

Prólogo

Este libro, denominado *Técnicas de integración en el cálculo integral*, surge como una respuesta a las necesidades de estudiantes y profesores de las facultades de Ingeniería, Ciencias Empresariales y Económicas, Ciencias Básicas y Ciencias de la Educación de la Universidad del Magdalena acerca de la formación matemática de futuros profesionales. Entre estos requerimientos se encuentran los relacionados con intervenir los problemas de deserción y mortalidad académica en el área de matemáticas, y con ello la utilización de materiales tipo libro de texto que se enmarquen en las orientaciones institucionales y sirvan de apoyo para el proceso de enseñanza y aprendizaje de dicha disciplina.

De acuerdo con los diferentes diagnósticos que semestralmente se hacen en el área de matemática de la Universidad del Magdalena, uno de los factores que inciden en los problemas de deserción y mortalidad académica en el cálculo integral es la dificultad que presentan los estudiantes para resolver integrales, un problema que se evidencia en otras asignaturas que requieren el uso de integrales. Este panorama puede ser común en otras universidades del país. Así pues, se considera que fortaleciendo la comprensión de los conceptos y procedimientos de las diferentes técnicas de integración es posible mejorar las habilidades de los alumnos para resolver integrales y con ello contribuir con su formación matemática.

Por otra parte, el bajo nivel en el área de matemáticas de los estudiantes que ingresan a la Universidad del Magdalena genera la necesidad de fortalecer conceptos propios del álgebra, la trigonometría y el cálculo diferencial. Por lo tanto, es necesario contar con un recurso bibliográfico que permita fortalecer en estos ámbitos, pero en temáticas relacionadas con el cálculo integral. Es así como en este libro, además de desarrollar detalladamente las técnicas de integración, se brinda la oportunidad de reforzar algunos conceptos de álgebra, trigonometría y cálculo diferencial.

La intención de este libro es contribuir con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las técnicas de integración, tanto para el trabajo en el aula de clase como para el trabajo autónomo de los estudiantes. Para este fin, los autores han preferido fortalecer habilidades procedimentales relacionadas con el cálculo de integrales y han decidido no presentar problemas de aplicaciones. De tal forma, el contenido de este libro sirve de apoyo para las asignaturas de Cálculo Integral, Ecuaciones Diferenciales, Cálculo Vectorial, entre otras.

Se procura que el contenido de este libro sea pretexto para desarrollar competencias genéricas en la formación matemática de los estudiantes; en particular, las siguientes capacidades: para la

abstracción, el análisis y la síntesis; de comunicación oral y escrita; para identificar, plantear y resolver problemas; para el trabajo autónomo, y para tomar decisiones.

El capítulo uno presenta los conceptos de *antiderivada* y de *integral indefinida*. En este se plantea el uso de las propiedades de la integral indefinida, junto con algunas fórmulas básicas de integración para el cálculo de integrales.

El capítulo dos introduce la técnica de *sustitución de la variable*, conocida también como sustitución simple o cambio de variable. En esta sección se relaciona el tema de función compuesta con las condiciones del integrando y la escogencia de una sustitución adecuada para la implementación de esta técnica. Además, se presentan algunas consideraciones relacionadas con la estructura del integrando; entre ellas, que el integrando sea una función racional impropia o que contenga expresiones de segundo grado. También se muestra una variación de la estrategia del cambio de variable al expresar —después de la escogencia de la sustitución $u = g(x)$ — x en función de u y dx en función de du .

El capítulo tres aborda la técnica de *integración por partes*, relacionada con la regla del producto para la derivación. En este apartado se presentan como sugerencias para la implementación de esta técnica el uso de una estrategia denominada ILATE y el reconocimiento de formas iterativas o cíclicas en el desarrollo del proceso de integración. También se hace referencia a la *integración tabular*, la cual es efectiva cuando se requieren muchas repeticiones en la integración por partes.

El capítulo cuatro describe la técnica de integración de *potencias trigonométricas*, la cual se refiere al cálculo de integrales que involucran en el integrando potencias trigonométricas y productos de estas, así como productos de funciones sinusoidales que no tienen el mismo argumento. Este apartado contiene tres secciones que incluyen integrales de potencias de seno y coseno; potencias de tangente, cotangente, secante y cosecante y, finalmente, potencias de senos y cosenos con diferente argumento. En cada caso se presenta la información necesaria para el desarrollo de las integrales a través de tablas, lo cual permite una mejor comprensión y manejo del procedimiento.

El capítulo cinco se refiere a la técnica de integración por *sustitución trigonométrica*. Para ello, muestra un esquema conceptual sobre las diferentes estructuras del integrando que ilustra las condiciones necesarias para aplicar este procedimiento. Además, se expone una sugerencia con una serie de pasos que permite orientar al estudiante en la resolución de integrales que requieran el uso de una sustitución trigonométrica.

El capítulo seis desarrolla la técnica de integración por *fracciones parciales*. Con ese fin, considera las dos siguientes situaciones: cuando el denominador de una función racional tiene factores lineales y cuando tiene factores cuadráticos irreducibles. Así, este apartado está conformado por cuatro secciones sobre integración por fracciones parciales: las dos primeras se refieren a la integración por fracciones parciales cuando el denominador tiene factores lineales repetidos o no repetidos, mientras que las siguientes dos describen la integración por fracciones parciales cuando el denominador tiene factores cuadráticos irreducibles repetidos o no repetidos.

El capítulo siete trata sobre las técnicas por *sustituciones diversas*, considerando otras técnicas que complementan el conjunto de estrategias necesarias para resolver un mayor número de integrales. Estos procedimientos alternativos son: sustitución del ángulo medio, racionalización de funciones irracionales, integrales binomias, sustituciones de Euler y método alemán de reducción.

Al final del libro se presentan varios apéndices relacionados con: propiedades y operaciones con números reales, propiedades de la potenciación y la radicación, productos notables, fórmulas de factorización, propiedades de logaritmos, polinomios, trigonometría y fórmulas de derivación. La intención de este cierre es ayudar a complementar algunos conocimientos básicos que son necesarios para el desarrollo de ejemplos y ejercicios tratados en los capítulos. De tal forma, se espera que el uso de esta publicación contribuya con la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las técnicas de integración a nivel universitario.

Santa Marta, 2022

Los autores

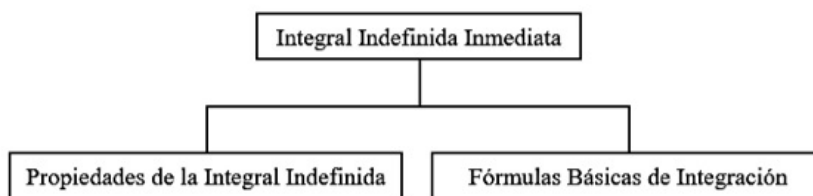
1

Integral indefinida inmediata

Introducción

Este capítulo presenta inicialmente algunos conceptos fundamentales para el estudio de las técnicas de integración: antiderivada, integral indefinida e integración. Esto contempla la necesidad de dominar algunas propiedades de la integral indefinida y el manejo de fórmulas básicas de integración para apropiarse de las técnicas mencionadas. Así, las integrales cuya solución solo requiere el uso de propiedades de la integral indefinida o la aplicación de una fórmula de integración se denominarán integrales inmediatas (figura 1.1).

Figura 1.1: Integral indefinida inmediata



Fuente: elaboración propia.

Los objetivos de este capítulo son:

- ① Identificar las propiedades de la integral indefinida y aplicarlas en el cálculo de integrales indefinidas.
- ② Resolver integrales relacionando la estructura del integrando con alguna fórmula básica de integración.
- ③ Resolver integrales inmediatas.

Antiderivada

El proceso de diferenciación es objeto de estudio del cálculo diferencial, en el cual se destacan el cálculo y la aplicación de las derivadas de funciones. En esta sección se pretende buscar un proceso inverso, es decir, encontrar una función cuando se conoce su derivada. Tal función se conoce como *antiderivada*.

Definición 1.1 Antiderivada

Se dice que una función $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$ para cada x en el dominio de $f(x)$.

Exploración 1: Verifique que $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 5x$ es una antiderivada de $f(x) = x^3 + 5$.

Solución

$F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ si y solo si $F'(x) = f(x)$. Por lo tanto, derivando a $F(x)$ se tiene:

$$F'(x) = \frac{1}{4}(4x^3) + 5 = x^3 + 5 = f(x).$$

¿Se puede construir otra antiderivada de la función $f(x) = x^3 + 5$? Analice los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.1

$F(x) = x^4$ es una antiderivada de $f(x) = 4x^3$ puesto que $F'(x) = 4x^3 = f(x)$.

Ejemplo 1.2

$G(x) = x^4 + 12$ es una antiderivada de $f(x) = 4x^3$ puesto que $G'(x) = 4x^3 = f(x)$.

Ejemplo 1.3

$H(x) = x^4 - \pi$ es una antiderivada de $f(x) = 4x^3$ puesto que $H'(x) = 4x^3 = f(x)$.

Ejemplo 1.4

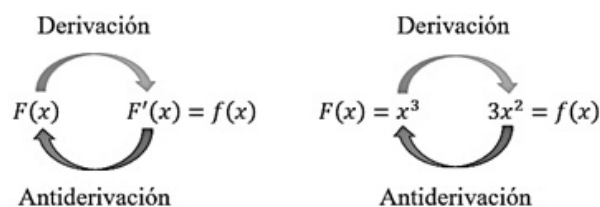
$I(x) = \sin \alpha$ es una antiderivada de $g(x) = \cos \alpha$ puesto que $I'(x) = \sin \alpha = g(x)$.

Ejemplo 1.5

$J(x) = \sin \alpha - 3/2$ es una antiderivada de $g(x) = \cos \alpha$ puesto que $J'(x) = \sin \alpha = g(x)$.

En la figura 1.2 se muestra un esquema que relaciona el proceso de derivación como inverso al de antiderivación. Además, se presenta un ejemplo para una función polinomial.

En general, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces lo es también cualquier función de la forma $G(x) = F(x) + k$, donde k es una constante. Esto se puede plantear a través del teorema 1.1

Figura 1.2: Derivación y antiderivación

Fuente: elaboración propia.

Teorema 1.1

Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en un intervalo I , entonces $G(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en el intervalo I si y solo si $G(x)$ es de la forma $G(x) = F(x) + k$, para todo $x \in I$, donde k es una constante.

Demostración

($\rightarrow$) Si $G(x) = F(x) + k$, $F'(x) = f(x)$ y k es una constante, entonces:

$$G'(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + k] = F'(x) + 0 = f(x).$$

($\leftarrow$) Supongamos que G es una antiderivada de f y definamos una función H tal que $H(x) = G(x) - F(x)$.

Para cualesquiera dos puntos a y b , con $(a < b)$ en el intervalo, H es continua dentro de $[a, b]$ y diferenciable dentro de (a, b) . Utilizando el teorema del valor medio, se tiene que:

$$H'(c) = \frac{H(b) - H(a)}{b - a}, \quad (1.1)$$

para algún c en (a, b) . Sin embargo, $H'(c) = 0$, y por tanto $H(a) = H(b)$. Ahora, como a y b son puntos arbitrarios en el intervalo, se sabe que H es una función constante k . Así, $G(x) - F(x) = k$, lo cual conlleva a que $G(x) = F(x) + k$.

Ejemplo 1.6

De acuerdo con el teorema 1.1, muestre que la función $F(x) = x^3$ es una antiderivada de la función $f(x) = 3x^2$ y escriba una expresión para las antiderivadas de $f(x)$ en forma general.

Solución

Puesto que $F'(x) = 3x^2 = f(x)$, se tiene que $F(x) = x^3$ es una antiderivada de la función

$$f(x) = 3x^2.$$

Con el fin de escribir una expresión para las antiderivadas de $f(x)$ en forma general, debemos tener en cuenta que si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces lo es también cualquier función de la forma $G(x) = F(x) + k$, luego cada antiderivada de la función $f(x) = 3x^2$ tiene la forma $G(x) = 3x^2 + k$, donde k es alguna constante.

Integral indefinida

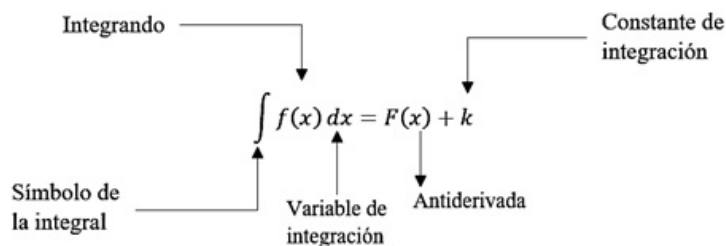
El conjunto de todas las antiderivadas de la función f se denomina *integral indefinida* de f respecto a x y se denota con la expresión:

$$\int f(x)dx = F(x) + k, \quad (1.2)$$

donde $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, y k , una constante.

El término “indefinida” se puede asociar de manera intuitiva con el hecho de que en la ecuación 1.2 la constante k puede tomar cualquier valor real. El símbolo $\int$ (integral) representa la *operación antiderivación*; la función $f(x)$ es el *integrando* de la integral, y x es la *variable de integración*, la cual puede ser designada por cualquier letra ($t, u, y, z, \dots$). El *integrando* siempre se ubica entre el signo de la integral y la diferencial de la variable de integración. Esto se puede ilustrar en la figura 1.3.

Figura 1.3: Elementos de la integral indefinida



Fuente: elaboración propia.

Definición 1.2 Integral indefinida

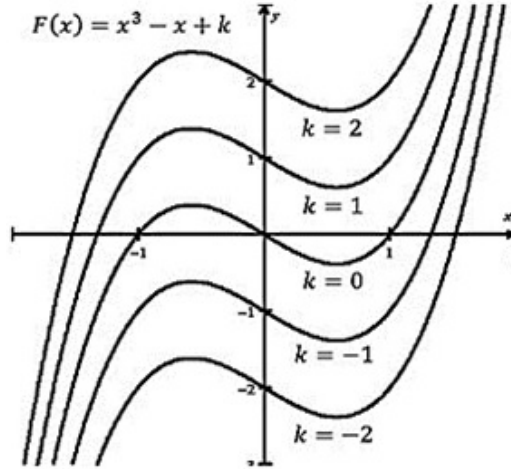
Si $F(x)$ es una antiderivada de la función $f(x)$, entonces $\int f(x)dx = F(x) + k$, donde $F'(x) = f(x)$, y k es una constante real arbitraria.

En esta definición 1.2 se aprecia que la integral indefinida representa una familia de funciones, o bien un conjunto de antiderivadas. Al representar gráficamente una integral indefinida, como por ejemplo:

$$\int (2x^2 - 1)dx = \frac{2}{3}x^3 - x + k, \quad (1.3)$$

se obtiene la figura 1.4

Figura 1.4: Integral indefinida como una familia de funciones



Fuente elaboración propia.

Por otra parte, se puede entender la integral indefinida como la operación que permite determinar las soluciones de una ecuación diferencial $dy = f(x)dx$, de tal manera que

$$y = \int f(x)dx = F(x) + k. \quad (1.4)$$

La integración como operación inversa a la derivación puede probarse mediante la igualdad $F'(x) = f(x)$ en la definición de integral indefinida, es decir:

$$\int F'(x)dx = F(x) + k. \quad (1.5)$$

Por otra parte, la derivación como operación inversa de la integración se puede representar como

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x)dx \right) = f(x). \quad (1.6)$$

Una consideración significativa entre la derivación y la integración es que, si bien la derivación de funciones elementales conduce siempre a funciones elementales, la integración no siempre puede conducir a funciones elementales. Esto se puede observar a través de las siguientes integrales, las cuales no se pueden expresar mediante funciones elementales, es decir, no tienen antiderivada:

$$\int e^{(-x^2)} dx \quad (\text{la integral de Poisson}). \quad (1.7a)$$

$$\int \operatorname{sen} x^2 dx, \int \cos x^2 dx \quad (\text{la integral de Fresnel}). \quad (1.7b)$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} \quad 0 < x \neq 1 \quad (\text{logaritmo integral}). \quad (1.7c)$$

$$\int \frac{e^x}{x} dx. \quad (1.7d)$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \quad x \neq 0 \quad (\text{seno integral}). \quad (1.7e)$$

Para este tipo de integrales se pueden obtener aproximaciones mediante procedimientos como la integración numérica, el cual no es objeto de estudio de este libro.

Propiedades de la integral indefinida

Las siguientes afirmaciones son propiedades de la integral indefinida, donde las funciones dadas están definidas y son integrables en un mismo intervalo:

1. La diferencial de la integral indefinida es igual al integrando multiplicado por la diferencial de la variable de integración:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \quad (1.8)$$

2. La derivada de la integral indefinida es igual al integrando:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x). \quad (1.9)$$

3. La integral indefinida de la diferencial de una función es igual a esta función más una constante arbitraria:

$$\int dF(x)dx = F(x) + k. \quad (1.10)$$

En el caso particular,

$$\int dx = x + k. \quad (1.11)$$

4. Sean f y g dos funciones que tienen antiderivadas y sea k una constante; entonces,

$$\int kf(x) = k \int f(x)dx. \quad (1.12)$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \quad (1.13)$$

5. Si r es un número racional, entonces

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + k, \quad r \neq -1. \quad (1.14)$$

Ejemplo 1.7

Calcule las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{x^2\sqrt{x}} - x^{1/4} + 1 \right) dx. \quad \text{b) } \int \left(\frac{t^4 + 3t^2 - 1}{\sqrt{t}} \right) dt. \quad \text{c) } \int \left(\sqrt{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x^3}} \right)^2 dx.$$

Solución

a)

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{x^2\sqrt{x}} - x^{1/4} + 1 \right) dx &= \int \left(\frac{5}{x^{2/3}} + \frac{2}{x^{5/2}} - x^{1/4} + 1 \right) dx \\ &= \int (5x^{-2/3} + 2x^{-5/2} - x^{1/4} + 1) dx \\ &= 5 \int x^{-2/3} dx + 2 \int x^{-5/2} dx - \int x^{1/4} dx + 1 \int dx \quad \text{Propiedad 4} \\ &= 5 \left(\frac{x^{1/3}}{\frac{1}{3}} \right) + 2 \left(\frac{x^{-3/2}}{-\frac{3}{2}} \right) - \frac{x^{5/4}}{\frac{5}{4}} + x + k \quad \text{Propiedad 5 y 3} \\ &= 15x^{1/3} - \frac{4}{3x^{3/2}} - \frac{4}{5}x^{5/4} + x + k. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{t^4 + 3t^2 - 1}{\sqrt{t}} \right) dt &= \int \left(\frac{t^4 + 3t^2 - 1}{t^{1/2}} \right) dt \\ &= \int \frac{t^4}{t^{1/2}} dt + \int \frac{3t^2}{t^{1/2}} dt - \int \frac{1}{t^{1/2}} dt \quad \text{Propiedad 4} \\ &= \int t^{7/2} dt + 3 \int t^{3/2} dt - \int t^{-1/2} dt \\ &= \frac{2}{9}t^{9/2} + \frac{6}{5}t^{5/2} - 2t^{1/2} + k. \quad \text{Propiedad 5} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \int \left(\sqrt{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x^3}} \right)^2 dx &= \int \left(x^3 - 4 + \frac{4}{x^3} \right) dx \\ &= \int x^3 dx - 4 \int dx + 4 \int x^{-3} dx \quad \text{Propiedad 4} \\ &= \frac{x^4}{4} - 4x + \frac{4x^{-2}}{-2} + k \quad \text{Propiedad 5} \\ &= \frac{1}{4}x^4 - 4x - \frac{2}{x^2} + k. \end{aligned}$$