

## Prólogo

La idea de este libro surgió de la necesidad de adaptar la enseñanza de la economía matemática tanto a las exigencias del programa de Economía en esa área como a la formación con la que llegan los estudiantes de pregrado que cursan la asignatura en la Universidad del Magdalena. Existen excelentes libros de texto dedicados a la economía matemática para este nivel; algunos clásicos, como los escritos por A. Chiang y K. Wainwright, y por K. Sydsaeter y P. Hammond. Desafortunadamente, las restricciones de tiempo obligan a omitir en esta publicación un buen número de temas matemáticos y económicos que los libros mencionados abarcan porque se estudian con más detalle y profundidad en cursos específicos de la carrera. Se excluyen además los temas que consideramos mejor adaptados para cursos de economía y economía matemática más avanzados que el nuestro.

Debido a las anteriores razones, el libro hace una muy modesta referencia a la economía y se limita a los temas matemáticos que el estudiante necesita para cursar con éxito asignaturas concretas tales como Econometría, Microeconomía y Macroeconomía, y para entender artículos científicos de nivel de pregrado asignados como lectura complementaria. El lenguaje usado es un tanto informal y se sacrifica rigor a cambio de claridad. Los pocos teoremas enunciados se dan sin demostración. Tampoco se cubren con mucho detalle las áreas de cálculo y álgebra lineal que los alumnos ya han estudiado, aunque algunos temas conocidos se explican desde una perspectiva diferente, mientras que otros son completamente nuevos.

En cuanto al contenido del libro, el capítulo 1 incorpora material elemental diseñado para nivelar el conocimiento matemático básico necesario para el curso. En los capítulos 2 a 6 se abordan diversos temas de álgebra lineal y cálculo indispensables para enfrentar el resto de los capítulos. El núcleo del curso, y consecuentemente del libro, lo constituyen la optimización sin restricciones (capítulo 7), la optimización con restricciones de igualdad (capítulo 8), las ecuaciones recurrentes (capítulo 9) y, finalmente, las ecuaciones diferenciales (capítulo 10).

No obstante el comentario anterior sobre el énfasis en las matemáticas, casi cada capítulo del libro incorpora al menos una aplicación económica. A modo de ilustración mencionamos que en la sección 2.3 se encuentra un análisis de la oferta y la demanda, la sección 3.2 contiene la elasticidad parcial y en la Sección 9.1 está un modelo de crecimiento. El propósito es que el estudiante reconozca el vínculo entre la teoría matemática, por un lado, y la teoría y las aplicaciones económicas por el otro.

En comparación con publicaciones de economía matemática de similar nivel, este libro contiene algunas novedades que vale la pena destacar. Entre ellas se cuenta la extracción del segundo diferencial de una función, de una y dos variables, directamente de la fórmula de Taylor en lugar de hacerlo por derivación. También lo es el uso del teorema de Cayley-Hamilton para el cálculo de la inversa de una matriz, omitiendo así el cálculo tedioso de la matriz adjunta, entre otras. Sin embargo, la principal innovación posiblemente la constituya el empleo tanto de la regla de los signos de Descartes como del teorema de los discos de

Gershgorin para determinar el signo de los valores propios de una matriz simétrica. Estas dos técnicas no se consideran en los textos tradicionales de economía matemática.

El autor agradece principalmente al Dr. Rafael García Luna, decano de la Facultad de Ciencias Empresariales y Económicas de la Universidad del Magdalena, por su apoyo al proyecto que hizo posible la realización de este trabajo. También va un especial agradecimiento al profesor Iván Cruz Daza por su colaboración en la producción de las figuras y en la implementación de la versión del libro en LaTeX.

Sobra decir que cualquier imprecisión o error es de mi entera responsabilidad.

Santa Marta

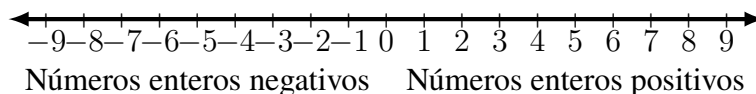
2023

### 1.1. Clasificación de los números reales

Históricamente, los primeros números en aparecer fueron aquellos usados para contar: 1, 2, 3, ... etc. El conjunto de estos números, llamados enteros positivos ( $\mathbb{Z}^+$ ) o naturales ( $\mathbb{N}$ ), es, obviamente, infinito (de un tipo especial de infinito) y, puesto que se puede hacer una lista de ellos, se dice que es un conjunto contable. De la misma manera, se dice que cualquier conjunto con la misma propiedad o, equivalentemente, cuyos elementos se pueden poner en una relación uno a uno con los números naturales es contable.

A los elementos de  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  también se les conoce como naturales. El conjunto  $\mathbb{Z}^+$  junto con el cero (0) y los enteros negativos  $\mathbb{Z}^- = \{\dots - 4, -3, -2, -1\}$  forman el conjunto de los enteros,  $\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Estos números se representan en una recta numérica horizontal como muestra la figura 1.1.

Figura 1.1. Recta numérica



Se puede observar que entre cada par de números enteros consecutivos hay todo un intervalo que parece vacío. Sin embargo, hay otros números que pueden ayudar a llenar esos vacíos; en particular, la solución de la ecuación algebraica de primer grado  $ax - b = 0$ , donde  $a, b \in \mathbb{Z}$  puede no ser un entero. Por ejemplo,  $3x - 6 = 0$  tiene como solución  $x = \frac{6}{3} = 2$ , un entero, pero la solución de  $3x - 1 = 0$  es  $x = \frac{1}{3}$ , que ya no se puede reducir a un entero y se dice que es racional.

Un número racional es uno de la forma  $\frac{p}{q}$ , donde  $p$  y  $q$  son enteros y  $q \neq 0$ . Esta última condición se impone porque la división por cero no está definida. En efecto, si asumimos que  $p \neq 0$ ,  $q = 0$  y  $r$  es cualquier número, entonces  $\frac{p}{0} = r$  implicaría que  $p = 0 \times r = 0$ , una contradicción. No hay que confundir la división por cero con el límite de un cociente en el que el denominador tiende a cero.

Al conjunto de los números racionales se le denomina  $\mathbb{Q}$ , y se puede observar que contiene al conjunto  $\mathbb{Z}$  (un número racional  $\frac{p}{q}$  es un entero cuando  $p$  es divisible por  $q$ ). Parece ser que los números racionales son «más numerosos» que los enteros y que podríamos «llenar» la recta numérica con números racionales. En efecto, solo para el intervalo  $(0, 1)$ , por ejemplo, podemos formar tantos racionales como deseemos de la siguiente manera: para cada  $q \in \{2, 3, 4, \dots\}$  escogemos sucesivamente  $p = 1, 2, \dots, q - 1$ . Ya que  $p < q$ , los números  $\frac{p}{q} = \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}$  son todos menores que 1.

Ilustramos el esquema con algunos resultados: por ejemplo, para  $q = 2$  se obtiene solo  $\frac{1}{2}$ ; para  $q = 3$ , los números  $\frac{99}{100}$ . Como  $q$  puede ser tan grande como se quiera, está claro que este esquema proporciona una infinidad de números racionales en el intervalo  $(0, 1)$ .

El mismo esquema se puede repetir en todos los intervalos, pero también debe ser claro que tanto los números  $q$  como los  $p$  se escogen de una manera ordenada y, por lo tanto, los números  $\frac{p}{q}$  son contables. La conclusión es que el conjunto  $\mathbb{Q}$  también es contable y, aunque parezca paradójico, contiene la misma cantidad de elementos (infinita) que  $\mathbb{Z}$ . Ahora, a pesar de que entre dos números racionales siempre hay un número racional, la recta numérica todavía tiene grandes vacíos.

Con las ecuaciones algebraicas (polinomiales) lineales y los números racionales no se agotan las posibilidades de obtener números reales de otra naturaleza. Tomemos como ejemplo la ecuación algebraica de segundo grado  $x^2 - 2 = 0$ . Aunque tiene dos raíces, la solución aritmética (es decir, positiva) de esta ecuación es  $x = \sqrt{2}$ , y se puede demostrar que  $\sqrt{2}$  no se puede escribir como el cociente de dos enteros y por lo tanto no es racional. Tales números se llaman irracionales. Estos incluyen a todos los números del tipo  $\sqrt[n]{a}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ , para cualquier  $n$ , si  $\sqrt[n]{a}$  no es un entero. También comprende las combinaciones de esas raíces con otras y con números racionales; por ejemplo,  $1 + \sqrt{5}$ ,  $\sqrt{3} - \sqrt[3]{4}$ , etc.

Más generalmente, son algebraicos irracionales todas las raíces reales no racionales de la ecuación algebraica de coeficientes enteros  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ ,  $a_n \neq 0$ . Por el contrario, la ecuación algebraica  $x^2 - 4 = 0$  tiene por raíz aritmética el número racional  $x = 2$ . Los números reales que son raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros se clasifican como algebraicos.

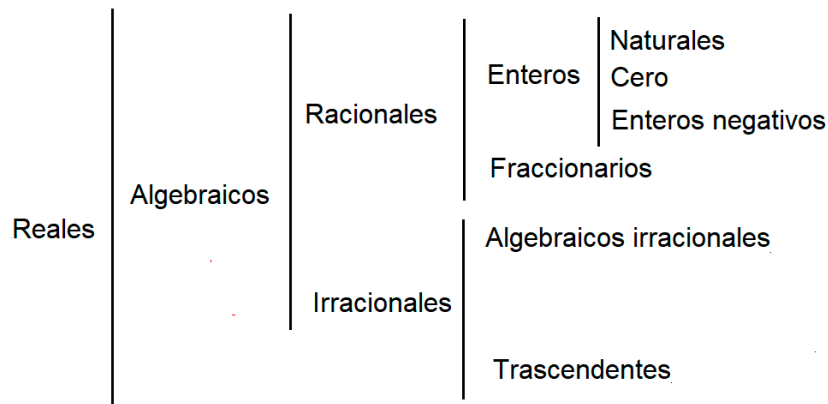
De estos ejemplos queda claro que el conjunto de números algebraicos contiene a los racionales y a los algebraicos irracionales. Además, puesto que el conjunto de los polinomios con coeficientes enteros es contable (porque el conjunto de sus coeficientes es contable), el conjunto de números algebraicos también es contable. Por esta razón se dice, en el contexto de los números reales, que los números algebraicos forman un subconjunto insignificante.

Existe una clase de números irracionales que no son algebraicos, es decir, no son raíces de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros. Entre ellos, para nombrar algunos, están  $\pi$  y

$e$ , y si  $a$  es algebraico y  $a \neq 0, 1$ ,  $\ln a$ , así como  $\sin a$  si  $a \neq 0$  y está dado en radianes. De estos números, denominados trascendentes, se conocen relativamente pocos, sobre todo por la dificultad de demostrar que un número dado es trascendente. Sin embargo, se ha demostrado que el conjunto de los números reales es incontable (es decir, más numeroso que cualquier conjunto contable) y, como consecuencia, se puede afirmar que casi todos los números reales son trascendentes.

Existen diversas maneras de clasificar a los números reales. En la figura 1.2 se muestra una versión útil para nuestros propósitos. Debe quedar claro que los números algebraicos y los trascendentes pueden ser tanto reales como complejos.

Figura 1.2. Clasificación de los números reales



**Nota 1.** Al número  $e$  en textos históricos se le conoce como constante de Napier o constante de Euler, pero en matemáticas se lee como la letra que lo representa,  $e$ , y no es correcto usar otra terminología.

La elipsis ... o puntos suspensivos se usa para representar una sucesión de elementos cuya identidad se sobreentiende a partir del contexto. Debe estar claro que en la suma  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$  hay  $n$  elementos, no tres, y los que faltan son  $x_3, x_4$ , etc., hasta  $x_{n-1}$  incluido.

### 1.1.1. Representación decimal

Todo número real no negativo  $r$  admite una representación por medio de la sucesión de símbolos

$$r = b, a_1 a_2 a_3 \dots,$$

donde  $b$  es la parte entera (un número entero cualquiera), la coma es el separador decimal (puede ser un punto) y los  $a_i, i = 1, 2, \dots$  son dígitos enteros entre cero y nueve. La sucesión después del punto decimal es generalmente infinita. Si es finita, se asume que los dígitos

faltantes son ceros. Si todos los  $a_i$  después del separador son cero, el separador también se omite y se obtiene el número entero  $b$ .

Si  $r$  es un número racional, su representación decimal es periódica. Es decir, hay una combinación de las  $a_i$ , llamada el período, que se repite indefinidamente. En ese caso se escribe un símbolo alrededor o sobre el período para indicar su naturaleza.

### Ejemplo 1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= 0,500\dots = 0,5 \text{ el período es el } 0. \\ \frac{1}{3} &= 0,333\dots = 0,\widehat{3}. \\ \frac{22}{7} &= 3,\widehat{142857}. \\ \frac{7}{105} &= 0,0\widehat{46}.\end{aligned}$$

Algunos números tienen más de una representación decimal: con período nueve o con período cero. Ejemplos:  $1,000\dots = 0,999\dots = 1$ ,  $\frac{1}{2} = 0,500\dots = 0,499\dots = 0,5$ . En estos casos la versión con período nueve se excluye.

Los números racionales  $\frac{p}{q}$  no enteros se escriben preferiblemente como fracciones irreducibles, es decir, simplificadas de tal manera que  $p$  y  $q$  sean coprimos, que no tengan factores primos comunes. Los números irracionales, por otro lado, no son periódicos. Su representación decimal contiene una sucesión infinita de dígitos que no se repiten.

En áreas del conocimiento con cierto nivel de abstracción como el cálculo, el álgebra lineal y la economía matemática, no se aconseja usar la representación decimal de los números, incluso cuando esta es finita. De su uso y abuso sufre la estética, y la precisión también puede salir perjudicada. Después de todo, números como  $\frac{1}{3}$ ,  $\sqrt{2}$  y  $\pi$  son tan legítimos como cualquier entero y sus versiones decimales de calculadora son solo aproximaciones, independientemente del número de dígitos decimales usados. Es incorrecto, por ejemplo, escribir la solución de  $3x - 1 = 0$  como  $x = 0,33$ , simplemente porque  $\frac{1}{3} \neq 0,33$ . No existen, entonces, «números decimales»: todos los números admiten una representación decimal. Otras representaciones menos comunes pero igualmente importantes según el contexto son, a manera de ejemplo, la representación binaria (de base dos) y la representación como fracción continua.

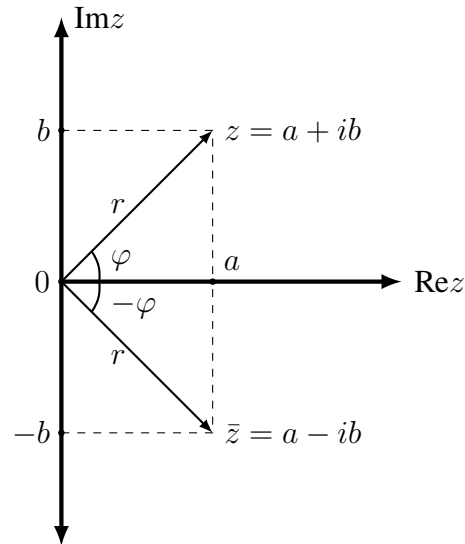
## 1.1.2. Números complejos

Los números complejos también surgieron de la necesidad de resolver ecuaciones. Por ejemplo, la solución de la ecuación  $x^2 + 3 = 0$  no puede ser real. Por un lado, salta a la vista que esa igualdad solo puede ser cierta si  $x^2 = -3$  y, por otro, sabemos que el cuadrado de cualquier número real es positivo.

Un número complejo es uno de la forma  $z = a + bi$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $i = \sqrt{-1}$ .  $a = \operatorname{Re}z$  y  $b = \operatorname{Im}z$  se llaman la parte real y la parte imaginaria de  $z$ , respectivamente. El número  $z$  es el punto formado por el par ordenado  $(a, b)$  que forma un vector desde el origen hasta el punto  $(a, b)$  en el plano complejo (figura 1.3). En este plano,  $\operatorname{Re}z$  es el eje real (la abcisa) e  $\operatorname{Im}z$

es el eje imaginario (la ordenada), similar al plano cartesiano de coordenadas rectangulares. Por esta razón, a la versión  $z = a + bi$  se le conoce como forma rectangular de  $z$ . El conjunto de los números complejos se representa por el símbolo  $\mathbb{C}$ . Es claro que  $\mathbb{R}$  está contenido en  $\mathbb{C}$ , ya que si  $b = 0$ , entonces  $z$  es el número real  $a$ . Si  $a = 0$ , por el contrario,  $z$  es el número imaginario  $bi$ . Estos temas se pueden consultar, por ejemplo, en Krasnov *et al.* (1983).

Figura 1.3. Plano complejo



A todo número  $z = a + bi$  le corresponde un número  $\bar{z} = a - bi$  que es la imagen especular de  $z$  con respecto al eje  $\text{Re}z$ , y se llama el conjugado de  $z$ . Esta propiedad es mutua:  $z$  es el conjugado de  $\bar{z}$ .

Si desde el punto  $(a, b)$  bajamos una perpendicular al eje  $\text{Re}z$ , el vector  $z$  es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lados  $a$  y  $b$ . La longitud de  $z$ , que se llama el módulo de  $z$  y se denota por  $|z|$ ,  $r$ , o  $\rho$ , se calcula apelando al teorema de Pitágoras. Es decir,

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (1.1)$$

y no es difícil ver que  $|\bar{z}| = |z|$ .

Si  $b = 0$ , es decir  $z = a$ , un número real, entonces  $\rho = |z| = \sqrt{a^2} = |a|$ , el valor absoluto de  $a$ . Es muy importante observar que  $\sqrt{a^2} \neq a$ .

**Nota 2.** Por definición, la función valor absoluto de un número  $x$  está dada por

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Otra versión muy útil de  $z$  es la conocida como forma polar. Para describir al número  $z$  basta con indicar el módulo  $\rho$  y el ángulo  $\theta$  que el vector  $z$  forma con el semieje positivo de

$Re z$ , medido en la dirección contraria a las agujas del reloj (en caso contrario, se considera negativo). Al ángulo  $\theta$  se le conoce también como argumento de  $z$ , y se escribe  $\theta = \arg z$ . De la figura se desprende que  $a = \rho \cos \theta$  y  $b = \rho \sin \theta$ . Entonces, sustituyendo en  $z = a + bi$  obtenemos la forma polar de  $z$ :

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

La expresión en paréntesis es la fórmula de Euler, que establece que para todo número real  $x$  se cumple que

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (1.3)$$

En consecuencia,  $z$  se puede escribir en la forma conocida como exponencial:

$$z = \rho e^{i\theta}. \quad (1.4)$$

Ya sabemos cómo calcular  $\rho$  a partir de  $z = a + bi$ . Sin embargo, el ángulo  $\theta$  no es único. La razón es que después de una o más rotaciones completas  $z$  vuelve a su posición original, pero el ángulo cambia en un múltiplo de  $2\pi$  o  $360^\circ$  (positivo o negativo, según la dirección de rotación). Para hallar  $\theta$  de forma única es necesario resolver el sistema

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\rho} \\ \sin \theta = \frac{b}{\rho} \end{cases} \quad (1.5)$$

Aunque más adelante vamos a utilizar este sistema, no habrá necesidad de encontrar  $\theta$  de forma explícita.

**Nota 3.** *El sistema de coordenadas polares consiste en una serie de círculos concéntricos y un eje con respecto al cual se mide el ángulo.*

**Nota 4.** *Dado que  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ , la raíz cuadrada de un número negativo se simplifica de la siguiente manera: si  $a > 0$ , entonces  $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} = \sqrt{a}i$ .*

*Por ejemplo,  $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$ , y  $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3}i$ .*

### 1.1.3. El lenguaje de las matemáticas

Cada disciplina requiere de un lenguaje especial para expresar conceptos e ideas con claridad. Las operaciones aritméticas básicas son cuatro: adición (suma: +), sustracción (diferencia: -), multiplicación (producto:  $\times$ ) y división (cociente).

Se llama suma a la operación y al resultado  $a + b = c$ . Los elementos de la suma se llaman sumandos.

Igualmente la resta o diferencia indica tanto la operación como el resultado:  $a - b = c$ . Se puede interpretar como la suma de  $a$  y el número negativo  $-b$ :  $a - b = a + (-b)$ .

Asimismo, se denomina multiplicación o producto a la operación y al resultado:  $ab = c$ . A los términos  $a$  y  $b$  se les llama factores. Si ambos  $a$  y  $b$  son números, se usa el símbolo  $\times$  o paréntesis entre ellos:  $2 \times 3 = 2(3)$ .

Finalmente, la división de  $a$  entre  $b$  (o el cociente de  $a$  y  $b$ ) se escribe como la fracción  $\frac{a}{b}$ , donde  $a$  es el numerador (dividendo), y  $b$ , el denominador (divisor). El resultado se llama cociente. En ocasiones se puede interpretar como el producto de  $a$  y el inverso (multiplicativo) de  $b$ :  $a \times \frac{1}{b}$ . La notación  $a/b$  también se usa, aunque con menos frecuencia por ser más propensa a ambigüedad. El símbolo  $\div$  se usa principalmente en aritmética elemental.

A menudo es necesario escribir en forma compacta la suma o el producto de elementos que difieren en una variable o un índice de interés. Ejemplo:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  y  $a_1 a_2 \dots a_n$ . En estos casos escribimos, respectivamente,  $\sum_{i=1}^n a_i$  y  $\prod_{i=1}^n a_i$ , y se leen: la suma y el producto, desde  $i = 1$  hasta  $n$ , de  $a_i$ . En una fracción se simplifican solo factores.

**Ejemplo 2.** En la fracción  $\frac{ab+c}{ad+e}$  no hay nada que simplificar por no haber factores iguales en el numerador y el denominador.

**Ejemplo 3.**  $\frac{abc}{adf} = \frac{bc}{df}$ .

**Nota 5.**  $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ , pero  $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ .

#### 1.1.4. Funciones elementales

Las funciones elementales son una clase de funciones compuesta por:

- Polinomios.
- Funciones exponenciales.
- Funciones logarítmicas.
- Funciones trigonométricas.
- Funciones trigonométricas inversas.

También se encuentran en esta categoría todas las funciones que se obtienen de las arriba mencionadas por medio de las cuatro operaciones aritméticas y la composición de funciones, utilizadas un número finito de veces.

Además, algunos escritos incluyen como función elemental a la función potencia con exponente real arbitrario (con exponente entero positivo es un caso especial de polinomio). Nosotros vamos a hacer lo mismo.

La clase de las funciones elementales es la que más se estudia y la que más frecuentemente se encuentra en las aplicaciones matemáticas. La derivada de una función elemental es una función elemental. Por el contrario, la integral indefinida de una función elemental no siempre es una función elemental.

**Nota 6.** La composición de una función  $f(x)$  con otra  $g(x)$  se escribe  $f \circ g$  o  $f(g(x))$ . Como se puede observar, es una operación que consiste en convertir una de las funciones en el argumento de la otra.

**Ejemplo 4.**  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $g(x) = \ln x$ . Entonces  $f(g(x)) = f(\ln x) = (\ln x)^2 + 1$ .

La función identidad (no es elemental) se define como aquella que no realiza ninguna acción sobre el argumento:

$$I(x) = x.$$

La inversa de una función  $f(x)$  se representa por  $f^{-1}(x)$  (cuando esta existe). Se cumple que

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = I(x) = x,$$

donde  $I(x)$  es la función identidad, una función que deja a su argumento intacto. Esta relación se interpreta diciendo que una función «anula» el efecto de su inversa.

La función identidad a veces se escribe  $1(x)$ . Asumiendo que las operaciones se pueden realizar, note la similitud entre  $f \circ f^{-1} = 1$  para funciones,  $xx^{-1} = 1$  para el producto de números y  $AA^{-1} = 1$  para el producto de matrices. Esta relación no es casual, pero su explicación está fuera del alcance de este libro.

## Polinomios

Un polinomio real de grado  $n$  en la variable  $x$  es una expresión que contiene una suma de potencias no negativas de  $x$  hasta  $n$  inclusive:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad a_i \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

También es común escribirlo en orden creciente de los exponentes. El polinomio es de grado cero si solo contiene a la constante.

Los polinomios son las funciones más sencillas. Están definidas para toda  $x$  y se dice que son el equivalente de los números enteros porque si los coeficientes y  $x$  son enteros, también lo es el polinomio. Por ejemplo, si  $p(x) = 2x^2 + 3$ , entonces  $p(2) = 11$ . Estas expresiones se usan, en particular, para aproximar funciones más complejas. Sin embargo, muy frecuentemente la utilidad de un polinomio está codificada en sus ceros. Por definición, dado un polinomio  $p(x)$ , se dice que un número  $x_0$  es un cero de  $p(x)$  si  $p(x_0) = 0$ . Por ejemplo,  $x = 1$  es un cero de  $p(x) = x^2 - 2x + 1$  puesto que  $p(1) = 1 - 2 + 1 = 0$ .

Está claro que para hallar los ceros de un polinomio hay que formar la ecuación  $p(x) = 0$  y resolverla (las raíces de la ecuación son los ceros del polinomio), pero antes del intento es bueno saber cuántos ceros esperamos encontrar. Aquí es de gran utilidad el siguiente teorema, conocido como teorema fundamental del álgebra: todo polinomio de grado  $n$  tiene  $n$  ceros complejos, no necesariamente distintos. Los ceros pueden ser todos complejos, todos reales, o puede haber de unos y de otros.

El polinomio  $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$  tiene tres ceros iguales a  $x = 1$ . Se dice que este es un cero de multiplicidad tres. Esto se desprende del hecho de que  $p(x) = (x - 1)^3 = (x - 1)(x - 1)(x - 1)$ .