

Prólogo

La teoría de conjuntos es una de las ramas fundamentales y útiles de las matemáticas, y tiene una amplia variedad de aplicaciones en campos tan diversos como la informática, la física y la economía. Esta teoría se ocupa del estudio de los conjuntos, sus propiedades y las relaciones entre ellos. Desde la definición básica de conjuntos hasta las operaciones más complejas, la teoría de conjuntos ofrece un marco conceptual sólido para el análisis y la resolución de problemas.

En este sentido, es correcto afirmar que la teoría de conjuntos es un pilar fundamental de las matemáticas modernas y que muchos conceptos y estructuras matemáticas se definen en términos de conjuntos. De hecho, la mayoría de los matemáticos están de acuerdo en que la teoría de conjuntos puede ser utilizada como un marco para expresar todas las matemáticas.

Este libro está diseñado para ofrecer una introducción clara y accesible a los conceptos de conjuntos, una herramienta fundamental en diversas áreas de las matemáticas y sus aplicaciones. Está especialmente pensado para estudiantes de pregrado en matemáticas, ciencias de la computación, y campos relacionados que buscan una base sólida en este tema central. El contenido está organizado en cinco unidades temáticas que cubren desde los preliminares básicos hasta conceptos más complejos como relaciones y funciones.

A través de ejemplos prácticos, ejercicios seleccionados y explicaciones paso a paso, este libro guía a los lectores en el desarrollo de habilidades críticas para el manejo de conjuntos y subconjuntos, operaciones elementales entre conjuntos, y más, proporcionando una herramienta esencial para el aprendizaje autónomo y el avance académico.

La primera unidad temática, “Preliminares”, proporciona un contexto histórico y una introducción al lenguaje utilizado en la teoría de conjuntos, incluyendo los elementos del cálculo proposicional y el lenguaje de primer orden. La segunda unidad temática, “Conjuntos y subconjuntos”, aborda los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos, como la definición de conjuntos y subconjuntos, y las operaciones fundamentales de unión, intersección y complemento. La tercera unidad temática, “Operaciones elementales entre conjuntos”, profundiza en las operaciones más complejas entre conjuntos, como la diferencia simétrica y el producto cartesiano. La cuarta unidad temática, “Relaciones”, se centra en las relaciones entre conjuntos, incluyendo las relaciones de equivalencia y de orden, y las propiedades de estas relaciones. Por último, la quinta unidad temática, “Funciones”, nos introduce en las funciones y su relación con los conjuntos, incluyendo los diferentes tipos de funciones y su papel en la teoría de conjuntos.

Cada unidad temática se presenta de forma clara y concisa, con definiciones, ejemplos, proposiciones, teoremas, ejercicios y auto-evaluaciones, que permiten consolidar los conceptos aprendidos. Este libro ha sido diseñado para ofrecer una introducción básica y accesible a los conjuntos, y esperamos que sea una herramienta valiosa para estudiantes y profesionales entusiastas que estén dando sus primeros pasos en esta fascinante área de las matemáticas.

Nota al estudiante

Estimado estudiante,

La teoría de conjuntos es una rama fascinante de las matemáticas que ofrece una base sólida para el estudio de muchas áreas de la ciencia y la ingeniería. Este material es una oportunidad única para aprender sobre conceptos y herramientas matemáticas que pueden ser aplicadas en una amplia variedad de campos. Las notas de este libro te ayudarán explorar los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos. Aprenderás sobre los conjuntos y subconjuntos, las operaciones elementales entre conjuntos, las relaciones y las funciones.

El diseño del libro está especialmente concebido para ser accesible a estudiantes de pregrado en programas de licenciatura en matemáticas. Sin embargo, la estructura y presentación del contenido también lo hacen apropiado para estudiantes de otros programas académicos que requieran una sólida introducción a la teoría de conjuntos. Incluso, si nunca ha tomado un curso de matemáticas antes, estas notas te brindarán una base sólida sobre el temas de los conjuntos y te proporcionará las herramientas necesarias para analizar problemas matemáticos complejos.

Este material didáctico muestra una variedad de recursos para ayudarte a comprender los conceptos, incluyendo ejemplos para

justificar, ejercicios y explicaciones detalladas. Te invitamos a que te unas en este emocionante viaje de descubrimiento de la teoría de conjuntos. Esperamos que este libro sea una experiencia enriquecedora y que te permitan adquirir habilidades útiles en tu carrera profesional.

Cómo usar este libro

Utilizar este material didáctico es una excelente manera de repasar los conceptos y principios fundamentales de esta rama de las matemáticas, como lo es la teoría de conjuntos. Aquí te presentamos algunas sugerencias que pueden ayudarte a aprovechar al máximo este material de estudio:

Sugerencia 1. Lee cuidadosamente los conceptos fundamentales: antes de profundizar en los detalles, es importante que comprendas bien los conceptos fundamentales como lo son los elementos de conjuntos, subconjuntos, propiedades, relaciones y funciones. Dedica tiempo a leer los enunciados y asegúrate de entenderlos antes de avanzar.

Sugerencia 2. Presta atención a los ejemplos: es común que se presenten ejemplos concretos que ilustran los conceptos teóricos. Asegúrate de leerlos y comprenderlos bien, ya que esto te ayudará a entender mejor los que se presentan para justificar cada uno de los pasos en su desarrollo.

Sugerencia 3. Practica con ejercicios: la teoría de conjuntos es una rama de las matemáticas que se presta muy bien para la práctica, así que busca en el libro los ejercicios que te permitan aplicar los conceptos que estás aprendiendo. A medida que avanzas en tu práctica, verás que te resulta más sencillo resolver los ejercicios.

Sugerencia 4. Utiliza los recursos adicionales: el libro incluye recursos adicionales como listas de fórmulas, teoremas y definiciones que te pueden resultar de gran ayuda. Aprovecha estos recursos para tener a mano la información que necesitas mientras estudias.

Sugerencia 5. De las autoevaluaciones: es importante reforzar lo aprendido, por esta razón, al final de cada unidad se presenta una autoevaluación que te puede ayudar a dominar los elementos estudiados y avanzar en los siguientes temas.

Con estas sugerencias que te proporcionamos, estarás en una excelente posición para aprender y dominar los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos.

¡Mucho éxito en tus estudios!

Atentamente,

El equipo de autores.

4

Preliminares

4.1 Antecedentes

Las matemáticas modernas dependen fundamentalmente de la idea de un conjunto. La mayoría de los matemáticos piensan que la teoría de conjuntos se puede utilizar para expresar todas las matemáticas. Aunque la teoría de conjuntos se reconoce como la base de las “nuevas” matemáticas, el concepto básico de conjunto no es nuevo. Se ha alentado a los matemáticos a pensar en conjuntos de cosas de un tipo u otro desde el principio, y una gran cantidad de argumentos antiguos incluyen las ideas fundamentales de la teoría de conjuntos contemporánea. Sin embargo, los conjuntos no surgieron completamente como tema central de una teoría matemática hasta la segunda mitad del siglo XIX, en los escritos de Georg Cantor (1845-1918).

Extrañamente, la investigación de Cantor sobre las características de los conjuntos comenzó como resultado de su trabajo en el tema extremadamente especializado de las series trigonométricas. Primero limitó su investigación a ciertos conjuntos de números reales que aparecían en relación con la convergencia de series. Cantor, sin

embargo, se dio cuenta rápidamente de que sus descubrimientos se aplicaban a los conjuntos en general; en una serie de artículos notables, publicados entre 1873 y 1897, se alejó progresivamente de los temas específicos que habían provocado inicialmente su pensamiento sobre los conjuntos y se acercó a las poderosas ideas generales que forman la base de la teoría de conjuntos moderna.

El uso de conjuntos infinitos por parte de Cantor, a quien no le parecía menos natural que el uso de conjuntos finitos, representó uno de los movimientos más atrevidos a los ojos de sus contemporáneos. Uno de los temas más delicados en matemáticas siempre ha sido el concepto de “infinito”. Un ejemplo ilustrativo es la famosa “paradoja” de Zenón, donde un segmento de línea unitario se subdivide en infinitos subintervalos por los puntos $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, etc. Aunque cada subintervalo tiene una longitud definida y distinta de cero, la suma total de estas longitudes infinitas sigue siendo finita, una conclusión que desafía la intuición. Para abordar estas paradojas, los antiguos matemáticos distinguieron entre el infinito “real”, en el que se imagina la existencia simultánea de un número ilimitado de elementos, y el infinito “virtual”, que representa solo el potencial de superar cualquier cantidad finita. El infinito “real” era a menudo visto con recelo, mientras que el infinito “virtual” se consideraba más seguro y aceptable.

Por lo tanto, no sorprende que la teoría de Cantor no fuera instantáneamente adoptada por sus contemporáneos debido a su uso desenfrenado de conjuntos infinitos (el concepto de infinito ciertamente se tomó aquí en el sentido “real”). Al principio, fue tratado con sospecha y, a veces, incluso con odio absoluto. Los elementos más “apetecibles” de la teoría de Cantor, sin embargo, se utilizaron ampliamente en la década de 1890 porque ofrecían un marco sofisticado para una amplia gama de ideas matemáticas. Incluso las características más innovadoras de la teoría de conjuntos habían

sido adoptadas por un gran número de matemáticos a principios de siglo, principalmente porque demostraron ser herramientas muy útiles, especialmente en el análisis.

Mientras tanto, la teoría de conjuntos se estaba representando en su luz más esperanzadora, como el campo básico y “unificador” de las matemáticas, gracias al trabajo de numerosos matemáticos importantes, incluido Dedekind. Los matemáticos han contemplado la perspectiva de unificar todo el campo bajo un puñado de principios fundamentales desde el principio de los tiempos. Numerosas escuelas antiguas, desde Euclides hasta la Edad Media, argumentaron que las diversas ramas de las matemáticas podían agruparse en geometría (los números podían considerarse proporciones geométricas); sin embargo, el siglo XIX vio un intento de unificación mucho más exitoso cuando el trabajo de Weierstrass, Dedekind y otros sugirieron que todas las matemáticas clásicas podrían derivarse de la aritmética de los números naturales (enteros positivos). Se demostró que cualquier número real puede considerarse como una serie de números racionales, conocida como “secuencia de Cauchy”. Como resultado, el estudio de los números reales se simplifica al estudio de los números racionales. Sin embargo, debido a que los números racionales se consideran convenientemente como pares de enteros, el sistema de números reales, que abarca el cálculo y, a través de la geometría analítica, toda la geometría, puede finalmente basarse en los números naturales.

En su breve libro *Was sind und was sollen die Zahlen* (1888), Dedekind estableció que la noción de números naturales puede derivarse de las nociones fundamentales de la teoría de conjuntos en esta coyuntura, clave en el desarrollo de pensamientos sobre los fundamentos de las matemáticas. Un camino más reciente con el cual se verifica esto es el siguiente: definimos “0” como el conjunto vacío $\emptyset$ (es decir, el conjunto sin elementos, indicado

por el símbolo $\emptyset$), mientras que definimos “1” como el conjunto $\{\emptyset\}$, es decir, el conjunto (de conjuntos) que tiene un elemento $\emptyset$. Por lo tanto, el conjunto “ $\{0, 1\}$ ” se define como “2”, “3” como “ $\{0, 1, 2\}$ ”, y así sucesivamente. Usando estas definiciones y la teoría fundamental de conjuntos, es posible demostrar todas las características de los números naturales (Ver Tabla 4.1).

Tabla 4.1. Ejemplo de una característica (Axioma de Peano)

Número	Conjunto
0	$\emptyset$
1	$\{\emptyset\}$
2	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
3	$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Por lo tanto, para el cambio de siglo, la teoría de conjuntos no sólo había ganado el apoyo de una parte considerable de la comunidad matemática como una herramienta esencial, sino que también era un fuerte contendiente para el primer puesto entre las ciencias matemáticas. Irónicamente, la primera de varias “paradojas” que finalmente plantearon serias dudas sobre la validez fundamental de la teoría de conjuntos en su forma “cantoriana” se anunció justo cuando las ideas de Cantor parecían finalmente ganar aceptación.

Similar al trabajo original de Cantor, una introducción a la teoría de conjuntos a menudo trata sobre la teoría elemental. Con esta estrategia menos complicada, se genera una teoría de conjuntos que permita la creación de contradicciones. Puede parecer extraño sugerir intencionalmente algo como esto, pero las inconsistencias no son un problema si, como en este caso, el universo discursivo está bien definido. Además, debido a que los teoremas que se presentan pueden probarse utilizando sistemas alternativos en los que no surgen las paradojas, la presencia de paradojas en la teoría básica no influye en la validez de los argumentos.

4.2 Cálculo proposicional

4.2.1 El alfabeto de la lógica proposicional

Dada su naturaleza simbólica y la exclusión inicial del componente semántico, el lenguaje para la lógica proposicional nos garantiza la eliminación de ambigüedades propias de los lenguajes naturales.

Denominaremos a "A" como el alfabeto para el lenguaje de la lógica proposicional y que consta de los siguientes símbolos.

1. Letras proposicionales pueden ser $(p, q, r, s, \dots)$ o también $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots)$ en el caso que las primeras letras no sean suficientes.
2. Símbolos auxiliares. (y)
3. Conectivos lógicos. Unario $\neg$ y Binarios $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Definición 4.1

Semántica de los símbolos del alfabeto

1. Una letra proposicional p se usa para representar cualquier expresión declarativa para la cual en un contexto determinado se puede decidir si es verdadera o falsa.
2. La tabla (4.2) resume el significado de los conectivos lógicos en un contexto determinado.

Tabla 4.2. Semántica de los símbolos del alfabeto

Símbolo	Nombre	Semántica
$\neg$	Negación	$\neg p$ es verdadera si p es falsa
$\wedge$	Conjunción	$(p \wedge q)$ solo es verdad si p es verdad y q es verdad
$\vee$	Disyunción	$(p \vee q)$ solo es falsa si p es falsa y q es falsa
$\rightarrow$	Condicional	$(p \rightarrow q)$ solo es falsa si p es verdadera y q es falsa
$\leftrightarrow$	bicondicional	$(p \leftrightarrow q)$ solo es verdad si p y q tienen el mismo valor de verdad

Definición 4.2

En lógica matemática, una **tautología** es una fórmula proposicional que es verdadera en todas las posibles asignaciones de valores de verdad a sus variables proposicionales. Es decir, una tautología es una proposición que no depende de ningún contexto o condición particular para su veracidad; es verdadera bajo cualquier interpretación.

Definición 4.3

La deducción proposicional:

Un enunciado en el lenguaje de la lógica que se asume como verdadero lo llamaremos **premisa**, y aquellos enunciados que siempre son verdaderos sin importar el contexto donde sean interpretados se denominan **tautologías**.

Algunas tautologías son de uso especial en el cálculo proposicional y por tal razón se les conoce como **reglas de inferencia**.

Al proceso de obtener nuevas premisas (conclusión) a partir de premisas dadas usando reglas de inferencia se denomina **la deducción proposicional**, y tiene la forma.

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \mapsto q \quad (4.1)$$

Donde $p_1, p_2, \dots, p_n$ son premisas y q es la conclusión.

A continuación se presentan algunas tautologías importantes y probaremos la tautología número 7 como ejemplo, podemos utilizar una tabla de verdad (Ver Tabla 4.3) para verificar que ambas expresiones tienen el mismo valor de verdad en todas las posibles combinaciones de valores de verdad para p y q . Esta fórmula es un ejemplo de las leyes de De Morgan.

Tabla 4.3. Ley de De Morgan $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

A continuación, se presentan algunas tautologías que son usadas con frecuencia en el proceso deductivo.

4.2.2 Tautologías

1. $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
2. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
3. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
4. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
5. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
6. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
7. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
8. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
9. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
10. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
11. $(p \longrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
12. $\neg(p \longrightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$
13. $[p \longrightarrow (q \longrightarrow r)] \Leftrightarrow ((p \wedge q) \longrightarrow r)$
14. $[p \longrightarrow (q \longrightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow r)]$
15. $\neg(p \longleftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)]$
16. $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
17. $(p \longrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p)$
18. $[p \wedge (p \longrightarrow q)] \Leftrightarrow q$
19. $p \Leftrightarrow (q \longrightarrow p)$
20. $[p \longrightarrow (q \wedge \neg q)] \Leftrightarrow \neg p$

Un buen ejemplo consiste en probar que cada uno de los enunciados anteriores es una tautología, pueden hacerse usando tablas de verdad (Ver Tabla 4.3) ó usando las reglas anteriores.

Ejemplo 4.1

La siguiente prueba guiada te permitirá insertar en los espacios proporcionados las definiciones, proposiciones, teoremas u otros conceptos necesarios para justificar la validez de cada uno de los pasos.

Probar que, $[p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow [\neg(p \wedge q) \rightarrow r]]$. Veámoslo, (debe justificar cada paso)

$$\begin{aligned}
 [p \rightarrow (q \rightarrow r)] &\Leftrightarrow [\neg p \vee (q \rightarrow r)] && \underline{\hspace{2cm}} \\
 &\Leftrightarrow [\neg p \vee (\neg q \vee r)] && \underline{\hspace{2cm}} \\
 &\Leftrightarrow [(\neg p \vee \neg q) \vee r] && \underline{\hspace{2cm}} \\
 &\Leftrightarrow [\neg(p \wedge q) \vee r] && \underline{\hspace{2cm}} \\
 &\Leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r] && \underline{\hspace{2cm}}
 \end{aligned}$$

4.3 Lenguaje de primer orden

El lenguaje de primer orden (también conocido como lógica de primer orden o lógica de predicados) es un formalismo que permite la representación y el análisis riguroso de estructuras matemáticas, relaciones y propiedades. A diferencia de la lógica proposicional, que solo maneja enunciados completos (verdaderos o falsos), el lenguaje de primer orden introduce el uso de cuantificadores, variables, predicados y funciones, permitiendo expresar afirmaciones más complejas sobre elementos individuales dentro de un dominio.

4.3.1 Cuantificador universal

El cuantificador universal $\forall$ es utilizado para formar una proposición $(\forall x)P(x)$, leída como: *para todo x , $P(x)$ es verdadero*. Esta proposición es verdad si y sólo si $P(x_i)$ es verdad para cada i en un universo $\mathcal{U}$. Esto es:

$$(\forall x)P(x) = P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge \dots$$

4.3.2 Cuantificador existencial

El cuantificador existencial $\exists$ es utilizado para formar una proposición $(\exists x)P(x)$, leída como: *existe un x , tal que $P(x)$ es verdadero*. Esta proposición es verdad si y sólo si $P(a)$ es verdad para al menos un a en $\mathcal{U}$. Esto es:

$$(\exists x)P(x) \Leftrightarrow P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3) \vee \dots$$

4.3.3 Propiedades de los cuantificadores

Los cuantificadores del mismo tipo pueden ser intercambiados y combinados sin cambiar el valor de verdad de las proposiciones:

$$(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x, y) \Leftrightarrow (\forall x, y)P(x, y)$$

$$(\exists x)(\exists y)P(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x, y) \Leftrightarrow (\exists x, y)P(x, y)$$

Sin embargo, esto no puede ser realizado con cuantificadores distintos.

Otras propiedades

- $\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$
- $\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$
- $[(\forall x)P(x)] \wedge [(\forall x)Q(x)] \Leftrightarrow (\forall x)[P(x) \wedge Q(x)]$
- $[(\forall x)P(x)] \vee [(\forall x)Q(x)] \Rightarrow (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$
- $[(\exists x)P(x)] \vee [(\exists x)Q(x)] \Leftrightarrow (\exists x)[P(x) \vee Q(x)]$
- $(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow [(\exists x)P(x)] \wedge [(\exists x)Q(x)]$
- $(\exists x)P(x) \vee [(\exists x)Q(x)] \Leftrightarrow (\exists x)[P(x) \vee Q(x)]$