Prólogo

Para los docentes de Física de la Universidad del Magdalena que contribuimos con la labor misional de la institución de formar mejores ciudadanos y profesionales competentes, es muy satisfactorio aportarles a nuestros estudiantes recursos de aprendizaje y material de estudio, como el que hoy ponemos a su consideración, que respondan a sus necesidades.

El esfuerzo por sistematizar y organizar muchos años de experiencia y trabajo interactivo con alumnos de la Facultad de Ingeniería, especialmente los de Ingeniería Electrónica, se convierte en nuestra contribución desde el ejercicio de la docencia para apoyar el trabajo de profesores de la asignatura electrostática y magnetostática, tanto a nivel profesional como posgradual.

El propósito fundamental de este libro es brindar a estudiantes que se inician en el estudio de la física en los programas de ingeniería un compendio de definiciones y teoría necesaria en el campo de la electrostática y magnetostática, que les ayude a reducir el tiempo de transición entre la conceptualización de los contenidos que proporciona el profesor (enseñanza pasiva) y su aplicación a algunas situaciones reales de manera que puedan clarificar, ordenar y asimilar los conceptos (enseñanza activa). En el libro se les da un tratamiento amplio y detallado a las demostraciones y deducciones de ecuaciones. También se le ha dado especial importancia a la selección de los problemas y se han explicado con mucho detalle las soluciones.

La temática desarrollada en este libro se ha construido con el fin de suplir las necesidades de los estudiantes y profesores de encontrar información en un solo sitio, ya que la bibliografía sobre el tema de la que hoy se dispone está dispersa en libros con diferentes enfoques, elaborados para otras necesidades profesionales. Por esa razón, hemos tenido en cuenta los puntos de vista de profesores del área y de estudiantes de la asignatura, así como las dificultades presentadas en el aula de clases durante más de diez años de impartir esta asignatura.

La metodología propuesta en esta obra permite al lector seguir un eje organizador de conocimientos básicos de mecánica clásica y cálculo. Cada capítulo del libro inicia con una breve introducción que orienta al estudiante mediante actividades de autoevaluación y repaso que comprendan la necesidad del tema abordado en la construcción de su conocimiento.

El libro consta de seis capítulos, donde presenta los conceptos de la electrostática y magnetostática de forma clara y concisa. Los dos primeros están dedicados a brindar a los estudiantes las herramientas matemáticas necesarias para abordar la solución de problemas relacionados con la electrostática y la magnetostática, familiarizándolos de esta forma con el álgebra y el cálculo vectorial. Los capítulos 3 y 4, están dedicados a la electrostática en el espacio libre y en medios materiales, y los capítulos 5 y 6, se estudian los campos magnéticos estático tanto en el espacio libre, como en medios materiales, respectivamente. Al final de cada sección se incluyen una serie de problemas resueltos y propuestos relacionados con los temas tratados.

Los autores agradecen la valiosa colaboración del profesor José García Díaz por la minuciosa revisión de manuscrito y a la Universidad de Magdalena por su apoyo para la elaboración de este libro.

Los comentarios, sugerencias y correcciones siempre serán bienvenidos.

Santa Marta, 2020. Los autores

1 Vectores y campos

Introducción

Las magnitudes vectoriales tales como vectores y campos vectoriales desempeñan un rol importante en la formulación de los fenómenos electromagnéticos. Es por ello que iniciaremos introduciendo algunas de las reglas de operación y manipulación de estas cantidades. Además, como la cantidad fuente de estos fenómenos es la carga eléctrica, que puede estar en reposo o en movimiento con respecto a un observador en el espacio tridimensional, los estudiantes deben estar en condiciones de elegir un sistema de coordenadas apropiado para resolver y presentar resultados de los problemas relacionados con el tema. En este capítulo se estudiarán los conceptos básicos del álgebra vectorial y el cálculo vectorial y se analizarán los sistemas de coordenadas ortogonales más frecuentes: rectangulares (o cartesianos), cilíndricos y esféricos.

Las magnitudes físicas se pueden clasificar en dos grandes categorías: *tensores* y *espinores*. Los tensores son entes matemáticos que permiten escribir las ecuaciones físicas de manera compacta y de forma covariante o contravariante. Los escalares y los vectores son un caso especial de tensores de rango n, cuya especificación en cualquier sistema de coordenadas requiere de 3^n números, llamados las componentes del tensor. En este esquema los escalares son tensores de rango 0, es decir, $3^0 = 1$ componente, y los vectores son tensores de rango 1, esto es, $3^1 = 3$ componentes. Los espinores, por otra parte son, campos vectoriales complejos; por ejemplo, un vector cuyas componentes sean complejas es un espinor.

1.1 Vectores

Geométricamente, un vector se representa mediante un segmento de recta dirigido con uno de sus extremos terminado en una flecha. La longitud del segmento es proporcional a la magnitud del vector, y su dirección es igual al ángulo medido en sentido antihorario con respecto a una línea imaginaria que pasa por su origen. En la figura 1.1 se muestran diferentes orientaciones del vector $\boldsymbol{A}$

Matemáticamente, un vector puede ser representado de maneras diferentes. Una representación adecuada en un espacio vectorial real o complejo de dimensión N es un conjunto de $N - upla$ ordenadas de números reales o complejos, o un vector fila de componentes, $(a_1, a_2, \cdots, a_N)$, a lo

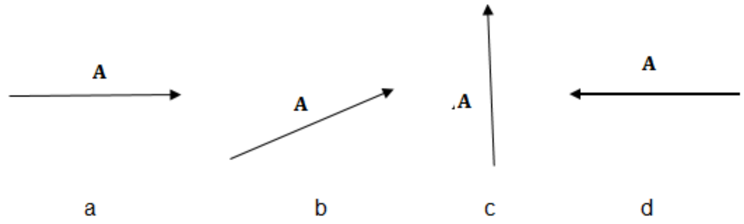

Figura 1.1: Diferentes orientaciones del vector $\boldsymbol{A}$. a) 0^0, b) 30^0, c) 90^0, d) 180^0

largo de los N ejes de coordenadas que abarcan todo el espacio vectorial. Sin embargo, existen muchas $N-uplas$ ordenadas de números que no representan un vector, es decir, no satisfacen las propiedades de transformación de un vector. Matemáticamente un vector se puede escribir como la suma de sus N-componentes, esto es

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{N} A_i \boldsymbol{u}_i \overset{def}{\equiv} A_i \boldsymbol{u}_i \tag{1.1}$$

En la ecuación (1.1) se ha hecho uso del convenio de suma de Einstein, que establece que si en una expresión aparece un índice que se repite en un término, implica suma en el rango del índice en cuestión. El símbolo $\overset{def}{\equiv}$, que significa "por definición", y $\boldsymbol{u}_i$ son vectores unitarios (vectores de módulo la unidad) a lo largo de los ejes coordenados. Se acostumbra a representar un vector por una letra minúscula o mayúscula en negrilla.

El vector más básico es el radio vector o vector posición, que es el vector que va desde el origen de un sistema de coordenadas hasta el punto de interés (ver figura 1.2).

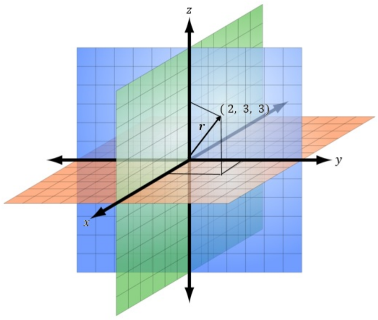

Figura 1.2: Vector posición del punto P

Su $N-upla$ simplemente enumera las coordenadas del punto en dicho sistema de coordenadas. En este sentido, un radio vector especifica la posición del punto. En el espacio euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, tenemos que $N = 3$, y el radio vector puede ser representado por la tripleta (x_1, x_2, x_3) o (x_i), con $i = 1, 2, 3$. Las x_i son las componentes a lo largo de los vectores base unitarios $\boldsymbol{u}_i$. Por lo tanto, una representación del radio vector en este espacio es

$$\boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{u}_i = x_1 \boldsymbol{u}_1 + x_2 \boldsymbol{u}_2 + x_3 \boldsymbol{u}_3 = x \boldsymbol{u}_x + y \boldsymbol{u}_y + z \boldsymbol{u}_z \tag{1.2}$$

1.2 Igualdad de vectores

Dos vectores son iguales si tienen igual magnitud e idénticos vectores unitarios, esto es, si $\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{u}_i$ y $\boldsymbol{B} = B_i\boldsymbol{u}_i$, entonces $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow$ los $A_i = B_i$. La igualdad de vectores, sin embargo, no implica que sean idénticos; en coordenadas rectangulares, dos vectores paralelos desplazados de igual magnitud y que tienen la misma dirección son iguales, pero idénticos solo si están uno encima del otro.

1.3 Operaciones entre vectores

A partir de la definición de vector dada en la sección anterior, se puede proceder a definir las reglas de la aritmética, y del álgebra vectorial (más adelante se procederá con las del cálculo vectorial). Algunas de estas reglas de operación son similares a las operaciones entre escalares, sin embargo, la mayoría de ellas serán totalmente diferentes.

1.3.1 Suma y diferencia entre vectores

La suma de dos vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ es otro vector. Gráficamente, la suma de dos vectores se obtiene por el método del paralelogramo, según el cual vector suma es la diagonal del paralelogramo formado por los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, o por la regla del triángulo (cabeza-cola), en cuyo caso el vector suma es el vector que va desde la cola de $\boldsymbol{A}$ hasta la cabeza de $\boldsymbol{B}$ (véase figura 1.3).

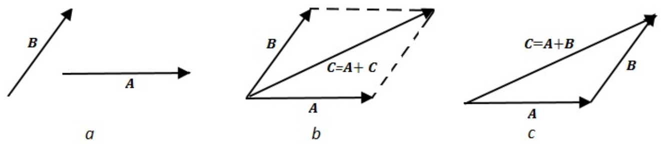

Figura 1.3: Suma de vectores: a) vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, b) método de paralelogramo y c) método del triángulo

La diferencia entre los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ es la suma de $\boldsymbol{A}$ con el negativo de $\boldsymbol{B}$, es decir, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$, tal como se ilustra en la figura 1.4.

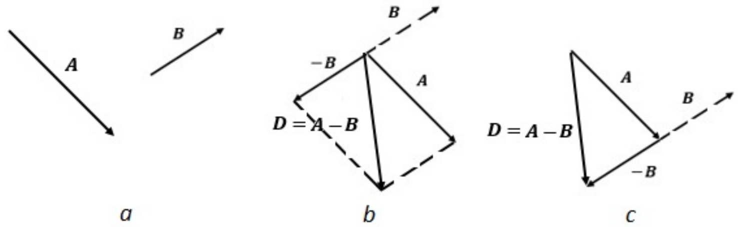

Figura 1.4: Diferencia de vectores: a) vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, b) método de paralelogramo y c) método del triángulo

Definición 1.1

Dados los vectores $\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{u}_i$ y $\boldsymbol{B} = B_i\boldsymbol{u}_i$, entonces

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A + B)_i\boldsymbol{u}_i \tag{1.3}$$

y

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (A - B)_i\boldsymbol{u}_i \tag{1.4}$$

1.3.2 Producto de un escalar por un vector

El producto de un escalar λ por un vector es otro vector cuya magnitud es λ veces la magnitud del vector, y su dirección es la del vector si $\lambda > 0$ u opuesta a la del vector si $\lambda < 0$.

Definición 1.2
Sea $\lambda \subset Re$ y $\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{u}_i$, entonces

$$\lambda\boldsymbol{A} = \lambda A_i\boldsymbol{u}_i \tag{1.5}$$

1.3.3 Producto escalar o punto

El producto escalar (o punto) entre dos vectores se denota como $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ y se lee A punto B. Geométricamente, es el producto entre la magnitud de uno de los vectores por la proyección del otro sobre el primero, como se ilustra en la figura 1.5.

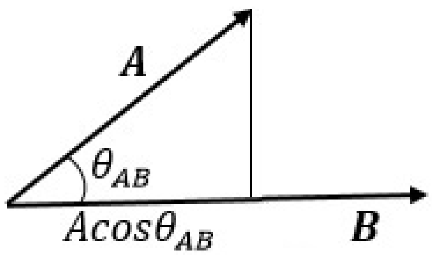

Figura 1.5: Proyección del vector $\boldsymbol{A}$ sobre $\boldsymbol{B}$

Definición 1.3
Sean $\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{u}_i$ y $\boldsymbol{B} = B_j\boldsymbol{u}_j$ dos vectores. Entonces

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = ABcos\theta \tag{1.6}$$

Donde A y B son las magnitudes de los vectores y θ es el menor ángulo entre ellos.

En términos de sus componentes, se define como

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_iB_j\delta_{ij} = A_iB_i \tag{1.7}$$

donde δ_{ij} es la delta Kronecker definida por la ecuación (A.2) del apéndice A.

A partir de la ecuación (1.6) se observa que el producto punto entre dos vectores puede ser: i) menor o igual que el producto de sus magnitudes, ii) positivo si $0 < \theta < 90^0$, iii) negativo si $90^0 < \theta < 180^0$ y iv) cero si $\theta = 90^0$, en cuyo caso se dice que los vectores son ortogonales (perpendiculares entre sí).

El producto escalar o punto satisface las siguientes propiedades:

1. **Propiedad conmutativa**

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.8}$$

2. **Propiedad distributiva**

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.9}$$

1.3.4 Producto vectorial

El producto vectorial (o cruz) entre dos vectores de denota por $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ y se lee A cruz B, es otro vector perpendicular al plano que contiene los vectores, y su magnitud es igual al área del paralelogramo definido por los dos vectores, como se muestra en la figura 1.6.

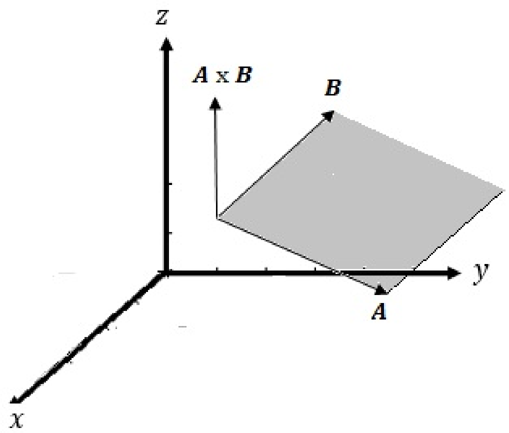

Figura 1.6: Producto vectorial o cruz de dos vectores

Definición 1.4

Sean $\boldsymbol{A}=A_i\boldsymbol{u}_i$ y $\boldsymbol{B}=B_j\boldsymbol{u}_j$ dos vectores: entonces

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=ABsen\theta\boldsymbol{u}_n \tag{1.10}$$

donde θ es el ángulo entre $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{u}_n$ es un vector unitario normal al plano formado por los dos vectores. La dirección de $\boldsymbol{u}_n$ es la dirección del pulgar derecho cuando los otros dedos de la mano derecha giran de $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, como se ilustra en la figura 1.7.

En términos de sus componentes se tiene que

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{u}_iA_jB_k \tag{1.11}$$

donde ε_{ijk} es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita definido por la ecuación (A.4) del apéndice A.

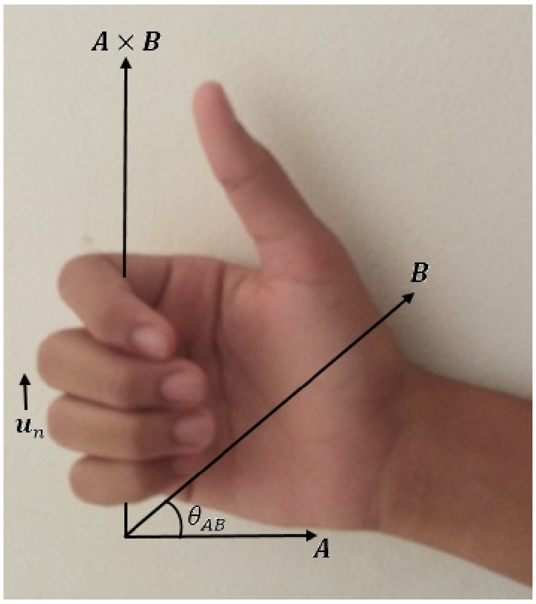

Figura 1.7: Dirección del producto vectorial $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ aplicando la regla de la mano derecha

Si $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{u}_x + A_y\boldsymbol{u}_y + A_z\boldsymbol{u}_z$ y $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{u}_x + B_y\boldsymbol{u}_y + B_z\boldsymbol{u}_z$, entonces el producto vectorial puede ser representado nemotécnicamente por el determinante

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_x & \boldsymbol{u}_y & \boldsymbol{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{u}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{u}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{u}_z \tag{1.12}$$

donde se hizo uso del método de expansión de Laplace por menores para resolver el determinante. Dicho método se describe en la sección siguiente.

1.3.5 Expansión de Laplace

Teorema 1.1

Expansión de Laplace por menores: Sea A una matriz cuadrada de orden n ($n \times n$). Su determinante, denotado por $detA = |A|$, puede ser calculado mediante la expansión de Laplace sobre cualquier fila o columna.
Dada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Desarrollo sobre la i- ésima fila

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

Desarrollo sobre la j-ésima columna

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{22}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

donde los C_{ij} son los cofactores correspondientes.

Definición 1.5

Menor (i, j) de una matriz: Sea A una matriz $n \times n$. El *menor* (i, j) de la matriz A, representado por M_{ij} es el determinante de la matriz que se obtiene eliminando la fila i y la columna j.

Definición 1.6

Cofactor (i, j) de una matriz: Sea A una matriz $n \times n$. El *cofactor* (i, j) de la matriz se define como

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{1.13}$$

Ejemplo 1.1

Determine el menor M_{12} y el cofactor correspondiente de la matriz dada en la ecuación (1.12).

Solución

El menor se obtiene eliminando la fila 1 y la columna 2. Luego

$$M_{12} = \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix}$$

y el cofactor es

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} = -(A_x B_z - A_z B_x) = A_z B_x - A_x B_z$$

Ejemplo 1.2

Para la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcule $|B|$ mediante el desarrollo de Laplace sobre la fila 1.

Solución

$$
\begin{aligned}
|B| &= b_{11}C_{11} + b_{12}C_{12} + b_{13}C_{13} = (1)(-1)^{1+1}M_{11} + (2)(-1)^{1+2}M_{12} + (-1)(-1)^{1+3}M_{13} \\
&= (1)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (1)(-12-0) - (2)(-6-0) - (1)(4-0) \\
&= -12 + 12 - 4 = -4
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1.1. *Halle los cofactores C_{11} y C_{13} de la matriz dada por la ecuación.* (1.12)

Respuesta*: $A_yB_z - A_zB_y$, $A_xB_y - A_yB_x$.* ■

Ejercicio 1.2. *Calcule $|B|$ mediante el desarrollo de Laplace sobre la fila 3 y sobre la columna 1 de la matriz dada en el ejemplo 1.2.*

Respuesta*: -4.* ■

El producto vectorial satisface las siguientes propiedades:

1. **No es conmutativo o anticonmutativo**

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \tag{1.14}$$

2. **No es asociativo**

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \neq (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} \tag{1.15}$$

3. **Es distributivo**

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} \tag{1.16}$$

Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son diferentes de cero y $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = 0$, entonces los vectores son paralelos.

1.3.6 Triple producto escalar

El triple producto escalar es la combinación del producto escalar con el producto vectorial. El resultado de esta operación es un escalar.

Definición 1.7

Dados los vectores $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$, denotamos y definimos el triple producto escalar como

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}] = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.17}$$

Si $\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{u}_i$ y $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{u}_i$, entonces $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ es el volumen del paralelepípedo que tiene A, B y C como lados (véase figura 1.8).