

Índice general

Introducción	1
Presentación	3
0. El desarrollo de la lógica matemática	5
0.1. Introducción	6
0.2. La lógica antigua	6
0.3. La idea de un lenguaje completo y automático para razonar	8
0.4. Nuevos descubrimientos en álgebra y geometría	9
0.5. Existen partes de la matemática axiomatizables	10
0.5.1. <i>Los desarrollos de Boole, Peirce, Whitehead y Schröder</i>	11
0.5.2. <i>Los desarrollos de Frege</i>	13
0.5.3. <i>Los aportes de Peano</i>	13
0.5.4. <i>Los aportes de Turing</i>	14
0.5.5. <i>Las pretensiones de Whitehead y Russell</i>	14
0.5.6. <i>La lógica matemática en los últimos tiempos</i>	14
0.5.7. <i>La lógica difusa</i>	15
1. Los sistemas axiomáticos	17
Exploración 1	18
1.1. Introducción	20
1.1.1. <i>Definición</i>	20
1.1.2. <i>Axioma</i>	20
1.2. Los sistemas axiomáticos	21
1.3. Los axiomas en un sistema axiomático	21
1.4. La axiomatización en la vida práctica	21
1.4.1. <i>Axiomatización con base en la autoridad</i>	22
1.4.2. <i>Axiomatización con base en la opinión de un grupo numeroso</i>	23
1.4.3. <i>Axiomatización con base en la sumisión</i>	23

1.4.4.	<i>Axiomatización con base en las consecuencias</i>	23
1.4.5.	<i>Axiomatización con base en la persona</i>	24
1.4.6.	<i>Axiomatización por falsa causalidad</i>	24
1.4.7.	<i>Axiomatización por falta de pruebas en contra</i>	25
1.4.8.	<i>Axiomatización por generalización a partir de casos particulares</i>	25
1.4.9.	<i>Teorema</i>	26
1.5.	Ejercicios	28
2.	Proposiciones	31
	Exploración 2	32
2.1.	Introducción	34
2.2.	Proposición simple	34
2.3.	Ley del tercero excluido	34
2.4.	Ejercicios	36
2.5.	Proposiciones compuestas	37
2.5.1.	<i>Negación de una proposición simple</i>	37
2.5.2.	<i>Tabla de verdad de la negación</i>	37
2.5.3.	<i>Disyunción de dos proposiciones</i>	38
2.5.4.	<i>Tabla de verdad de la disyunción</i>	39
2.5.5.	<i>Conjunción de dos proposiciones</i>	39
2.5.6.	<i>Construcción de la tabla de verdad de la conjunción</i>	40
2.5.7.	<i>Tabla de verdad de la conjunción</i>	41
2.5.8.	<i>Disyunción exclusiva</i>	42
2.5.9.	<i>Tabla de verdad de la disyunción exclusiva</i>	43
2.5.10.	<i>Condicional</i>	44
2.5.11.	<i>Tabla de verdad de la condicional</i>	44
2.5.12.	<i>Bicondicional</i>	48
2.5.13.	<i>Tabla de verdad de la bicondicional</i>	48
2.6.	Ejercicios	51
2.7.	Sintaxis y semántica de la lógica de enunciados	54
2.7.1.	<i>Sintaxis de la lógica de enunciados</i>	54
2.7.2.	<i>Semántica de la lógica de enunciados</i>	54
2.8.	Ejercicios	56
3.	Interpretaciones oracionales	57
	Exploración 3	58
3.1.	Introducción	60
3.2.	Estructura de los enunciados	60
3.3.	Potencia de los términos de enlace	60
3.4.	Ejercicios	62
3.5.	Interpretaciones oracionales	66

3.6. Ejercicios	67
3.7. Valoración de enunciados	72
3.8. Diagramas de valoración	72
3.9. Función de valoración de enunciados	74
3.10. Ejercicios	76
3.11. Tablas de verdad y tautologías	78
3.11.1. <i>Tautologías</i>	84
3.11.2. <i>Contradicción</i>	85
3.11.3. <i>El problema de la contradicción</i>	86
3.11.4. <i>Contingencia</i>	87
3.12. Otro método para elaborar tablas de verdad	88
3.13. Ejercicios	90
3.14. Las tautologías más utilizadas	91
3.15. Ejercicios	92
4. La inferencia o deducción proposicional	93
Exploración 4	94
4.1. Introducción	96
4.2. Implicación tautológica	96
4.3. La inferencia o deducción lógica	99
4.4. Criterio de validez	99
4.5. Esquema de demostración	100
4.6. Las cuatro reglas de la deducción proposicional	100
4.6.1. <i>Regla P (regla de utilización de las premisas)</i>	101
4.6.2. <i>Regla I (regla de introducción de premisas)</i>	101
4.6.3. <i>Regla P C (regla de la prueba condicional)</i>	101
4.6.4. <i>Regla PI (regla de la prueba indirecta)</i>	104
4.7. Ejercicios	107
4.8. Falacias formales	117
4.8.1. <i>Falacia de afirmación del consecuente</i>	117
4.8.2. <i>Falacia de negación del antecedente</i>	118
4.8.3. <i>Silogismo disyuntivo falaz</i>	119
4.9. Ejercicios	121
4.10. Consistencia de un conjunto de premisas	123
4.10.1. <i>Criterio de consistencia</i>	123
4.10.2. <i>La prueba de consistencia</i>	123
4.11. Ejercicios	126
5. Teoremas y métodos de demostración	129
Exploración 5	130
5.1. Introducción	132

5.2.	Teoremas	132
5.2.1.	Axioma	132
5.2.2.	Teorema	133
5.2.2.1.	La forma de los teoremas	133
5.2.2.2.	Partes de un teorema	134
5.3.	Demostración de teoremas	134
5.4.	Métodos de demostración	135
5.4.1.	<i>El método directo</i>	135
5.4.1.1.	Teoremas cuya conclusión es una igualdad o una desigualdad	135
5.4.1.2.	Números reales	135
5.4.1.3.	Operaciones en los reales	136
5.4.1.4.	Axiomas de cuerpo	136
5.4.1.5.	Axiomas de orden	136
5.4.1.6.	Números positivos y negativos	137
5.4.1.7.	Números pares e impares	137
5.4.2.	<i>El método del contrarrecíproco</i>	139
5.4.3.	<i>El método de reducción al absurdo</i>	140
5.5.	Ejercicios	142
6.	Lógica cuantificacional	143
	Exploración 6	144
6.1.	Introducción	146
6.2.	La deducción cuantificacional	146
6.2.1.	<i>Elementos de una proposición simple</i>	146
6.2.1.1.	Sujeto o sintagma nominal	146
6.2.1.2.	Clases de sujetos	147
6.2.1.3.	Determinantes	147
6.2.1.4.	Predicado o sintagma verbal	147
6.2.1.5.	Variable	147
6.2.1.6.	Universo o conjunto referencial	147
6.2.1.7.	Conjunto de veracidad	148
6.2.2.	<i>Simbolización de enunciados</i>	148
6.2.2.1.	Proposiciones con sustantivos propios como sujetos	148
6.2.2.2.	Enunciados con sustantivos comunes	148
6.2.2.3.	Proposiciones con determinantes y sustantivos comunes	149
6.2.3.	<i>Proposiciones con cambios en los complementos</i>	150
6.3.	Ejercicios	151
6.4.	Matemática de las proposiciones	153
6.4.1.	<i>Las proposiciones y los conjuntos</i>	153
6.4.2.	<i>Las proposiciones y las relaciones</i>	154

6.4.3.	<i>Función proposicional</i>	155
6.4.4.	<i>Conjunto de veracidad</i>	156
6.4.5.	<i>Alcance de un cuantificador</i>	157
6.4.6.	<i>Variables dominadas y variables libres</i>	158
6.4.7.	<i>Negación de proposiciones cuantificadas</i>	158
6.5.	Ejercicios	161
6.6.	Sintaxis y semántica de la lógica de enunciados	164
6.6.1.	<i>Sintaxis</i>	164
6.6.2.	<i>Reglas de formación</i>	164
6.6.3.	<i>Semántica</i>	164
6.7.	El proceso de la deducción	165
6.7.1.	<i>Regla de especificación universal (EU)</i>	165
6.7.2.	<i>Regla de generalización universal (GU)</i>	165
6.7.3.	<i>Regla de generalización existencial (GE)</i>	165
6.7.4.	<i>Regla de especificación existencial (EE)</i>	166
6.7.5.	<i>Argumentos con cuantificadores universales</i>	166
6.7.6.	<i>Argumentos con cuantificadores y nombres propios</i>	168
6.8.	Ejercicios	170
6.9.	Conjeturas	172
6.10.	Refutación de conjeturas	172
6.11.	Ejercicios	174
7.	El método de inducción matemática	175
	Exploración 7	176
7.1.	Introducción	178
7.2.	El método de inducción matemática	178
7.2.1.	<i>Conjunto inductivo</i>	178
7.2.2.	<i>El método de inducción matemática débil</i>	178
7.2.3.	<i>El método de inducción matemática fuerte</i>	180
7.3.	Ejercicios	182
7.4.	Completez de los conectivos lógicos	183
7.5.	Ejercicios	185
8.	Apéndice	187
8.1.	Conjuntos	187
8.1.1.	<i>Denotación de los conjuntos</i>	187
8.1.2.	<i>Pertenencia</i>	188
8.1.3.	<i>Representación gráfica de los conjuntos</i>	188
8.2.	Relaciones entre conjuntos	188
8.2.1.	<i>Contenencia</i>	189
8.2.2.	<i>Igualdad</i>	190

8.2.3. <i>No contención</i>	190
8.3. Cardinal de un conjunto	190
8.3.1. <i>Conjunto finito</i>	191
8.3.2. <i>Conjunto unitario</i>	191
8.3.3. <i>Conjunto vacío</i>	191
8.4. Operaciones entre conjuntos	191
8.4.1. <i>Intersección</i>	191
8.4.2. <i>Unión de conjuntos</i>	192
8.4.3. <i>Resta de conjuntos</i>	193
8.4.4. <i>Diferencia simétrica</i>	195
8.5. Ejercicios	197
8.6. Producto cartesiano de dos conjuntos	198
8.6.1. <i>Representación gráfica del producto cartesiano</i>	198
8.6.2. <i>Relaciones</i>	199
8.6.3. <i>Relaciones sobre un conjunto</i>	199
8.6.4. <i>Clases de relaciones sobre un conjunto</i>	199
8.7. Ejercicios	202
Bibliografía	204