y acoplados por las reglas de inferencia, la validez, la argumentación, la deducción y la prueba, pero pocos dicen cual es el entrelazamiento entre uno y otro sistema, o si uno refleja de algún modo el otro, o si lo simbólico proviene de formalizar reglas de la mente, o si su relación es meramente convencional. Descubrí -un poco tarde- que la estructura simbólica del lenguaje natural y la existencia de un isomorfismo entre los dos es la única explicación posible del vínculo que une y separa ambos lenguajes. El que avisa no es traidor. y por eso es mejor advertir que, lo que me propongo es establecer esta distinción drástica, radical, entre el lenguaje simbólico, formal, artificial, y el lenguaje cotidiano, natural, para así mostrar el *entrelazamiento* que los separa y los une, que es lo que se ha de denominar el *isomorfismo natural*.

En el salón de clases, a la lógica clásica, simbólica, se le asigna el nivel de teoría, mientras que el lenguaje natural sirve para dar ejemplos didácticos, como si su rol fuera de servicio doméstico del lenguaje simbólico. Esto es un grave error, que lamentablemente, es de muy difícil corrección. En este libro, ambos tendrán el mismo *estatus*, la misma importancia, aunque preferiblemente, el énfasis del razonamiento lógico deberíamos colocarlo en el lenguaje cotidiano. Para ello, basta un ejemplo; el primer astronauta sueco Christer Fuglesang, en su visita a Colombia, al referirse a la biblia, declaró: “Si atas tus

creencias a un libro escrito hace miles de años, entonces no eres un científico” (*El Tiempo*, 2018); esta profunda reflexión sobre la distinción entre fé y ciencia, expresada en modo condicional, se simboliza en el cálculo proposicional como $p \rightarrow \neg q$, lo que no le dice absolutamente nada al estudiante. Mientras que, en el lenguaje natural, separado el antecedente del consecuente en premisas visibles y ocultas, y acordadas las reglas que validen la argumentación y la conclusión se podría enriquecer el razonamiento lógico en el salón de clases.

Como es inevitable el cálculo axiomático, he abierto un capítulo sobre los axiomas lógicos, lo que nos permitirá distinguir y comparar entre los sistemas de deducción natural y la axiomática de los procesos deductivos. Debido al desarrollo inicial, vertiginoso y luego al descenso en la teoría de conjuntos, se pretende introducir, además de los lenguajes de primer orden y la deducción natural y axiomática, otro capítulo sobre la teoría axiomática de conjuntos, como ilustración de cómo se razona ‘correctamente’, manteniéndome dentro de los límites clásicos, esto es, en el proceso deductivo tradicional, que es aquel que aborrece las contradicciones. Cualquier concesión a sistemas inconsistentes abriría inevitablemente una brecha por la que se colaría la *lógica paraconsistente* (que no dudamos será la innovación disruptiva en el aula de clases, y eso tendría que ser materia de otro libro). Aunque por lo general se deja de lado el tratamiento de las contradicciones (algo tan inherente a la naturaleza humana), se hará una excepción: se trata del modo como se usa en el salón de clases el *condicional lógico*, ese que en el lenguaje natural está compuesto por el antecedente y el consecuente. Se sostendrá en el texto que el nexo entre el antecedente y el consecuente es una cuestión fundamental para la comprensión y el aprendizaje de la lógica, cualquiera que esta sea. De manera que, el objetivo es lograr que en los cursos de lógica haya una total atención al condicional que establece un vínculo tan profundo entre antecedente y consecuente que invita a razonar, todo lo contrario de la denominada *implicación material*, lo cual será el objetivo del capítulo final, donde se expondrán varias alternativas para explicarla y en lo posible sustituirlo por otra que se denominará *implicación natural*. Propondré también que se elimine el nombre de *fórmula bien formada* a lo que de ahora en adelante deberíamos llamar *forma lógica*.

El interés por escribir este libro siempre fue lo que se conoce como *análisis no estándar* y sus aplicaciones al cálculo infinitesimal, área que me introdujo el emérito y siempre recordado matemático mexicano, Carlos Imaz Jahnke. Con su apoyo y el de un gran educador matemático, Luis Moreno Armella, logré

concluir mi doctorado en la construcción de didácticas de la transformada de Fourier en el campo hiperreal. Solo mucho tiempo después, me involucré en la disciplina de la lógica, donde apenas llego a la categoría de estudioso del tema. Hace varios años, al intentar fundamentar nuevamente el campo de los números hiperreales, Carlos Ivorra, profesor de la Universidad de Valencia, España, me dijo que no lo lograría, a menos que hiciera un estudio profundo de la lógica. He seguido su consejo tan al pie de la letra, que he abandonado la idea inicial y me dedico completamente al razonamiento lógico. En los últimos años, me concentré en dictar unos cursos de esta materia de primer semestre de la Universidad Autónoma del Caribe (bastante superficiales, vale la pena reconocerlo), para lo cual escribí unas *Notas de Clase* con el profesor Darwin Peña. La experiencia vivida con los estudiantes me motivó para introducir una crítica a los métodos de enseñanza y dio luz a este *ensayo* donde se pretende deslindar campos sobre el vínculo entre el lenguaje simbólico y el razonamiento en el lenguaje natural.

Un libro con este propósito no puede dejar de guiar a los lectores con una que otra frase de los fundadores, los autores y de todos los que contribuyeron y siguen aportando a la lógica matemática. Inicialmente, se pensó no colocar ejercicios prácticos en el desarrollo del texto, pero luego, por razones didácticas, acogiendo diferentes sugerencias, se decidió incluir, con cuidado, y al final de cada capítulo, una serie de ejercicios que esperan despertar algún interés en los lectores. Existe una constante referencia a generar una diferencia entre los autores vivos y fallecidos, que se hace innecesaria porque resta trascendencia al texto. Aunque casi nada sea una contribución personal, en el libro afirmo algunas veces en primera persona, siguiendo un consejo de un amigo. Así, puedo decir con bastante certeza² que este libro solo compromete al autor quien asume su entera responsabilidad al haberlo escrito.

Kemel George.

2. L. Wittgenstein, *Acerca de la Certeza*, GEDISA, Barcelona, Reimpresión, 2015.

CAPÍTULO 1

El lenguaje natural

El pensamiento y el lenguaje son la clave para comprender la naturaleza de la conciencia humana (Vygotski, 2014).

El lenguaje natural

El lenguaje natural es el que hablamos, escuchamos, escribimos y con el que nos comunicamos. La frase anterior la escriben y leen, a su modo, los chinos, los alemanes y los rusos en su lenguaje natural, que es el chino, el alemán o el ruso. Al lenguaje natural también lo llamamos idioma, lengua, lenguaje ordinario, cotidiano, lengua madre, propia o vernácula, así que el nuestro es el español, o más propiamente, el castellano. Los humanos pensamos, leemos, escribimos, entendemos, nos comunicamos, transferimos conocimiento y preservamos la cultura, a través de nuestra lengua madre. Hemos invertido más de cuarenta mil años en pensarlo y hablarlo, y luego, más de tres mil años³ en escribirlo y en leer lo que escribimos. Con el lenguaje, el *homo sapiens* conquistó el mundo (Harari, 2014, p. 32), seguramente con el concurso de otros *homos*⁴.

3. “La necesidad de medir, dividir y repartir el poderío material, de sus sociedades es, por tanto, lo que ha dado nacimiento a los primeros sistemas de escritura. El primero, en particular, que llamamos «cuneiforme», conocería un gran éxito durante los siguientes tres mil años”, Michel Serres, Historia de las Ciencias, CÁTEDRA, Segunda Edición, 1989.

4. Los investigadores Nijmegen Dan Dediu y Stephen C. Levinson, del Instituto Max Planck para Psicolingüística, argumentan en su artículo en *Frontiers in Language Sciences* que el lenguaje moderno y el habla se remontan al último ancestro común que compartimos con los neandertales hace aproximadamente medio millón de años <https://www.mpg.de/7448453/Neandertals-language>.

El lenguaje natural es una de las invenciones más extraordinarias e innovadoras concebidas por la comunidad humana, y es muy probable que lenguaje y especie tengan la misma edad. Sorprende que sea tal su estrecha relación con el pensamiento humano que, de un modo que aún no comprendemos, el lenguaje natural logra representar, figurar, interpretar, componer y simbolizar los objetos reales y los objetos virtuales en la mente, producir procesos de razonamiento lógico. Este es precisamente el tema que ocupa libro: lograr explicar y utilizar la capacidad que tiene el lenguaje natural (cuyos símbolos significan), para construir lenguajes simbólicos, formales o artificiales (caracteres sin significado alguno) con los que razonamos correctamente.

Desde niños aprendemos que las unidades básicas del lenguaje natural son las letras o abecedario y que unidas estas letras forman las palabras o vocabulario. Pero no es claro explicar por qué una cadena de caracteres donde se mezclan vocales y consonantes, resulta ser el nombre del objeto que comprendemos, que adquiere significado y la denominamos *palabra*, con la que expresamos *conceptos*, que permiten hacer oraciones, enunciados, juicios y proposiciones, con los que razonamos.

Los más destacados filósofos y pensadores profundos se han ocupado del lenguaje, finalmente convertido en objeto de una ciencia denominada *lingüística*, que comprende entre otras áreas, la gramática, la sintaxis, la semántica y la pragmática, y que hacen parte de algo más denso como la semiótica, la filología y las ciencias cognitivas. Es menos conocido que el lenguaje ha subvertido a la filosofía⁵ y la ha convertido en *filosofía analítica* (o filosofía del lenguaje).

De todo este arsenal teórico, interesa destacar la asombrosa capacidad del lenguaje natural de establecer una asociación tan íntima entre la realidad externa o *estados de hecho*, y la mente que, al explicar esta realidad con palabras, algunos lleguen a identificar ambas realidades como una sola. Para dejar en claro nuestras propias ideas: no tengo ninguna duda de que hay una realidad exterior, fuera de la mente; no dudo que hay leyes de la razón, y que el lenguaje nos permite acoplar unas con otras en

5. Cuyo culpable es Wittgenstein, cuyo nombre podemos abreviarlo como L.W. y sus obras con siglas así: TLF, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Alianza Universidad, Alianza Editorial, S.A., Madrid 1973. IF, *Investigaciones filosóficas*, Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, Editorial CRÍTICA, 1967. GF, *Gramática filosófica*, Universidad Nacional Autónoma de México, 1992. AC, *Acerca de la Certeza*, GEDISA, Barcelona, Reimpresión, 2015. Aforismos, *Aforismos, Cultura y Valor*. AUSTRAK, *Ciencias y Humanidades*, 1995.

un sistema simbólico operado por reglas mentales que rigen el razonamiento lógico.

Las palabras y las cosas⁶

Polonio “¿Qué estáis leyendo, mi señor?” *Hamlet* “Palabras, palabras, palabras”⁷

La palabra es el sonido o conjunto de sonidos articulados que expresan una idea (RAE, 2001). El origen de *palabra* es el mismo de *parábola* (comparación, símil) que a su vez se deriva del griego *parabolé* (comparación, alegoría) (Soca, 2016).

Los niños y algunos adultos perciben las palabras como si estuvieran adheridas a las cosas que designan y fueran parte integrante de ellas. Vygotsky (2014) dice que este fenómeno es característico de la conciencia lingüística primitiva y le adjudica a Humboldt la siguiente anécdota del campesino que, al escuchar la conversación de unos estudiantes de astronomía acerca de las estrellas, les dijo: “No me sorprende que los sabios con sus instrumentos hayan logrado medir la distancia entre la Tierra y las estrellas más lejanas y además conocer su tamaño y su curso, pero ¿cómo han podido descubrir sus nombres?” (p. 302).

Este es un poema admirable de Blas de Otero, sobre el poder de la palabra:

Si he perdido la vida, el tiempo/ todo lo que tiré, como un anillo, al agua,

Si he perdido la voz en la maleza/ me queda la palabra.

Si he sufrido la sed, el hambre, todo/ lo que era mío y resultó ser nada.

Si he segado las sombras en silencio/ me queda la palabra.

Si abrí los ojos para ver el rostro puro y terrible de mi patria/ Si abrí los labios hasta desgarrármelos, me queda la palabra.

Wittgenstein (1986. p. 17), en la primera página de *Investigaciones filosóficas*, cita a San Agustín, quien, en sus *Confesiones*, dice:

6. Este título lo hemos tomado del libro *Las palabras y las cosas: Una arqueología de las ciencias humanas*, escrito por Michel Foucault, filósofo francés, publicado por primera vez en 1966.

7. W. Shakespeare, *Hamlet*, Segundo Acto, Segunda escena.

Cuando ellos (los mayores) nombraban alguna cosa y consecuentemente con esa apelación se movían hacia algo, lo veía y comprendía que con los sonidos que pronunciaban llamaban ellos a aquella cosa cuando pretendían señalarla. En estas palabras obtenemos, a mi parecer, una determinada figura de la esencia del lenguaje humano (p. 17).

Y añade:

Las palabras del lenguaje nombran objetos, las oraciones son combinaciones de esas denominaciones. En esta figura del lenguaje encontramos las raíces de la idea: cada palabra tiene un significado. Este significado está coordinado con la palabra. Es el objeto por el que está la palabra (Wittgenstein, 1986, p. 19).

Unos años antes, en las conferencias⁸ previas a *Investigaciones Filosóficas*, este citado autor, explicaba:

Parece que hay ciertos procesos mentales definidos, vinculados con la actuación del lenguaje, procesos únicamente a través de los cuales puede funcionar el lenguaje. Quiero decir los procesos de comprensión y significación. Los signos de nuestro lenguaje parecen muertos sin estos procesos mentales; y podría parecer que la única función de los signos es inducir tales procesos, y que éstas son las cosas en las que deberíamos estar realmente interesados. Así, si se les pregunta cuál es la relación entre un nombre y la cosa que nombra, tenderán a contestar que la relación es una relación psicológica, y quizá al decir esto estén pensando particularmente en el mecanismo de la asociación. Nos sentimos inducidos a pensar que la acción del lenguaje consta de dos partes; una parte inorgánica, el manejo de signos, y una parte orgánica, que podemos llamar comprender estos signos, significarlos, interpretarlos, pensar. Estas últimas actividades parecen realizarse en un extraño tipo de medio: la mente; y el mecanismo de la mente, cuya naturaleza, según parece, no comprendemos completamente, puede producir efectos que ningún mecanismo material podría causar (Wittgenstein, 1986, p. 30).

Hay que remontarse al *Cratilo*, unos de los famosos *Diálogos* de Platón, escrito en el año 360 A.C. para explorar la relación entre las palabras y las cosas que ellas representan, o mejor, entre la cosa y el nombre de la cosa. En ese diálogo, *Cratilo* sostenía que el significado de las palabras viene dado de forma natural y otros, que la relación era arbitraria y depende del hábito de

8. En el Prefacio de la segunda edición inglesa, R. RHEES, explica que Wittgenstein dictó estas conferencias después llamadas *Los Cuadernos azul y marrón*, en Cambridge durante el curso 1933-34.

los hablantes (Platón, 2003). Jorge Luis Borges, registró este debate en este hermoso poema que se inicia así: “Si (como el griego afirma en el Cratilo) / El nombre es arquetipo de la cosa/ En las letras de rosa está la rosa/ Y todo el Nilo en la palabra Nilo” (Borges, 1989, p. 263).

El científico y premio Nobel, Werner Heisenberg, para explicarnos la extraordinaria dificultad del lenguaje en expresar la más profunda e íntima de los fenómenos de las partículas elementales, afirma: “No es sorprendente que nuestro lenguaje sea incapaz de describir los procesos que tienen lugar dentro de los átomos, porque, como se ha señalado, se inventó para describir las experiencias de la vida cotidiana, que constan únicamente de procesos que implican cantidades extraordinariamente grandes de átomos [...]” “Las palabras solo pueden describir aquello de lo que podemos formarnos una imagen mental, y esta capacidad es también el resultado de la experiencia cotidiana” (Heisenberg, 2011, p. 185). Este físico parece decirnos: donde llega la poesía no llega la ciencia. Roland Barthes escribió: “En el orden del saber, para que las cosas se vuelvan lo que ellas son, lo que ellas han sido, hace falta ese ingrediente, la sal de las palabras” (citado en Vargas-Llosa, 2018, p. 63).

Significado de la palabra

Uno de los más grandes teóricos de la psicología, Lev Semionovich Vygotski⁹, contemporáneo con Wittgenstein, se planteó el problema de encontrar una unidad indivisible del pensamiento lingüístico, aquella que conserve las propiedades inherentes al conjunto en su totalidad, y resolvió que tal unidad es el *significado de la palabra*. “El significado es parte integrante de la palabra, pertenece al dominio del lenguaje en igual medida que en el pensamiento. Sin significado, la palabra no es tal, sino sonido hueco, y deja de pertenecer ya al dominio del lenguaje” (Vygotski, 2014, p. 21).

¿Y que hace que una palabra lo sea? Pues simplemente, que la gente la use:

El significado es el uso que hacemos de la palabra, se podría, pues, decir: la definición ostensiva explica el uso -el significado- de la palabra cuando ya está claro qué papel debe jugar en general la palabra en el lenguaje (Wittgenstein, 1986, p. 47).

9. Ignoramos si Vygotski llegó a leer a Wittgenstein o viceversa. En los cinco tomos de sus *Obras Escogidas*, Vygotski ni siquiera lo menciona una sola vez.

Sigamos esta idea de Wittgenstein. Se trata del uso que se hace de la palabra en un contexto lingüístico, que hace que signifique: “¿Entonces el significado es en realidad sólo el uso de la palabra? ¿No es la manera en la cual este uso interviene en la vida? ¿Pero no es su uso una parte de nuestra vida?” (Wittgenstein, 1992, p. 123).

Retengamos esta doble idea: lo que hace que la palabra esté en el dominio del lenguaje es que signifique, y este significado no es otra cosa que el uso que hacemos de ella.

Lenguaje y pensamiento

Pensamos con imágenes, con figuras, con recuerdos, con gestos. Pero ¿Se puede pensar sin usar el lenguaje? Aquí hacemos referencia a un aspecto fundamental, que ha ocupado la atención de grandes teóricos y mentes brillantes; no hay actividad lógico racional sin vehículo lingüístico.

Raciocinios muy simples, por ejemplo, algunas inferencias inmediatas, aparentemente se pueden hacer sin recorrer de manera sistemática al aparato del lenguaje. Pero los resultados acabados y finales de la razón se materializan en contextos lingüísticos. Así las leyes lógicas terminan por ser caracterizadas por medio del lenguaje. Por lo tanto, si queremos conocer los principios lógicos, es imprescindible tratar algunos aspectos del lenguaje. Podemos afirmar que las leyes de la razón, o lo que es igual las leyes de la lógica, son susceptibles de ser obtenidas por medio del análisis del lenguaje (Sánchez, Serrano y Peña, 2009, p. 10¹⁰).

Vamos a detenernos ahora en Gottlob Frege, cuya obra y aportes a la lógica han sido comparados con los realizados por Aristóteles. Frege delimita claramente la lógica de cualquier otra área del pensamiento: “Así como la palabra bello señala la dirección de la estética, y bueno la de la ética, del mismo modo “verdadero” señala la de la lógica” (Frege, 2013, p. 197).

Llamo pensamiento, sin querer dar con esto una definición, a algo para lo cual la verdad puede entrar en consideración. Cuento en los pensamientos tanto lo que es falso como lo que es verdadero. Así puedo decir: el pensamiento es el sentido de una oración, sin querer aseverar con esto que el sentido de toda

10. Estos autores, a su vez, citan para ello a Da Costa, Newton C.A., Os Fundamentos da Lógica. HUCITEC, EDUSP, Sao, Paulo, 1980. pág. 25.