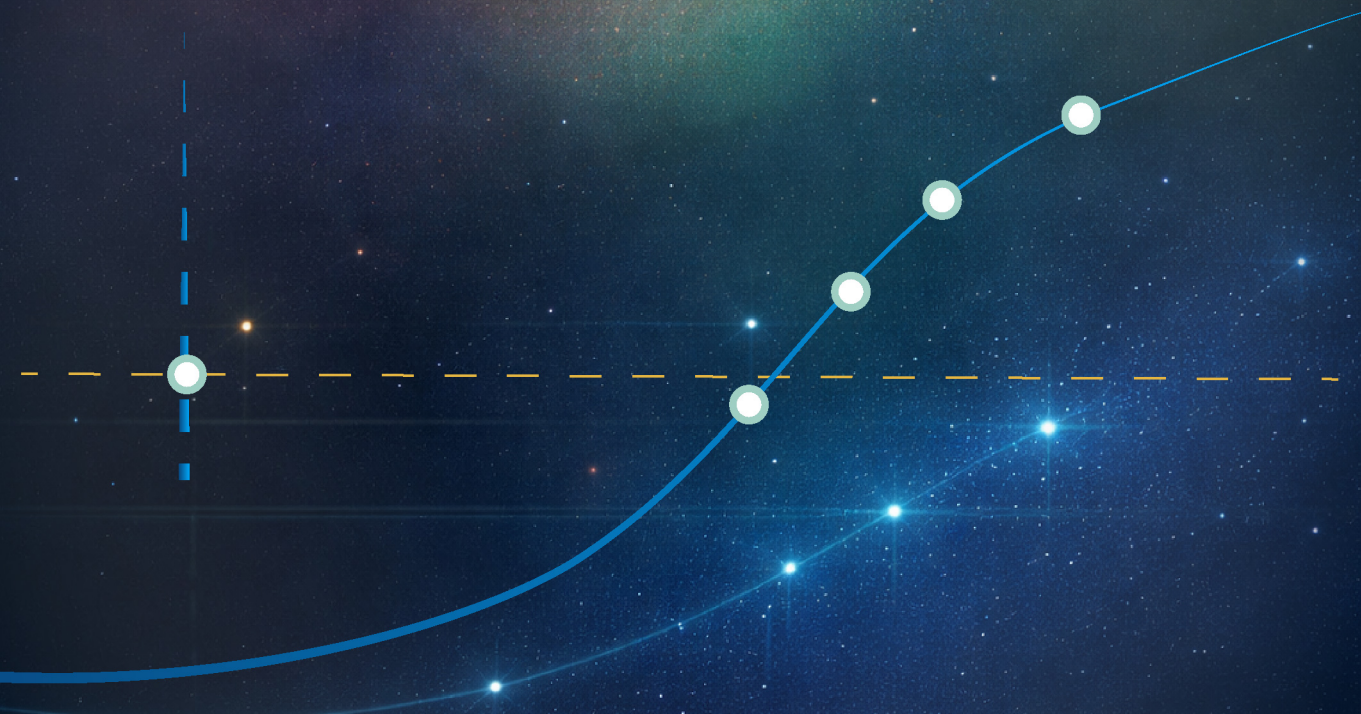
Concepción de límite a través de representaciones semióticas



Nataly Riaño Eslava
Camilo Andrés García Pinilla
Cesar Augusto Sánchez Rojas

Autores

Universidad Mariana
Res. MEN 1362 del 3 de febrero de 1983

Editorial
Unimar

Colección Resultado
de Investigación

Catalogación en la publicación – Biblioteca Nacional de Colombia

Riaño Eslava, Nataly, autora

Concepción de límite a través de representaciones semióticas / Nataly Riaño Eslava, Camilo Andrés García Pinilla, Cesar Augusto Sánchez Rojas. -- San Juan de Pasto, Nariño : Editorial Unimar, 2026.

1 recurso en línea : archivo de texto: PDF. -- (Resultado de investigación).

Incluye referencias bibliográficas.

ISBN 978-628-7898-00-4

1. Matemáticas - Métodos de enseñanza - Teorías 2. Aprendizaje - Metodología - Teorías 3. Semiótica cognitiva I. García Pinilla, Camilo Andrés, autor II. Sánchez Rojas, Cesar Augusto, autor

CDD: 510.7101 ed. 23 CO-BoBN– a1169992

Universidad Mariana

Res. MEN 1362 del 3 de febrero de 1983

Título del libro: *Concepción de límite a través de representaciones semióticas*

e-ISBN: 978-628-7898-00-4

DOI: https://doi.org/10.31948/editorialunimar.306

Formato: 18 x 26 cm – digital

Páginas: 100

Año: 2026

© Editorial Unimar, Universidad Mariana

© Nataly Riaño Eslava

© Camilo Andrés García Pinilla

© Cesar Augusto Sánchez Rojas

Pares evaluadores

Dr. Luis Ángel Bohórquez Arenas

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Dra. Mawency Vergel Ortega

Universidad Francisco de Paula Santander, Colombia

Editorial Unimar

Luz Elida Vera Hernández
Coordinadora editorial

Leidy Stella Rivera Buesaquillo
Corrección de estilo

Johan Esteban Botina Portillo
Diseño y diagramación

Correspondencia:
Editorial Unimar, Universidad Mariana
San Juan de Pasto, Nariño, Colombia, Calle 18 No. 34 – 104
Tel: 6027244460 - Ext. 185
E-mail: editorialunimar@umariana.edu.co

Depósito Digital

Biblioteca Nacional de Colombia, Grupo Procesos Técnicos, Calle 24, No. 5 - 60 Bogotá D.C., Colombia.

Biblioteca Hna. Elisabeth Guerrero N. f. m. i. Calle 18 No. 34 - 104 Universidad Mariana, San Juan de Pasto, Colombia.

Disponible en: http://editorial.umariana.edu.co/libros

Cítese como: Riaño-Eslava, N., García-Pinilla, C. A. y Sánchez-Rojas, C. A. (2026). *Concepción de límite a través de representaciones semióticas.* Editorial Unimar. https://doi.org/10.31948/editorialunimar.306

Las opiniones contenidas en el presente libro no comprometen a la Editorial Unimar ni a la Universidad Mariana, puesto que son responsabilidad única y exclusiva de los autores; de igual manera, ellos han declarado que, en su totalidad, es producción intelectual propia, en donde aquella información tomada de otras publicaciones o fuentes, propiedad de otros autores, está debidamente citada y referenciada, tanto en el desarrollo del documento como en las secciones respectivas a la bibliografía.

El material de este libro puede ser reproducido sin autorización para uso personal o en el aula de clase, siempre y cuando se mencione como fuente su título, autores y editorial.

Este libro está bajo licencia internacional:



Atribución/Reconocimiento 4.0 Internacional

Contenido

Introducción 10

Capítulo I. Un acercamiento a las tensiones, retos y horizontes formativos del concepto de límite 13

La enseñanza del concepto de límite y sus implicaciones en la formación matemática de estudiantes de educación media 14

Formalización del problema educativo en la comprensión del concepto de límite 19

Justificación 21

Capítulo II. Fundamentos investigativos, epistemológicos y didácticos de la enseñanza del concepto de límite en la educación matemática 25

Perspectivas investigativas sobre la enseñanza del límite 26

El concepto de límite en la educación matemática 33

Enfoque didáctico para la enseñanza del límite 37

Registros de representación del límite 39

Evolución histórica del concepto de límite 41

Teoría de registro de representaciones semióticas (TRRS) 45

Referentes normativos para la enseñanza del límite en la educación matemática 47

Capítulo III. El camino metodológico, una forma de acercamiento a la realidad educativa 52

Mirar desde dentro: enfoque 53

Carácter de la investigación-tipo de investigación 54

Las voces que dan sentido al estudio: participantes y unidad de análisis 55

Desarrollo del proceso investigativo - fases 56

Escuchar, observar y comprender: técnicas e instrumentos 58

Validación de los instrumentos 60

Consideraciones éticas del estudio 61

Capítulo IV. Análisis de la experiencia formativa y resultados de investigación 62

Organización y sistematización de la experiencia 63

Condiciones iniciales del aprendizaje 65

Observación pedagógica del proceso formativo 69

Desarrollo de la secuencia didáctica 71

Transformaciones en la comprensión del límite 75

Valoraciones de los estudiantes sobre la experiencia 81

Alcances y limitaciones de la experiencia 81

Pertinencia investigativa y proyección académica 82

Capítulo V. Aportes del concepto de límite en la formación docente 84

Referencias 89

Índice de Tablas

Tabla 1. Resultados de las Pruebas Saber 11 para el área de Matemáticas 23

Tabla 2. Porcentaje promedio de respuestas incorrectas en Matemáticas 23

Tabla 3. Tipos de funciones 34

Tabla 4. Propiedades de los límites 37

Tabla 5. Niveles de pertinencia de la secuencia didáctica 38

Tabla 6. Niveles de dificultad de la tabulación de los resultados en el pretest 66

Tabla 7. Pregunta 2 del pretest 67

Tabla 8. Análisis de las representaciones semióticas: diagnóstico 68

Tabla 9. Niveles de dificultad de la tabulación de los resultados en el postest 77

Tabla 10. Pregunta 5 del postest 78

Tabla 11. Análisis de las representaciones semióticas: prueba de salida 80

Índice de Figuras

Figura 1. Resultados de las pruebas Saber 11 en matemáticas, 2021-4 18

Figura 2. Resultados de las pruebas Saber 11 en matemáticas, 2022-4 18

Figura 3. Diagrama sagital de una función 34

Figura 4. Definición formal del límite 36

Figura 5. Estándar sobre el concepto de límite 50

Figura 6. Esquema del enfoque cualitativo 54

Figura 7. Fases de la investigación 56

Figura 8. Etapas de la estrategia pedagógica 64

Figura 9. Diagrama de barras de frecuencias: pretest 69

Figura 10. Diagrama de barras de la ficha de observación 70

Figura 11. Diagrama de barras de frecuencias: primera actividad 73

Figura 12. Diagrama de barras de frecuencias: segunda actividad 74

Figura 13. Diagrama de barras de frecuencias: tercera actividad 75

Figura 14. Diagrama de barras de frecuencias: postest 80

Introducción

El concepto de límite ha atravesado un prolongado proceso histórico. Aunque su empleo data de épocas antiguas, cuando se recurre a unidades infinitesimales para abordar problemas matemáticos, sus interpretaciones han estado tradicionalmente restringidas a procedimientos algorítmicos sin una comprensión conceptual profunda. Cabe señalar que cada matemático, en su contexto histórico, le atribuyó una interpretación distinta (Ferrante, 2009). En sus primeras manifestaciones, el límite se entendió desde una perspectiva procedimental y operativa, alcanzando su reconocimiento teórico en el siglo XVIII gracias al desarrollo del cálculo infinitesimal. Este avance permitió consolidarlo como un elemento esencial en la resolución de problemas tanto en las matemáticas como en otras disciplinas científicas (Ferrante, 2009).

La construcción de los conceptos matemáticos exige procesos cognitivos distintos de los que se aplican en otras áreas del conocimiento, debido a su carácter abstracto e imposibilidad de representarse mediante objetos concretos. En consecuencia, los estudiantes deben recurrir a procesos mentales de abstracción, que se evidencian posteriormente mediante representaciones semióticas que facilitan su comprensión (D'Amore et al., 2013). En esta línea, Blázquez y Ortega (2001) sostienen que el concepto de límite puede expresarse mediante diversos sistemas de representación: algebraico, verbal, numérico y simbólico. Sin embargo, Duval (2004), quien en 1985 formuló la teoría de los registros de representación semiótica (TRRS) en el campo de la didáctica de la matemática, plantea que los conceptos matemáticos deben transitar por cuatro registros fundamentales: simbólico, tabular, gráfico y de lenguaje natural.

Según Ferrante (2009), una de las responsabilidades más significativas del profesorado de matemáticas consiste en identificar el nivel de comprensión conceptual que los estudiantes otorgan a los contenidos, la forma en que los aplican y la relevancia que estos adquieren en el marco del aprendizaje. Por ello, resulta indispensable que los docentes analicen las imágenes mentales que los alumnos construyen al interpretar el concepto de límite y los conocimientos previos que poseen, con el fin de diseñar estrategias didácticas que favorezcan la interiorización significativa del concepto.

En coherencia con lo anterior, la presente investigación tiene como objetivo determinar la concepción que los estudiantes de grado undécimo

de la Corporación Educativa Aprender, del municipio de Tame (Arauca), tienen del límite de una función. Para tal fin, se diseñó y aplicó una secuencia didáctica orientada a promover la elaboración de representaciones semióticas que faciliten la comprensión del concepto. Dicha propuesta, sustentada en Rodríguez (2014), se estructura en tres fases: una etapa diagnóstica inicial, dirigida a identificar los conocimientos previos de los estudiantes; una fase de desarrollo, centrada en la construcción conceptual a partir de la producción de distintas representaciones; y una etapa final de evaluación, orientada a verificar el dominio alcanzado del concepto matemático por parte del alumnado.

La investigación se estructura en cinco capítulos. En el primero se expone la necesidad de implementar una estrategia pedagógica que promueva el desarrollo del pensamiento matemático, mediante la construcción de un concepto avanzado que exige la comprensión plena de conceptos previos. Asimismo, se presentan los resultados correspondientes a los únicos años en los que se han aplicado las pruebas de Estado Saber 11, los cuales evidencian un desempeño poco favorable de la institución educativa. Posteriormente, se formulan el problema de investigación, el objetivo general y tres objetivos específicos. El capítulo concluye con la justificación del estudio, la cual, en términos generales, resalta que el desarrollo de una investigación de esta naturaleza permite aportar orientaciones a los procesos de enseñanza y contribuir al mejoramiento de la calidad educativa

En el segundo capítulo, se presenta un análisis de antecedentes investigativos en los ámbitos internacional, nacional y local. También, se desarrolla cuatro marcos de referencia: un marco conceptual, en el que se definen los conceptos clave de la investigación; un marco teórico, que aborda el estudio epistémico e histórico del concepto de límite y la teoría de los registros de representación semiótica (TRRS); un marco contextual, que describe las principales características de la ubicación y los antecedentes históricos de la institución educativa, y un marco legal, en el que se establece la relación del estudio con la Ley General de Educación 115 de 1994, la Ley 1581 de 2012, expedidas por el Congreso de la República de Colombia, así como con los referentes de calidad del Ministerio de Educación Nacional (MEN).

En el tercer capítulo, se describe el enfoque cualitativo y el tipo de investigación acción participativa (IAP), cuyo propósito es mejorar y transformar las prácticas educativas de los docentes de matemáticas, así como generar aportes a la formación pedagógica del plantel educativo (Colmenares, 2012), mediante la creación de ambientes de aprendizaje

que favorecen el desarrollo del pensamiento matemático. Igualmente, se describen cuatro fases para la aplicación de los instrumentos: diagnóstico de la realidad, orientado a la identificación del problema y del contexto; plan de acción, que contempla los objetivos, las estrategias, el diseño y la validación de la secuencia didáctica; observación, centrada en la aplicación y el contraste de los datos obtenidos, y reflexión, enfocada en la retroalimentación, las conclusiones y las recomendaciones.

En el cuarto capítulo, se presentan los resultados de la aplicación de los instrumentos de recolección de datos. En este apartado se referencia la tabla de sistematización de los resultados, la cual constituye el soporte para la descripción y el análisis de la información derivada de cada instrumento. Posteriormente, se exponen los resultados de la prueba diagnóstica, seguidos de un análisis general de la ficha de observación. Posteriormente, se presentan los resultados de las actividades diseñadas para la secuencia didáctica y, finalmente, los de la prueba final, en la que los estudiantes se ubican en un nivel de desempeño alto, de acuerdo con lo establecido por el Sistema Institucional de Evaluación de los Estudiantes (SIEE). El capítulo concluye con el análisis de la autoevaluación.

En el quinto capítulo, se evidencia que la implementación de la estrategia pedagógica en poblaciones con condiciones sociales, económicas y culturales precarias constituye una alternativa viable, dado que no requiere más recursos que el uso de papel, regla y lápiz. Lo anterior se sustenta en los resultados de los instrumentos de recolección de datos, los cuales muestran una transición de los estudiantes desde un nivel de conocimiento bajo hacia uno alto. Además, se recomienda a futuros investigadores interesados en replicar o ampliar esta investigación mantener un compromiso con la educación matemática desde edades tempranas, con el fin de prevenir vacíos conceptuales en etapas posteriores de la formación académica.

Capítulo I.

Un **acercamiento** a las **tensiones, retos y horizontes formativos** del concepto de **límite**



En este capítulo se aborda una idea general y fundamental para orientar al lector sobre el propósito de la investigación. En primera instancia, se contextualiza la problemática sobre la comprensión del concepto de límite que presentan algunos estudiantes del municipio de Tame, departamento de Arauca. Posteriormente, la pregunta problema se basa en las representaciones semióticas y, a partir de esto, se formulan los objetivos. La justificación de estudio resalta la importancia de la calidad de la enseñanza de los estudiantes en educación media y de los resultados de las pruebas de Estado en los últimos años.

La enseñanza del concepto de límite y sus implicaciones en la formación matemática de estudiantes de educación media

El conocimiento matemático, al igual que otras áreas del enfoque educativo, posibilita pensar y razonar de manera ordenada, así como ver el mundo de forma lógica y coherente para responder a las necesidades de la sociedad (López, 2014). Según Godino et al. (2003), las matemáticas son consideradas la base fundamental de la ciencia y están presentes en cualquier faceta de la vida diaria. Gracias a ellas, existe claridad en las ideas; además, resultan cruciales en el desarrollo técnico del país, ya que permiten formar seres humanos con las habilidades y las capacidades necesarias para posicionar al territorio a nivel mundial.

Debido a la importancia de las matemáticas, se estima que los acontecimientos cotidianos pueden ser representados mediante modelos matemáticos, como el trote de una persona en un determinado tiempo, el uso de un cajero automático, la velocidad de un automóvil en correspondencia espacio-tiempo, la propagación de un virus, la descripción de un terreno, el crecimiento de la natalidad o mortalidad de una población, incluso, en las redes sociales, con el número de usuarios nuevos que ingresan a una plataforma, entre otros fenómenos, sean naturales o producidos por el ser humano (Ballester, 2009).

En este contexto, entender una función es relevante para comprender el límite. Los profesores del área de Matemáticas, antes de profundizar en el concepto, enseñan las funciones con el propósito de que el estudiante logre identificar qué le ocurre a la función en un determinado punto o en el infinito. Sin embargo, entenderlo no implica únicamente la solución de algoritmos matemáticos, sino que una buena fundamentación de las funciones puede crear una sólida construcción del concepto de límite (Hitt y Páez, 2003).

Las matemáticas son una ciencia sistemática, estructurada de tal forma que un concepto matemático es consecuencia de otro; por lo tanto, para

comprender un concepto avanzado, se requiere un completo entendimiento de los conceptos anteriores.

Precisamente, el concepto de límite surge como una noción posterior al estudio de las funciones y desempeña un papel esencial en el campo matemático. Su relevancia radica en que permite resolver problemas relacionados con el cálculo de velocidades y aceleraciones instantáneas, la determinación de rectas tangentes a curvas específicas, el análisis de máximos y mínimos de una función, así como el estudio de centros de gravedad, fuerzas gravitacionales y series infinitas, entre otros aspectos (Medina, 2001). Debido a su trascendencia en la formación matemática y en el ámbito educativo en general, resulta indispensable comprender las dificultades cognitivas y conceptuales que los estudiantes enfrentan al intentar asimilar esta noción (Blázquez y Ortega, 2000).

La dificultad para comprender el concepto está relacionada con la forma en que se explica en los libros de cálculo, pues los matemáticos, desde sus inicios, se han centrado en la solución algorítmica y han dejado de lado la contextualización. Incluso, la consolidación de la definición solo se logró hasta el siglo XVIII, lo que posiciona al límite como uno de los conceptos matemáticos con mayor dificultad de comprensión. En este sentido, crear nuevas metodologías de enseñanza para mitigar las deficiencias en aquellas poblaciones cuyos índices de calidad demuestran un escaso dominio de la materia es una labor fundamental de los profesores en la actualidad.

Al respecto, D'Amore et al. (2013) sostienen que la semiótica, considerada una ciencia más reciente que la matemática, está estrechamente vinculada a la necesidad de resolver problemáticas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En esta misma línea, Vergnaud (como se citó en Medina, 2001) plantea que todo concepto matemático está acompañado de un conjunto de situaciones que le otorgan significado, las cuales se evidencian en sus múltiples aplicaciones en diversas ramas de las matemáticas y en otros campos del conocimiento. Además, señala la existencia de invariantes operacionales que influyen en dichos conceptos y en la variedad de sus representaciones, entre las cuales destacan las simbólicas y las gráficas, comúnmente empleadas en los textos académicos.

Desde la perspectiva de las representaciones semióticas, las matemáticas posibilitan que los conceptos sean comprensibles y significativos para quien los estudia. Esto se explica por la naturaleza abstracta de la disciplina, en la medida en que sus objetos de estudio no pueden percibirse ni manipularse de manera tangible (Jiménez, 2011). En este sentido, cuando un estudiante logra relacionar, definir, representar, ejemplificar o graficar un concepto

matemático, genera una representación semiótica que facilita su comprensión (D'Amore et al., 2013). Asimismo, los conceptos matemáticos pueden expresarse de distintas formas, y dichas representaciones varían según la relación cognitiva que el estudiante establece con el concepto (Jiménez, 2010).

Así pues, el aprendizaje del concepto de límite suele representar una dificultad para los estudiantes, principalmente por el alto nivel de formalismo matemático con el que se introduce (Ferrante, 2009). En consecuencia, muchos alumnos optan por memorizar definiciones textuales sin comprender su verdadero significado (Medina, 2001). Sin embargo, el uso adecuado de las representaciones semióticas no solo favorece la interiorización conceptual, sino que también contribuye a la construcción de nuevo conocimiento matemático (Duval, 2016). Comprender el límite enseña a pensar y actuar de manera lógica para tomar mejores decisiones o resolver problemas relacionados con las situaciones que se enfrentan en el entorno. En matemáticas, estas situaciones se modelan mediante funciones que ayudan a conocer con exactitud las tendencias de comportamiento de una población o de sucesos naturales. Por lo tanto, comprenderlo desde esta área permite predecir situaciones y, en ocasiones, modificarlas cuando la función continúe con el comportamiento esperado.

En el contexto específico de esta investigación, la Corporación Educativa Aprender fue el plantel educativo donde se desarrolló el estudio. Este plantel se constituyó en el año 2019, por un grupo de docentes pensionados que vieron la necesidad de ofrecer otra forma de aprendizaje para formar jóvenes respetuosos de los valores humanos y promotores de la cultura y tradiciones regionales. El concepto de clase tradicional no es práctico en esta institución; por ello, la propuesta educativa consiste en desarrollar los temas mediante el diálogo, valorar a los estudiantes como protagonistas de su aprendizaje y brindar apoyo docente en las actividades, mediante el uso de estrategias innovadoras y actualizadas.

Los desafíos en la comprensión matemática son variados, pues en esta área las estrategias del docente se ponen a prueba cotidianamente, ya que la institución admite estudiantes cada año, quienes llegan al plantel con falencias y hábitos opuestos a la participación activa en su propio aprendizaje. No obstante, los estudiantes que han participado del proceso, dos o tres años atrás, incentivan a los recién llegados para que se integren, lo que, paradójicamente, conlleva, en ocasiones, retrasos perjudiciales en el ritmo de aprendizaje.

Antes de adentrarse en el concepto de límite con los estudiantes de grado undécimo de la Corporación Educativa Aprender, es necesaria una mirada integral de las deficiencias acumuladas a lo largo de los años escolares, incluso desde los primeros años de escolaridad. Esta mirada retrospectiva se realiza considerando el contexto particular del departamento de Arauca.

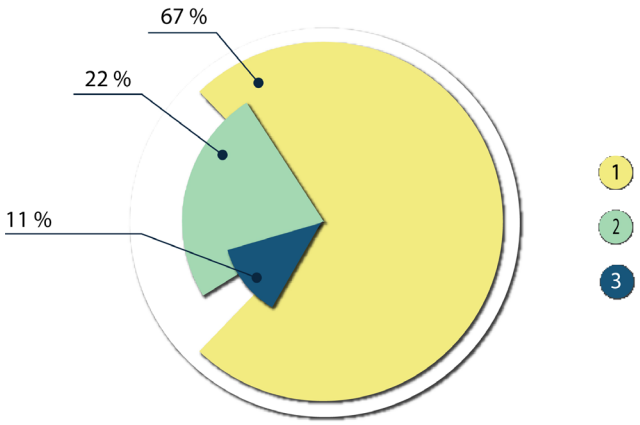
El cálculo mental es una competencia que se desarrolla mediante la práctica de problemas matemáticos contextualizados y con la apropiación y el manejo mental de cálculos básicos; por lo tanto, la adquisición de esta capacidad mental es garantía del buen desempeño en el aprendizaje y prepara la mente para otras abstracciones y retos (Salla y Berticelli, 2023).

Si los estudiantes desde temprana edad no desarrollan el cálculo mental, comenzarán a presentar problemas en el aprendizaje, y su aversión a las matemáticas conlleva dificultades que, en varias ocasiones, se consideran erróneamente como 'congénitas'. Es evidente que la población estudiantil, en general, apenas maneja las operaciones básicas y olvida conceptos geométricos de perímetro, área y volumen, así como conceptos de potenciación, radicación y representación cartesiana, entre otros temas fundamentales para adentrarse en el concepto avanzado de límite. Parte de la problemática radica en que los estudiantes, cuando llegan a la educación media, mantienen un cálculo mental deficiente y no han adquirido una visión integral de las matemáticas.

Los estudiantes de grado undécimo de la Corporación Educativa Aprender, ubicada en el municipio de Tame (Arauca), se encuentran en un nivel académico de formación en el que ya deberían tener claros los conceptos previos necesarios para introducirse en el tema de límite. Sin embargo, estos conocimientos no son suficientes para asegurar una comprensión completa de la temática. Muestra de ello son los resultados de las pruebas Saber 11, obtenidos en los dos últimos y únicos años en que el colegio amplió su grado de escolaridad a undécimo grado.

Figura 1

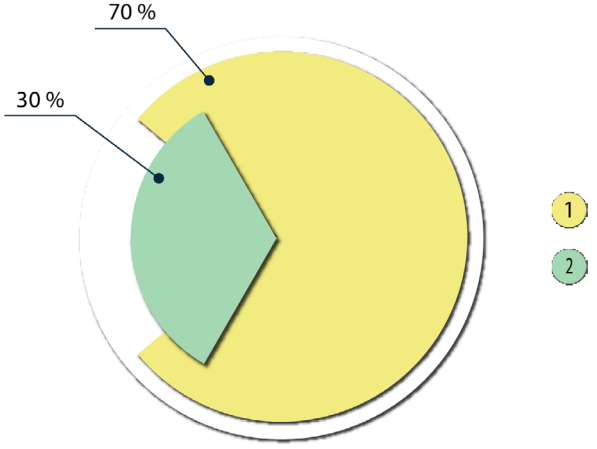
Resultados de las pruebas Saber 11 en matemáticas, 2021-4



Nota. El color azul indica que los estudiantes alcanzan un nivel de conocimiento inferior al 20 %; el verde, un nivel mayor o igual al 20 % y menor al 40 %; el amarillo, un nivel mayor o igual al 40 % y menor al 70 %. Adaptado del reporte de resultados de las pruebas Saber 11.º del establecimiento educativo.

Figura 2

Resultados de las pruebas Saber 11 en matemáticas, 2022-4



Nota. El color verde indica que los estudiantes alcanzan un nivel mayor o igual al 20 % y menor al 40 %; el amarillo, un nivel mayor o igual al 40 % e igual al 70 %. Adaptado del reporte de resultados de las pruebas Saber 11 del establecimiento educativo.

Con relación a la problemática expuesta, el concepto de límite juega un papel fundamental para mejorar los índices de calidad del aprendizaje de los estudiantes. Con su comprensión se intenta tener una visión amplia de la realidad matemática, en la que el estudiante desarrolle habilidades para resolver problemas no solamente relacionados con el límite de una función, sino también para aplicar el pensamiento matemático en cualquier ámbito de la vida. El concepto tiene la característica de que, cuando ha sido comprendido en su totalidad, los conceptos previos que se requieren para comprenderlo también han sido asimilados completamente.

Por último, y en aras de mejorar el conocimiento matemático de los estudiantes de último grado del plantel educativo, se propone la presente investigación que parte de la preocupación de la docente investigadora frente a los resultados en matemáticas en las pruebas de Estado, los cuales están relacionados con problemas de interpretación, representación, formulación, ejecución y argumentación de situaciones matemáticas. Saber reconocer y resolver algoritmos del concepto no asegura que el estudiante pueda tener un punto de vista que vaya más allá de la manipulación mecánica de símbolos; por lo tanto, se busca profundizar en la comprensión del objeto matemático y sus múltiples representaciones.

Formalización del problema educativo en la comprensión del concepto de límite

Los resultados de las pruebas de Estado Saber 11, junto con las dinámicas observadas en el aula de matemáticas de la Corporación Educativa Aprender, evidencian limitaciones persistentes en la comprensión de conceptos matemáticos fundamentales, especialmente aquellos que requieren altos niveles de abstracción, como el concepto de límite. Estas dificultades no solo se manifiestan en la resolución algorítmica de ejercicios, sino también en la escasa capacidad de los estudiantes para interpretar, representar y argumentar situaciones matemáticas desde distintos registros de representación. Tales limitaciones reflejan un problema educativo complejo que trasciende la simple memorización de fórmulas y procedimientos, pues implica deficiencias en la construcción del significado matemático y en la movilización entre diferentes formas de representación que son esenciales para una comprensión profunda del concepto.

En consecuencia, surge la necesidad de analizar cómo los estudiantes construyen el significado de este concepto, para lo cual se considera el papel que desempeñan las representaciones semióticas en su proceso de aprendizaje. Las representaciones semióticas constituyen una herramienta fundamental para acceder a los objetos matemáticos abstractos, ya que

permiten visualizar, expresar y transformar las ideas matemáticas de múltiples formas. La capacidad de transitar entre representaciones algebraicas, gráficas, numéricas y verbales del límite es indicativa del nivel de comprensión que el estudiante ha alcanzado sobre el concepto. Sin embargo, las observaciones realizadas en el contexto de la Corporación Educativa Aprender sugieren que existe una desconexión entre estas distintas formas de representación, lo cual obstaculiza la construcción de un conocimiento integrado y significativo. Esta problemática se ve agravada por las deficiencias acumuladas en conceptos previos, tales como funciones, continuidad, aproximación y comportamiento asintótico, que son prerrequisitos indispensables para comprender cabalmente la noción de límite.

Desde esta perspectiva, la presente investigación se orienta a formalizar el problema educativo asociado a la comprensión del concepto de límite, a partir del reconocimiento de que la enseñanza tradicional centrada en la manipulación simbólica ha demostrado ser insuficiente para garantizar un aprendizaje significativo. Es necesario, por tanto, indagar en las concepciones que los estudiantes construyen sobre el límite cuando son expuestos a diferentes tipos de representaciones semióticas y examinar cómo estas concepciones se relacionan con las definiciones formales del concepto. Este análisis permitirá identificar las rutas cognitivas que siguen los estudiantes en la construcción del conocimiento matemático y detectar los obstáculos epistemológicos que dificultan su comprensión. A partir de este interrogante central, se busca responder: ¿cómo conciben el concepto de límite, a través de representaciones semióticas, los estudiantes de grado undécimo de la Corporación Educativa Aprender?

Para abordar este cuestionamiento de manera sistemática y rigurosa, en esta investigación se propone alcanzar el siguiente objetivo general: identificar la concepción de límite de una función en los estudiantes de la Corporación Educativa Aprender mediante el registro de representaciones semióticas. Este propósito central se desglosa en objetivos específicos que guiarán el desarrollo metodológico del estudio. En primer lugar, se busca comprender las relaciones entre las perspectivas empíricas de los estudiantes de educación media y la definición del límite de una función preestablecida, lo cual implica contrastar las nociones intuitivas y experienciales que los estudiantes han construido con el rigor formal que caracteriza a la definición matemática del límite. Este ejercicio comparativo resulta fundamental para identificar las brechas conceptuales que existen entre el conocimiento cotidiano y el conocimiento matemático formal, así como para reconocer las potencialidades del pensamiento intuitivo como punto de partida para la formalización conceptual.

En seguida, se propone diseñar una secuencia didáctica de aprendizaje que fomente la elaboración previa semiótica del concepto de límite, es decir, una serie de actividades pedagógicas intencionalmente estructuradas que promuevan el uso, la interpretación y la articulación de diferentes registros de representación semiótica. Esta secuencia deberá contemplar situaciones problema que movilicen el pensamiento matemático de los estudiantes y que los conduzcan progresivamente desde aproximaciones intuitivas hasta conceptualizaciones más formales del límite. La construcción de esta propuesta didáctica se fundamenta en los hallazgos derivados del análisis de las concepciones estudiantiles y busca responder a las necesidades específicas detectadas en el contexto de la Corporación Educativa Aprender.

Así, se plantea evaluar el desarrollo cognitivo que el estudiante demuestra en el aprendizaje de la construcción del concepto de límite de una función, con el fin de documentar y analizar los avances que los estudiantes experimentan en su comprensión conceptual a lo largo de la implementación de la secuencia didáctica. Esta evaluación no se limita a medir resultados cuantitativos de rendimiento, sino que busca caracterizar cualitativamente los procesos de pensamiento, las estrategias de representación y los niveles de abstracción alcanzados por los estudiantes. De esta manera, la investigación aspira no solo a diagnosticar las dificultades existentes, sino también a contribuir con elementos teóricos y prácticos que orienten la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite en contextos educativos similares.

Justificación

De acuerdo con Blanco (2006), el concepto de límite puede abordarse desde dos perspectivas complementarias: la matemática y la antropológica. Esta distinción permite comprender las diversas fuentes a partir de las cuales cada individuo construye su interpretación del concepto. Por tal motivo, surge la necesidad de indagar qué saben los estudiantes sobre esta noción y cómo la han interiorizado. En este proceso, las representaciones semióticas constituyen una herramienta de análisis relevante, pues permiten sintetizar y evidenciar las ideas que los estudiantes poseen sobre el tema. Ello cobra especial importancia si se considera que el concepto de límite ha sido uno de los más debatidos y problemáticos en la historia de las matemáticas.

A lo largo de su evolución histórica, el límite ha suscitado amplias controversias, ya que su comprensión ha implicado superar numerosos obstáculos conceptuales y epistemológicos para alcanzar una definición formalmente aceptada (Hitt y Páez, 2003). En este sentido, las representaciones semióticas pueden contribuir a esclarecer las

concepciones que los estudiantes de la población en estudio tienen sobre este concepto. Dado que ellos representan la nueva generación de aprendices y futuros agentes de cambio, resulta indispensable que sus construcciones cognitivas sean precisas y se aproximen a la definición formal del límite. Esta es, precisamente, una de las razones que fundamentan el presente estudio, enfocado en un tema históricamente debatido y de gran complejidad teórica.

Metodológicamente, esta investigación se enmarca en el paradigma cualitativo, aunque no excluye el uso de elementos cuantitativos que complementen el análisis. Este enfoque posibilita una interpretación flexible y profunda de la información, ya que permite realizar inferencias significativas y determinar el grado de homogeneidad o de divergencia en las concepciones estudiadas (Hernández et al., 2014). Bajo este criterio, un estudio de esta naturaleza puede ofrecer una visión general y comprensiva de las percepciones que los estudiantes de grado undécimo de la Corporación Educativa Aprender tienen sobre el concepto de límite, además de favorecer la formulación de una teoría más coherente y la identificación de posibles ajustes pedagógicos.

Desde una perspectiva más amplia, la realización de un trabajo de este tipo adquiere especial importancia, pues, al esclarecer los conceptos que los estudiantes han construido a lo largo de su proceso formativo, es posible proponer orientaciones y estrategias que contribuyan al mejoramiento de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas. De este modo, los resultados podrían reorientar las prácticas docentes y fortalecer su dimensión reflexiva y profesional.

En consonancia con diversos estudios desarrollados en Colombia, la educación debe tener como eje central el mejoramiento de los procesos de enseñanza, entendido como una formación integral, sustentada en el conocimiento sociocultural y ambiental. No se trata de promover una 'calidad de la enseñanza' desde parámetros productivos o estandarizados, sino de garantizar una educación humanizada, que reconozca al estudiante como sujeto activo del aprendizaje (Reyes et al., 2016).

La dificultad de aprendizaje se refleja en los resultados que arrojan las pruebas Saber 11 de los estudiantes de la Corporación Educativa Aprender, durante los dos últimos años en el área de matemáticas, los cuales están por encima de la media de los resultados obtenidos a nivel nacional. Sin embargo, la diferencia de puntos muestra que los estudiantes mantienen un conocimiento básico de la materia y que las capacidades de interpretar, formular y argumentar sobre situaciones-problema son limitadas (Instituto

Colombiano para la Evaluación de la Educación [Icfes], 2019). El promedio del puntaje global de los 9 y 11 estudiantes que presentaron la prueba en 2021 y 2022, respectivamente, fue de 277 y 262 puntos; puntaje que evidencia la insuficiencia del conocimiento y no garantiza el acceso a una institución de educación superior estatal que exige el resultado en el proceso de admisión.

Tabla 1

Resultados de las Pruebas Saber 11 para el área de Matemáticas

Nivel de agregación	2021	2022
Establecimiento Educativo	53	56
Nacional	51	52

Nota. Adaptado del reporte de resultados de las pruebas Saber 11 del establecimiento educativo.

Los indicadores de desempeño del aprendizaje de los estudiantes están articulados con los procesos de pensamiento matemático, en los que se tiene en cuenta el porcentaje de respuestas incorrectas, es decir, "cuanto menor sea el porcentaje promedio de respuestas incorrectas, mejor será el desempeño de los estudiantes" (Icfes, 2021, p. 11). Si comparamos los resultados de los años 2021 y 2022 del plantel educativo, se identifica que los estudiantes disminuyeron los aprendizajes de interpretación y representación, y de formulación y ejecución, mientras que el aprendizaje argumentativo aumentó; estos porcentajes resultan críticos y demandan replantear las metodologías de enseñanza.

Tabla 2

Porcentaje promedio de respuestas incorrectas en Matemáticas

Aprendizaje	2021	2022
Interpretación y representación	42 %	45 %
Formulación y ejecución	44 %	53 %
Argumentación	36 %	33 %

Nota. Adaptado del reporte de resultados de las pruebas Saber 11 del establecimiento educativo.

Esta estrategia pedagógica, que busca mejorar los resultados de los estudiantes, está relacionada con enseñar un concepto matemático avanzado para reforzar los conocimientos adquiridos con anterioridad y, en consecuencia, lograr que los estudiantes repliquen estas prácticas en temas que requieren un nivel mayor de abstracción. De esta manera, el bachiller tendrá la capacidad intelectual para ingresar a una institución de educación superior y acceder a un buen trabajo.

El límite de una función es un concepto matemático avanzado, que requiere conocimientos previos claros, necesarios para la adecuada comprensión del concepto; además, sirve para la resolución de situaciones-problema, como las que se plantean en las pruebas de Estado.

Las acciones didácticas del proceso investigativo critican la solución de problemas procedimentales que impiden construir conocimiento a partir de la experiencia del estudiante con el entorno; dichas acciones están dirigidas al saber hacer matemáticas, mediante la búsqueda de explicaciones del ambiente inmediato y acordes con las necesidades e intereses de la comunidad educativa. Lo anterior tiene como propósito realizar injerencias en las metodologías de enseñanza implementadas dentro del aula de clase, ya que, a su vez, pueden fortalecer al currículo de la institución educativa y ser el punto de partida para que otras instituciones del municipio cuestionen sus prácticas pedagógicas y mejoren sus índices de calidad.

Capítulo II.

Fundamentos investigativos, epistemológicos y **didácticos** de la enseñanza del concepto de **límite** en la **educación matemática**

A partir del objeto de estudio, se encontró un entramado de investigaciones previas en los ámbitos local, nacional e internacional, que brindan sustento al problema de investigación, así como perspectivas teóricas de la historia del límite de una función y de las representaciones semióticas propuestas por Duval (2016). Estos estudios no se conciben solo como una recopilación cronológica de investigaciones, sino un campo de producción de conocimiento que permite entender la evolución del problema, las tensiones teórico-conceptuales existentes y, por lo tanto, la pertinencia de la investigación realizada.

Perspectivas investigativas sobre la enseñanza del límite

En los ámbitos local, nacional e internacional, las investigaciones desarrolladas en la última década evidencian que el tema del concepto de límite de una función, así como el uso de las representaciones semióticas como estrategia didáctica y efectiva en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial, se ha abordado desde distintos grupos experimentales, demostrando un creciente interés por analizar las transformaciones pedagógicas en los escenarios educativos, las prácticas de aula y la reconfiguración de las competencias profesionales de los profesores del área. Así mismo, se valida que el concepto de límite surge como respuesta a la necesidad de resolver problemas matemáticos complejos. No obstante, su comprensión y aprendizaje suelen presentar dificultades significativas, ya que su dominio exige el desarrollo de procesos cognitivos de alto nivel, como la abstracción, el análisis y la demostración (Vrancken et al., 2006). En este sentido, se busca resaltar la relevancia del uso de representaciones matemáticas como herramienta fundamental para la resolución de situaciones problemáticas, pues estas favorecen la comprensión conceptual y la aplicación significativa del conocimiento.

Según Darmayanti et al. (2023), en su investigación realizada con estudiantes que cursan matemáticas en distintos niveles académicos en Indonesia, los aprendices presentan dificultades en su desempeño académico en aquellos niveles en los que se aborda el límite de una función, debido a que no recurren a la resolución de problemas desde diversos enfoques; asimismo, se destaca que, en algunos casos, estas limitaciones se asocian con las metodologías empleadas por el docente durante el desarrollo de las clases. Por tanto, resulta relevante que el desarrollo del pensamiento científico, abordado desde la teoría de Vygotsky en la enseñanza del concepto (metodología implementada en la investigación), sitúe a los estudiantes en un nivel superior de desarrollo cognitivo y consolide los conceptos previos, las propiedades del límite y las estrategias metodológicas en la resolución de problemas desde distintas perspectivas.

Por su parte, Hong (2022), investigador en Educación Matemática de la Universidad de Iowa, señala que los tres textos de referencia en la enseñanza del cálculo en los Estados Unidos son *Cálculo* (7.ª ed., James Stewart), *Cálculo simple y multivariado* (6.ª ed., Deborah Hughes Hallett) y *Cálculo* (12.ª ed., George Thomas). En estas obras se presentan, dentro del tema «límite de una función», una serie de tareas en las que se solicita a los estudiantes evaluar lo que ocurre a una función en uno o varios puntos, lo cual dificulta el desarrollo de un pensamiento informal; es decir, las tareas priorizan la obtención de un valor numérico o simbólico, lo cual desplaza la reflexión sobre el significado del proceso de aproximación. Este vacío sustenta el desarrollo de la presente investigación.

Otros estudios relacionados con el objeto de la presente investigación incluyen el realizado con estudiantes inscritos en el curso de Cálculo Diferencial e Integral de los programas de pregrado de la Universidad Nacional de Costa Rica (2021), el cual tuvo como propósito analizar la concepción del límite de una función mediante una serie de categorías propuestas por González-Flores et al. (2021) para el análisis de contenido de variables cualitativas. Los resultados evidenciaron que la mitad de los estudiantes conciben el concepto como un objeto, mientras que aproximadamente tres cuartas partes lo interpretan como un proceso algorítmico al momento de su definición, lo que permite identificar dificultades cognitivas derivadas de nociones intuitivas del concepto, las cuales, en algunos casos, se ven reforzadas por los términos empleados por el profesor durante el desarrollo de la clase. Estos hallazgos constituyen un antecedente relevante, pues permiten comprender las limitaciones de la enseñanza tradicional del límite y sustentan la necesidad de implementar acciones o propuestas didácticas orientadas a la comprensión conceptual de límite.

En el contexto centroamericano, un aporte relevante lo realizaron Panohaya et al. (2021), quienes compararon la concepción de límite de dos estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla (México), con el propósito de entender cómo aprendieron dicho concepto. Las actividades se fundamentaron en la teoría acción, proceso, objeto y esquema (APOE) y en la semiótica, de lo cual se identificó que el estudiante en formación inicial presentaba mayor dificultad en las estructuras mentales del límite de una función, lo cual se valida con las transformaciones semióticas de los registros algebraicos, gráficos y verbales. Los resultados de la investigación señalaron que aprender cálculo diferencial no es suficiente para comprender el concepto, y es necesario cursar cálculo diferencial de distintas variables para contar con estructuras sólidas del concepto. Este antecedente evidencia que la comprensión del

límite requiere de experiencias formativas amplias, en las que se presenten secuencias curriculares que permitan resignificar representaciones y situaciones matemáticas.

Benítez y Gabriel Argüelles (2020) propusieron una didáctica basada en *software* gratuito GeoGebra como estrategia para mejorar la representación de los sistemas gráfico, numérico, verbal y simbólico del límite de una función lineal, aplicada a estudiantes de pregrado y posgrado de la Universidad Veracruzana (Venezuela). Los investigadores concluyeron que los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de primer semestre no comprenden la expresión porque no tienen conocimientos suficientes de números reales y del valor absoluto, conocimientos previos para una comprensión adecuada del límite de una función.

Según Villagómez et al. (2020), en los trabajos propuestos para identificar el tránsito que hay entre el concepto de variable y las representaciones pictóricas de los estudiantes en formación inicial de la Licenciatura en Matemáticas de la Escuela Normal Superior (México), solo el 38,4 % de los estudiantes logran desarrollar un registro gráfico, pictórico y algebraico, simultáneamente al registro verbal; en cambio, los estudiantes que no construyen los conceptos matemáticos desde distintas perspectivas no logran desarrollar el pensamiento matemático. La investigación apunta a que la educación no debería centrarse únicamente en responder a procesos aritméticos del álgebra; por el contrario, debería enfocarse a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje del área, mediante el uso de la noción de representación.

Finalmente, en la investigación realizada por Báez-Ureña et al. (2018), se implementó los *softwares* gratuitos GeoGebra y SketchPath para el registro semiótico de los postulados de Vigotsky sobre pensamiento y lenguaje del cálculo diferencial en cuatro grupos de estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD) (República Dominicana), con el propósito de contribuir en la formación conceptual de función, límite y derivada. Los resultados demostraron que los estudiantes a los que se les realizó el experimento tuvieron el 88,2 % de asertividad en las preguntas de aplicación y los que no se les realizó el experimento obtuvieron el 60,4 %, lo que representa una mejora porcentual de 27,8 puntos. Además, los asistentes matemáticos ayudaron a generar escenarios didácticos para motivar a los estudiantes y constituir una herramienta para el desarrollo matemático.

Las investigaciones expuestas hasta este punto, al igual que el presente trabajo investigativo, abordan la concepción del límite de una función o las

representaciones semióticas que tienen poblaciones internacionales frente a la comprensión de diversos objetos matemáticos. En ellas se pueden contrastar las nuevas metodologías de enseñanza con las propuestas en los libros tradicionales, a partir de lo cual se deduce que la implementación del concepto desde la semiótica puede mitigar las deficiencias en aquellas poblaciones donde el índice de comprensión es insuficiente. Cabe señalar que estos estudios coinciden en resaltar el papel del docente como mediador del aprendizaje y la importancia de diseñar situaciones didácticas que promuevan razonamiento matemático y un aprendizaje significativo.

En el contexto nacional, y teniendo en cuenta la contingencia causada por el COVID-19, así como los conflictos económicos, sociales y educativos de los últimos años, esta crisis, que generó una afectación colectiva, conduce a replantear la praxis educativa presencial hacia modalidades virtuales de aprendizaje, mediante el uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC), lo que posibilita la construcción del conocimiento matemático a partir del análisis de situaciones concretas (Riveros et al., 2011). Desde esta perspectiva, se han desarrollado investigaciones con enfoque tecnológico; entre ellas, se encuentra la realizada por Conde et al. (2021), orientada al fortalecimiento del límite de una función en estudiantes de grado undécimo de una institución educativa de Barranquilla. El trabajo y las acciones pedagógicas desarrolladas en el marco de las TIC permitieron fortalecer competencias del pensamiento matemático de manera dinámica, tales como la organización, estructuración e interpretación de los contenidos con un mayor nivel de abstracción.

De manera similar, otra investigación incorporó el *software* gratuito GeoGebra en la construcción dinámica del concepto de límite, según lo expuesto por Rodríguez y Murcia (2021). Este estudio se enfocó en el análisis y la caracterización de la noción de límite en estudiantes de grado undécimo de una institución educativa pública de la ciudad de Tunja (Boyacá). La secuencia didáctica fue analizada desde la teoría APOE y las representaciones semióticas, lo que permitió evidenciar que los estudiantes presentan dificultades en las aproximaciones y tendencias de algunas funciones; no obstante, se resalta el impacto motivador que genera el uso del programa en los procesos de abstracción de conceptos matemáticos, al favorecer aprendizajes no rutinarios ni memorísticos, los cuales suelen limitar la comprensión del concepto.

Otro aporte relevante es el realizado por Pedraza (2021), quien empleó herramientas digitales basadas en el uso de la regla y el compás en la construcción de figuras geométricas, aplicadas a estudiantes de grado noveno de una institución educativa de la ciudad de Tunja (Boyacá,

Colombia), con el propósito de promover diversas representaciones y perspectivas de un objeto matemático. La investigación evidenció obstáculos en la comprensión de la instrucción, asociados a un dominio limitado del lenguaje matemático, y plantea la necesidad de desarrollar herramientas heurísticas audiovisuales y escritas, con un enfoque semiótico, como apoyo en la resolución de situaciones problema propias de su contexto.

En Medellín, Colombia, Quintero y Jaramillo (2020) propusieron una serie de actividades orientadoras de enseñanza (AOE) del límite de una función, considerando que el currículo en Latinoamérica tiende a incorporar este concepto a través de la memorización de algoritmos. Las principales dificultades en la resolución de las actividades se relacionan con la falta de dominio de conceptos básicos, tales como las operaciones entre expresiones algebraicas y el conocimiento de las propiedades de los números reales, lo cual genera limitaciones para que los estudiantes alcancen un nivel superior de análisis; en contraste, aquellos que no presentan estas dificultades logran desarrollar su pensamiento teórico.

En continuidad con esta línea de investigación, se evidencia que el uso de representaciones semióticas constituye una estrategia eficaz en el aprendizaje de la multiplicación mediante el isomorfismo de medida. En este sentido, Murcia (2018) aplicó esta estrategia a 14 estudiantes de grado sexto de la escuela rural El Palmar. Las actividades fueron diseñadas para identificar la experticia frente al objeto matemático; para ello, iniciaron con una prueba diagnóstica, seguida de una actividad orientada al uso de nuevas herramientas en la resolución de problemas y finalizaron con una propuesta que estimula la comunicación significativa del lenguaje matemático. Lo anterior permitió identificar la necesidad emplear más de una representación semiótica para favorecer una construcción adecuada del concepto de multiplicación.

Las investigaciones analizadas desde el escenario nacional y en correspondencia con este trabajo investigativo evidencian la diversidad de alternativas para la representación semiótica en la enseñanza no solo del concepto de límite, sino también de la multiplicación de enteros y la construcción de figuras geométricas, así como la necesidad de implementar herramientas digitales en la enseñanza del área. Estos estudios invitan a mejorar la práctica docente, lo que favorece la motivación del estudiante y el desarrollo de la competencia de resolución de problemas; además, se identifican limitaciones recurrentes de los escolares en la representación de variables simbólicas y se reconocen mejoras significativas cuando el estudiante propone diversas soluciones ante un tema complejo.

Por otra parte, desde un escenario local, resulta evidente que la noción de representación y la capacidad de transformar un objeto matemático en múltiples sistemas de representación han alcanzado una amplia aceptación en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las distintas ramas del área, dado que, a diferencia de otras ciencias que cuentan con objetos tangibles y explicables a través de los sentidos, las matemáticas abordan sus objetos mediante representaciones. Esto se sustenta en el estudio realizado por Daza et al. (2022), quienes desarrollaron una investigación con estudiantes de último grado de una institución educativa pública de Tunja (Boyacá), cuyo propósito fue analizar las interpretaciones semióticas de las medidas de tendencia central abordadas en los primeros cursos de estadística, reconociendo que el lenguaje simbólico y el lenguaje natural constituyen los principales registros para promover la interpretación, el razonamiento y la argumentación en torno a la media o promedio, la moda y la mediana aritmética de un conjunto de datos.

La investigación realizada por Velandia (2021) se inscribe en esta misma línea; el estudio se desarrolló con estudiantes de grado noveno diagnosticados con trastorno de déficit de atención e hiperactividad (TDAH) de una institución educativa privada de Tunja (Boyacá) y cuyo objetivo fue fortalecer el concepto de función a partir de la teoría de las representaciones semióticas ante la necesidad de diseñar pedagogías inclusivas en una asignatura que favorece el desarrollo cognitivo. Las situaciones didácticas implementadas como estrategias pedagógicas para la apropiación del conocimiento favorecieron el interés, la concentración y una actitud exploratoria en los estudiantes durante la construcción del concepto, al comprender los procesos sistemáticos; en consecuencia, la aplicación de estas acciones didácticas permitió que los estudiantes accedieran a iguales oportunidades de aprendizaje y que los profesores orientaran sus didácticas hacia la creación de modelos de enseñanza pertinentes para diversos tipos de población.

En la misma línea, se encuentra la investigación de Becerra (2019), la cual se centró en el análisis de las representaciones semióticas en la resolución de problemas relacionados con ecuaciones 2 × 2 en estudiantes de la Institución Educativa Rafael Reyes de Santa Rosa de Viterbo. El estudio evidenció, en la actividad diagnóstica, que el 73 % de los estudiantes no realizó el paso del registro algebraico al gráfico y que solo el 33 % llevo a cabo el tránsito del registro verbal al algebraico, sin reconocer el método gráfico como parte del proceso de solución, lo que evidenció una noción inadecuada del concepto. Tras la aplicación de actividades basadas en el uso de registros semióticos, se observó una mejora en los registros verbal,

algebraico, tabular y gráfico, lo que permitió identificar una comprensión más adecuada del objeto matemático de estudio.

Otro estudio relacionado con el tema es el taller límite de una función aplicado por Gómez (2015). Este trabajo investigativo incorporó como herramienta geométrica y analítica el *software* gratuito GeoGebra, que se utilizó por su diversidad de representaciones gráficas, simbólicas y tabulares, presentadas de forma simultánea, ágil y accesible, sin requerir la realización de procesos matemáticos rutinarios. La investigación se desarrolló con estudiantes de la Facultad Seccional Duitama de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC); su objetivo fue proponer el programa como estrategia para mejorar los índices de calidad en el tema de límites, al tratarse de uno de los contenidos del cálculo en los que los estudiantes presentan mayores dificultades de comprensión.

Finalmente, en la investigación realizada por Riscanevo et al. (2015) se analizan las influencias del contrato didáctico en la enseñanza del concepto de límite en estudiantes y profesores de la UPTC, pertenecientes a los primeros semestres de Licenciatura en Matemáticas y programas de Ingeniería. El estudio evidenció que los estudiantes presentan baja comprensión lectora al enfrentar situaciones problema y un mejor desempeño en pruebas numéricas, debido a su familiarización con los procedimientos matemáticos; también consideran que el aprendizaje matemático depende de la transposición didáctica realizada por los docentes, mientras que estos reconocen que gran parte del proceso recae en el estudiante, lo cual permite evidenciar el contrato didáctico configurado entre el contenido enseñado, los estudiantes y el docente, como un instrumento orientado al perfeccionamiento del aprendizaje.

Las investigaciones presentadas a nivel local corresponden a estudios sobre el uso de las representaciones semióticas, la noción del concepto de límite en estudiantes de educación básica secundaria, media y superior, así como de conceptos fundamentales para su construcción, lo cual se articula con la presente investigación. Esto señala el limitado dominio de los conceptos previos en los estudiantes de instituciones educativas de Boyacá e incluso en estudiantes de pregrado de la UPTC, lo que cuestiona las metodologías de enseñanza empleadas por los docentes en niveles educativos más tempranos, en los cuales se observan procesos aritméticos correctos, pero con resultados poco significativos.

El concepto de límite en la educación matemática

Los factores involucrados en la enseñanza del límite de una función, desde la semiótica, se muestran de acuerdo con las definiciones tomadas de diversos libros guía, que son un sustento en la educación actual de Colombia y de países desarrollados que sirven como punto de partida para replantear las metodologías de enseñanza. Este escenario conceptual busca sustentarse bajo conceptos matemáticos que están directamente relacionados con el límite y con la estrategia pedagógica, como componente central en la enseñanza del concepto. Estos conceptos se desarrollan a continuación.

Funciones

Una función comprende la relación que hay entre los elementos de un conjunto a otro conjunto, por ejemplo, el salario de una jornada laboral depende del número de horas trabajadas; la velocidad a la que se descarga el celular depende del tiempo de uso; la cantidad de pacientes que atiende un médico depende de la cantidad de enfermos; la energía consumida en un hogar depende de los electrodomésticos conectados; el consumo de la gasolina de un automóvil depende de la distancia recorrida, etc. (Leithold, 1998). La relación que existe entre una variable y otra suele definirse como función, dentro del área de las matemáticas, suele representarse simbólicamente como «f de x» o «f en x» (Buitrago et al., 2013).

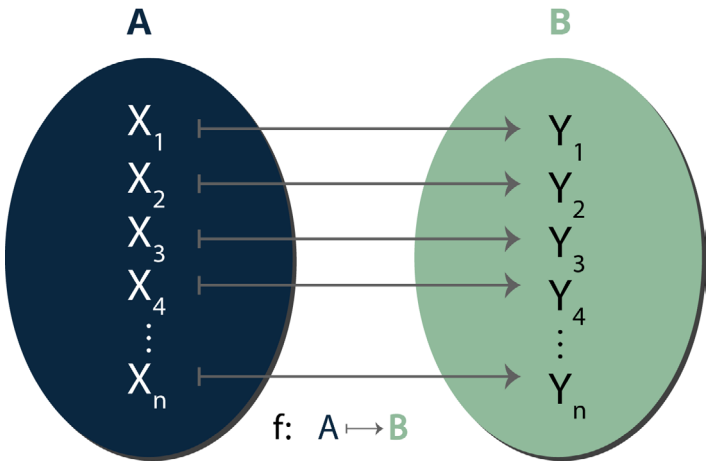
Según Leithold (1998), «una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales x a un conjunto Y de números reales y, donde el número y es único para cada valor específico de x» (p. 2).

Para Stewart et al. (2012), «una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado f(x), de un conjunto B» (p. 143).

Buitrago et al. (2013) refiere que «una función f de A en B es una relación en la que cada elemento a ϵ A le corresponde un único elemento b ϵ B» (p.43) (ver Figura 3).

Figura 3

Diagrama sagital de una función



Nota. El conjunto A se define como la variable independiente (x) o conjunto de salida y el conjunto B se define como la variable dependiente (y) o conjunto de llegada.

Es importante mencionar que, cuando se habla de los elementos que conforman el conjunto de la variable independiente, se hace referencia al dominio de la función, mientras que los elementos del conjunto de la variable dependiente corresponden al codominio de la función; sin embargo, no todos los elementos del codominio son alcanzados por algún elemento del conjunto de salida. El dominio se define según el tipo de función que se pretende analizar, por lo que las clasificaciones se establecen de acuerdo con el tipo de ecuación que la constituye. Algunos de los tipos más frecuentes se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3

Tipos de funciones

Tipo de función	Expresión matemática
Función lineal	$f(x)=mx+b$
Función cuadrática	$f(x)=ax^2+bx+c$

Tipo de función	Expresión matemática
Función trigonométrica	$f(x)=sen(x)$ $f(x)= cos\ cos\ (x)$ $f(x)= tan\ tan\ (x)$ $f(x)=ctg(x)$ $f(x)=sec(x)$ $f(x)=csc(x)$
Función exponencial	$f(x)=a^x$
Función logaritmo natural	$f(x)= ln\ ln\ (x)$

Notas. Tomado de Stewart et al. (2012, pp. 433-493).

Límite de una función

Este concepto se considera el eje central del cálculo, ya que permite analizar expresiones matemáticas a partir del estudio de tendencias, es decir, de lo que ocurre a una función cuando se enfrenta a una situación límite, y además sirve como fundamento teórico para la construcción de otros conceptos propios del cálculo. Estas situaciones límite, en las que una función se aproxima a un valor definido, se abordan mediante el estudio del límite; por ello, existe una formalización del concepto que otorga claridad a una idea que requirió muchos años para consolidarse, debido a su complejidad conceptual.

Buitrago et al. (2013) definen el concepto desde la idea intuitiva del matemático francés Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783):

> La función *f(x)* tiende hacia el límite L cuando x tiende hacia a, si es posible hacer que f(x) se aproxime tanto a L como se quiera, siempre y cuando x esté lo suficientemente cerca de a, sin tomar el valor de a. Esto se expresa como: *f(x) = L* se lee: el límite cuando x tiende hacia a de *f(x)* es igual a L. (p. 88)

Stewart et al. (2012) presentan una definición que pretende introducirse como una idea intuitiva de lo que le ocurre a una función matemática cuando

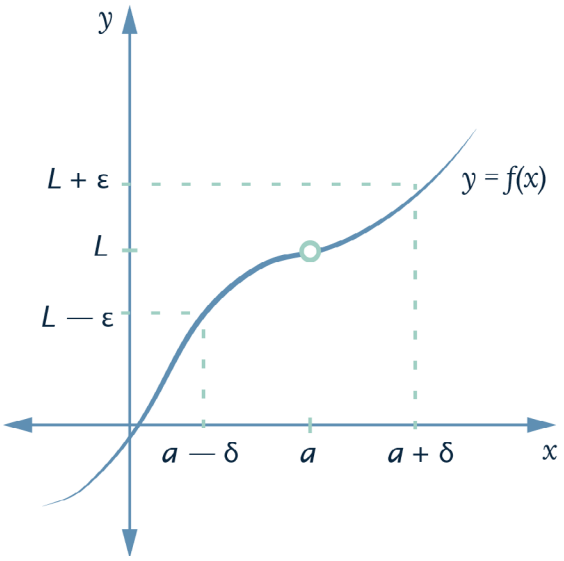
se acerca a un valor determinado. Dicha definición comparte componentes muy semejantes a la definición anterior:

> Escribimos *f(x)* = *L* (y decimos el límite de *f(x)*, cuando x se aproxima a *a*, es igual a L), si podemos hacer los valores de *f(x)* arbitrariamente cercanos a L (tan cerca de L como queramos) tomando x suficientemente cercana a *a*, pero no igual a *a*. (p. 840).

Leithold (1998) explica el concepto desde la definición dada por el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897): «si *f(x)* = *L* es verdadero, entonces cualquier ε > 0, no importa cuán pequeño sea, existe un δ > 0 tal que si 0 < |x - a| < δ entonces | *f(x)* - a| < ε» (p. 38).

Figura 4

Definición formal del límite



Nota. Definición formal en términos de delta (δ) y epsilon (ε) con límite lateral izquierdo (a – δ, L -ε) y límite lateral derecho (a + δ, L + ε). Tomada de Buitrago et al. (2013).

De acuerdo con los aportes de Augustin Cauchy (1789-1857) a la definición, surge una serie de teoremas que busca encontrar soluciones a problemas simbólicos de manera más sencilla. Las propiedades expresan una serie de conceptos simbólicos que necesitan especificarse para obtener una comprensión adecuada de cada teorema: sea *f(x)* y *g(x)* funciones y k una constante real, entonces se establecen las siguientes propiedades (ver Tabla 4).

Tabla 4

Propiedades de los límites

Teorema del límite	Expresión matemática
Teorema de una constante	$k = k$
Teorema de una constante por una función	$kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$
Teorema de una adición y sustracción de funciones	$\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
Teorema del producto de funciones	$\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
Teorema del cociente de dos funciones	$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
Teorema de la potencia de dos funciones	$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$
Teorema de una función radical	$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

Nota. Estas son algunas propiedades de los límites que se evidencian con mayor frecuencia. Tomado de Stewart et al. (2012, pp. 493-541).

Enfoque didáctico para la enseñanza del límite

El enfoque didáctico para la enseñanza del límite se concibe como una respuesta a las dificultades conceptuales que históricamente han acompañado la comprensión de este concepto en la formación matemática. Desde esta perspectiva, la enseñanza del límite no se reduce a la aplicación de procedimientos formales, sino que promueve la construcción progresiva del significado a partir de la intuición, la exploración y el análisis del comportamiento de las funciones. Por lo anterior, es importante reconocer los aspectos pedagógicos necesarios para alcanzar objetivos de aprendizaje significativos, entre ellos, la secuencia didáctica.

Una secuencia didáctica es un modelo de actividades diseñado y aplicado por el docente para que la actividad académica sea mejor asimilada por el estudiante. Por lo general, se elabora como estrategia para mitigar el bajo nivel académico. En matemáticas, los índices de calidad de los estudiantes tienden a estar por debajo de la media, por lo que los docentes recurren a estas estrategias para mejorar la comprensión de los conceptos. Esta área requiere de un conocimiento secuenciado y sistemático para tener una completa comprensión de temas avanzados.

Para Frade (2008), una secuencia didáctica «es la serie de actividades que, articuladas entre sí en una situación didáctica, desarrolla la competencia del estudiante. Se caracteriza porque tienen un principio y un fin, son antecedentes con consecuentes» (p. 11).

Según Tobón et al. (2010), secuencia didáctica se refiere a «conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos» (p. 20). Para Díaz-Barriga (2013), «las secuencias constituyen una organización de las actividades de aprendizaje que se realizan con los alumnos y para los alumnos con la finalidad de crear situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo» (p. 1).

Por su parte, Rodríguez (2014) define secuencia didáctica como «una sucesión de actividades previamente pensadas que dan orden y lógica a los procesos de enseñanza y acompañadas con modelos de aprendizaje dan sentido a la asimilación y comprensión de los contenidos diseñados por el docente» (p. 449). Para su planificación y desarrollo, el autor propone niveles de pertenencia (ver Tabla 5).

Tabla 5

Niveles de pertinencia de la secuencia didáctica

Etapas	Definición	Evaluación
Inicio (apertura, introducción)	En la etapa introductoria, los docentes evidencian los conocimientos previos y sirven como punto de partida para la construcción del contenido	Evaluación diagnóstica

Etapas	Definición	Evaluación
Desarrollo (aplicación, reestructuración, profundización)	El nivel de complejidad de la etapa aumenta y se diseñan actividades de síntesis y sistematización para lograr un aprendizaje significativo	Evaluación permanente
Cierre (final, validación)	La etapa final pretende valorar si los estudiantes adquieren el conocimiento esperado y determinan los logros e índices que se quieren mejorar	Evaluación sumatoria

Nota. La secuencia varía de acuerdo con el contenido temático que se quiere enseñar y a la metodología implementada. Adaptado a partir de Rodríguez (2014).

Registros de representación del límite

Catañares (2014) menciona la existencia de los términos griegos *semeîon, tékmerion* y *sýmbolon* en la construcción del vocablo representación. El término *semeîon*, que aparece con frecuencia en Homero, Hesíodo, Anaxágoras, Esopo y Hecateo de Mileto, en el siglo VI a. C., es definido por los filósofos con el sentido de símbolo, signo de un dios, indicio o prueba; el término *tékmerion* aparece en la *Ilíada* con el significado de prueba, fin o meta y, con el tiempo, se traduce como signo o señal; por último, el término *sýmbolon*, empleado por Plutarco como signo secreto de los ritos dionisíacos, mientras que Platón utiliza el término lingüístico *ónoma* para referirse a la representación de las cosas de manera aproximada.

Ahora, la noción de representación se incorporó en estudios psicológicos sobre la construcción del conocimiento en tres momentos distintos: el primero, entre 1924 y 1926, en los estudios realizados por Piaget, quien la concibió como una representación mental del mundo del niño, configurada a partir de sus creencias y experiencias sensoriomotrices frente a los fenómenos naturales y físicos; el segundo, entre 1955 y 1960, se entiende como una representación interna y computacional, en la cual resulta esencial la forma en que se procesa y describe la información; y el tercero, se plantea como una representación semiótica, orientada a fomentar la aprehensión del conocimiento (Duval, 2004).

Un sistema de representaciones semióticas en matemáticas es un conjunto de expresiones que dan sentido a un objeto matemático y son el producto de las representaciones mentales que realiza cada sujeto. Según Duval (2004), «el aprendizaje de la matemática es un campo de

estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos» (p. 30). De modo que, diversos tipos de representaciones semióticas ayudan a la comprensión del objeto matemático. Duval define los siguientes tipos de registros y menciona que de estos pueden derivar otros:

Registro algebraico. En este registro, los objetos matemáticos se representan a través de letras y signos, los cuales derivan del término griego *sýmbolon*, es decir, algunos de los objetos matemáticos considerados en la investigación incluyen el símbolo *f(x)* para definir una función, aquí cabe resaltar que se puede utilizar cualquier letra del alfabeto; el símbolo $lím_{x \to a} f(x)$ para definir el límite de una función; y todas las representaciones que se resultan de los procesos algebraicos (Sastre et al., 2009).

Registro tabular. En este registro, los datos de una variable que dependen de otra se organizan según un orden sucesivo y, por lo general, se presentan en forma de tablas; en el caso de las funciones, se expresan a partir de los valores que asume la variable dependiente en relación con la variable independiente, configurando pares ordenados que facilitan la manipulación de la información en momentos específicos. En el estudio de los límites, este registro permite presentar la información mediante puntos muy próximos al punto crítico, conocidos como límites laterales (Sastre et al., 2009).

Registro gráfico. En este registro, el plano cartesiano desempeña un papel fundamental en la representación de funciones; por ello, resulta necesario recurrir a los registros anteriores para construir la gráfica cartesiana. Cabe señalar que los puntos del grafo también pueden denominarse nodos (Sastre et al., 2009). Estos nodos de una función se conectan mediante líneas curvas, dado que no es posible definir puntos infinitamente próximos entre sí; en consecuencia, las líneas en forma de arcos representan los intervalos sin puntos visibles, los cuales son imperceptibles para la visión humana.

Registro de lenguaje natural. En este registro, el lenguaje verbal expresa las perspectivas empíricas del sujeto, es decir, la capacidad verbal en la resolución de situaciones problema se relaciona directamente con las experiencias de vida; de este modo, se busca comprender los objetos matemáticos a partir de entornos familiares que facilitan una relación directa entre la experiencia vivida y el conocimiento que se pretende construir (Sastre et al., 2009).

Evolución histórica del concepto de límite

El componente histórico y epistemológico de los conceptos que dan sustento a la investigación, buscan explicar cuáles fueron los principios teóricos y las dificultades a través del tiempo, que llevaron a los filósofos y matemáticos de la antigüedad a investigar sobre un objeto matemático que tiene una formalización muy reciente; y sobre una estrategia metodológica, diseñada para fortalecer los procesos de enseñanza de la matemática.

A lo largo de la historia, el concepto de límite ha representado una de las nociones más complejas tanto para quienes lo enseñan como para quienes lo aprenden. Muchos docentes han experimentado grandes dificultades para comprenderlo plenamente, lo que hace comprensible que esas limitaciones se reflejan en el proceso de enseñanza y aprendizaje dentro del aula. De hecho, incluso los matemáticos que desarrollaron el concepto enfrentaron notables obstáculos para sistematizar y definirlo con precisión, dado que sintetizar una idea que pudiera ser comprendida y enseñada implicó un proceso arduo y prolongado (Hitt y Páez, 2003).

Para entender las razones por las cuales fue tan complejo alcanzar la definición formal del límite que hoy se presenta en los textos académicos, resulta necesario realizar un análisis epistemológico de las transformaciones que este concepto ha experimentado desde sus orígenes. Según Piaget (1987), un análisis epistemológico implica comprender cómo los individuos evolucionan de un conocimiento elemental a uno más elaborado, siendo más relevante el proceso de construcción del saber que el resultado conceptual en sí (Gily Cortés, 1997). En la misma línea, Jaramillo (2003) sostiene que la epistemología puede entenderse como la transformación del sujeto cognoscente a partir del conocimiento científico acumulado a lo largo de la historia, lo cual ha permitido al ser humano explicar los fenómenos de su entorno que anteriormente carecían de interpretación.

Desde una perspectiva epistemológica, el concepto de límite fue tomado a partir de diversas nociones previas que sirvieron como fundamento para su posterior consolidación. Dichas ideas surgieron como respuestas a los problemas que diferentes pensadores buscaron resolver en sus respectivas épocas. En la Grecia antigua, donde comenzaron a estructurarse muchos de los principios de la matemática, el pensamiento filosófico ejerció una influencia determinante. Por ello, las raíces históricas de las matemáticas se encuentran estrechamente vinculadas con la filosofía, pues ambas disciplinas comparten el propósito de explicar racionalmente el mundo y sus fenómenos (García, 2014).

En este contexto, López (2014) destaca que Anaximandro, filósofo griego del siglo VI a. C. y discípulo de Tales de Mileto, fue uno de los primeros en introducir el término 'límite'. Según su pensamiento, todo en el universo estaba compuesto por partículas infinitas, responsables tanto de la generación como de la destrucción de los elementos existentes; en consecuencia, lo infinito constituía el principio que definía la totalidad del cosmos. Más adelante, entre los siglos III y IV a. C., Eudoxo y Arquímedes aportaron ideas fundamentales al desarrollo del concepto mediante la geometría. En particular, el método de agotamiento, ampliamente empleado por Arquímedes y atribuido originalmente a Eudoxo, permitió determinar el área de figuras y resolver problemas de magnitud, mediante el uso de formas conocidas para calcular las dimensiones de otras desconocidas (Lajara, 2016).

En 1571-1630, Kepler formuló el método de los infinitésimos, en el que supone que todos los cuerpos están compuestos por subunidades infinitamente pequeñas de volúmenes o áreas conocidas. Este método que fue usado por Galileo para demostrar que el espacio es el área bajo la curva de una gráfica de tiempo-velocidad (Blázquez y Ortega, 2002).

Continuando con este recorrido histórico, Buenaventura Cavalieri, matemático nacido en Milán, propuso el método de los indivisibles en 1635. Este método plantea que, dado un segmento, una figura plana puede dividirse en segmentos paralelos a este; de manera análoga, los volúmenes de una figura pueden segmentarse de forma paralela a un plano determinado. Al conjunto de elementos en los que se divide la figura se les denomina «indivisibles», y se establece que un par de superficies planas o volúmenes que conservan la misma altura mantienen una relación proporcional entre sí (Barrios, 1993).

Pierre de Fermat (1601-1665) realizó una contribución significativa al determinar los extremos de las curvas mediante un método orientado a la obtención de las abscisas, puesto que, en ciertos puntos de la gráfica, los valores eran tan cercanos que podían tomarse como si fueran el mismo. Al resolver la ecuación $f(x+E)=\frac{f(x)}{E}$ hallaba la solución; a este método se le denominó el método de Fermat para la búsqueda de extremos de curvas (Vélez, 2003).

Para esta misma época, Isaac Barrow, matemático y teólogo inglés, realizó aportes fundamentales en la consolidación del cálculo moderno. Fue pionero en establecer la relación entre la diferenciación y la integración como procesos inversos, además de presentar una demostración rigurosa sobre dicha correspondencia. En sus *Lecciones de geometría* (1669), Barrow

propuso un método para determinar la tangente a una curva, siempre que esta mantuviera una relación con la cuadratura de otra curva semejante (Ponce, 2013).

Se puede señalar hasta aquí que los procedimientos descritos se aplicaban en la resolución de problemas propios de la mecánica, la física y la astronomía. Sin embargo, aún no existía un marco conceptual que permitiera comprender su alcance general ni su articulación con otros tipos de fenómenos. En este contexto, Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, apoyándose en los fundamentos de sus predecesores, desarrollaron de manera independiente sus teorías, lo que dio origen al análisis infinitesimal (Ferrante, 2009).

Newton formuló la teoría de las fluxiones, publicada en su obra *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum* (1736), en la que se introdujo el estudio de las 'fluentes', término que empleó para designar magnitudes variables en movimiento continuo. Estas fluentes se consideran variables independientes, en las que el tiempo es el elemento común. A partir de estas, se definieron las velocidades de variación, denominadas 'fluxiones' (Bingham, 1973).

Por su parte, Leibniz (1646–1716) desarrolló la hipótesis de las diferenciales, contribuyendo significativamente al análisis de los infinitesimales. Descubrió que la pendiente de una tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y las abscisas, cuando dichas diferencias tienden a valores extremadamente pequeños (Penagos, 2013).

En el siglo XIX, matemáticos como Cauchy, Bolzano y Weierstrass aportaron los fundamentos teóricos necesarios para la definición formal del concepto de límite. Este proceso se vio impulsado por la expansión de la enseñanza de las matemáticas posterior a la Revolución Industrial, cuando las ciencias dejaron de ser un saber reservado a unos pocos para integrarse en los currículos escolares, lo que demandó bases teóricas más sólidas para su enseñanza (Blázquez y Ortega, 2002).

Para el año 1821, Cauchy formuló una primera definición del concepto de límite, aunque aún carecía de la precisión formal con que se conoce actualmente. Según su planteamiento, cuando los valores sucesivos de una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de modo que la diferencia entre ambos puede hacerse tan pequeña como se desee, dicho valor fijo se considera el límite de la variable. Posteriormente, Bolzano (1781–1848) desarrolló una teoría sobre la continuidad que, aunque elaborada de

manera paralela a la de Cauchy, partía de principios similares. Más adelante, Weierstrass (1815–1897) realizó aportes decisivos para la formalización del concepto, los cuales fueron divulgados por su discípulo Heine en la obra *Elemente*. Esta se expresaba así: «Si, dado cualquier ε, existe un n_0 tal que, para $0 < n < n_0$, la diferencia $f(x_0 \pm n) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de f(x) para x» (Blázquez y Ortega, 2002).

Este recorrido histórico posibilita comprender la evolución conceptual de límite, así como los principales marcos teóricos que han orientado su enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, es necesario completar esta revisión con posturas contemporáneas como Godino, Radford, Sfard y Artigue.

Desde el enfoque ontosemiótico, Godino (1996) concibe el límite como un objeto matemático cuya comprensión implica la articulación de prácticas, significados, representaciones y procesos semióticos. Así mismo, señala que las dificultades de los estudiantes en torno al tema se derivan de centrar la enseñanza en un simbolismo algebraico sin una adecuada mediación semiótica.

Radford (2006) aborda el concepto desde una mirada socioepistemológica y semiótica cultural, resalta que el conocimiento matemático se construye a través de prácticas sociales, gestos, lenguajes y artefactos, postura que va en la línea pedagógica de la teoría sociocultural de Vygotsky. Por tanto, sus aportes destacan la importancia de diseñar situaciones didácticas que permitan transitar de un conocimiento simple a uno más formal o abstracto.

Sfard (1991) propone una teoría centrada en dos enfoques: operacional y estructural; es decir, los estudiantes se mantienen en la primera (operacional) cuando el límite se entiende como una serie de acciones, sin lograr una conceptualización estructural (segundo enfoque) que lo reconozca como un objeto. Pasar por estos escenarios, de acuerdo con Stard, se denomina reificación.

Finalmente, Artigue (2014) advierte que la enseñanza tradicional del límite suele introducir definiciones formales de manera prematura, sin garantizar una comprensión conceptual previa. Por ello, propone el término obstáculo didáctico, en el que explica que algunas dificultades no son errores del estudiante, sino consecuencias de decisiones didácticas que minimizan o distorsionan el significado del concepto.

En definitiva, los autores mencionados sin duda evidencian la necesidad de avanzar en procesos didácticos, en el uso de tecnologías digitales y nuevos enfoques sobre el aprendizaje

Teoría de registro de representaciones semióticas (TRRS)

La teoría de registro de representaciones semióticas aparece por primera vez en el marco de la Didáctica de la Matemática de la mano de Raymond Duval, profesor de la Universidad Louis Pasteur de Estrasburgo, Francia, en el año 1985. Esta teoría surge para fortalecer la compresión de objetos abstractos, los cuales requieren recurrir a otro tipo de representaciones del lenguaje matemático, aunque la semiótica se reconoció solo hasta el siglo XIX. No obstante, el estudio de los signos, denominados *semeîon* en la antigua Grecia, ya estaba presente en el análisis matemático desde épocas tempranas, incluso entre los griegos, quienes los interpretaban como consecuencia de un fenómeno natural; por ejemplo, el *semeîon* humo se entiende como indicio del fuego, es decir, si hay humo, hay fuego (D'Amore et al., 2013).

Según Peralta y Soto (2003) los registros de representación ocupan un lugar central dentro del aprendizaje matemático, porque son la única manera de acercarse y comprender objetos abstractos, por ejemplo, las funciones pueden estar representadas algebraica, tabular o gráficamente y con un lenguaje verbal natural de cada individuo. Debe señalarse que toda actividad matemática, con el fin de la aprehensión del conocimiento, debe implementar los registros de representación en los que se evidencian actividades cognitivas asociadas a un sistema semiótico. Estas actividades son las siguientes:

Formación. En esta actividad, el conjunto de signos que configura un registro algebraico sustituye la percepción directa del objeto, donde se destacan los rasgos, las características y los datos del contenido que se desea representar; además, se deben explicitar las reglas que rigen las expresiones matemáticas para que mantengan sentido (Peralta y Soto, 2003).

Tratamiento. En esta actividad, las transformaciones que se realizan de un modelo matemático a otro dentro de un mismo registro de representación deben efectuarse mediante el uso de las reglas propias del registro (Peralta y Soto, 2003).

Conversión. En esta actividad cognitiva, las transformaciones que se llevan a cabo de un modelo matemático a otro entre distintos registros de representación deben realizarse sin confundirse con la actividad de tratamiento; esto implica, por ejemplo, pasar de un registro algebraico a uno tabular, gráfico o de lenguaje natural (Peralta y Soto, 2003).

Teniendo en cuenta lo anterior, es necesario mencionar que investigar acerca de la semiótica es adentrarse en el estudio comparativo de los sistemas de signos y no solamente comparativo, sino también en el análisis de la capacidad y eficiencia de los signos para transmitir una o varias ideas. En este análisis, se consideran dos funciones fundamentales de los sistemas de signos: la primera, transmite un significado con ideas informativas, objetivas y subjetivas; y la segunda, logra que el mensaje sea transmitido, el destinatario reciba la idea, además de una reacción (Ernest, 2021). El cumplimiento de estas funciones tiene implícito un orden establecido del conjunto de signos, es decir, la existencia de diversos signos regidos por leyes para su interrelación.

De esta forma, la semiótica se divide en tres componentes fundamentales: la sintaxis, que se ocupa de la estructura interna de los sistemas de signos y se centra en su forma, más que en su significado; la semántica, que analiza los sistemas de signos como instrumentos de expresión significativa; y la pragmática, que se ocupa de las relaciones entre los sistemas de signos y los individuos que los utilizan (Wood, 2015). Al clarificar estos conceptos básicos de la semiótica, se facilita la comprensión de los postulados de Raymond Duval, quien plantea que el aprendizaje se consolida mediante el uso de múltiples registros de representación semiótica, como los simbólicos, icónicos, gráficos, tabulares y las expresiones del lenguaje natural.

Por su parte, Moretti y Thiel (2012) proponen dos conceptos que contribuyen a racionalizar la estructura semántica: la semiosis, que se ocupa de la forma de apropiación de una simbolización semiótica, la cual se inicia con la percepción del signo y la fijación del objeto en la mente del observador; y la noesis, que se ocupa de la apropiación conceptual del objeto o de la idea. Para lograr la apropiación de un concepto matemático, resulta necesario identificar e interrelacionar estos procesos con el fin de construir representaciones semióticas significativas.

Es importante destacar los aportes de Duval (2012), quien propone tareas específicas orientadas a fortalecer el manejo de la estrecha relación que existe entre la semiosis y la noesis. Dichas tareas se vinculan con ejercicios desarrollados de manera mecánica, siguiendo patrones preestablecidos, los cuales se complementan con ejercicios que trascienden dichos patrones, exigiendo un mayor esfuerzo conceptual y la combinación de distintos sistemas semióticos, con el propósito de favorecer el desarrollo del pensamiento matemático. En este proceso, el estudiante debe racionalizar y conceptualizar de forma autónoma; este modo de 'juego' cognitivo, entendido como una estrategia didáctica, debe ser enseñado y practicado

para promover, desde las primeras etapas de la escolaridad, el desarrollo de esta astucia matemática.

Referentes normativos para la enseñanza del límite en la educación matemática

La investigación se fundamentó bajo un conjunto de normas nacionales que se presentan a continuación:

Ley General de Educación 115 de 1994

Los derechos humanos, originados en el contexto de la Revolución francesa y difundidos en Colombia por Antonio Nariño, definen la educación como un derecho que se ejerce de manera permanente en todos los grupos poblacionales, organizado en los niveles de educación formal, no formal e informal, y orientado al aseguramiento de la calidad educativa, desde la formación de los educadores hasta la supervisión de las metodologías implementadas en los procesos de enseñanza-aprendizaje, incluidas aquellas que involucran a toda la comunidad educativa. En relación con este postulado, la Ley General de Educación establece que la sociedad debe «fomentar, proteger y defender la educación como patrimonio social y cultural de toda la Nación» (Ley 115 de 1994, art. 8, literal a).

En el contexto colombiano, los estudiantes de las instituciones educativas reciben un tipo de educación clasificado por el Estado como educación formal, cuyo propósito es fomentar de manera permanente el desarrollo de cualidades constructivas. Dentro de este nivel educativo, los estudiantes de grado undécimo se ubican en la educación media, la cual los prepara tanto para el ingreso a la educación superior como para el mundo del trabajo (Ley 115 de 1994). La educación media académica ofrecida por la institución comprende las áreas básicas del conocimiento, abordadas en un nivel de mayor profundización, de acuerdo con los intereses personales de los estudiantes.

Es importante mencionar que las instituciones educativas de educación básica, de carácter oficial o privado, deben cumplir con un Proyecto Educativo Institucional (PEI), el cual debe ser de autoría propia de cada institución educativa y responder a las necesidades de toda la comunidad educativa, con el fin de alcanzar la formación integral de los estudiantes (Ley 115 de 1994). Además, el currículo y los planes de estudio para las áreas de aprendizaje y, en particular, de matemáticas, deben cumplirse a cabalidad para poder colocar en práctica el PEI. Finalmente, la evaluación sirve como una estrategia para medir la calidad y el cumplimiento de la

educación, por lo tanto, se realiza a todos los involucrados en el proceso de formación (Ley 115 de 1994).

Ley Estatutaria 1581 de 2012

La Ley Estatutaria 1581 de 2012 o de Protección de Datos Personales «tiene por objeto desarrollar el derecho constitucional que tienen las personas de conocer, actualizar y rectificar las informaciones que se hayan recogido sobre ellas en bases de datos o archivos» (art. 1) y establece que la toma de datos se debe realizar únicamente dentro del territorio colombiano para entidades de naturaleza pública o privada. El tratamiento de la información debe ajustarse a las características de la población de estudio y se lleva a cabo mediante una autorización informada, firmada por los participantes, en la cual el investigador está obligado a explicar de manera clara y completa el propósito de la investigación y el uso, manejo y protección de los datos, así como las condiciones de acceso a la información por parte de las personas, las instituciones involucradas o aquellas que el Estado determine (Ley 1581 de 2012).

La recolección de datos en la presente investigación no representa riesgo ni vulnera la intimidad de los participantes; por esta razón, no se contempla la manipulación de datos sensibles. No obstante, sí exige mantener una comunicación permanente con todos los actores involucrados, con el fin de identificar posibles situaciones de discriminación o intimidación asociadas a los mediadores del proceso de recolección de información y, en caso de presentarse, realizar los ajustes o correcciones necesarios en los instrumentos utilizados (Ley 1581 de 2012). La ley establece que los reclamos deben ser atendidos en un plazo máximo de quince (15) días hábiles; si no es posible resolverlos dentro de este término, se solicitará al reclamante una prórroga de hasta ocho (8) días hábiles. Asimismo, cuando los involucrados requieran consultar la información, la solicitud deberá ser atendida en un máximo de diez (10) días hábiles, y si no es posible cumplir con este plazo, se pedirá una prórroga de cinco (5) días hábiles (Ley 1581 de 2012)

Derechos básicos de aprendizaje (DBA)

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2015) tiene como documento de referencia los derechos básicos de aprendizaje (DBA), los cuales están estructurados a partir de los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias (EBC), con el propósito de explicitar los aprendizajes fundamentales que deben desarrollarse en cada grado, desde transición hasta undécimo, y en cada área del conocimiento. Su importancia radica en que buscan promover la equidad educativa en toda

la comunidad educativa, además de servir como apoyo para la planeación de las clases; estos aprendizajes se encuentran directamente articulados con las pruebas de Estado que presentan los estudiantes en los grados tercero, quinto, noveno y undécimo, con el fin de contribuir al mejoramiento de los indicadores de calidad educativa. El MEN (2015) estructura los DBA a partir de un enunciado que expresa el aprendizaje esperado, las evidencias observables en los estudiantes y un ejemplo que facilita su comprensión e implementación pedagógica.

El documento no aborda de manera explícita el aprendizaje matemático del concepto de 'límite'; sin embargo, sí hace referencia a aplicaciones del concepto de derivada. En matemáticas, la comprensión de un concepto avanzado requiere el dominio sólido de los contenidos previos, por lo que el concepto de límite se constituye en un antecedente fundamental para el estudio de las derivadas. En este sentido, uno de los aprendizajes propuestos por el MEN para el grado undécimo en relación con las derivadas es "Encuentra derivadas de funciones, reconoce sus propiedades y las utiliza para resolver problemas» (MEN, 2015, p. 85), en el cual se evidencian implícitamente dos nociones centrales del cálculo diferencial: las funciones y los límites.

Estándares básicos de competencias (EBC)

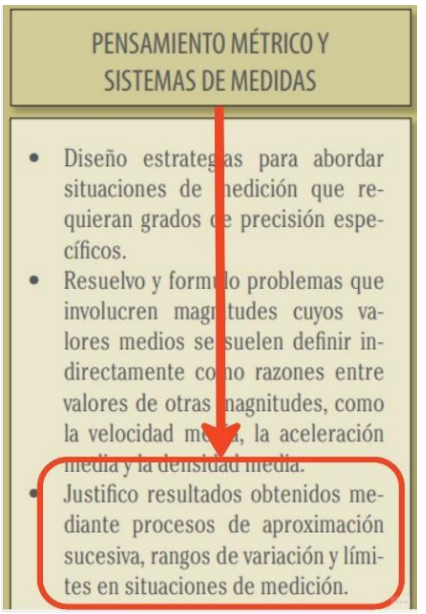
Los EBC son una herramienta pedagógica que responden a las nuevas demandas globales y nacionales del ser humano, «constituyen uno de los parámetros de lo que todo niño, niña y joven debe saber y saber hacer para lograr el nivel de calidad esperado a su paso por el sistema educativo» (MEN, 2006, p. 9). Los estándares están organizados por grupos de grados: de 1.º a 3.º, de 4.º a 5.º, de 6.º a 7.º, de 8.º a 9.º y de 10.º a 11.ª, y estructurados por cinco pensamientos matemáticos (numéricos, espacial, métrico, aleatorio y variacional); cada estándar se centra en uno o dos competencias de la actividad matemática: «formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos matemáticos» (MEN, 2006, p. 51).

El estándar que menciona directamente el concepto de límite está ubicado en el pensamiento métrico y sistemas de medida del grupo de 10.o a 11.e; sin embargo, existen otros estándares ubicados en otros grupos de grados, incluso en otros pensamientos matemáticos que son fundamento del concepto. El límite de una función describe situaciones numéricas (pensamiento numérico), implementa diversos gráficos (pensamiento espacial) y traduce datos numéricos en diversos gráficos (pensamiento aleatorio); evidencia de que indirectamente, aunque el estándar no

menciona la temática, mantiene logros de aprendizaje que sirven para afianzar la temática (ver Figura 5).

Figura 5

Estándar sobre el concepto de límite



Nota. Tomado del Ministerio de Educación Nacional (2006, p. 89).

Lineamientos curriculares

Los lineamientos curriculares se conciben como orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares establecidas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), en articulación con la comunidad educativa, con el propósito de orientar la fundamentación y la planificación de las áreas obligatorias y fundamentales definidas en la Ley General de Educación (MEN, 2018). En particular, los lineamientos curriculares de matemáticas presentan, en primera instancia, una revisión de los antecedentes históricos y de las políticas educativas que han orientado el desarrollo del área en Colombia. Posteriormente, se configuran como un referente curricular que debe ser considerado por las instituciones educativas, tanto oficiales como privadas, para la elaboración del Proyecto Educativo Institucional (PEI). En este contexto, la enseñanza de las matemáticas debe articularse de manera coherente con los procesos de pensamiento matemático, los procedimientos generales y el contexto sociocultural en el que se desarrolla la actividad educativa (MEN, 1998).

Cabe señalar que, de acuerdo con los lineamientos curriculares, la evaluación se concibe como un proceso continuo, de carácter predominantemente cualitativo, sin excluir el componente cuantitativo, y cumple la función de identificar si el estudiante alcanza los logros mínimos de aprendizaje. No obstante, no debe ser entendida como una herramienta de medición destinada a etiquetar a los estudiantes (MEN, 1998). La interpretación matemática que realiza el docente durante el proceso evaluativo tiene en cuenta los comportamientos cotidianos, los procedimientos empleados y las estrategias utilizadas para dar respuesta a situaciones problema, las cuales se aproximan al contexto del estudiante, con el fin de promover el razonamiento, la comunicación matemática, la realización adecuada de cálculos, la elaboración de modelos de sistemas complejos y el seguimiento de instrucciones expresadas en lenguaje matemático.

Capítulo III.

El **camino metodológico**, una forma de **acercamiento** a la **realidad educativa**

Una investigación implica una forma particular de describir y comprender la realidad; para ello, resulta fundamental trazar una ruta metodológica que no solo lo posibilite, sino que también permita su análisis crítico. En este sentido, el camino metodológico adoptado en el presente estudio no se concibió como una sucesión de pasos mecánicos, sino como un proceso de aproximación progresiva al contexto educativo, a sus dinámicas y a las percepciones de los actores que lo integran. Cada decisión metodológica emergió de la necesidad de comprender, analizar y caracterizar los fenómenos que atraviesan los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite en las matemáticas.

Mirar desde dentro: enfoque

Teniendo en cuenta los objetivos de la presente investigación, se optó por el enfoque cualitativo, dado que este permite comprender la concepción del concepto de límite a partir de la exposición de los estudiantes a situaciones contextualizadas. Dicho enfoque favorece la aprehensión del conocimiento mediante la construcción progresiva de ideas simples y familiares, fundamentadas en los conocimientos previos, las cuales conducen a la generalización del objeto matemático de estudio.

Asimismo, este enfoque no requiere el uso de herramientas estadísticas para explicar los datos obtenidos durante la implementación de las técnicas de recolección de la información; por tanto, no pretende presentar resultados desde una perspectiva probabilística. En consecuencia, los hallazgos no son generalizables a otras poblaciones, ya que el estudio se desarrolla en una población de estudio claramente delimitada (Hernández et al., 2014).

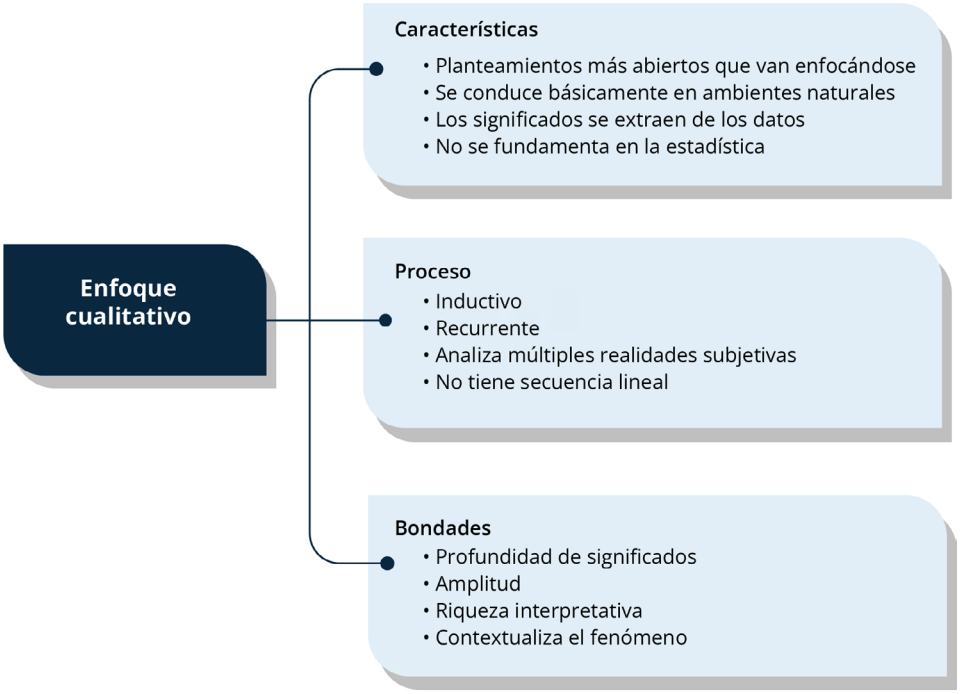
De acuerdo con Hernández et al. (2014), el enfoque cualitativo «utiliza la recolección y el análisis de los datos para afinar las preguntas de investigación o revelar nuevos interrogantes en el proceso de interpretación» (p. 7). Esto implica que, en este tipo de investigaciones, las hipótesis se construyen y reformulan de manera continua a lo largo del proceso investigativo, lo que posibilita realizar ajustes y correcciones en función del objetivo que se pretende alcanzar.

En este sentido, la investigación cualitativa se sustenta principalmente en los enfoques constructivista, naturalista e interpretativo (Hernández et al., 2014), los cuales privilegian la comprensión de los significados que los sujetos atribuyen a sus experiencias de aprendizaje.

En la Figura 6 se presenta el esquema del enfoque cualitativo, en el que se destacan sus principales características, procesos y aportes metodológicos.

Figura 6

Esquema del enfoque cualitativo



Nota. Tomado de Hernández et al. (2014).

Carácter de la investigación-tipo de investigación

La investigación acción participación (IAP) es una metodología distinguible dentro del enfoque cualitativo y se implementa durante las fases investigativas para describir las acciones y actividades propuestas antes, durante y después de la secuencia didáctica de aprendizaje; estas prácticas reconocen que el aprendizaje es un proceso sistemático y tienen como propósito mejorar y transformar las prácticas educativas, para que el estudiante tenga la capacidad de autocrítica desde el análisis de situaciones que se acercan a la realidad (Colmenares, 2012). Bajo esta premisa, Hernández et al. (2014) refiere que la investigación se orienta a resolver problemas prácticos y mejorar situaciones específicas mediante la participación activa de los involucrados en el proceso investigativo.

Las voces que dan sentido al estudio: participantes y unidad de análisis

La investigación se realizó en la Institución Educativa Corporación Aprender, institución privada del municipio de Tame (Arauca); cuenta con niveles de formación de preescolar, básica primaria, básica secundaria y media; el estudio se centró en el último nivel. El colegio se encuentra ubicado en la vía la Cabuya, rumbo sur del municipio, a 7,8 km del parque central, en la vereda Matelión. La comunidad educativa de la institución está conformada por 234 estudiantes, 12 profesores y 3 administrativos.

Los estudiantes de la Corporación Educativa Aprender, en su gran mayoría, son originarios de la región y provienen de familias dedicadas principalmente a labores agropecuarias, como el cultivo de plátano, arroz, yuca y maíz; así como a la ganadería silvopastoril y, en algunos casos, a actividades relacionadas con cebaderos o lecherías. En general, la economía de la región se sustenta en estas actividades, las cuales generan los recursos económicos que dinamizan otros sectores productivos, como la piscicultura y la apicultura.

En los últimos años, se ha incentivado el desarrollo del turismo, actividad que presenta un alto potencial en la región. De manera complementaria, el comercio, las artes y los oficios contribuyen al sostenimiento del denominado 'buen vivir' de la población, al generar algunos empleos que, en última instancia, se apoyan en los capitales económicos y sociales derivados de las actividades productivas predominantes.

La muestra del proceso investigativo tuvo un carácter inductivo, ya que permitió comprender los fenómenos que emergen durante los procesos de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático de estudio. Cabe resaltar que, de acuerdo con el enfoque y el tipo de investigación adoptados, el tamaño de la muestra no constituye un criterio determinante, dado que no se pretende alcanzar la generalización de los resultados a toda la población. Asimismo, a medida que avanzó la investigación, se contempló la posibilidad de incorporar nuevos sujetos de estudio.

La selección de la muestra se realizó mediante participación voluntaria, a partir de la invitación formulada por los investigadores. En este sentido, el proceso inició con un análisis del contexto institucional, seguido del estudio del grupo y, posteriormente, de cada individuo, lo que permitió contar con muestras flexibles y susceptibles de redefinirse según los intereses y necesidades de la investigación (Hernández et al., 2014).

De esta manera, la muestra estuvo conformada por 28 estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Corporación Educativa Aprender, quienes presentan un nivel de formación matemática adecuado

para incursionar en el objeto de estudio. Por lo tanto, la investigación se centró específicamente en este grupo de estudiantes.

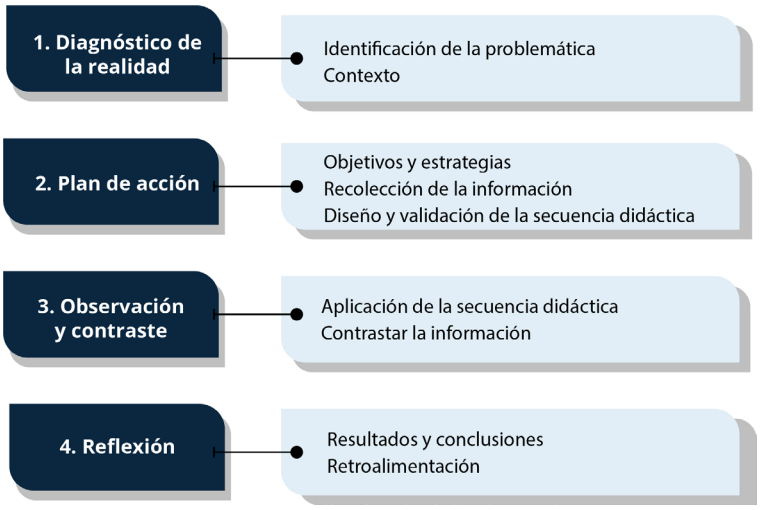
Desarrollo del proceso investigativo - fases

La investigación se desarrolló siguiendo una serie de fases propuestas por Hernández et al. (2014), para la investigación cualitativa y modificadas para dar cumplimiento con las expectativas esperadas frente a la recolección de datos. La primera fase aplica una evaluación diagnóstica a los estudiantes que voluntariamente decidieron participar en la investigación, es de aclarar que la incorporación de esta se concibió como estrategia formativa que permite apreciar los saberes previos para luego concretar las transformaciones emergentes con la intervención pedagógica; la segunda fase propone una serie de estrategias para la recolección de la información, en ellas se define el tiempo, los recursos y las acciones; la tercera fase presenta la aplicación de las estrategias propuestas en la fase anterior y la fase final muestra los resultados obtenidos por la secuencia didáctica.

El análisis por fases permitió realizar una aproximación adecuada a la problemática y, de esta forma, encontrar soluciones pertinentes. Además, la IAP permitió estructurar cuatro fases: diagnóstico de la realidad, plan de acción, observación y contraste, y reflexión, las cuales se representan mediante numeración arábiga como fase 1, fase 2, fase 3 y fase 4, respectivamente.

Figura 7

Fases de la investigación



Nota. Las fases son sistemáticas. Adaptado a partir de Rodríguez (2019).

Fase 1. Diagnóstico de la Realidad

La fase inicial del trabajo investigativo tuvo como propósito contextualizar el proyecto en curso; se expusieron los fundamentos teóricos de la investigación en educación matemática, desde la representación semiótica del concepto de límite de una función, a los estudiantes que conforman la población de estudio, con el fin de invitarlos a participar voluntariamente en la investigación. Las personas que decidieron participar firmaron un "consentimiento informado", en el cual se especificaron las generalidades del trabajo, un correo electrónico de contacto para la resolución de dudas y el uso de los datos exclusivamente con fines académicos.

Posteriormente, se identificó el nivel de dominio que presentaban los estudiantes frente al tema mediante una evaluación diagnóstica, la cual fue de carácter escrito, fundamentada en preguntas de selección múltiple, adaptadas de los cuadernillos de matemáticas de las pruebas de Estado Saber Pro y Saber 11, así como de otras tomadas del banco de preguntas del examen de admisión de la Universidad Nacional de Colombia. La prueba se realizó de manera presencial, ya que la metodología de la IE así lo exigía, además se estableció un acuerdo previo con el docente a cargo del grupo de estudio**.**

Fase 2. Plan de acción

La segunda fase, de acuerdo con la información recolectada a partir de la prueba diagnóstica, consistió en el desarrollo de un plan de acción orientado a reconocer la problemática del contexto matemático, asociada al proceso de enseñanza y aprendizaje; para ello, se plantearon actividades dirigidas a fomentar la comprensión de la temática y a recolectar información. Las estrategias didácticas orientaron de manera constante al estudiante para que siguiera los pasos propuestos por Polya (1945) para la resolución de problemas matemáticos, con el fin de promover la organización y favorecer una mayor comprensión de cada una de las situaciones problema a las que se enfrentaban.

Fase 3. Observación y contraste

La tercera fase dio continuidad a las dos anteriores, lo que permitió definir un proceso sistemático y estructurado para una adecuada aplicación de la secuencia didáctica. En un primer momento, se recogió toda la información con el fin de clasificarla y centrar el análisis en el eje de estudio. Este proceso permite identificar si es necesario reestructurar el trabajo y determinar si los datos son adecuados y suficientes.

El contraste, por su parte, evidencia la comprensión de los estudiantes frente al contenido matemático, en relación con la definición preestablecida en los libros, el proceso de construcción del concepto y su vinculación con el entorno del objeto matemático.

Fase 4. Reflexión

Esta fue la fase final, la cual se centró en los resultados relacionados con el problema de investigación y los objetivos planteados, con el fin de elaborar un informe coherente con la aplicación de la secuencia didáctica. Los resultados se consideraron como los principales hallazgos del estudio y se presentaron de manera sintética. Además, se realizó un proceso de retroalimentación con los docentes del área de la IE interesados en la propuesta, a quienes se les entregó una copia de los resultados, con el propósito de recibir observaciones acerca del estado del razonamiento manejado por los estudiantes en relación con el cálculo diferencial.

Escuchar, observar y comprender: técnicas e instrumentos

De acuerdo con Hernández et al. (2014), «la recolección de datos ocurre en los ambientes naturales y cotidianos de los participantes o unidades de análisis» (p. 397). En el marco de la investigación cualitativa, este procedimiento se concibe como un instrumento integral que, a través de la observación, entrevistas, revisión de documentos y materiales, así como mediante diversos métodos del lenguaje escrito, verbal y no verbal, permite analizar la información y determinar si los participantes han generado conocimiento. Además, requiere que el investigador adopte una postura empática, respete las creencias, culturas y perspectivas de los sujetos estudiados, las cuales pueden influir en las prácticas pedagógicas y en los procesos de enseñanza que se desarrollan durante la investigación.

La observación debe realizarse durante todo el proceso investigativo de manera minuciosa, a fin de reconocer el ambiente físico, social y humano de la comunidad investigada. En ocasiones es necesario realizar bitácoras para realizar inferencias en el ritmo y nivel de raciocinio. Una buena observación se fundamenta en una adecuada capacidad de escucha, en la atención a pequeños detalles y en la habilidad para identificar patrones o conductas (Hernández et al., 2014).

Ficha de observación

La ficha de observación permite describir el comportamiento de los participantes o de la unidad de análisis; se debe realizar durante todo

el proceso de investigación y de manera detallada, reconociendo los factores que inciden durante el proceso (Arias, 2020). En la presente investigación se tuvieron en cuenta los factores relacionados con el implemento de la calculadora en procesos algorítmicos; el reconocimiento y clasificación de expresiones matemáticas; las representaciones semióticas (transformaciones, procesos algorítmicos, lenguaje natural del estudiante, representación cartesiana y representaciones tabulares), y el cumplimiento de la instrucción dada por el docente.

Secuencia didáctica

Una secuencia didáctica se concibe como una estrategia pedagógica para la enseñanza de un conocimiento, organizada de manera secuencial y estructurada, a través de técnicas y métodos didácticos que favorecen la comprensión del conocimiento en cualquier área (Albarracín, 2022). En el área de las matemáticas y, de manera particular, en la presente investigación, se diseñó una secuencia con base en el libro de referencia del MEN, elaborado por Buitrago et al. (2013), titulado *Matemáticas 11° proyecto los caminos del saber*; en los textos de referencia de la educación matemática en Estados Unidos, escritos por Stewart et al. (2012) y Leithold (1998), titulados Precálculo, Matemáticas para el Cálculo y El Cálculo, respectivamente; en el texto escrito por Baldor (1941), titulado Álgebra de Baldor; y en el uso del *software* de graficación GeoGebra, diseñado por GeoGebra (s.f.), para la construcción de gráficas en el plano cartesiano (Riaño-Eslava y Amado-Suárez, 2024).

Evaluación diagnóstica

La evaluación diagnóstica suele realizarse al principio del proceso de investigación para identificar los conocimientos previos de una comunidad, esto permite la posterior toma de decisiones con relación al problema central (Cardeño et al., 2017). En la presente investigación, la evaluación permitió identificar los conocimientos previos al concepto de límite de una función, aquellos relacionados a funciones, potencias, radicación, expresiones algebraicas y gráficas, ya que son temas fundamentales dentro de la aprehensión del conocimiento matemático y con el propósito de saber si los estudiantes cuentan con el conocimiento básico para incursionarlos a través de los registros de representación semiótica.

La evaluación se estructuró con base en preguntas seleccionadas de los cuadernillos de años anteriores de las pruebas de Estado Saber 11, del banco de preguntas utilizado por la Universidad Nacional de Colombia

en sus pruebas de admisión, así como en la estructura de las preguntas diagnósticas del libro *Precálculo, matemáticas para el cálculo*, escrito por Stewart et al. (2012), las cuales se consideran preguntas estandarizadas por el Estado.

Evaluación de cierre

Este tipo de evaluación suele realizarse al final del proceso de investigación para conocer si la situación problema se mantiene en la comunidad estudiada; si no es así, se concluye que los instrumentos que combaten la problemática subsanan y son una herramienta viable para otras poblaciones con las mismas dificultades. En la presente investigación, la evaluación de cierre tuvo como propósito determinar si la secuencia didáctica contribuye a mejorar los índices de calidad de los estudiantes, demostrando ser una estrategia del proceso de enseñanza y aprendizaje acorde con las necesidades y problemáticas de la población. Asimismo, dicha evaluación se fundamentó en lo desarrollado a lo largo de la secuencia didáctica, mediante el uso los mismos documentos de apoyo.

Encuesta de satisfacción

Esta encuesta es una autoevaluación que se realiza al final del proceso de investigación, cuyo propósito es conocer el grado de satisfacción de cada uno de los participantes acerca de los instrumentos mediadores que subsanan el problema de investigación. En esta investigación, se aplicó un cuestionario de preguntas, con opción de respuesta entre sí y no; las preguntas estuvieron relacionadas con la comprensión del concepto de estudio; la aprehensión del conocimiento durante el proceso de formación; la participación de la docente en el proceso de construcción del conocimiento; los apuntes; el ritmo de las clases y el dominio de las representaciones semióticas del concepto. Esto permitió que los estudiantes fueran los jueces de su proceso de formación.

Validación de los instrumentos

La aplicabilidad de los instrumentos de recolección de datos se realizó de acuerdo con la validación de tres expertos capacitados en el sector de educación matemática, con el propósito de conocer la fiabilidad de los instrumentos y así realizar ajustes en las preguntas ambiguas o poco claras del problema de estudio (Robles y Rojas, 2015). Según Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008), «el juicio de expertos se define como una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por

otros como expertos cualificados en este, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones» (p. 29).

Consideraciones éticas del estudio

Las consideraciones se centran en la manipulación de los datos, para lo cual, se manejó una estricta confidencialidad con externos a la investigación y a la IE. Así mismo, en el consentimiento informado que firmó la rectora de la IE y los padres de familia, se señaló que la manipulación de los datos se realizaría de acuerdo con lo establecido en la Ley Estatutaria 1581 de 2012; además, se familiarizó a los interesados con generalidades de la investigación.

Las consideraciones éticas tuvieron un papel fundamental en el desarrollo de la investigación, ya que garantizan un trabajo responsable, respetuoso y coherente con los principios que orientan la investigación educativa. Dado que la investigación se desarrolló en un contexto formativo real, con participación directa de estudiantes, fue imprescindible salvaguardar su dignidad, autonomía y bienestar, y asegurar un uso adecuado de la información recolectada.

Capítulo IV.

Análisis de la experiencia formativa y resultados de investigación

El análisis de la información se desarrolló desde un enfoque interpretativo, propio de la investigación acción participativa (IAP), articulado a las etapas del estudio mediante la triangulación entre el pretest, la secuencia didáctica y el postest. Este proceso de triangulación permitió identificar la perspectiva de los estudiantes en tres momentos: el punto de partida, el desarrollo de la construcción conceptual y la fase posterior a la intervención pedagógica.

En las condiciones iniciales se evidenció que la comprensión del concepto de límite se sustentaba, principalmente, en procesos algorítmicos y en el reemplazo directo de valores, dejando de lado el uso articulado de los registros algebraico, gráfico y verbal. Estas dificultades coinciden con lo planteado por Duval (2004), quien sostiene que la comprensión restringida a un solo registro semiótico resulta insuficiente para alcanzar una comprensión significativa. De manera complementaria, el enfoque ontosemiótico de Godino (2011) señala que el significado matemático no se reduce a la ejecución de operaciones aritméticas; por el contrario, la práctica matemática integra objetos matemáticos, lenguajes, procedimientos, conceptos, propiedades y procesos de argumentación.

Durante el desarrollo de la secuencia didáctica se evidenció una transformación progresiva del concepto matemático, a partir de la incorporación de representaciones gráficas y tabulares que otorgaron sentido al concepto de límite. Estos hallazgos pueden interpretarse a la luz de las propuestas de Radford (2006), quien destaca el papel de los signos y los artefactos culturales en la construcción del conocimiento matemático. En este proceso se observa el tránsito desde operaciones procedimentales hacia explicaciones más estructuradas, en concordancia con lo planteado por Sfard (2008), autor que diferencia entre una comprensión centrada en la ejecución de procedimientos y otra orientada a la conceptualización del conocimiento como objeto matemático.

Finalmente, los resultados del postest señalaron una transformación del conocimiento matemático que trasciende el enfoque procedimental, reflejada en la disminución de errores asociados a la comprensión del concepto de límite. En este sentido, el capítulo pone de manifiesto la relevancia de la articulación semiótica como medio para consolidar aprendizajes más significativos en la educación media.

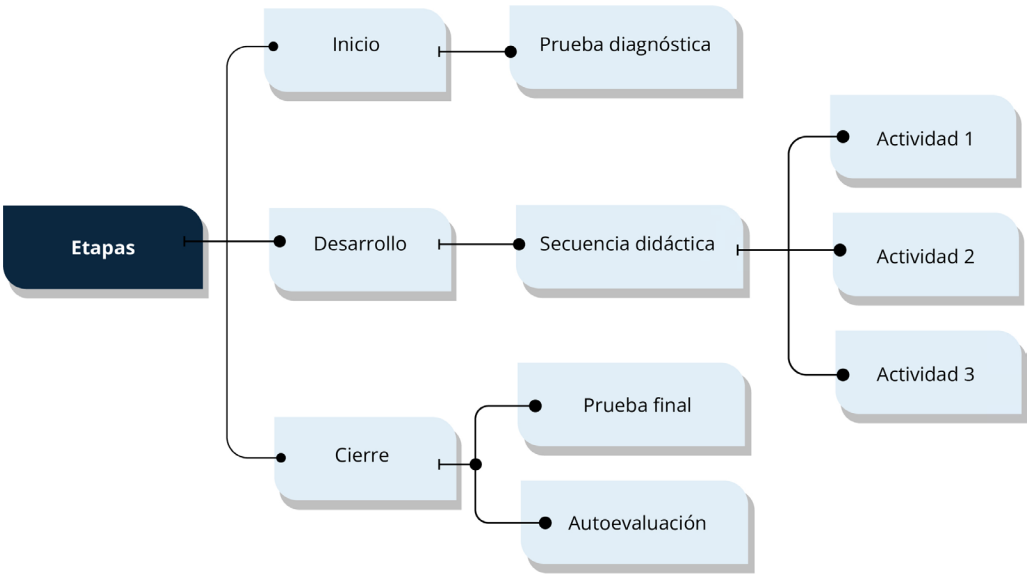
Organización y sistematización de la experiencia

La sistematización de la experiencia pedagógica constituyó un proceso central para el análisis de los resultados de la investigación, en la medida en que permitió organizar, interpretar y contrastar la información obtenida a partir de los diferentes instrumentos de recolección de datos aplicados durante la implementación de la secuencia didáctica. Dicho proceso

se estructuró en tres momentos: inicio, desarrollo y cierre, los cuales responden a las fases de la IAP (ver Figura 8).

Figura 8

Etapas de la estrategia pedagógica



En la etapa inicial, se identificaron las condiciones de partida de los estudiantes frente al concepto de límite, particularmente en relación con el manejo de representaciones semióticas algebraicas, gráficas, tabulares y verbales. Los resultados del pretest evidenciaron dificultades en la articulación entre registros, lo cual coincide con lo señalado por Duval (2004), quien sostiene que la comprensión matemática no depende únicamente del dominio de un registro, sino de la capacidad de conversión entre ellos.

Durante la fase de desarrollo, la información recolectada mediante la ficha de observación y las actividades de la secuencia didáctica permitió analizar el progreso gradual de los estudiantes en la construcción del concepto de límite. Se observó una mejora progresiva en la interpretación de representaciones gráficas y en la traducción entre registros algebraicos y tabulares, lo cual sugiere que la estrategia didáctica favorece procesos de tratamiento y conversión semiótica, elementos fundamentales para la comprensión conceptual del límite.

Finalmente, en la etapa de cierre, los resultados del postest y de la encuesta de valoración evidenciaron avances significativos en la comprensión del concepto de límite, así como una percepción positiva por parte de los estudiantes frente a la metodología implementada. Estos hallazgos permiten afirmar que la sistematización de la experiencia no solo facilitó el análisis de los resultados, sino que también aportó elementos de reflexión pedagógica sobre el impacto de las representaciones semióticas en la enseñanza del cálculo diferencial en educación media.

Condiciones iniciales del aprendizaje

La prueba diagnóstica inicial, también denominada prueba de indagación o pretest, se aplicó mediante un instrumento estructurado compuesto por diez preguntas de selección múltiple (opciones A, B, C y D), con única respuesta válida y un puntaje uniforme de 0,5 por ítem. Esta tipología de preguntas se diseñó siguiendo la estructura de las pruebas de Estado, con el propósito de que los estudiantes se familiarizaran con este formato de evaluación y desarrollaran un razonamiento acorde al requerido en la prueba Saber 11.

Igualmente, el objetivo de la prueba estuvo orientado a identificar el nivel de dominio de los estudiantes en conocimientos asociados a la interpretación de textos, las operaciones básicas, la potenciación, la ubicación en planos bidimensionales, la factorización y la tabulación de funciones, entre otros, los cuales se encuentran inmersos en distintos registros de representación semiótica.

Tabla 6

Niveles de dificultad de la tabulación de los resultados en el pretest

Ítem	Tipo	Estudiantes que seleccionaron la opción A	Estudiantes que seleccionaron la opción B	Estudiantes que seleccionaron la opción C	Estudiantes que seleccionaron la opción D	Estudiantes que acertaron	Estudiantes que fallaron	Nivel de dificultad de acuerdo con los resultados
1	Lenguaje natural	18	0	2	3	18	5	Medio
2	Lenguaje natural	4	13	3	3	3	20	Alto
3	Gráfica	0	9	9	4	9	14	Alto
4	Lenguaje natural	1	1	1	20	20	3	Bajo
5	Gráfica	1	17	1	4	17	6	Medio
6	Gráfica	4	7	11	1	11	12	Medio
7	Tabular	4	2	8	9	9	14	Medio
8	Tabular	2	2	15	4	15	8	Medio
9	Simbólica	4	11	1	7	11	12	Medio
10	Simbólica	11	6	1	5	11	12	Medio

Nota. Alto19; 10 ≥ Medio ≤ 18; y Bajo ≤ 9. Adaptado de La Evaluación [Formato de validación de niveles de dificultad] por Suárez, (2022).

La tabulación de los resultados permitió identificar que, en términos generales, los estudiantes presentaron un nivel de dificultad medio en la prueba. No obstante, se evidenció un nivel de dificultad alto en las preguntas 2 y 3; medio en las preguntas 1, 5, 6, 7, 8, 9 y 10, y bajo en la pregunta 4. De igual forma, se determinó que la pregunta con mayor índice de dificultad fue la pregunta 2, asociada al registro de representación semiótica del lenguaje natural, ya que los 20 estudiantes que seleccionaron opciones incorrectas no lograron establecer una multiplicación que satisficiera adecuadamente el enunciado propuesto.

Tabla 7

Pregunta 2 del pretest

Nivel de dificultad	**Alto**
Contexto	En una fábrica de balones de fútbol de Monguí tienen 194 balones listos para entregar. Un equipo de fútbol decide comprarlos con la condición de empacarlos en paquetes que contengan 6 y 8 balones.
Pregunta directa	¿Cuál es el mínimo número de paquetes que se pueden formar?
La respuesta correcta se identifica con color rojo	
Distractor A	23
Distractor B	24
Distractor C	25
Distractor D	26
Justificación distractor C	Si se aplica la operación básica de multiplicación y se comienza la operación con el mayor número de paquetes que se pueden realizar, se obtiene: 8(25) + 6(0) = 200 8(24) + 6(1) = 198 8(23) + 6(2) = 196 8(23) + 6(2) = 194 Esto indica que se pueden realizar 23 paquetes de 8 balones y 2 paquetes de 6 balones para empacar los 194 balones.

Nota. Adaptado de los cuadernillos de matemáticas, Saber 11, MEN, 2018.

En este grado de escolaridad se identificó que, aunque los estudiantes reconocen las tablas de multiplicar, la aplicación de la multiplicación en la resolución de situaciones problema es limitada. Esto se debe a que, desde los primeros años de escolaridad, la enseñanza de las matemáticas no se promueve a partir de situaciones cercanas al entorno del estudiante, sino que se centra en el aprendizaje memorístico de procesos algorítmicos desprovistos de sentido. En consecuencia, son pocos los estudiantes que desarrollan habilidades de interpretación, formulación y argumentación, competencias que son evaluadas en las pruebas de Estado Saber 11.

Tabla 8

Análisis de las representaciones semióticas: diagnóstico

Representación semiótica	Ítem	Nivel de dificultad
Simbólico	9 y 10	De acuerdo con el tamizaje, el nivel alcanzado es medio (M)
Tabular	7 y 8	De acuerdo con el tamizaje, el nivel alcanzado es medio (M)
Gráfico	3, 5 y 6	Nivel de dificultad medio (M), porque el ítem 3 arrojó nivel alto (A), mientras que los ítems 5 y 6 nivel medio (M).
Lenguaje natural	1, 2 y 4	Se considera de nivel medio (M), porque los ítems tienen nivel de dificultad alto, medio y bajo (A, M y B).

Nota. Alto (A), Medio (M), Bajo (B). Adaptado de Suárez (2022).

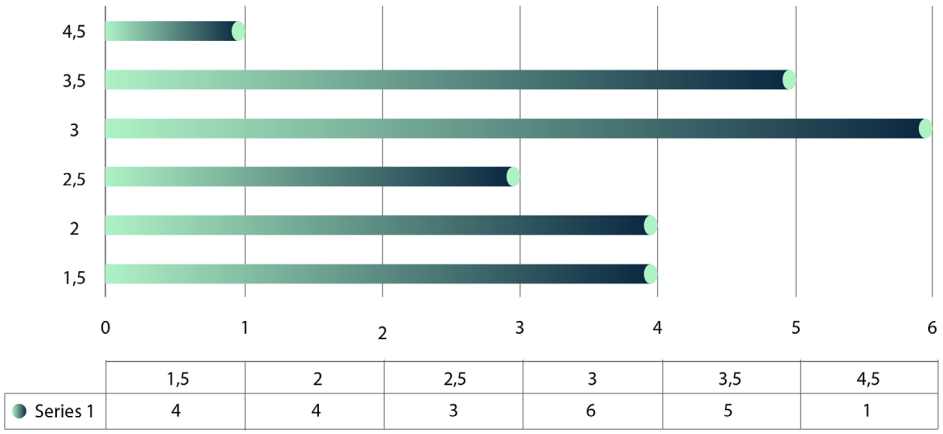
Las estimaciones puntuales de las medidas de tendencia central evidenciaron que el promedio de las calificaciones fue de 2,7, lo que ubicó a los estudiantes en un nivel de desempeño bajo, según el Sistema Institucional de Evaluación de los Estudiantes (SIEE). De igual forma, la mediana y la moda presentaron un valor de 3,0, clasificándose también dentro del nivel de desempeño bajo. Estos resultados indicaron que las actividades desarrolladas en el marco de la secuencia didáctica deben orientarse a favorecer la aprehensión del nuevo conocimiento, mediante el fortalecimiento de los saberes previos necesarios para una adecuada construcción del concepto de límite.

El estimador puntual de la medida de dispersión mostró que el rango de las calificaciones obtenidas fue de 3,0 puntos, con una nota mínima de

1,5 y una máxima de 4,5, lo cual reflejó una marcada heterogeneidad en el desempeño de los estudiantes.

Figura 9

Diagrama de barras de frecuencias: pretest



	1,5	2	2,5	3	3,5	4,5
Series 1	4	4	3	6	5	1

A partir de los resultados, se identificó que tan solo seis estudiantes se encuentran en el nivel de desempeño básico y alto; mientras que los estudiantes restantes, se encuentran en un nivel de desempeño bajo; es decir, el dominio de los conocimientos previos aún es precario. Por tal razón, las actividades establecidas en la secuencia didáctica se enfocaron en la introducción del nuevo conocimiento, a partir del fortalecimiento de los conocimientos previos, enfocados a situaciones problema próximas a la realidad de los estudiantes.

Finalmente, se identificó que los estudiantes en la etapa inicial tienden a implementar la representación semiótica de lenguaje natural, porque el 33 % de los estudiantes que aciertan en su respuesta implementa este tipo de registro, seguido del registro gráfico con el 30 %, el registro tabular con el 19 % y, por último, el registro simbólico con el 18 %. Este patrón de comportamiento permite reconocer que los estudiantes carecen de habilidades simbólicas a mayor escala y es un punto de partida para que el diseño de las actividades tenga el componente para la ejercitación de procesos algorítmicos.

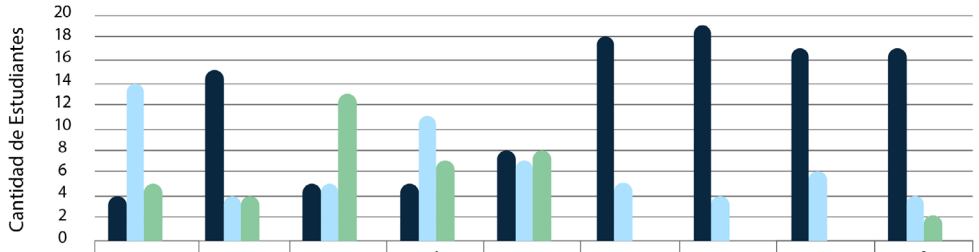
Observación pedagógica del proceso formativo

La observación directa del rendimiento académico de los estudiantes frente al desarrollo de la estrategia pedagógica se realizó mediante

una tabla de observación encaminada a indagar, examinar y reflexionar sobre el dominio de las representaciones semióticas del conocimiento matemático, al igual que el desarrollo del pensamiento matemático. La ficha se aplicó individualmente durante cada una de las actividades; en la cual se consideraron nueve criterios que permitieron realizar seguimiento y valoración del desempeño académico dentro del aula de clase y evidenciar la evolución de la aprehensión del nuevo conocimiento; igualmente, se evidenció la viabilidad de la secuencia didáctica y se consideraron las posibles réplicas en grupos que aptos para la enseñanza del concepto de límite.

Figura 10

Diagrama de barras de la ficha de observación



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Excelente	4	15	5	5	8	18	19	17	17
Bueno	14	4	5	11	7	5	4	6	4
Regular	5	4	13	7	8	0	0	0	2
Malo	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Teniendo en cuenta la Figura 10, los niveles de desempeño de los nueve criterios fueron excelentes, bueno, regular y malo; el criterio con mayor dificultad fue el criterio 3, relacionado con "justifica procesos matemáticos acordes a una situación problema", esto indica que 5, 5 y 13 estudiantes obtuvieron un nivel de desempeño excelente, bueno y regular, respectivamente; lo anterior debido a que, en ocasiones, las justificaciones se centraban en expresar en palabras el producto de los procesos algorítmicos, dejando de lado el trasfondo de la situación problema; sin embargo, ningún estudiante obtuvo un nivel de desempeño malo, es decir, en algún momento de la investigación, los estudiantes intentaron justificar con sus propias palabras su desempeño en la situación problema.

En este orden de ideas, los criterios 1 y 4, relacionados con "implementa la calculadora como herramienta para la solución de expresiones algebraicas" y "realiza los procesos algorítmicos adecuados a la expresión matemática",

obtuvieron una tendencia de nivel de desempeño bueno, porque a pesar de que, en ocasiones, los estudiantes no tenían acceso a una calculadora, intentaban realizar los procesos de forma manual y llegaban al resultado de manera exitosa, ejercitando procesos algorítmicos previos para encontrar el límite de una función; además, se evidenció que el uso de la calculadora se implementaba como método de verificación de los procesos y de los resultados obtenidos de forma manual; lo anterior debido al limitado acceso a la calculadora, ya que no era de su propiedad, y porque habían pocos estudiantes que contaban con la herramienta digital.

Por otra parte, cabe considerar que los parámetros que se tuvieron en cuenta para el criterio 5, relacionado con "interpretar verbalmente una representación simbólica del límite de una función", fueron las adecuadas lecturas de operaciones de potenciación, radicación, funciones y límites, además de expresiones matemáticas, producto de procesos matemáticos realizados para simplificar funciones y poder aplicar el límite. Otro parámetro que se tuvo en cuenta fue la proximidad de valores que toma el estudiante a un valor entero. Los resultados que se muestran en la Figura 10 señalan que 8, 7 y 8 estudiantes presentan un nivel de desempeño excelente, bueno y regular, respectivamente; esto indica que los estudiantes intentan realizar transformaciones de representaciones semióticas, es decir, pasar de una representación simbólica a una de lenguaje natural.

Por último, los criterios 2, 6, 7, 8 y 9 señalan un nivel de desempeño excelente; por esta razón, se puede considerar que los estudiantes reconocen todos los registros semióticos del límite, implementan el registro tabular para ubicar puntos en el plano cartesiano y poder trazar funciones. Lo anterior indica que los estudiantes, como mínimo, dominan y transforman en su totalidad dos representaciones semióticas del concepto de límite. Según Duval (2016), el dominio de dos registros evidencia un aprendizaje significativo. Así, estos resultados favorables señalan la participación activa y el cumplimiento de las actividades dentro el aula de clase, la solución de dudas en momentos pertinentes de la explicación del contenido temático, y el desarrollo de las actividades.

Desarrollo de la secuencia didáctica

El desarrollo de la secuencia didáctica se realizó por medio de tres actividades relacionadas al desarrollo e implementación de los registros de representación semiótica del concepto de límite. Durante esta etapa evaluativa, se fortalecieron conceptos previos, necesarios para el adecuado entendimiento del nuevo concepto; las actividades se realizaron en grupos de dos estudiantes, con el propósito de fomentar el aprendizaje

colaborativo y para que los pares académicos asuman el papel de tutores. Los resultados de la implementación de la estrategia pedagógica fueron favorables, ya que se generó un impacto significativo con la aprehensión del nuevo conocimiento.

Primera actividad

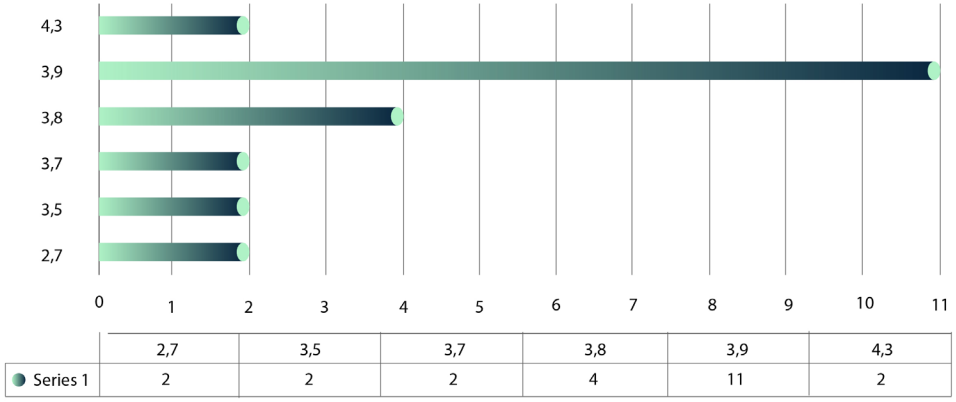
La aplicación de la actividad fortaleció el "pensamiento espacial y sistemas geométricos", a través de la búsqueda del área de figuras geométricas, con diferente número de lados; además de una representación tabular y gráfica de una función racional; igualmente, se evidencia el fortalecimiento del "pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos" con el dominio de funciones racionales, raíz cuadrada y cuadrática e interpretación de las partes del límite de una función. La actividad contó con cuatro puntos de respuestas abiertas, con el propósito de identificar los diferentes raciocinios de los estudiantes; por ello, las preguntas estuvieron relacionadas con el área de figuras geométricas, el dominio de funciones, la representación gráfica de una función y las partes del límite.

Los estudiantes presentaron mayor dificultad en la pregunta que exigía la elaboración de una argumentación, expresada con sus propias palabras, sobre el área del círculo a partir del área de los polígonos circunscritos, lo que evidencia una tendencia a repetir procedimientos algorítmicos de manera mecánica, sin sustento conceptual ni argumentativo. En contraste, en las preguntas relacionadas con funciones, se evidencia que los estudiantes dominan la tabulación y la representación gráfica de funciones según el dominio establecido en las funciones cuadráticas, racionales y de raíz cuadrada. Estos resultados indican que las representaciones semióticas simbólicas, tabulares y gráficas de las funciones son manejadas adecuadamente por los estudiantes y constituyen un punto de partida para la comprensión del concepto de límite.

Los resultados de la aplicación de la actividad ubican a los estudiantes en un nivel de desempeño básico, con un promedio de notas de 3,8, una moda de 3,9 y un rango de notas de 1,6, con una calificación mínima de 2,7 y una máxima de 4,3. Estos resultados permiten considerar que los estudiantes transitaron de un nivel de conocimiento bajo a uno básico, lo que sugiere que la aplicación de la actividad contribuyó a mejorar y afianzar su aprendizaje.

Figura 11

Diagrama de barras de frecuencias: primera actividad



	2,7	3,5	3,7	3,8	3,9	4,3
Series 1	2	2	2	4	11	2

Segunda actividad

La aplicación de la segunda fase de la estrategia pedagógica se centró en el desarrollo de las representaciones semióticas tabulares y gráficas, mediadas por una representación semiótica simbólica del concepto de límite, con el propósito de introducir nuevas representaciones a partir de una ya conocida por los estudiantes. De esta manera, la inserción del conocimiento permitió desarrollar en los estudiantes el "pensamiento numérico, espacial, aleatorio y variacional". La actividad constó de tres puntos relacionados inicialmente con la tabulación del límite de una función cuando se aproxima por los dos sentidos a un número entero, continúa con la interpretación gráfica del límite y finaliza con una retroalimentación de los dos puntos realizados con anterioridad.

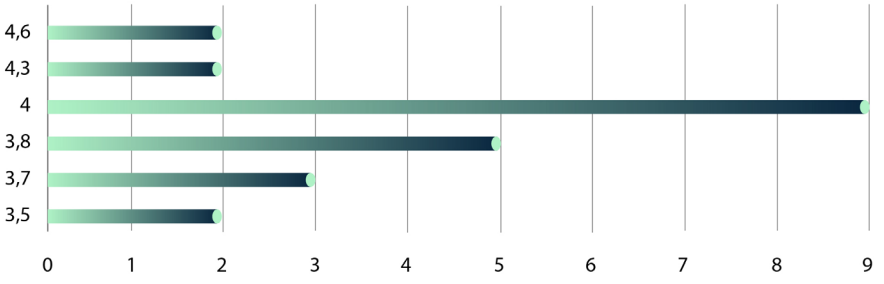
Las dificultades de aprendizaje de algunos estudiantes se atribuyen a deficiencias en el desarrollo de las operaciones básicas con números irracionales (decimales) y en la resolución de problemas contextualizados en su entorno; estas dificultades son consecuencia de prácticas pedagógicas inadecuadas desarrolladas en años anteriores de escolaridad. Los estudiantes presentaron mayor dificultad en la pregunta en la que se exigía tabular una serie de funciones a partir de valores próximos a un número entero, debido a una configuración inadecuada de la calculadora y a la confusión entre las operaciones de multiplicación y suma de decimales durante la ejecución de procedimientos algorítmicos manuales.

Los resultados de la aplicación de la actividad ubican a los estudiantes en un nivel de desempeño alto, con un promedio de notas de 4,0 y una

moda equivalente; además, se registró un rango de 1,1, con una calificación mínima de 3,5 y una máxima de 4,6. Estos resultados permiten considerar que los estudiantes transitaron de un nivel de desempeño básico a uno alto, lo que indica que la aplicación de la actividad favoreció la mejora y el afianzamiento del aprendizaje.

Figura 12

Diagrama de barras de frecuencias: segunda actividad



	3,5	3,7	3,8	4	4,3	4,6
Series 1	2	3	5	9	2	2

Tercera actividad

La aplicación de la fase final de la estrategia pedagógica integró las distintas representaciones semióticas del concepto y se centró en la correcta aplicación de las propiedades de los límites, con el propósito de simplificar los procesos matemáticos y determinar el límite de una función en aquellos casos en los que la función no estaba definida, pero sí lo estaban sus valores próximos. Esta última actividad constó de cuatro puntos orientados al desarrollo del pensamiento numérico, espacial, aleatorio y variacional, los cuales se articularon con la aplicación de propiedades del límite, con el fin de evitar el error de sustituirlo directamente en la función; la interpretación gráfica en la que se establece el límite en distintos puntos; la representación tabular de números decimales próximos a un valor entero, y el uso del concepto de límite en funciones trigonométricas.

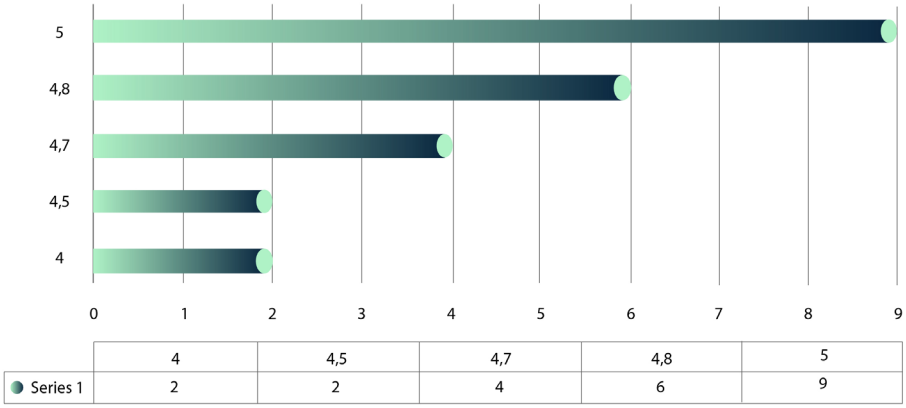
Los estudiantes presentaron mayor dificultad en la pregunta en la que se abordaban funciones trigonométricas, ya que inicialmente consideraron que requería un razonamiento distinto al aplicado en los puntos anteriores; no obstante, tras el desarrollo de una serie de ejemplos relacionados con el límite de funciones trigonométricas, se logró aclarar la situación. La aplicación de la actividad arrojó resultados favorables, puesto que no se registraron estudiantes con niveles de rendimiento bajo ni básico, lo cual

evidencia que lograron comprender y transformar las representaciones semióticas del concepto de límite. Asimismo, se observó la capacidad de transitar de la representación simbólica a la tabular, de esta a la gráfica y, posteriormente, a la expresión en lenguaje natural, de modo que un mismo límite puede analizarse a través de los cuatro procesos de representación semiótica.

Los resultados de la aplicación de la actividad ubican a los estudiantes en un nivel de desempeño superior, con un promedio de notas de 4,8 y una tendencia de notas o moda de 5,0; además de un rango de notas de 1,0, con una nota mínima de 4,0 y una máxima de 5,0. Estos resultados señalan que los estudiantes pasaron de un nivel de conocimiento alto a uno superior, es decir, la aplicación de la actividad mejoró y afianzó el aprendizaje de los estudiantes.

Figura 13

Diagrama de barras de frecuencias: tercera actividad



Transformaciones en la comprensión del límite

El análisis de la comprensión del concepto de límite se realizó mediante la comparación entre los resultados del pretest y el postest, y a partir de la observación del desempeño de los estudiantes durante la implementación de la secuencia didáctica. Este análisis permitió identificar cambios relevantes en la manera en que los estudiantes interpretan y representan el concepto de límite.

En la etapa inicial, los estudiantes tendían a abordar el límite desde una perspectiva principalmente procedimental, centrada en la sustitución algebraica, lo que dificulta la comprensión de su significado conceptual. Esta limitación coincide con lo planteado por Duval (2004), quien señala

que la comprensión matemática se ve restringida cuando el aprendizaje permanece en un solo registro de representación. A lo largo del proceso formativo, se evidenció una mejora en la articulación entre los registros algebraico, gráfico y tabular, lo cual favoreció procesos de conversión semiótica más consistentes. De igual forma, los estudiantes lograron una mayor precisión en el uso del lenguaje matemático y en la argumentación de sus respuestas, lo que se reflejó en los resultados del postest.

Las transformaciones indican que el uso intencionado de representaciones semióticas, especialmente de carácter visual y gráfico, contribuyó a fortalecer la comprensión conceptual del límite, a superar enfoques meramente mecánicos y a promover aprendizajes matemáticos más significativos en educación media, en concordancia con lo señalado por García et al. (2026) respecto al papel mediador de las representaciones visuales en la construcción del significado matemático.

Tabla 9

Niveles de dificultad de la tabulación de los resultados en el postest

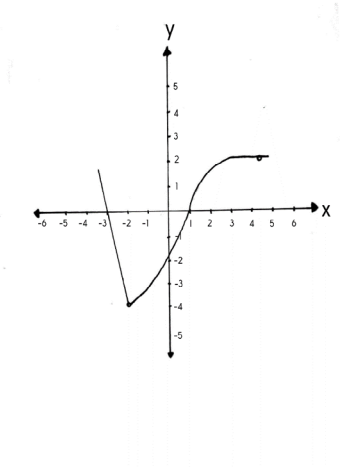
Ítem	Tipo	Estudiantes que seleccionaron la opción A	Estudiantes que seleccionaron la opción B	Estudiantes que seleccionaron la opción C	Estudiantes que seleccionaron la opción D	Estudiantes que acertaron	Estudiantes que fallaron	Nivel de dificultad de acuerdo con los resultados
1	Gráfica	0	0	19	4	19	4	Bajo
2	Lenguaje natural	0	19	0	4	19	4	Bajo
3	Tabular	0	0	1	22	22	1	Bajo
4	Lenguaje natural	23	0	0	0	23	0	Bajo
5	Gráfica	2	0	10	11	10	13	Medio
6	Gráfica	23	0	0	0	23	0	Bajo
7	Simbólico	0	0	21	2	21	2	Bajo
8	Tabular	0	23	0	0	23	0	Bajo
9	Simbólico	10	0	2	11	11	12	Medio
10	Simbólico	0	20	3	0	20	3	Bajo

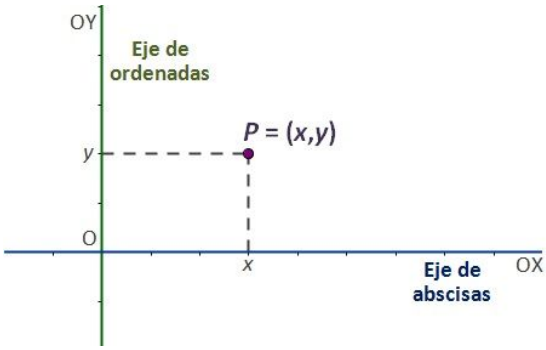
Nota. Alto ≥ 19; 10 ≤ Medio ≤ 18; y Bajo ≤ 9. Adaptado de la evaluación [formato de validación de niveles de dificultad] por Suárez (2022).

La tabulación de los resultados señaló que los alumnos presentaban un nivel de dificultad bajo en toda la prueba. Esto indica los estudiantes presentan un nivel de dificultad medio en las preguntas 5 y 9, y bajo en el resto de preguntas. Así mismo, la pregunta con mayor índice de dificultad fue la pregunta 5, relacionada con el registro de representación semiótico gráfico.

Tabla 10

Pregunta 5 del postest

Nivel de dificultad	**Medio**
Contexto	La gráfica cartesiana de una función no está definida para x=–2 y x=1.
	
Pregunta directa	Establezca a qué valor tiende por derecha y por izquierda en donde no está definida la función.
La respuesta correcta se identifica con color rojo	
Distractor A	-3 *y* 0
Distractor B	0 *y* 1
Distractor C	-4 *y* 0
Distractor D	-2 *y* 3

Justificación distractor C	Las coordenadas en un plano bidimensional se definen según el nombre que se les da a los ejes coordenados. Las variables independientes se definen, para este caso, como “x” y las variables dependientes como “y”. Una coordenada, según los ejes mencionados, se definen como: (x, y). Según el enunciado del problema, se exige encontrar dos coordenadas, donde se tiene las variables independientes x = -2 y x=1; es decir, (-2, y) y (1, y). Para los dos casos, necesitamos encontrar los valores de y.  La anterior imagen permite comparar la gráfica de la situación problema y establecer las coordenadas (-2, -4) y (1, 0), es decir, cuando el valor de x = -2, los valores próximos por derecha e izquierda a este valor van a tener una proyección próxima a – 4; así mismo ocurre con x=1.

Nota. Adaptado de Los cuadernillos de matemáticas, Saber 11, MEN, 2018.

Cabe considerar que la interpretación del texto juega un papel importante en la solución de situaciones problema; si los estudiantes no interpretan adecuadamente los problemas de la prueba final, los resultados serían negativos. La pregunta 5 evidencia que los resultados fueron poco favorables, debido al limitado bagaje lector de los estudiantes, lo que permite considerar que las prácticas pedagógicas, no solo en el área de matemáticas, deben promover el fortalecimiento de la lectura; de esta manera, los resultados en las demás áreas básicas podrían mejorar de forma significativa. Los resultados de las pruebas de Estado Saber 11 de la institución educativa podrían ubicarse por encima de la media.

Tabla 11

Análisis de las representaciones semióticas: prueba de salida

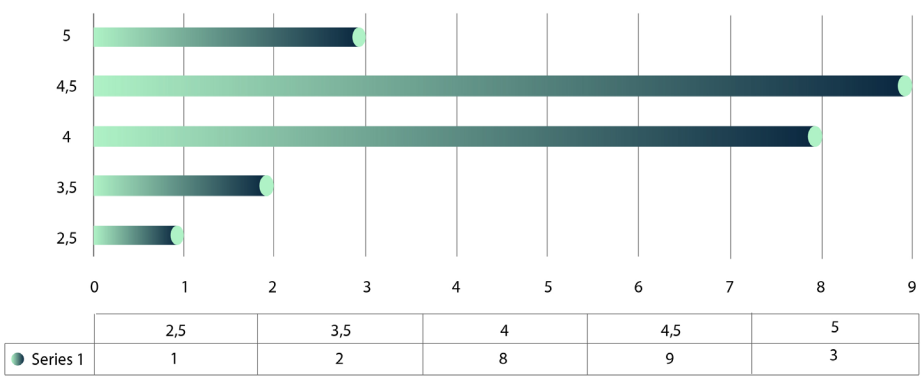
Representación semiótica	Ítem	Nivel de dificultad
Simbólico	7, 9 y 10	Nivel de dificultad medio (M), porque el ítem 9 arrojó nivel medio (M); mientras que los ítems 7 y 10, nivel bajo (B).
Tabular	3 y 8	De acuerdo con el tamizaje, el nivel alcanzado es bajo (B).
Gráfico	1, 5 y 6	Nivel de dificultad medio (M), porque el ítem 5 arrojó nivel medio (M); mientras que los ítems 1 y 6, nivel bajo (B).
Lenguaje natural	2 y 4	De acuerdo con el tamizaje, el nivel alcanzado es bajo (B).

Nota. Alto (A), Medio (M), Bajo (B). Adaptado de Suárez (2022).

Las estimaciones puntuales de las medidas de tendencia central indicaron que el promedio de la nota fue de 4,2, lo cual lo ubicó en un nivel de desempeño alto, según el SIEE. Asimismo, la mediana y la moda fueron de 4,5, valor que también correspondió a un nivel de desempeño alto. Este resultado evidenció que las actividades realizadas dentro de la secuencia didáctica favorecieron la aprehensión de los conocimientos previos mediante la construcción del nuevo conocimiento. Por otra parte, el estimador puntual de la medida de dispersión mostró que el rango de notas obtenido fue de 2,5 puntos, con una nota mínima de 2,5 y una máxima de 5,0.

Figura 14

Diagrama de barras de frecuencias: postest



Los resultados evidenciaron que el dominio del concepto de límite, a través de representaciones semióticas, mejoró el conocimiento matemático de los estudiantes de grado undécimo de la Corporación Educativa Aprender, puesto que la comprensión de un concepto avanzado implicó la experticia de conceptos previos. Asimismo, los resultados presentados en la gráfica mostraron que veintidós estudiantes se ubicaron en niveles de desempeño básico, alto y superior, mientras que tan solo un estudiante se ubicó en el nivel de desempeño bajo. Esta situación se explicó porque el estudiante estuvo ausente en varias clases por motivos personales, lo cual dificultó la atención y la resolución de dudas durante la explicación de la docente; no obstante, se evidenció que aquellos estudiantes que participaron en todo el proceso de investigación adquirieron un aprendizaje significativo.

Valoraciones de los estudiantes sobre la experiencia

La encuesta se realizó a manera de autoevaluación, para conocer el punto de vista de los estudiantes sobre cuáles eran los vacíos intelectuales que consideraban que tenían después de la aplicación de la secuencia didáctica. En general, los resultados señalan que los estudiantes comprenden el contenido temático, reconocen y representan los distintos tipos de registro semiótico y realizan procesos para pasar de un registro a otro. Además, la toma de apuntes, la participación en clase y la solución de las actividades fomentan el desarrollo del pensamiento matemático y ayudan a resolver dudas de los conceptos previos, necesarios para la comprensión del concepto de límite.

La encuesta constó de nueve preguntas de respuesta cerrada (sí/no), entre las cuales una se relacionó con la existencia de mejoramiento entre la prueba de inicio y la prueba final. En este caso, todos los estudiantes respondieron afirmativamente. La veracidad de estas respuestas se evidenció en los resultados de la aplicación de la evaluación final, en la cual los estudiantes alcanzaron un promedio de notas de 4,2, mientras que el promedio registrado en la prueba de inicio fue de 2,7. Estos resultados mostraron la evolución del conocimiento matemático y evidenciaron el paso de un nivel de conocimiento bajo a uno alto, con un incremento significativo de 1,5 puntos.

Alcances y limitaciones de la experiencia

La intensidad horaria de los estudiantes del último grado de escolaridad de la IE era de tres horas semanales, y la mayor carga horaria se concentraba los lunes, lo que me enfrentó a la dificultad de perder varias clases programadas para ese día, debido a festividades nacionales y locales, lo cual obligó a posponer en diversas ocasiones las clases de matemáticas.

Esta dificultad retrasó el proceso de enseñanza, por lo que fue necesario, en varias ocasiones, realizar retroalimentaciones conceptuales de manera detallada, con énfasis reiterado en propiedades abordadas en clases anteriores. Cabe resaltar que un aprendizaje interrumpido en repetidas ocasiones tiende a generar vacíos conceptuales con mayor frecuencia que en aquellos casos en los que el proceso de aprendizaje se desarrolla de forma lineal.

Otra limitación particular que se evidenció fue que, a mitad del proceso de enseñanza, ingresó una estudiante nueva, a quien se le explicó el trabajo que se venía realizando con los pares académicos y se estableció un acuerdo sobre la participación voluntaria que tendría en la investigación; sin embargo, esta situación constituyó una limitación, debido a que fue necesario llevar un ritmo de trabajo diferente con la estudiante, lo que incrementó el nivel de dificultad del contrato didáctico. Es decir, mientras los demás estudiantes presentaban una aprehensión del conocimiento más avanzada, la estudiante apenas comenzaba a incursionar en la temática.

Pertinencia investigativa y proyección académica

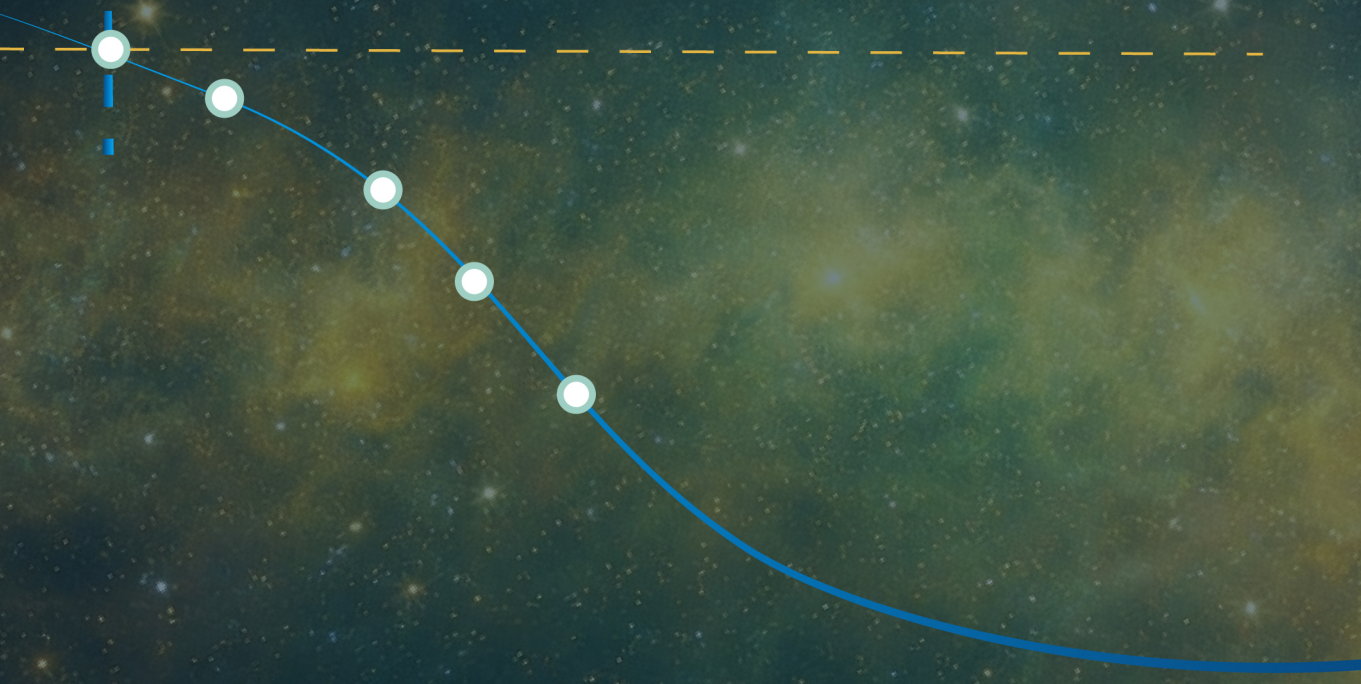
Los aportes de la presente investigación al desarrollo del pensamiento matemático se orientan a fomentar el razonamiento lógico-matemático mediante la exploración y comprensión del mundo, a partir de la relación del contenido temático con el entorno del estudiante. El desarrollo de competencias se encuentra inmerso en la línea de investigación, puesto que, gracias a estas, se fortalecen habilidades del área que permiten enfrentarse a diversas situaciones problema del eje temático e, incluso, constituyen un punto de partida para otros ejes temáticos dentro del área de aprendizaje. De este modo, el desarrollo de competencias, que propician las situaciones problema cercanas al estudiante, contribuye a potenciar los aspectos más abstractos del pensamiento.

Otro aporte de la investigación se orienta a preparar a los estudiantes, principalmente, para un futuro próximo relacionado con la presentación del examen de Estado Saber 11, mediante el tipo de preguntas planteadas en las pruebas diagnóstica y final, así como el desarrollo de la estrategia pedagógica basada en el uso de conceptos previos para el adecuado entendimiento del contenido temático. Igualmente, se prepara al estudiante para un futuro más lejano, vinculado con el ingreso a una institución de educación superior o la universidad, aspecto en el que se hace énfasis, dado que todos los estudiantes manifestaron como finalidad cursar una carrera profesional.

Finalmente, se destaca que la investigación buscó, de manera constante, el desarrollo del pensamiento matemático mediante la ejercitación, la solución de problemas y la argumentación verbal en lenguaje natural de un conocimiento matemático que exige el dominio de temas como las operaciones algebraicas, las funciones, la representación cartesiana, el dominio, el rango y una amplia familiarización con el lenguaje matemático, entre otros ya mencionados. Estos conceptos resultan necesarios al resolver el límite de una función, lo que permite comprender que, a medida que se solucionan problemas, se afianza el conocimiento matemático.

Capítulo V.

Aportes del concepto de límite en la formación docente



El presente capítulo sintetiza los hallazgos centrales de la investigación y articula una reflexión crítica sobre las implicaciones pedagógicas y epistemológicas del proceso desarrollado. Las conclusiones responden tanto a la pregunta de investigación como a los objetivos planteados inicialmente, mientras que las recomendaciones se orientan hacia la transformación de las prácticas docentes en contextos similares. Los resultados aquí discutidos emergen del análisis de datos obtenidos con estudiantes de 16 y 17 años de la Corporación Educativa Aprender.

Los desempeños históricamente bajos en las pruebas Saber 11 evidenciaron no solo una deficiencia en competencias procedimentales, sino una problemática más profunda relacionada con la construcción de significado matemático. Esta situación demandaba trascender los enfoques tradicionales centrados en la algoritmización para adoptar perspectivas que reconocen la complejidad cognitiva del aprendizaje matemático. Desde la perspectiva ontosemiótica de Godino et al. (2007), el conocimiento matemático emerge de sistemas de prácticas operativas y discursivas que involucran objetos, procesos y contextos diversos. En este sentido, la secuencia didáctica diseñada no se limitó a enseñar el límite como objeto aislado, sino que buscó articular una red de significados que conectara conceptos previos (función, continuidad, aproximación) con representaciones múltiples, en consonancia con la estructura sistémica de las matemáticas descrita por Rodríguez (2014).

El concepto de límite, cuya formalización histórica tardó siglos en consolidarse, representa un desafío epistémico que trasciende la dificultad meramente técnica. Como señala Artigue (2014) en sus estudios sobre la génesis instrumental de conceptos del cálculo, la comprensión del límite implica una ruptura con el pensamiento aritmético y algebraico elemental, requiriendo la coordinación de procesos infinitos, aproximaciones dinámicas y razonamiento sobre comportamientos asintóticos. La teoría de los registros de representación semiótica (TRES) de Duval proporcionó el marco teórico fundamental para abordar esta complejidad, al postular que la comprensión conceptual en matemáticas requiere la capacidad de movilizar al menos dos registros de representación y coordinar sus transformaciones. Sin embargo, esta investigación también reconoce los aportes de Radford (2006) sobre la objetivación del conocimiento matemático, proceso mediante el cual los estudiantes toman conciencia de los objetos matemáticos a través de la actividad semiótica y la mediación social. La estrategia pedagógica implementada fomenta precisamente esta objetivación al propiciar que los estudiantes transitan entre representaciones simbólicas, tabulares, gráficas y verbales, no como ejercicio mecánico, sino como actividad de construcción de significado contextualizado en situaciones problemáticas auténticas.

La arquitectura evaluativa de la secuencia didáctica diagnóstica, formativa y sumativa permitió documentar transformaciones significativas en el desempeño estudiantil. La evolución desde niveles bajos en la evaluación inicial hasta niveles altos en la evaluación final no debe interpretarse únicamente como evidencia de eficacia didáctica, sino como indicador de que se produjeron reorganizaciones cognitivas profundas. Desde la perspectiva de Sfard (2008) sobre el pensamiento matemático como proceso de reificación, los estudiantes lograron transitar de concepciones operacionales del límite (procesos de aproximación) hacia concepciones estructurales (objeto matemático con propiedades definidas). Este tránsito, mediado por las representaciones semióticas, representa un logro cognitivo fundamental que trasciende la acumulación de destrezas procedimentales.

El aprendizaje colaborativo, fundamentado en la interacción entre pares, desempeñó un rol crucial que merece interpretación teórica más profunda. Al respecto, Vaillant y Manso (2019) destacan la importancia de las comunidades de aprendizaje, pero es necesario vincular este principio con la noción vygotskiana de zona de desarrollo próximo y con los planteamientos de Radford sobre la naturaleza social y cultural del conocimiento matemático. Los estudiantes compartieron soluciones y construyeron significados mediante la negociación semiótica, el contraste de representaciones y la argumentación colectiva. Esta dimensión social del aprendizaje matemático, frecuentemente invisibilizada en enfoques transmisivos, resultó esencial para la apropiación conceptual del límite.

El fortalecimiento de conocimientos previos de operaciones algebraicas, simplificación de funciones, representación cartesiana, argumentación verbal no constituyó un requisito meramente instrumental, sino una necesidad epistémica. Godino (2011) sostiene que los objetos matemáticos están imbricados en configuraciones semióticas complejas donde cada elemento adquiere sentido en relación con otros. El límite, como concepto avanzado, requiere la activación coordinada de múltiples objetos matemáticos primarios: conceptos (función, variable, infinito), procedimientos (evaluación, simplificación), proposiciones (propiedades de límites) y argumentos (justificaciones de existencia o inexistencia). La secuencia didáctica operó precisamente sobre esta red de relaciones, lo que explica que su impacto trascendiera la comprensión del límite para fortalecer los pensamientos matemáticos numérico, variacional, espacial y aleatorio definidos por el MEN (2018).

La disposición favorable de los estudiantes hacia la propuesta didáctica requiere una lectura crítica que trascienda la anécdota pedagógica. Artigue (1995) ha sostenido que las innovaciones didácticas efectivas son

aquellas que respetan la epistemología de los conceptos matemáticos y, al mismo tiempo, conectan con los modos naturales de razonamiento de los estudiantes. La secuencia diseñada alcanzó este equilibrio a partir de intuiciones sobre la aproximación y el comportamiento funcional, con el fin de conducir progresivamente hacia formalizaciones rigurosas, mediante el uso de las representaciones semióticas como puentes cognitivos. Esta arquitectura didáctica se contrapone de manera sustancial a enfoques que imponen definiciones formales sin mediación semiótica ni contextualización, lo que genera el rechazo y la incomprensión que han caracterizado tradicionalmente la enseñanza del cálculo.

La principal contribución de esta investigación no radica en la demostración de que las representaciones semióticas facilitan el aprendizaje principio ya establecido por Duval (2004), sino en evidenciar cómo una secuencia didáctica intencionalmente diseñada desde esta perspectiva teórica puede transformar la comprensión de conceptos matemáticos avanzados en contextos educativos con limitaciones de recursos y trayectorias estudiantiles deficitarias. Esto sugiere que la problemática del aprendizaje del cálculo no es únicamente cuestión de capacidad estudiantil o complejidad conceptual intrínseca, sino fundamentalmente de diseño didáctico. Se requiere, por tanto, que la formación docente integre sólidos fundamentos en la didáctica de las matemáticas, con el fin de superar la creencia de que el dominio disciplinar constituye una condición suficiente para una enseñanza efectiva.

Las implicaciones de estos hallazgos trascienden el caso particular estudiado. Es imperativo que las instituciones educativas asuman el compromiso de introducir sistemáticamente, desde los primeros grados, el trabajo con múltiples representaciones semióticas de conceptos matemáticos. Esta recomendación se fundamenta no en preferencias pedagógicas arbitrarias, sino en el reconocimiento de que la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos exige necesariamente su acceso mediado por representaciones. Como señala Radford (2006), el conocimiento matemático es inherentemente semiótico; ignorar esta dimensión condena a los estudiantes a un aprendizaje superficial basado en memorización de símbolos desprovistos de significado. La estructura sistémica de las matemáticas, donde cada concepto nuevo se construye sobre anteriores, magnifica las consecuencias de deficiencias tempranas en competencias semióticas.

Se recomienda a los docentes en ejercicio asumir una postura de diseñadores de experiencias de aprendizaje matemáticamente significativas, contextualmente relevantes y semióticamente ricas. Esto

requiere abandonar la dependencia de libros de texto que priorizan la algoritmización y cultivar la capacidad de crear secuencias didácticas adaptadas a las necesidades, recursos y contextos específicos de sus estudiantes. La producción de representaciones semióticas como estrategia pedagógica posee la virtud de su aplicabilidad universal: puede implementarse tanto en contextos de extrema precariedad material (papel, lápiz, regla) como en entornos tecnológicamente enriquecidos que permiten visualizaciones dinámicas simultáneas. Lo esencial no son los recursos, sino la intencionalidad didáctica fundamentada teóricamente.

Así, esta investigación reafirma que la enseñanza de las matemáticas no es neutral ni se agota en la transmisión de contenidos disciplinares. Educar matemáticamente implica contribuir a la formación de ciudadanos con pensamiento crítico, capacidad argumentativa y competencia para modelar, analizar y resolver problemas complejos. La enseñanza tradicional, caracterizada por la transmisión unidireccional de procedimientos descontextualizados es ineficaz para el aprendizaje conceptual y resulta incompatible con las demandas de una sociedad que requiere individuos capaces de razonamiento flexible y adaptativo. Como sugieren Godino (2011) y Radford (2006) desde perspectivas complementarias, el conocimiento matemático es simultáneamente objeto cultural, herramienta cognitiva y práctica social.

Por lo tanto, la educación matemática debe honrar esta triple dimensión, cultivar competencias técnicas y también disposiciones reflexivas y compromisos éticos con la construcción colectiva del conocimiento y el bienestar social. Este horizonte formativo exige superar definitivamente los modelos pedagógicos que reducen las matemáticas a ejercicios rutinarios y reconocer su potencial como vía privilegiada para el desarrollo del pensamiento y la acción transformadora.

Referencias

Albarracín, A. (2022). Secuencias didácticas como estrategia pedagógica en la enseñanza de las ciencias naturales. *Revista Latinoamericana de Educación Científica, Crítica y Emancipadora*, *1*(1), 505–523. https://www.revistaladecin.com/index.php/LadECiN/article/view/48

Arias, J. (2020). *Técnicas e instrumentos de investigación científica.* Enfoques Consulting EIRL.

Artigue, M. (1995). Ingénierie didactique en mathématiques. *Didactique des Mathématiques*, *5*(2). https://www.numdam.org/item/PSMIR_1990-1991___5_A2_0/.

Artigue, M. (2014). Perspectives on teaching and learning calculus. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 84–89). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8

Báez-Ureña, N., Pérez-González, O. L. y Blanco-Sánchez, R. (2018). Los registros de representación semiótica como vía de materialización de los postulados vigotskianos sobre pensamiento y lenguaje. *Academia y Virtualidad, 11*(1), 16-26. https://doi.org/10.18359/ravi.2885

Baldor, A. (1941). *Álgebra.* Editorial Cultural.

Ballester, S. (2009). Aplicaciones de las funciones matemáticas en la vida real y otras áreas. *Innovación y Experiencias Educativas*, (23), 1-9. https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_23/SERGIO_BALLESTER_SAMPEDRO01.pdf

Barrios, J. (1993). *La geometría de los indivisibles: Buenaventura Cavalieri.* En *Seminario Orotava de Historia de la Ciencia* (pp. 305-326). La Orotava.

Becerra, Y. (2019). *Algunos registros de representación semiótica en sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2 para la resolución de problemas* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. Repositorio Institucional UPTC. https://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/3433

Benítez Mariño, E. y Gabriel Argüelles, J. R. (2020). Una propuesta didáctica para mejorar la comprensión del concepto de límite de una función. *El cálculo y su Enseñanza, 14*(1), 16-29. https://doi.org/10.61174/recacym.v14i1.48

Bingham, T. (1973). Newton y el desarrollo del cálculo. *Boletín de Matemáticas*, 7(2), 113-130. https://revistas.unal.edu.co/index.php/bolma/article/view/34688

Blanco, H. (2006). La etnomatemática en Colombia: un programa en construcción. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 19*(26), 1-19.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la Educación Secundaria. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del cálculo infitesimal* (pp. 331-354). Grupo Editorial Iberoamericana S. A. de C.V.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *4*(3), 219-236. http://funes.uniandes.edu.co/9624/

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición del límite funcional. *UNO*, *30,* 67-84.

Buitrago, L., Benavides, O., Perdomo, A., Castaño, J., Morales, D. y Gamboa, J. (2013). *Matemáticas 11 proyecto los caminos del saber.* Santillana S.A.

Cardeño, J., Muñoz, L., Ortiz, H. y Alzate, N. (2017). La incidencia de los Objetos de Aprendizaje interactivos en el aprendizaje de las matemáticas básicas, en Colombia. *Trilogía Ciencia Tecnología Sociedad*, 9(16), 63-84. http://hdl.handle.net/20.500.12622/1333

Catañares, W. (2014). *Historia del pensamiento semiótico I. La antigüedad grecolatina*. Trotta.

Colmenares, A. M. (2012). Investigación-acción participativa una metodología integradora del conocimiento y la acción. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, *13*(1), 102-115. https://doi.org/10.18175/vys3.1.2012.07

Conde-Carmona, R. J., Fontalvo Meléndez, A. A. y Padilla-Escorcia, I. A. (2021). El uso de la tecnología en la enseñanza del límite, para el fortalecimiento de competencias matemáticas en estudiantes de secundaria en tiempos de Pandemia. *Educación y Ciudad*, (41), 147–170. https://doi.org/10.36737/01230425.n41.2496

D'Amore, B., Fandiño, M. y Lori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática.* Bogotá: Magisterio.

Darmayanti, R., Usmyatun, U., Setio, A., Sekaryanti, R., & Safitri, N. (2023). Application of Vygotsky Theory in High School Mathematics Learning Material Limit Functions. *JEMS: Jurnal Edukasi Matematika Dan Sains*, *11*(1), 39-48. https://doi.org/10.25273/jems.v11i1.14099

Daza, J., Leguizamón, J. y Álvarez, A. (2022). Interpretaciones semióticas de media aritmética como medida de tendencia central. *Revista Boletín Redipe*, 11(1), 290-308. https://doi.org/10.36260/rbr.v11i1.1643

Díaz-Barriga, Á. (2013). Guia para la elaboración de una secuencia didáctica. Universidad Nacional de México. https://url-shortener.me/AT0W

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2.ª ed.; M. Vega, Trad.). Universidad del Valle.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Matemática, 7*(2), 266-297. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Ernest, P. (2021). The Operativity and Performativity of Mathematical Signs: Exploring the Semiotics of Mathematics. https://www.exeter.ac.uk/research/groups/education/pmej/pome37/Paul%20Ernest%20The%20Operativity%20and%20Performativity%20of%20Mathematical%20Signs.docx

Escobar-Pérez, J. y Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en Medición*, *6,* 27-36. https://www.humanas.unal.edu.co/lab_psicometria/application/files/9416/0463/3548/Vol_6._Articulo3_Juicio_de_expertos_27-36.pdf

Ferrante, J. (2009). *Una Introducción al Concepto de Límite (dos mil años en un renglón).* Universidad Tecnológica Nacional. http://www.edutecne.utn.edu.ar/inicio.html

Frade, L. (2008). *Planeación por competencias.* Inteligencia Educativa.

García, J. (2014). *Del "horror al infinito" de los antiguos griegos a la noción de límite moderno* [Tesis de pregrado, Universidad del Valle]. Archivo digital. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1144279/Garc25C325ADa2014Del.pdf

García Pinilla, C. A., Riaño Eslava, N., Sánchez Rojas, C. A., & Pérez Sarmiento, O. V. (2026). El Arte de Kandinsky y su Relación en la Enseñanza de los Elementos Básicos de la Geometría. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 9*(6), 6165- 6189. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v9i6.21785

GeoGebra. (s.f.). *Descargar GeoGebra*. https://www.geogebra.org/download

Gil, M. y Cortés, F. (1997). El constructivismo genético y las ciencias sociales. En R. García (coord.), *La epistemología genética y la ciencia contemporánea: homenaje a Jean Piaget en su centenario* (pp. 69-88). Gedisa.

Godino, J. D. (2011). *Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007*).* The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM–Mathematics Education, 39*(1–2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., & Bencomo, D. (2005). *Análisis ontosemiótico del conocimiento matemático. Recherches en Didactique des Mathématiques, 25*(2–3), 221–266.

Godino, J., Batanero, C. y Vicenç, F. (2003). *Matemáticas y su didáctica para maestros. Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Universidad de Granada.

Gómez, L. (2015, 8 y 9 de septiembre). Taller límite de una función. *Memorias Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística*, Duitama. https://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/8189

González-Flores, Y., Montoro-Medina, A. B., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2021). Analysis of definitions of limit provided by University students. *Uniciencia, 35*(2), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.18

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (6.ª ed.)*.* McGraw-Hill.

Hitt, F. y Páez, R. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (32), 97-108.

Hong, D. (2022). Examining Opportunities to Learn Limit in Widely Used Calculus Textbooks. *International Journal of Science & Mathematics Education*, (21), 881–898. doi: https://doi.org/10.1007/s10763-022-10273-7

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes). (2019). *Marco de referencia de la prueba de matemáticas Saber 11.°*. Icfes.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes). (2021). *Reporte de Resultados del Examen Saber 11° por aplicación 2021-4.* https://repository.javeriana.edu.co/bitstream/handle/10554/45285/Resultados%20Saber%2011°%20ET%20de%20COTA_20162_11.pdf.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Jaramillo Echeverri, L. G. (2003). ¿Qué es Epistemología? *Cinta de Moebio*, (18), 174-178. https://www.moebio.uchile.cl/18/jaramillo.html

Jiménez, A. (2011). La naturaleza de la Matemática, sus concepciones y su influencia en el salón de clase. *Educación Y Ciencia*, (13), 135-150. https://doi.org/10.19053/01207105.765

Lajara, S. (2016). *La cuadratura de la parábola y otros problemas* [Diapostivas]. Instituto de Ciencias Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid. https://www.estalmat.org/archivos/CuadraturaParabola-Lajara.pdf

Leithold, L. (1998). *El cálculo* (7.ª ed.). Oxford University Press.

Ley 115 de 1994. (1994, 8 de febrero). Congreso de Colombia. Por la cual se expide la ley general de educación. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Ley Estatutaria 1581 de 2012. (2012, 17 de octubre). Congreso de Colombia. Por la cual se dictan disposiciones generales para la protección de datos personales. https://www.funcionpublica.gov.co/eva/gestornormativo/norma.php?i=49981

López, C. (2014). El infinito en la historia de la matemática. *Ciencia y Tecnología*, *14,* 277-298. https://www.palermo.edu/ingenieria/pdf2014/14/CyT_14_18.pdf

López, H. (2014). *Las series numéricas y el desarrollo del razonamiento lógico-matemático en los estudiantes del segundo año de Bachillerato del colegio Fiscomisional Tirso de Molina* [Tesis de maestría, Universidad Técnica de Ambato]. Repositorio Institucional. http://repositorio.uta.edu.ec/handle/123456789/7677

Medina, A. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología,* (9), 44-60. https://doi.org/10.17227/ted.num9-5622

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Serie l*ineamientos curriculares Matemáticas.* https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* MEN. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje.* MEN. http://www.colombiaaprende.edu.co/contenidos/coleccion/derechos-basicos-de-aprendizaje

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2018, 22 de agosto). *Lineamientos curriculares.* https://www.mineducacion.gov.co/portal/micrositios-preescolar-basica-y-media/Direccion-de-Calidad/Referentes-de-Calidad/339975:Lineamientos-curriculares

Moretti, M. T., & Thiel, A. A. (2012). O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica*. Práxis Educativa, 7*(2), 379–396. https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.7i2.0004

Murcia, V. (2018). *Una mirada semiótica a las producciones de los estudiantes de grado sexto de una institución rural en el aprendizaje de la multiplicación bajo el esquema de isomorfismo de medida* [Tesis de pregrado, Universidad del Valle]. Biblioteca Digital Universidad del Valle. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/11290

Pedraza, L. (2021). *Construcciones con regla y compás: una perspectiva semiótica* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. Repositorio Institucional UPTC. https://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/3816?mode=full

Penagos, C. (2013). *Aportes realizados por Leibniz a la consolidación del cálculo diferencial* [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional. http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/2185

Peralta, J. y Soto, J. (2003). *Dificultades para articular los registros gráficos, algebraico y tabular y la exploración de algunas actividades didácticas diseñadas para superar estas dificultades: el caso de la función lineal* [Tesis de maestría, Universidad de Sonora]. Repositorio de la Universidad de Sonora. http://www.repositorioinstitucional.uson.mx/handle/unison/867

Piaget, J. (1987). *Introducción a la epistemología genética.* Paidós.

Ponce, J. (2013). Isaac Barrow y su versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo. *Números: Revista de Didáctica de la Matemática*, *83,* 123-130. https://core.ac.uk/download/pdf/20343752.pdf

Quintero, C. y Jaramillo, D. (2020). Desarrollo del pensamiento de estudiantes de grado undécimo mediante un proceso de objetivación del concepto de límite funcional. *Revista Q*, *11*(22), 85-93. https://repository.upb.edu.co/handle/20.500.11912/8108

Radford, L. (2014). *Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition*. *ZDM–Mathematics Education, 46*(3), 349–361. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0591-1

Radford, L., (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime,* (Esp), 103-129. https://www.redalyc.org/pdf/335/33509906.pdf

Reyes, G., Díaz, G., Dueñas, J., & Bernal, A. (2016). ¿Educación de calidad o calidad de la educación? Uno de los Objetivos de Desarrollo Sostenible y el camino para el desarrollo humano. *Revista de la Universidad de La Salle*, *1*(71), 251-272. https://revistauls.lasalle.edu.co/article/view/2168

Riaño-Eslava, N. y Amado-Suárez, J. (2024). Herramientas digitales como estrategia pedagógica en el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos. *Revista Gestión y Desarrollo Libre*, 9(17), 1–12. https://doi.org/10.18041/2539-3669/gestionlibre.17.2024.11049

Riscanevo, L., Fonseca, C. y Cristancho, K. (2015). Influencias del contrato didáctico en el aprendizaje del concepto de límite [Memoria]. *Congreso de Investigación y Pedagogía II Nacional I Internacional,* Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. https://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/8088

Riveros, V., Mendoza, M. y Castro, R. (2011). Las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de instrucción de la matemática. *Quórum Académico, 8*(1), 111-130.

Robles Garrote, P. y Rojas, M. del C. (2015). La validación por juicio de expertos: dos investigaciones cualitativas en lingüística aplicada. *Revista Nebrija de Lingüística Aplicada a la Enseñanza de Lenguas, 9*(18), 124–139. https://doi.org/10.26378/rnlael918259

Rodríguez Samacá, R. F. y Murcia Pardo, S. M. (2021). Concepciones Desarrolladas Sobre la Nocion Dinámica de Límite, a Partir del Uso del Programa Geogebra. *Voces y Realidades Educativas, 7*(1), 65-79. https://vocesyrealidadeseducativas.com/ojs/index.php/vyc/article/view/25

Rodríguez, V. (2014). La formación situada y los principios pedagógicos de la planeación: la secuencia didáctica. *Ra Ximhai*,*10*(5), 445-456. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=46132134027

Rodríguez, Y. B. (2019). *Fracciones y realidad* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. Repositorio Institucional UPTC. https://repositorio.uptc.edu.co/entities/publication/1ee2b55a-4924-4ff1-a995-2a301e09a4d6

Salla, J. M., y Berticelli, D. G. D. (2023). Fenômeno de vulgata em atividades de matemática que envolvem os conhecimentos básicos do cálculo mental. *Revista de História da Educação Matemática, 9*, 1–11. https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/562

Sastre, P., Rey, G., Boubée, C.y Cañibano, A. (2009). Ideas para Enseñar Aportes didácticos para abordar el concepto de función. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *5*(20), 153-162. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1075

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Stewart. J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo matemáticas para el cálculo* (6.ª ed.; J. Romo, Tad.). CENGAGE Learning.

Suárez, Z. (2022). *La evaluación.* Tunja.

Tobón, S., Pimienta, J. y García, J. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias.* Pearson- Prentice Hall.

Vaillant, D. y Manso, J. (2019). *Orientaciones para la formación docente y el trabajo en el aula: aprendizaje colaborativo.* SUMMA. https://open.summaedu.org/wp-content/uploads/2024/07/APRENDIZAJE-COLABORATIVO_2019-Vertical.pdf

Velandia, A. (2021). *Fortalecimiento del aprendizaje del concepto de función en estudiantes de grado noveno, incluido un estudiante con diagnóstico TDAH* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. Repositorio Institucional UPTC. http://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/8520

Vélez, J. (2003). Pierre de Fermat. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/8302/70551300._2003.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Villagómez, A., Ruiz, E. y Acosta, F. (2020). Tareas en el tránsito de la aritmética al álgebra, a través de registros de representación semiótica. *Latin-American Journal of Physics Education, 14*(1), 1305. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7660376.pdf

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A. y Müller, D. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Premisa*, 9-19. http://funes.uniandes.edu.co/23103/

Wood, J. (2015). Multiple Possibilities: The Multi-Literate Lives of Three Children. *Complicity: An International Journal of Complexity and Education*, *12*(1), 67–85. https://doi.org/10.29173/cmplct23172

Autores



Camilo Andrés García Pinilla

Doctorando en Ciencias de la Educación, Universidad Metropolitana de Educación, Ciencia y Tecnología –UMECIT–, Panamá; magíster en Didáctica de la Matemática; licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, Humanidades y Lengua Castellana de la Facultad de Estudios a Distancia; licenciado en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia; especialista en Educación Inclusiva, Fundación Universitaria Juan de Castellanos. Rector de la Institución Educativa El Roble, Samacá, Boyacá; actualmente, docente e investigador de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Facultad de Estudios a Distancia, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Correo electrónico: camilo.garcia02@uptc.edu.co

Nataly Riaño Eslava



Doctoranda en Ciencias de la Educación, Universidad Metropolitana de Educación, Ciencia y Tecnología (UMECIT), Panamá; magíster en Didáctica de la Matemática y licenciada en Matemáticas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC). Cuenta con formación técnica en Programación de Software, lo que ha fortalecido su perfil en la integración pedagógica de herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se ha desempeñado como docente de matemáticas y física en diferentes instituciones: Institución Educativa San Jerónimo Emiliani, Institución Educativa San Francisco de Asís, Institución Educativa Liceo Tame, Colegio El Bosque e Institución Educativa El Tránsito. Actualmente, se desempeña como docente en la Institución Educativa José Acevedo y Gómez, Arauquita, Arauca. Su labor académica e investigativa se orienta hacia la didáctica de la matemática, la formación docente y el fortalecimiento de los procesos educativos en el contexto escolar. Correo electrónico: nathalyriano.est@umecit.edu.pa

Cesar Augusto Sánchez Rojas



Doctorando en Educación e Innovación (UIIX); magíster en Docencia e Investigación Universitaria, Universidad Sergio Arboleda; especialista en Docencia e Investigación Universitaria, Universidad Sergio Arboleda; licenciado en Psicopedagogía con énfasis en Asesoría Educativa, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Cuenta con amplia experiencia como profesor universitario en modalidad presencial, a distancia y virtual, en programas de pregrado y posgrado del área de la educación, en distintas universidades oficiales y privadas. Ha sido director de semilleros de investigación, psicopedagogo y asesor educativo en instituciones de educación básica, así como asesor pedagógico y curricular en Corporaciones Autónomas (educación no formal). Se ha desempeñado como psicopedagogo, conferencista, tallerista y capacitador de docentes en las Secretarías de Educación de Cundinamarca y Boyacá, y como asesor pedagógico en la Escuela de Aviación del Ejército y la Fuerza Aérea de Colombia (ESAVE). En el ámbito de la administración educativa, ha sido responsable de programas de especialización y maestría, ha liderado procesos de renovación de registro calificado, autoevaluación de programas académicos y categorización de grupos de investigación ante Minciencias.

Correo electrónico: cesar.sanchez01@uptc.edu.co



Universidad
Mariana
Res. MEN 1362 del 3 de febrero de 1983



Editorial
Unimar

Universidad Mariana
Calle 18 No. 34-104 San Juan de Pasto
https://libros.umariana.edu.co/index.php/editorialunimar