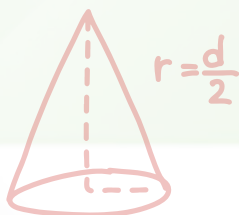


Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática

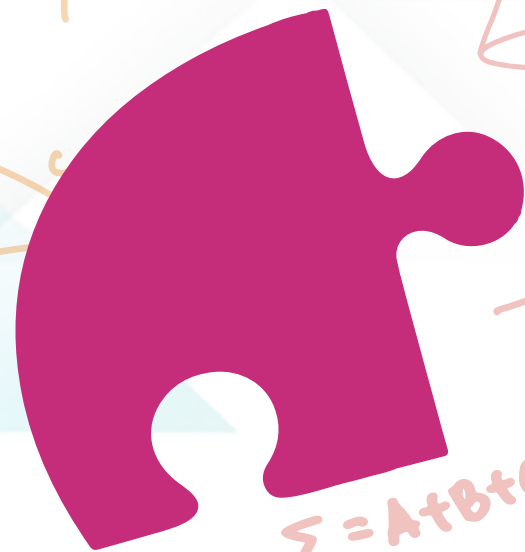
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

COLECCIÓN
INVESTIGACIÓN

$$x + y + 5 = 0$$



$$x^2 + y - 10 = 0$$



$$\Sigma = A + B + C$$

$$y - ?$$



José Eriberto Cifuentes Medina
José Antonio Chacón Benavides
Coordinadores

$$A + B$$

Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática

José Eriberto Cifuentes Medina

José Antonio Chacón Benavides

(Coordinadores)



Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
2022

Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática / Didactic resources for teaching mathematics / Cifuentes Medina, José Eriberto; Chacón Benavides, José Antonio (Coordinadores). Tunja: Editorial UPTC, 2022. 197 p.

ISBN Digital 978-958-660-707-0

1. Didáctica. 2. Secuencia didáctica. 3. Pensamiento Matemático. 4. Competencias. 5. GeoGebra. 6. Funciones Polinómicas. 7. Recursos didácticos.

(Dewey 511 / 21) (Thema JNUM - Recursos y materiales didácticos para docentes)



Uptc
Universidad Pedagógica y
Tecnológica de Colombia



Primera Edición, 2022

Digital

Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática
Didactic resources for teaching mathematics

ISBN Digital 978-958-660-707-0

Colección de Investigación UPTC N°. 7

Proceso de arbitraje doble ciego

Recepción: noviembre 2021

Aprobación: noviembre de 2021

© Ana Elizabeth Palacio Ramírez, 2022

© José Antonio Chacón Benavidez, 2022

© Susan Sareth García Gualdrón, 2022

© José Eriberto Cifuentes Medina, 2022

© Julián David Quiroga Garcés, 2022

© Nayibe Gómez Condiá, 2022

© Universidad Pedagógica y Tecnológica de
Colombia, 2022

Editorial UPTC

Edificio Administrativo – Piso 4

La Colina, Bloque 7, Casa 5

Avenida Central del Norte 39-115, Tunja, Boyacá

comite.editorial@uptc.edu.co

www.uptc.edu.co



Rector, UPTC

Óscar Hernán Ramírez

Comité Editorial

Dra. Zaida Zarely Ojeda Pérez

Dr. Carlos Alberto Uribe Suárez

Dra. Yolima Bolívar Suárez

Dr. Carlos Mauricio Moreno Téllez

Mg. Pilar Jovanna Holguín Tovar

Dra. Nelsy Rocío González Gutiérrez

Dr. Manuel Humberto Restrepo Domínguez

Dr. Óscar Pulido Cortés

Mg. Edgar Nelson López López

Editor en Jefe:

Ph. D. Witton Becerra Mayorga

Coordinadora Editorial:

Mg. Andrea María Numpaque Acosta

Subcomité Editorial – FESAD

Ph. D. Ariel Adolfo Rodríguez Hernández

Ph. D. María Helena Brijaldo Ramírez

Ph. D. Isaura Rojas Sánchez

Mg. Luz Nelida Molano Avendaño

Mg. José Eriberto Cifuentes Medina

Corrección de Estilo

Juan Bautista Sierra Hernández

Diseño y diagramación

Andrés A. López Ramírez

andres.lopez@uptc.edu.co

Libro financiado por el Subcomité de Evaluación de Obras Especializadas de la Facultad de Estudios a Distancia FESAD – Vicerrectoría de Investigación y Extensión - Dirección de Investigaciones de la UPTC. Se permite la reproducción parcial o total, con la autorización expresa de los titulares del derecho de autor. Este libro es registrado en Depósito Legal, según lo establecido en la Ley 44 de 1993, el Decreto 460 de 16 de marzo de 1995, el Decreto 2150 de 1995 y el Decreto 358 de 2000.

Libro resultado del proyecto de investigación “Análisis de los resultados de las pruebas Saber Pro en la Licenciatura en Educación Básica”, UPTC- DIN - SGI 2966

Citar este libro / Cite this book

Cifuentes Medina, J. & Chacón Benavides, J. (Coords.) (2022). *Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática*. Editorial UPTC.

Doi: <https://doi.org/10.19053/9789586607070>

Resumen

Las matemáticas están presentes en todos los ámbitos y quehaceres de la cotidianidad de las personas, de allí, la importancia de la enseñanza-aprendizaje de esta ciencia en el marco de la formación integral de los individuos como personas y seres sociales, ámbito en el cual, la formación de conocimiento en este campo durante la etapa de educación básica, resulta fundamental, pues, constituye la base que ha de sustentar el aprendizaje durante la educación formal y, por extensión, a lo largo de toda la vida. Esta obra es el resultado de la experiencia investigativa de los autores y directores de trabajo de grado del área mencionada, con el fin de generar una reflexión e inquietud permanente por la mejora y desarrollo, tanto de la fundamentación teórica como de la práctica educativa, de nuestra formación como investigadores y también del desarrollo profesional como docentes. En la obra se han considerado las experiencias de los estudiantes de Maestría en Didáctica de la Matemática, que se desempeñan como docentes de Educación en Básica Primaria, Básica Secundaria y Media Académica en Colombia, para ello, se ha considerado la fundamentación teórica, epistemológica y resultados de las investigaciones a lo largo de cuatro capítulos en los que se describen las problemáticas identificadas por los estudiantes en sus diferentes contextos educativos. Dentro de estas temáticas se destacan en el capítulo uno, aspectos como el desarrollo del pensamiento lógico-matemático para la resolución de problemas mediante estrategias lúdico-pedagógicas. De igual manera, en el capítulo dos, se tratan aspectos como el monopolio como estrategia didáctica para el fortalecimiento del pensamiento numérico. En este mismo sentido en el capítulo tres, se destaca la importancia de una propuesta de secuencia didáctica para fortalecer el pensamiento variacional en el estudio de funciones polinómicas. Por último, en el capítulo 4, se presenta el diseño de lámparas como recurso didáctico para el desarrollo del pensamiento geométrico en el grado séptimo.

Palabras clave: Didáctica; Secuencia didáctica; Pensamiento Matemático; Competencias; GeoGebra; Funciones Polinómicas; Recursos didácticos.

Abstract

Mathematics is present in all areas and tasks of people's daily lives, hence the importance of the teaching-learning of this science within the framework of the integral formation of individuals as persons and social beings, an area in which the formation of knowledge in this field during the basic education stage is fundamental, since it constitutes the basis that will support learning during formal education and, by extension, throughout life. This work is the result of the research experience of the authors and directors of graduate work in the aforementioned area, with the purpose of generating a permanent reflection and concern for the improvement and development of both the theoretical foundation and the educational practice, of our training as researchers and also of our professional development as teachers. The book has considered the experiences of the students of the Master's Degree in Didactics of Mathematics, who work as teachers in Primary, Secondary and Secondary Education in Colombia, considering the theoretical and epistemological foundations and the results of the researches throughout four chapters in which the problems identified by the students in their different educational contexts are described. Within these topics, chapter 1 highlights aspects such as the development of logical-mathematical thinking for problem solving through playful-pedagogical strategies. Similarly, in chapter 2, aspects such as monopoly as a didactic strategy for strengthening numerical thinking are discussed. In the same sense, chapter 3 highlights the importance of a didactic sequence proposal to strengthen variational thinking in the study of polynomial functions. Finally, chapter 4 presents the design of lamps as a didactic resource for the development of geometric thinking in seventh grade.

Keywords: Didactics; Didactic Sequence; Mathematical Thinking; Competences; GeoGebra; Polynomial Functions; Teaching resources.

Contenido

Capítulo 1

Desarrollo del pensamiento lógico-matemático para la resolución de problemas mediante estrategias lúdico-pedagógicas.....	9
Introducción.....	9
Marco de referencia.....	12
Metodología.....	22
Análisis e interpretación de resultados.....	25
Referencias.....	37

Capítulo 2

El monopolio como estrategia didáctica para el fortalecimiento del pensamiento numérico en el grado tercero.....	41
Introducción.....	41
Fundamentación teórica.....	46
Metodología.....	71
Análisis e interpretación de resultados.....	73
Discusión de resultados	79
Referencias.....	89

Capítulo 3

Propuesta de secuencia didáctica para fortalecer el pensamiento variacional en el estudio de funciones polinómicas.....	95
Introducción.....	95
Marco metodológico de la investigación.....	99
Análisis e interpretación de resultados.....	107
Referencias.....	124

Capítulo 4

Diseño de lámparas como recurso didáctico para el desarrollo del pensamiento geométrico en grado séptimo.....	127
Introducción.....	127
Fundamentación teórica.....	129

Análisis e interpretación de resultados.....	161
Referencias.....	186
Glosario.....	194
Sobre los autores.....	197

Presentación

Nada tiene tanto poder para ampliar la mente como la capacidad de investigar de forma sistemática y real todo lo que es susceptible de observación en la vida.

Marco Aurelio

Independientemente de la discusión que pueda generar hoy en día la profunda reflexión de este pensador, ella plantea un rico contexto que nos permite exaltar la importancia que tiene la investigación en la búsqueda de la verdad, pero sin lugar a dudas despertar la creatividad, la innovación y el espíritu investigativo que sirven como apoyo en la toma decisiones en la vida diaria y así mismo observar de qué manera influye la investigación en las prácticas educativas.

Es así como el presente libro parte de la convocatoria realizada por el Centro de Investigación y Extensión CIDEA de la Facultad de Estudios a Distancia de la UPTC para resaltar y destacar la importancia de los procesos investigativos llevados a cabo por los estudiantes de Maestría en Didáctica de la matemática de la Escuela de posgrados de la Facultad de Estudios a Distancia y el acompañamiento docente en este proceso investigativo en la modalidad de profundización.

Este proyecto es el resultado de la experiencia investigativa de los autores y directores de trabajo de grado del área mencionada, con el fin de generar una reflexión e inquietud permanente por la mejora y desarrollo, tanto de la fundamentación teórica como de la práctica educativa, de nuestra formación como investigadores y también del desarrollo profesional como docentes.

En la presente obra se han considerado las experiencias de los estudiantes de Maestría en Didáctica de la Matemática, que se desempeñan como docentes de Educación en Básica Primaria, Básica Secundaria y Media Académica en Colombia, para ello hemos considerado la fundamentación teórica, epistemológica y resultados de las investigaciones a lo largo de cuatro capítulos en los que se describen las problemáticas identificadas por los estudiantes en sus diferentes contextos educativos. Dentro de estas temáticas se destacan aspectos como el desarrollo del pensamiento geométrico, el fortalecimiento del pensamiento variacional, el fortalecimiento del pensamiento numérico y el desarrollo del pensamiento lógico matemático para la resolución de problemas mediante estrategias lúdicas pedagógicas.

José Eriberto Cifuentes Medina
José Antonio Chacón Benavides

Capítulo 1

Desarrollo del pensamiento lógico-matemático para la resolución de problemas mediante estrategias lúdico-pedagógicas¹

*Ana Elizabeth Palacio Ramírez²
José Antonio Chacón Benavides³*

Introducción

Las matemáticas están presentes en todos los ámbitos y quehaceres de la cotidianidad de las personas, de allí, la importancia de la enseñanza-aprendizaje de esta ciencia en el marco de la formación integral de los individuos como personas y seres sociales, ámbito en el cual, la formación de conocimiento en este campo durante la etapa de educación básica,

-
- 1 Se deriva del proyecto de investigación para optar por el título de Maestría en Didáctica de la Matemática.
 - 2 Magíster en Didáctica de la Matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Docente de Educación Básica Primaria de la Institución Educativa Aquileo Parra, sede Las Pilas (Pacho-Cundinamarca). Correo: elizapalacio@hotmail.com
 - 3 Investigador Junior (I) SNCTel, convocatoria Minciencias 894/2021. Magíster en Administración y Planificación Educativa, Especialista en Educación Personalizada, Licenciado en Ciencias de la Educación Física y Matemáticas. Integrante grupo de Investigación SIEK. Profesor-investigador de la Licenciatura en Educación Básica Primaria, Facultad de Estudios a Distancia, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-8515-7386>. Correo: jose.chacon@uptc.edu.co

resulta fundamental, pues, constituye la base que ha de sustentar el aprendizaje durante la educación formal y, por extensión, a lo largo de toda la vida.

Por otra parte, estimando la amplitud del concepto matemáticas y la pertinencia de la delimitación de una problemática específica observada en el contexto de la Institución Educativa (IE) Aquileo Parra del municipio de Pacho, Cundinamarca, en su sede Las Pilas, ubicada en el sector rural, además, enmarcada en el modelo de escuela multigrado, se han tomado en consideración las dificultades que evidencian los estudiantes de los grados tercero, cuarto y quinto de básica primaria en la resolución de problemas matemáticos, como lo evidencia el desempeño de estos reflejado en su rendimiento académico.

La resolución de problemas representa un espacio importante y muy significativo en el aprendizaje de las matemáticas, comporta la característica de instrumento que le posibilita al estudiante desarrollar habilidades intelectuales, y de pensamiento y razonamiento lógico, para que aprenda a enfrentarse e interactuar en situaciones complejas de manera que emplee su saber cómo parte de la construcción y reconocimiento del mundo que le rodea. En esta perspectiva, un aspecto fundamental lo constituye el pensamiento lógico matemático desde su relacionamiento con las habilidades de entender, comprender, establecer y relacionar conceptos abstractos como base de una profunda comprensión del problema que se estudia, esto, como sustento para solucionar problemas en diversos entornos, formular hipótesis y predicciones.

Dicho esto, se observa entonces, la significación de este tipo de pensamiento, tanto para la resolución de problemas matemáticos en particular, como para el desarrollo de competencias matemáticas en general, siendo posible añadir su relevancia en todos los ámbitos del quehacer personal y social de los individuos, entendiendo que estos espacios comportan la condición de ser escenarios de presencia constante de situaciones y problemáticas, básicas o complejas, que demandan de las personas atención y solución. Esto implica que el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas se fundamenta en actividades que permitan fortalecer el pensamiento

lógico, como cimiento orientado a la superación de dificultades a la hora de enfrentarse a la solución de situaciones complejas.

En este marco, la observación de los desempeños y las calificaciones sobre rendimiento académico en resolución de problemas matemáticos de los estudiantes de los grados 3, 4 y 5 de la sede Las Pilas de la IE Aquileo Parra del municipio de Pacho, Cundinamarca; admiten percibir un nivel medio de competencias en este campo, pues, no obstante muestran buen manejo de términos y operaciones matemáticas, no cuentan con las habilidades de razonamiento lógico para implementar operaciones matemáticas básicas para la validación de una situación problema dada.

Surge así, la necesidad de programar planes de mejoramiento a partir de estrategias lúdico-pedagógicas que potencien el desarrollo del pensamiento lógico matemático en los alumnos sujetos del estudio, para que logren comprender, analizar y solucionar problemas utilizando las operaciones matemáticas de forma organizada y secuencial, llevándolos a la construcción de un conocimiento significativo, mediante un relacionamiento de teoría y práctica como oportunidad para el desarrollo de competencias apropiadas para enfrentarse a situaciones nuevas y de mayor complejidad.

¿Por qué estrategias lúdico-pedagógicas? La respuesta a este cuestionamiento está inmersa en el contexto de la observación en el ámbito de las prácticas pedagógicas que, en el asunto actual, han permitido reconocer en los alumnos aspectos como apatía por el estudio de Matemáticas en una panorámica donde es evidente la influencia en ello de los modelos de enseñanza tradicionales de tipo expositivo, dirigidos fundamentalmente a la aprehensión memorística de información y procedimientos mecanizados, condición factible de transformar acudiendo a este tipo de estrategias en procura de promover en los aprendientes motivación hacia sus labores académicas.

Adicionalmente, es válido apreciar las características socioeconómicas y culturales de los contextos familiares, sociales y educativos de los alumnos que, en un sentido amplio influyen de diversas maneras en los procesos formativos y las perspectivas que el estudiante desarrolla frente

a ellos en general y ante las diferentes asignaturas en particular, por lo cual, de acuerdo con Fernández (2013) el docente ha de estar atento a conocer características y causas de las dificultades para el aprendizaje en los estudiantes para enfrentarlas adecuadamente. Así mismo, plantea esta autora, como, frente a las matemáticas, estos suelen desarrollar creencias y actitudes en las que intervienen las condiciones de sus ambientes familiares y sociales.

A este respecto, el entorno de las familias y el centro educativo es de tipología rural, la escuela es de carácter oficial multigrado, a cargo de una docente para toda la primaria, la población matriculada en los grados 3, 4 y 5 conformada por seis alumnos, 2 niñas y 4 niños. Las familias se dedican a labores agropecuarias como obreros en fincas de la región, sus ingresos solo les permiten cubrir algunas de sus necesidades básicas, factor que impacta generando altos niveles de fluctuación de la comunidad que constantemente busca nuevos rumbos y nuevas oportunidades laborales, circunstancia que impacta en la cobertura de la IE y en la deserción escolar. En este marco resulta relevante el planteamiento de Robledo y García (2014), cuando refieren el contexto familiar como “altamente impactante en el desarrollo y la adaptación educativa y personal del alumno” (p. 124).

Desde consideraciones empíricas a partir de las prácticas pedagógicas, el impacto del que hacen mención Robledo y García (2014), se percibe en la poca oportunidad de los padres, por razones laborales y de formación, de apoyar a su hijos en los procesos educativos en el hogar, así como en el suministro de recursos educativos, condiciones que les hacen más complejo el aprendizaje, en este caso de matemáticas, y contribuye a la construcción en ellos de creencias como las de que esta área es muy difícil de aprender y actitudes de apatía e indiferencia por ella, con el cargo adicional que representa un ambiente de enseñanza tradicional poco motivador. Necesaria e ineludiblemente, una atmósfera formativa con estas características requiere innovación.

Marco de referencia

Con una perspectiva de la lógica matemática orientada hacia la educación primaria, Prieto (2018), propone el pensamiento lógico matemático como

un relacionamiento de métodos y procedimientos, organizados, activos y estructurados de manera secuencial mediante interacción en el cerebro de las inteligencias funcionales en la tarea de comprender y facilitar la solución de un problema, ámbito en el que el autor reconoce la incidencia de la teoría de las inteligencias múltiples (Gardner, 2001), además de las teorías sobre la inteligencia emocional y la psicología de la inteligencia de Piaget todo lo cual, le permite a Prieto (2018) argumentar que promover la solución de situaciones que requerían del desarrollo del pensamiento lógico, permite a los estudiantes activar sus áreas cognitivas y comprender más fácilmente los conceptos básicos y avanzar con el aprendizajes de contenidos más profundos.

Desde otro ángulo, en el marco de un estudio sobre desarrollo del pensamiento lógico y su relación con el rendimiento académico, Suarez, Carlín y Sánchez y Ruano (2017), reconocen la necesidad de promover motivación en los alumnos hacia su participación activa en la enseñanza aprendizaje, en función de aprovechar las experiencias y recursos que aporta la implicación en ello del pensamiento lógico, condición que demanda disponer de espacios que les permitan interactuar con elementos del entorno cotidiano y puedan fortalecer el razonamiento lógico a través de diferentes actividades desarrolladas de manera activa, participante y colaborativa.

Un aporte significativo a la comprensión del pensamiento lógico matemático que resulta útil al docente proviene de Pachón (2016), autor que concluye en un estudio de su autoría, que este tipo de pensamiento se desarrolla a través de preguntas que motiven al alumno a interrogar y cuestionar desde lo que sabe, es decir, preguntas con un enfoque pedagógico más allá de la intencionalidad de solamente buscar identificar el nivel de conocimiento del estudiante en un campo específico. En complemento a esta configuración, surge apropiada una recomendación sobre la relevancia de la reflexión constante del docente acerca de sus prácticas educativas implementadas en el aula de clase (Murcia y Henao, 2015), para fortalecer las competencias matemáticas en los estudiantes y optimizar la calidad educativa. En otras palabras, plantea la autora al

docente, la inherencia de una autoevaluación de su praxis profesional orientada al establecimiento de planes de mejoramiento continuo.

Ahora, en el recuadro de la relación pensamiento lógico matemático y resolución de problemas, se ha encontrado que proponer un método para resolver un problema aporta al desarrollo de este tipo de pensamiento (Zenteno, 2017) a partir de conducir al estudiante por un sendero de organización de un proceso en búsqueda de una meta que, complementariamente le aporta al mejoramiento de su rendimiento académico. En sentido similar, Leal y Bong (2015), implantaron, en el campo de la enseñanza-aprendizaje de matemáticas, dos aspectos sustanciales para el fomento del pensamiento lógico matemático en los estudiantes: i) el aprendizaje basado en proyectos y, ii) la resolución de problemas. Se infiere en esta propuesta, la pertinencia en ambos casos de la implementación de métodos o procesos que implican un avance secuencial que fomenta una estructuración basada en una línea de razonamiento lógico. Perspectiva que aconsejó implicar en el estudio la apreciación del método Polya con su reconocida estructura: i) comprender el problema, ii) elaborar un plan, iii) desarrollar el plan y, iv) examinar la solución.

El estudio tiene como punto de partida en el espacio de la construcción del marco teórico: la didáctica, entendida como una ciencia dentro de las Ciencias de la Educación, en un entorno donde didáctica de las matemáticas comporta el sentido de disciplina dedicada a identificar y a explicar fenómenos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia. Es decir, las actividades que tienen por objeto la transferencia del conocimiento a los estudiantes (Brousseau, 2000). Así mismo, este autor indica cómo, junto al concepto enseñanza, la didáctica implica el arte de originar y acondicionar los recursos necesarios para el desarrollo de las actividades pertinentes y el posterior análisis de lo realizado y lo surgido en ellas, considerando su sentido de proyecto social, hecho socio-histórico o como fenómeno. De este autor se resaltan sus concepciones sobre la didáctica de las matemáticas y las teorías y enfoques desarrollados en torno al estudio de las diversas transformaciones de la enseñanza de estas.

De modo similar, Arteaga, y Macías (2016) conceptualizan la didáctica de las matemáticas como el relacionamiento de metodologías, teorías de aprendizaje, estudio de dificultades, recursos y materiales para el aprendizaje, como aspectos que conforman el contexto de la enseñanza-aprendizaje de esta asignatura, brindando a los docentes los elementos necesarios para la formalización de cimientos consistentes, orientadores y guías en el ejercicio de su quehacer pedagógico en beneficio del aprendizaje de sus alumnos. En consecuencia, la enseñanza-aprendizaje de esta ciencia implica complejos procesos cognoscitivos, para que el estudiante pueda construir el conocimiento de manera significativa (Ausubel, 1976).

En esto influye la forma como el docente de manera hábil y pertinente utiliza los diferentes principios, medios y recursos en su trabajo de transferencia del conocimiento y que responda a las finalidades de enseñanza aprendizaje. El sistema didáctico según Chevallard y Joshua (1982, citado en Saiz y Acuña, s.f.) integra tres subtemas: profesor, alumno y saber enseñado. Adicionalmente, estos autores, integran en este triángulo el medio como cuarto elemento, todo ello considerado como un aporte de la teoría de las situaciones didácticas al estudio del proceso de enseñanza aprendizaje de matemáticas en los ámbitos escolares. Igualmente, Chevallard (1989), sigue una postura con enfoque antropológico, donde, según la misma, la didáctica implicaría el estudio del hombre en el marco de las sociedades humanas, estudiando y enseñando matemáticas.

Contribuyen a la estructura de este marco, algunos postulados teóricos acerca del pensamiento lógico matemático, asumido de acuerdo con Jaramillo y Puga (2016) con el sentido de competencia del ser humano para comprender la realidad y las similitudes y diferencias, acciones, objetos y hechos visibles mediante su análisis, comparación, abstracción e imaginación.

Igualmente, este tipo de pensamiento comporta la forma como una persona, desde temprana edad o en sus primeros años de escolaridad, aprende a pensar por sí misma aprovechando lo que considera pertinentemente en su proceso académico, lo que le facilita el alcance de capacidades para

hacer reflexiones significativas (Jaramillo y Puga, 2016). Lo anterior, en un marco, como sugieren estos autores, de relacionamientos dados en el cerebro debido a la necesidad de generar razonamientos lógicos, con objeto de producir conocimiento y plantearse reflexiones útiles para la acción social del individuo.

Por tanto, el pensamiento lógico es lo que le permite y garantiza al ser humano determinar la coherencia de las situaciones de forma correcta, ajustada a la realidad y juzgada por criterios de validez del mismo pensamiento, esto implica usar determinadas reglas establecidas o demostradas. Para Piaget (1982, citado por Carmenates y Tarrío, 2019) afirma que “la lógica del pensamiento la constituye el sistema de relaciones que permiten al sujeto la coordinación de sus propios puntos de vista entre sí y con los puntos de vista de los demás” (p. 336). El autor, como igualmente refieren Carmenates y Tarrío (2019) “estudió con profundidad la génesis de este sistema de relaciones en el que dio gran importancia a la reversibilidad” (p. 366).

En cuanto a la reversibilidad, esta es planteada por García y Rodríguez (2012) como una “capacidad para devolverse en el pensamiento y concebir las cosas en su totalidad” (p. 209). Mediante las mismas, continuando con estos autores, el individuo comprende las nuevas relaciones que surgen y otorga sentido real a la acción. Por lo tanto, el pensamiento lógico no se desarrolla solamente a través de actividades de contenido lógico específico, también lo hace cuando se propone una acción o acciones que generan una idea (Fernández, 2001).

Pensamiento lógico matemático

El pensamiento lógico matemático se entiende como el conjunto de procesos mentales a través de los cuales se establecen relaciones entre objetos, situaciones y conceptos que permiten estructurar la realidad. Considerado como la habilidad que ha desarrollado el ser humano para trabajar y pensar en términos de números para interpretar y resolver operaciones básicas, analizar información, hacer uso del pensamiento reflexivo y lógico para resolver situaciones de la vida cotidiana.

Piaget (1991), en la teoría de los tipos de pensamiento, plantea como el conocimiento lógico-matemático es establecido por el niño al relacionar sus experiencias basadas en la manipulación de objetos, emergiendo en este entorno una abstracción reflexiva, puesto que tal conocimiento no es observable, generando desde lo simple a lo complejo, además, considerando como, una vez asimilado el conocimiento, este no se olvida pues la experiencia proviene de la acción sobre los objetos y no de estos.

Para Fernández (2009, citado por Gómez, 2012), el pensamiento lógico matemático es favorecido por cuatro capacidades: la observación, la imaginación, la intuición y el razonamiento lógico. La primera se encamina de manera libre y con respeto de las acciones del niño mediante juegos orientados al reconocimiento de propiedades y sus relaciones. Cuando quien realiza la actividad lo hace con agrado y tranquilidad, esta capacidad aumenta, por el contrario, se reduce si este actúa bajo tensión.

La segunda de estas capacidades corresponde a la acción creativa, cuando el sujeto dispone en su acción de diversas alternativas, la imaginación se fortalece y apoya el aprendizaje de matemáticas en función de la diversidad de circunstancias orientadas a una misma interpretación. Ahora, siguiendo con Fernández (2009, citado en Gómez, 2012) sobre la intuición, cabe señalar que las acciones propuestas para su desarrollo no han de generar técnicas adivinatorias, pues, “decir por decir no desarrolla pensamiento alguno” (p. 3), ya que la arbitrariedad no se relaciona con acción lógica, no obstante, no se busca considerar como verdad todo lo que plantea el niño, por el contrario, se pretende que “se le ocurra todo aquello que se acepta como verdad” (p. 4). El razonamiento lógico corresponde a la cuarta de las capacidades propuesta por Fernández (2009), entendido como “la forma del pensamiento mediante la cual, partiendo de uno o varios juicios verdaderos, llamados premisas, se llega a una conclusión conforme a ciertas reglas de inferencia” (p. 4).

Para lograr el desarrollo del pensamiento lógico matemático en el niño, es necesario implementar actividades en el aula donde el estudiante interactúe y manipule material concreto para optimizar la construcción de conceptos, asimilación de procesos, constatación de ideas y argumentos con los

demás, condiciones que, a través de la curiosidad y el descubrimiento, mejoran la habilidad de razonar, pensar, tomar decisiones y resolver problemas. Según Piaget (1991), todo el conocimiento y en especial el entendimiento lógico matemático, que constituyó su principal centro de atención, se deriva en primera instancia de las acciones propias sobre el mundo (Gardner, 2001).

Resolución de problemas matemáticos

La resolución de problemas es considerada una de las actividades más importantes que se plantea dentro del proceso educativo en el área de matemáticas, uno de sus principales propósitos es desarrollar el pensamiento y habilidad matemática para plantear y resolver problemas. En la educación primaria la resolución de problemas adquiere la característica de eje fundamental del aprendizaje matemático, circunstancia que sustenta la inherencia de un proceso de enseñanza aprendizaje sólido y pertinente durante toda esta etapa escolar (Callejo y Montero, 2019) estimando su significación como base estructural del proceso formativo en esta ciencia a lo largo de todo el contexto educativo del individuo.

Adicionalmente, es oportuno estimar el valor de las capacidades de resolución de problemas tanto como elemento básico en el aprendizaje, como también en el proceso de producción del conocimiento y en la cotidianidad social. Para Furth (1971, citado en García Fallas, 1994) resolver un problema implica el ejercicio de una actividad basada en conocimiento relacionada con otras actividades que integran motivación, percepción, operaciones sensorio- motoras y operaciones concretas. Es decir, se trata de un evento complejo que requiere del sujeto competencias factibles de desarrollar desde sus primeros momentos de escolaridad, donde, además, el pensamiento lógico-matemático ocupa lugar preponderante.

Ahora bien, la puesta en práctica de la resolución de un problema demanda la presencia en el estudiante de interés por el resultado, la comprensión del objetivo y el seguimiento de los antecedentes del planteamiento

como secuencia o línea lógica a partir de lo cual, la solución surge en forma activa y sistemática (Deloache y Brown, 1990). Se infiere en este contexto la factibilidad de un método como el de Polya con la función de herramienta facilitadora del proceso de resolución de un problema, subyaciendo en ello el valor del pensamiento lógico-matemático. Para Polya (1989), un verdadero problema consiste en una situación inicial bien conocida a partir de la cual, es necesario llegar a otra situación algunas veces conocida o someramente conocida y no se conoce el camino. Un verdadero problema debe suscitar interés entre las personas que quieran resolverlo, las cuales a su vez deben tener algún conocimiento sobre el tema que los ocupa.

De modo similar, Schoenfeld (1985) fundamenta en su propuesta que denomina la adopción de un “microcosmos matemático” en el salón de clases, propone que resolver problemas matemáticos, propicia las condiciones para producir las matemáticas, por tanto, estimar los problemas como entornos de aprendizaje es de suma importancia en el proceso educativo, ya que promueven el desarrollo de la flexibilidad, cambio de punto de vista, fluidez de ideas y la originalidad, fortaleciendo el dominio de habilidades y la apropiación del conocimiento.

El enfoque de George Polya en la resolución de problemas

La posición de Polya (1989) respecto a la resolución de problemas se basa en una perspectiva global y no restringida a un punto de vista matemático. Es decir, se percibe en esto una perspectiva relevante, pues, el autor plantea la resolución de problemas como una serie de procedimientos que, en realidad, se utilizan y aplican en cualquier campo de la vida diaria.

En su libro *How to solve it*, Polya (1989) desarrolló una serie de estrategias importantes en la resolución de problemas, contribuyendo así a la construcción de una nueva metodología en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En esencia, el autor propone cuatro pasos básicos para resolver un problema, a saber: comprender el problema,

concebir un plan, ejecutarlo y examinar la solución. En cada uno de estos pasos, el docente debe guiar a sus estudiantes con una serie de preguntas.

Comprender el problema

Etapa que consiste en saber qué es lo que se pregunta, cuál es la información que se da y las condiciones que caracterizan el problema. Como apoyo a la comprensión de un problema, Polya (1989) considera válido responder las siguientes preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿es suficiente? ¿redundante? ¿contradictoria?

Concebir un plan

Concebir un plan para solucionar un problema demanda la intervención de la experiencia (conocimientos previos) sobre la forma en que se han solucionado problemas anteriores, esto con la finalidad de comparar una situación nueva con hechos conocidos. Otra alternativa sería ayudar a solucionar problemas más simples, o aplicar las condiciones dadas una tras otra hasta completar las solicitadas en el problema. Las preguntas orientadoras serían:

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con este? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible?
- ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Puede resolver una parte del problema?

Cabe destacar como señala este autor, que una idea brillante generalmente consolida un plan, pero estas no siempre surgen espontáneamente, por lo tanto, es inherente sacar el máximo provecho a los intentos fallidos por resolver el problema, estos dejan experiencias y conocimiento, además de

no olvidar que un plan en realidad consiste en determinar una relación entre los datos y la incógnita.

Ejecución del plan

Se sustenta en desarrollar la idea brillante del plan del problema. Propone Polya (1989) que la ejecución del plan solo debe empezar cuando se tenga certeza de estar en el punto de partida pertinente y de poder suplir todos los detalles menores que puedan presentarse, no obstante, su pequeñez, ha de tomarse en cuenta, condición que contribuye a liberar la solución de cualquier duda o desconfianza.

Al ejecutar el plan en busca de la solución, se ha comprobar:

¿Puede verse claramente que el paso es correcto? ¿Puede demostrarse?

Examinar la solución (visión retrospectiva)

La comprobación de la solución de un problema es necesaria y pertinente, existiendo algunas formas diversas de lograrlo, marco en el cual es significativo mirar la incógnita obtenida desde varios puntos de vista, igualmente, considerar los casos extremos del resultado y observar que concuerda con problemas o resultados anteriores. Esta etapa es trascendente en la cotidianidad, pues, plantea la contrastación del resultado obtenido con la realidad que se buscaba resolver. Algunas preguntas orientadoras pueden ser:

¿Parece lógicamente posible? ¿Se puede comprobar la solución? ¿Hay algún otro modo de resolver el problema? ¿Se puede hallar alguna otra solución? Por último, ha de acompañar a la solución una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.

Lúdica

La lúdica se manifiesta en todas las expresiones del ser humano, implica la producción de emociones que se orientan hacia el goce y el disfrute del desarrollo del individuo (Moreno, 2002). Adicionalmente, se configura

como una parte constitutiva del desarrollo integral, es decir, un factor decisivo para fortalecer el desarrollo del ser, ya que, a más posibilidades de expresión y satisfacción lúdica, se dan mejores resultados de superación personal, bienestar e interacción social.

Esta configuración posibilita afirmar que la lúdica es un aspecto importante que permite a los seres humanos explorar, experimentar, expresar y aprender diversos conocimientos, a la vez, deja que los individuos integren experiencias de aprendizaje a su ser para lograr el desarrollo integral. Por tanto, la lúdica hace parte directa de los seres humanos, siendo un factor relevante para la formación frente al entorno y la relación que pueda tener con la comunidad. Un estudio de Choez (2017) manifiesta en sus conclusiones que la implementación de estrategias de aprendizaje mediadas por actividades lúdicas permitió evidenciar cambios en el desarrollo personal y social en estudiantes de educación básica, lo cual les aportó al descubrimiento de sus particularidad favoreciendo su identidad personal, aspectos que coinciden con las intencionalidades de este trabajo fundamentadas a fortalecer las competencias de resolución de problemas a partir de un ambiente de aprendizaje innovador mediado por acciones lúdicas.

Metodología

Enfoque de la investigación

Para el desarrollo del presente trabajo se tomó como base la investigación mixta de acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2014), quienes señalan cómo en este enfoque subyace un proceso de recolección, análisis y vinculación de datos cuantitativos y cualitativos en una misma investigación, con la finalidad de responder al planteamiento del problema. El enfoque cualitativo de acuerdo con estos autores es conocido como investigación naturalista, fenomenológica o interpretativa, donde se incluye variedad de concepciones, visiones, técnicas y estudios no cuantitativos, puesto que se soporta en la descripción detallada de fenómenos en referencia al estudio de los significados inmediatos y particulares de las acciones sociales de los estudiantes. Entre tanto, el

enfoque cuantitativo acude a la recolección de datos para probar hipótesis con base en la medición numérica y el análisis estadístico, pretendiendo establecer pautas de comportamiento y la verificación de teorías.

Tipo de investigación: Investigación Acción-Participación

Este tipo de investigación desde la perspectiva educativa, es conceptualizado por Suárez y Pazos (2002, citado por Colmenares, 2011) como un proceso de estudio y exploración de una situación social, en el asunto actual, educativa, con la intencionalidad de su mejoramiento, en un contexto que implica al investigador e investigados conjuntamente en el análisis del fenómeno estudiado, con el interés de resolver problemas cotidianos, mejorar prácticas concretas y lograr la transformación de situaciones en los contextos escolares. Estos autores, proponen como etapas de la Investigación Acción Participativa: i) el diagnóstico de una preocupación temática o problema, ii) la construcción del plan de acción, iii) la puesta en práctica del referido plan y su respectiva observación, iv) la reflexión e interpretación de resultados y, v) la nueva planificación, si fuera necesario

Población y muestra

La población objeto de estudio está conformada por los estudiantes de la sede Las Pilas. Esta comunidad educativa actualmente cuenta con 20 estudiantes, 13 niños y 7 niñas, sus edades oscilan entre los 5 a 11 años, desempeñando las labores educativas una sola docente.

Muestra

Para el desarrollo de la investigación se tuvo en cuenta que, siendo la sede Las Pilas una institución multigrado y el grupo de estudiantes muy heterogéneo en cuanto a los niveles educativos, se hizo necesario trabajar siguiendo el tipo de muestra por muestreo estratificado consistente en dividir la población en subconjuntos cuyos elementos poseen características comunes, es decir, estratos homogéneos en su interior (Arias, 2012). Este tipo de muestreo permitió elegir los estudiantes en

los cuales se adelantó el estudio. Los grados tercero, cuarto y quinto de la sede Las Pilas cuentan con solo 6 estudiantes, 2 niñas y 4 niños, quienes conformaron la muestra del estudio. Ellos no presentan ninguna discapacidad física ni cognitiva, evidencian un crecimiento y desarrollo dentro de los rangos normales apreciándose sanos y saludables, muy activos y amables

Fases de investigación

El proceso de la investigación se desarrolló a través de cuatro fases descritas en el siguiente diagrama:

Figura 1. *Fases del estudio*



Fuente: Elaboración propia.

Instrumentos de recolección de información

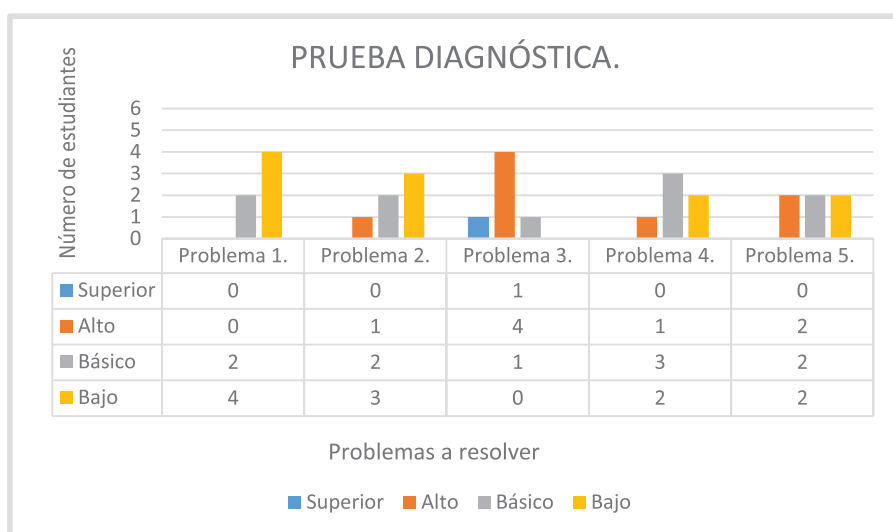
Se utilizó la observación, diario de campo, entrevistas, encuestas, pruebas diagnósticas, cinco talleres pedagógicos, rúbricas y artefactos como cámaras de video y fotografía.

Análisis e interpretación de resultados

Fase diagnóstica

Se aplicó una prueba diagnóstica estructurada en cinco problemas que presentó los siguientes resultados:

Figura 2. Resultados de la prueba diagnóstica



Fuente: Elaboración propia.

Al realizar el análisis cuantitativo del proceso de desarrollo de la prueba diagnóstica, de los 6 estudiantes que conforman los grados tercero, cuarto y quinto de la sede y a quienes se les aplicó la prueba con el objetivo de reconocer las habilidades matemáticas que tienen para la resolución de situaciones problema. Esta prueba fue evaluada de acuerdo con la escala de valoración adoptada por la institución, tal como lo muestra la Tabla 1, en relación con la escala de evaluación nacional, mediante escala numérica y en razón al sentido de ubicación que proporciona el dato cuantitativo para relacionar la parte con el todo.

Tabla 1. *Escala de valoración institucional*

Escala nacional	Escala institucional	Significado
Desempeño superior	≥ 9.0 Y ≤ 10.0	Los logros e indicadores se alcanzan entre el 90 % y 100 %.
Desempeño alto	≥ 8.0 y < 9.0	Los logros e indicadores se alcanzan en el 80 % a 89%.
Desempeño básico	≥ 6.0 y < 8.0	Los logros e indicadores se alcanzan en el 60 % a 79 %.
Desempeño bajo	≥ 1.0 y < 6.0	Los logros e indicadores son inferior al 59 %

Fuente: Elaboración propia.

Dentro del análisis de los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, y de la observación descriptiva del diario de campo, se determinó que los estudiantes no comprenden la situación problema dada, para su solución realizan procedimientos y operaciones matemáticas al azar, sin hacer un análisis de lo que constituye el problema. De esta manera, estos resultados permitieron reconocer la pertinencia de establecer estrategias didácticas pedagógicas para fortalecer sus competencias en este campo.

Fase de trabajo de campo

En esta fase se diseñaron 5 talleres estructurados como propuesta lúdico pedagógica que permitirá potenciar el desarrollo de las habilidades y competencias matemáticas y la aplicabilidad en la resolución de situaciones problemas del entorno cotidiano, promoviendo el desarrollo del pensamiento lógico matemático a partir de la manipulación de material didáctico, creando ambientes y espacios innovadores en el aula, simulando siempre un contexto real de la situación que proponía el problema matemático para trabajar.

Los talleres se plantearon en un formato estructurado de plan de trabajo de clase, teniendo en cuenta sus momentos, como un primer momento

se realizó el espacio motivacional dando a conocer el ambiente simulador de la realidad creado a través de material lúdico, en su mayoría reciclado y con el material didáctico necesario para trabajar el problema. En este espacio se exploraban los saberes previos acerca de los conceptos característicos de la situación cotidiana por trabajar. En un segundo momento se da a conocer la situación problema por resolver. En un tercer momento se desarrolló el aprendizaje a través de la resolución de problemas matemáticos, para ello, se trabajó los pasos de Polya (entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y examinar la solución) y en último momento se realizó la retroalimentación y evaluación de la clase.

La recolección de la información se realizó a través de rúbricas de evaluación continuas a través del trabajo en la clase, se realizaron entrevistas a los estudiantes con preguntas abiertas para evaluar los avances y dificultades en el proceso de desarrollo de las competencias propuestas y el alcance de los objetivos de la investigación.

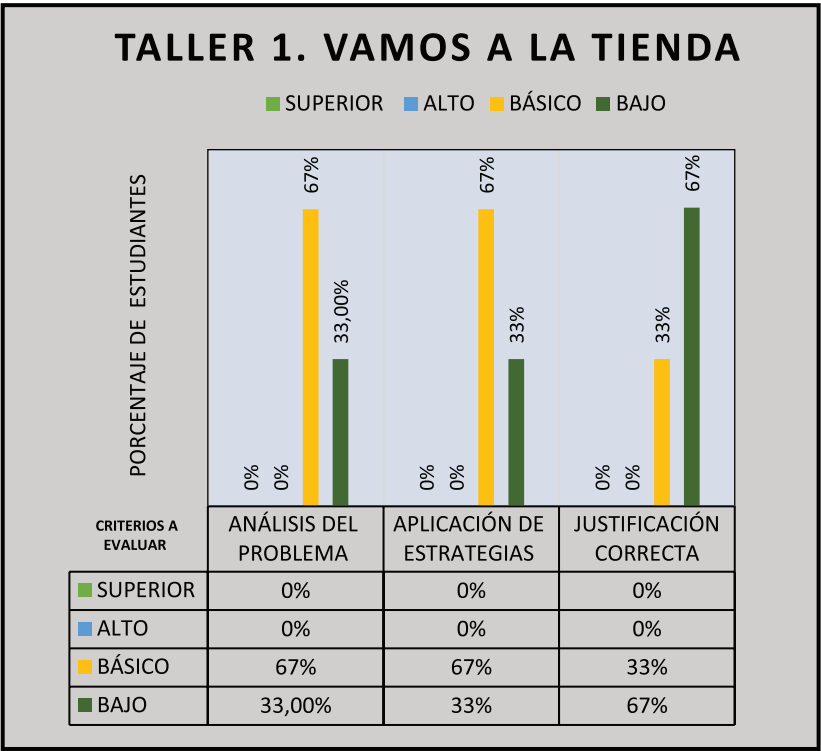
Para la evaluación de los procesos de aprendizajes, se seleccionan tres competencias a desarrollar, trazadas en la rúbrica de evaluación,

1. Análisis adecuado de la situación problema.
2. Propuesta y aplicación adecuada de conceptos y procesos requeridos.
3. Justificación correcta de los resultados obtenidos.

Los conceptos para la valoración de cada competencia son bajo, básico, alto y superior teniendo en cuenta la escala de valoración de 1 a 10, el total de estudiantes se da en porcentajes para mayor comprensión de la gráfica.

Análisis de los resultados de la aplicación de los talleres

Figura 3. *Análisis de resultados del taller 1*

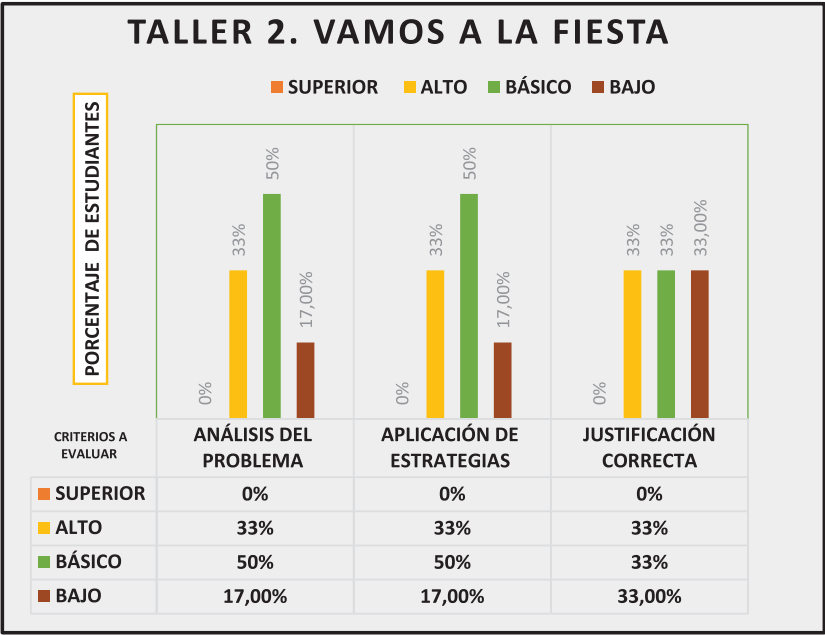


Fuente: Elaboración propia.

Esta gráfica nos muestra los resultados obtenidos en el desarrollo de la situación problema titulada “vamos a la tienda”. Teniendo como base la rúbrica de evaluación, la gráfica nos evidencia que; en el proceso de *análisis de la situación* del problema, 2 estudiantes que equivalen a un 33,3 % presentaron un nivel bajo en el desempeño de las competencias, 4 estudiantes equivalentes a 67 % obtuvo un nivel básico, ningún estudiante alcanzó niveles altos y superiores de competencias de desempeños. En el proceso de *aplicación de estrategias*, el 33 % presenta un nivel bajo, el 67 % obtuvo un nivel básico, el 0% en el nivel alto y de igual manera en los niveles superior. En el proceso de *justificación correcta*, el 67 %

de los estudiantes presentan un nivel bajo y solo el 33 % está en el nivel básico, se evidencia que ningún estudiante demuestra competencias altas ni superiores al realizar los diferentes procesos aplicados en la solución de problemas.

Figura 4. Análisis de resultados del taller 2

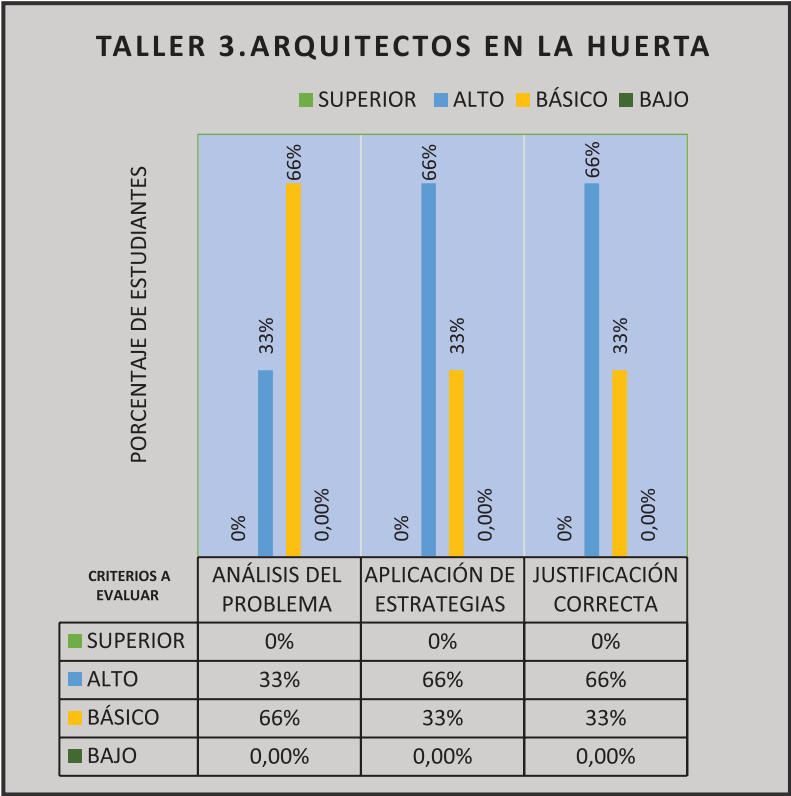


Fuente: Elaboración propia.

En el segundo taller aplicado, se obtienen en el *proceso de análisis* de la información dada en la situación problema se registró que, el 33 % de los estudiantes obtuvo un desempeño alto, el 50 % obtuvieron desempeños básicos y, el 17 % obtuvieron desempeños bajos. En el proceso de *aplicación de estrategias* para solucionar la situación problema un 33 % las realizaron con un desempeño alto, el 50 % con desempeños básicos y, el 17 % con desempeño bajo. En el proceso de *justificación* y dar explicación correcta de las estrategias aplicadas, el 33 % obtuvo un desempeño bajo, el 33 % con desempeños básicos y el 33 % con desempeños altos. Al observar y

comparar los resultados de los gráficos del taller 1 con los resultados del gráfico del taller 2, se evidencia que los estudiantes avanzaron un poco en cada uno de los procesos aplicados en la solución de una situación problema.

Figura 5. Análisis de resultados del taller 3

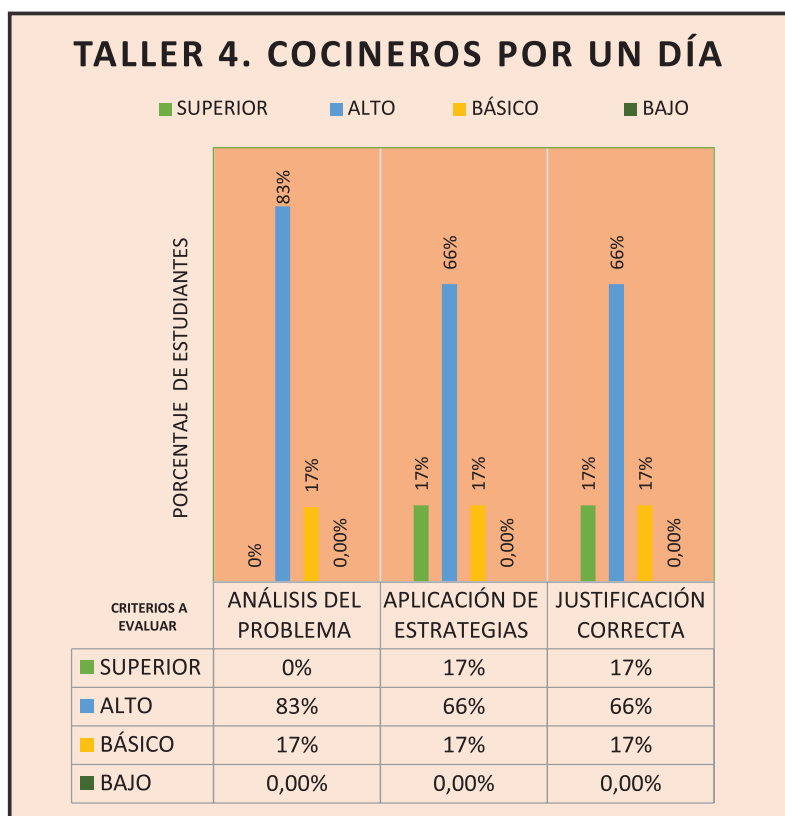


Fuente: Elaboración propia.

El desarrollo del tercer problema fue muy motivante, se observó esfuerzo e interés para demostrar sus competencias matemáticas, sus desempeños se resumen en: Dentro del proceso de *análisis y comprensión* de la situación problema se registró que el 33 % se desempeñaron en un nivel alto, y el 66 % obtuvieron un nivel básico. En el proceso de *aplicación de las estrategias*, el 66 % demostraron un nivel alto y el 33 % obtuvieron un nivel bajo de desempeño. Al evaluar el proceso de *justificación* y argumentación

de los resultados plasmados en la maqueta, 66 % se desempeñaron en un nivel alto y el 33 % en un nivel básico. Lo anterior evidencia un gran avance en los desempeños de los estudiantes en la solución de una situación problema, la elaboración de la maqueta les permitió demostrar sus conocimientos y competencias matemáticas adquiridas, las cuales se reflejan en los razonamientos, sustentaciones y el trabajo final.

Figura 6. *Análisis de resultados del taller 4*



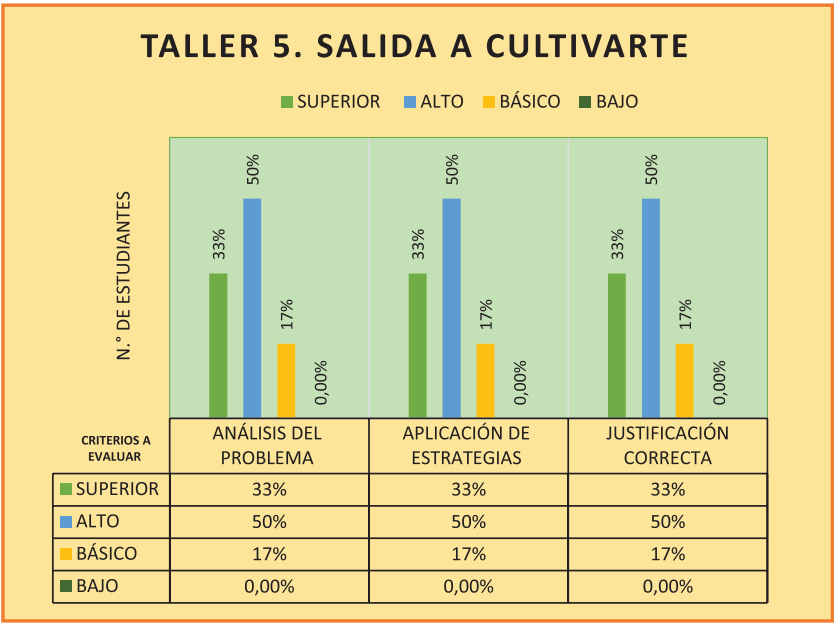
Fuente: Elaboración propia.

Al realizar la aplicación del taller 4 se observaron desempeños más avanzados en cada estudiante, la gráfica muestra en el *proceso de análisis*, 83 % obtuvo un nivel alto, el 17 % en un nivel básico. En el proceso de *aplicación de estrategias*, el 17 % se desempeñó muy bien obteniendo

un nivel superior, el 66 % se desempeñó en un nivel alto y el 17 % en un nivel básico. Dentro del proceso de sustentación y justificación de los resultados, el 17 % obtuvo un desempeño alto, el 66 % un desempeño alto y el 17 % un desempeño básico.

En el proceso de desarrollo del taller se evidenció un buen desempeño de las habilidades matemáticas, los avances en la aplicación de los pasos de Polya para resolución de problemas, han desarrollado en cada estudiante nuevas competencias matemáticas ya que se sienten más seguros al proponer alternativas de solución y aplicar procedimientos para hallar resultados.

Figura 7. Análisis de resultados del taller 5



Fuente: Elaboración propia.

En la aplicación del último taller, se registraron avances muy satisfactorios en cada uno de los estudiantes, se observa que la mayoría se apropiaron de las estrategias propuestas por Polya logrando adquirir habilidad matemática para resolver situaciones problema del entorno cotidiano.

Como se observa en la gráfica, en el proceso de *análisis de la situación* el 33 % obtuvo un nivel superior, el 50 % un nivel alto y solo un 17 % trabajo con un nivel básico de desempeño. Analizando el proceso de *aplicación de estrategias*, el 33 % obtuvo un desempeño superior, el 50 % un desempeño alto y el 17 % un desempeño básico. En el proceso de *justificación*, el 33 % obtuvo un desempeño superior, el 50 % un desempeño alto y el 17 % un desempeño básico.

Al realizar la comparación de las diferentes gráficas, observamos grandes avances en los desempeños y habilidades matemáticas en los estudiantes para la resolución de situaciones problema cotidianos, la modelación de cada una de las situaciones les permitió a los estudiantes vivir experiencias innovadoras y reales, posibilitando el uso flexible de conocimientos y procesos requeridos para dicha solución. Las anteriores figuras, muestran los correspondientes resultados de los talleres aplicados, un avance secuencial en el desarrollo de competencias de resolución de problemas matemáticos en los estudiantes objeto de la investigación. La Tabla 2 sintetiza esta información y facilita la observación del desarrollo mencionado.

Tabla 2. *Síntesis de resultados de los talleres*

VARIABLE	Niveles de valoración			
	Superior	Alto	Básico	Bajo
TALLER 1				
Análisis del problema	0	0	67 %	33 %
Aplicación de estrategias	0	0	67 %	33 %
Justificación correcta de los resultados	0	0	33 %	67 %
TALLER 2				
Análisis del problema	0	33 %	50 %	17 %
Aplicación de estrategias	0	33 %	50 %	17 %
Justificación correcta de los resultados	0	33 %	33 %	33 %

VARIABLE	Niveles de valoración			
	Superior	Alto	Básico	Bajo
TALLER 3				
Análisis del problema	0	33 %	66 %	0
Aplicación de estrategias	0	66 %	33 %	0
Justificación correcta de los resultados	0	66 %	33 %	0
TALLER 4				
Análisis del problema	0	83 %	17 %	0
Aplicación de estrategias	17 %	66 %	17 %	0
Justificación correcta de los resultados	17 %	66 %	17 %	0
TALLER 5				
Análisis del problema	33 %	50%	17 %	0
Aplicación de estrategias	33 %	50 %	17 %	0
Justificación correcta de los resultados	33 %	50 %	17 %	0

Fuente: Elaboración propia.

La información de la tabla deja percibir como en el primer taller el rendimiento en las variables establecidas se focalizó en los niveles básico y bajo. En el segundo taller, se presentaron niveles de rendimiento alto y disminución en básico y bajo, es decir se produjo un leve avance en las competencias de resolución de problemas. Así mismo, los resultados del tercer taller evidencian incremento en rendimiento alto frente al segundo taller e igualmente en el nivel básico y disminución significativa en nivel bajo, donde no se ubicó ningún estudiante. Situación similar se observa en el cuarto taller que muestra estudiantes en nivel superior, no alcanzado antes por alguno de ellos, aumento del rendimiento en nivel alto, disminución en el básico y ningún estudiante en nivel bajo. Los resultados del quinto taller dejan ver el traslado de un porcentaje de estudiantes que estaban en nivel alto al superior, por ende, disminución en alto y

estabilidad en el bajo. Todo esto corrobora un avance representativo en las competencias de resolución de problemas en los sujetos del estudio. En otras palabras, se constata el alcance del objetivo general propuesto.

Conclusiones y reflexiones

Al hacer el análisis comparativo frente a la competencia de aplicación de estrategias para la resolución del problema, se observa que el nivel de rendimiento en competencias en este campo se va incrementando cada vez más hacia los niveles alto y superior, los porcentajes obtenidos demuestran la efectividad de la estrategia implementada en el aula. Los estudiantes se apropiaron de cada uno de los pasos propuestos por Polya (1989), seleccionaron y aplicaron conceptos y procesos apropiados (Leal y Bong, 2015) para resolver el problema de forma correcta.

Resulta así, de gran importancia el método propuesto por Polya en el desarrollo del razonamiento lógico-matemático en los estudiantes logrado a través de la implementación y desarrollo de diferentes actividades propuestas en los talleres con un enfoque lúdico, que generó en ellos motivación (Suarez, Carlin, Sánchez y Ruano, 2017) hacia el alcance del objetivo de aprendizaje. Se observa un avance significativo en el proceso de resolución de problemas matemáticos y de igual forma influyó positivamente en la motivación al aprendizaje de las matemáticas.

Durante la implementación de los talleres, se observó que los estudiantes se iban familiarizando con cada uno de los pasos y estrategias propuestas, relacionando métodos y procedimientos, (Prieto, 2018) paulatinamente fueron demostrando más interés y al aplicar la estrategia lograron explorar el razonamiento lógico en cada una de las situaciones, haciendo cada vez más fácil el trabajo en clase. Respecto al aprendizaje, los estudiantes demostraron apropiación de los pasos de la metodología de Polya (1989) guiados por los interrogantes que orientan el desarrollo del método que los conducen a identificar y comprender lo que se requería para su resolución y, de esta forma relacionar con eficacia los métodos, conceptos y procedimientos (Prieto, 2018) para lograr la solución del problema dado.

El estudio “Desarrollo del pensamiento lógico matemático para la resolución de problemas mediante estrategias lúdico-pedagógicas”, constituyó una experiencia muy significativa en el proceso de aprendizaje en los estudiantes. A través de la lúdica y la modelación de cada una de las situaciones problemas, se fortalecieron las competencias matemáticas y se desarrolló el pensamiento lógico para la resolución de problemas tanto matemáticos como una proyección hacia los de la vida real.

A través de la investigación realizada, se brindó una alternativa de solución a la problemática evidenciada en el aula. La implementación de los pasos de Pólya para la resolución de situaciones matemáticas mediadas por la lúdica generó importantes avances de desempeño en competencias lógico-matemática en cada uno de los estudiantes.

La lúdica es una estrategia muy importante en el proceso de enseñanza aprendizaje en el aula, la interacción y el contacto directo con los objetos del entorno, le permite al estudiante activar el cerebro para que se apropie de manera significativa de los conocimientos y procedimientos matemáticos necesarios para la resolución de problemas. La innovación, la motivación y la contextualización de cada una de las situaciones problemas a resolver, permitió adquirir nuevas habilidades cognitivas, comunicativas, de razonamiento lógico y sobre todo de trabajo cooperativo y colaborativo en el grupo.

Referencias

- Arias, F. G. (2012). *El Proyecto de Investigación. Introducción a la metodología científica*. Editorial Episteme. S. A.
- Arteaga, B. y Macías, J. (2016). *Didáctica de las Matemáticas*. Universidad Internacional de La Rioja-UNIR.
- Ausubel, D. (1976). *Significado y aprendizaje significativo. Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Trillas.
- Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*. 12(1),5-38. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol12/1/03Brousseau.pdf>
- Callejo, M. L. y Montero, E. (2019). Estrategias del pensamiento relacional para resolver problemas. Sociedad Canaria Isaac Newton. *Revista de didáctica de las matemáticas*. 100, 97-100. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/100/Articulos_18.pdf
- Carmenates B, O.A. y Tarrío M, K. (2019). El pensamiento lógico, psicológico y social: su contribución a la resolución de problemas geométricos. *Revista Conrado*, 15(6), 362-369. Recuperado de <https://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/1083>
- Colmenares E., A. M. (2011). La Investigación Acción. Una Herramienta Metodológica Heurística para la Comprensión y Transformación de Realidades y Prácticas Socio-Educativas. *Lauru*, 14, 96-114.
- Choez L, M. N. (2017) *La lúdica en el desarrollo personal y social en niños y niñas de educación inicial de la unidad educativa fiscal Cultura Machalilla*. [Tesis de Maestría, Universidad Central del Ecuador. Quito]. <http://www.dspace.uce.edu.ec/bitstream/25000/12585/1/T-UCE-0010-080-2017.pdf>

- Deloache, J. y Brown, A. (1990) *La temprana aparición de las habilidades de planificación en los niños. En la elaboración del sentido. La construcción del mundo por el niño*. Paidós.
- Fernández B, J. A. (2001) Aprender a hacer y conocer: el pensamiento lógico. [Ponencia]. Congreso Europeo: Aprender a ser, aprender a vivir juntos. Santiago de Compostela, diciembre 2001.
- Fernández P, M. P. (2013). Desarrollo del pensamiento lógico y matemático. el concepto de número y otros conceptos. *Pulso, Revista de Educación*, 36,207-221. <https://revistas.cardenalcisneros.es/index.php/PULSO/article/view/164>
- García F, J. (1994) Resolución de problemas: de Piaget a otros autores. *Revista de Filosofía*, 32(77),131-138. <http://www.inif.ucr.ac.cr/recursos/docs/Revista%20de%20Filosof%C3%ADa%20UCR/Vol.%20XXXII/No%2077/Resolucion%20de%20problemas%20.pdf>
- García, Y., y Rodríguez, A. M. (2012). Reversibilidad y anticipación en situaciones de convivencia escolar. Universidad de Manizales. *Plumilla Educativa*, 10(2), 203-222.
- Gardner, H. (2001.). *Estructuras de la Mente. La teoría de las Inteligencias Múltiples*. Fondo de Cultura Económica Ltda.
- Gómez N, M. (2012). *Didáctica de la Matemática basada en el diseño curricular de educación inicial*. [Trabajo de grado, Universidad de León. España].
- Hernández S, R.; Fernández C, C. y Baptista L, P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Education.
- Jaramillo N, L. M, y Puga P, L. (2016.). El pensamiento lógico-abstracto como sustento para potenciar los procesos cognitivos en la educación. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*,12, 31-55. <https://www.redalyc.org/jatsRepo/4418/441849209001/html/index.html>

- Leal H, S. y Bong A, S. (2015). La resolución de problemas matemáticos en el contexto de los proyectos de aprendizaje. *Revista de Investigación*, 3(849), 71-93. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1010-29142015000100004
- Moreno, J. (2002). *Aproximación teórica a la realidad del juego. Aprendizaje a través del juego*. Ediciones Aljibe.
- Murcia, M. E. y Henao, J. (2015). Educación Matemática en Colombia. Una Perspectiva Evolucionaria. Entre Ciencia e Ingeniería. *Scielo*, 9(18), 23-30. http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S1909-83672015000200004&script=sci_abstract&tlng=es
- Pachón, L. A. (2016). El Razonamiento como eje transversal en la construcción del Pensamiento Lógico. Praxis y Saber. *Revista de Investigación y Pedagogía. UPTC*, 7(14), 219-243. https://revistas.uptc.edu.co/index.php/praxis_saber/issue/view/430
- Piaget, J. (1991). *Seis estudios de Psicología*. Editorial Labor.
- Piaget, J. (1982). *Las Operaciones Intelectuales*. Cuba. Universidad de La Habana.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Serie de Matemáticas. Trillas.
- Prieto, M. J. (2018). Lógica matemática para la escuela primaria. *Revista Científica Multidisciplinaria Base de Conocimiento*, 5, 54-76.
- Robledo R. P. y García S, J. N. (2014) Contexto familiar del alumno con dificultades de aprendizaje, percepciones de padres e hijos. *Estudios sobre Educación*, 26, 149-173.
- Saiz, I. y Acuña, N. (s.f.) La didáctica de la matemática como disciplina científica. En Portal Educar, Ministerio de Educación, Presidencia de la Nación. Argentina.

Schoenfeld, A. (1985) *Resolución de problemas matemáticos*. Academic Press. Nueva York.

Suarez W, D. R.; Carlín Ch, E. L.; Sánchez L, M. N. y Ruano A, R. A. (2017). *Revista Científica Dominio de las ciencias*, 3(4),870-901. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6325528>

Zenteno R, F. A. (2017) Método de Resolución de Problemas y Rendimiento Académico en Lógica Matemática. *Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela. Opción*, 33(84), 440-470. <https://www.redalyc.org/pdf/310/31054991016.pdf>

Capítulo 2

El monopolio como estrategia didáctica para el fortalecimiento del pensamiento numérico en el grado tercero

Susan Sareth García Gualdron⁴

José Eriberto Cifuentes Medina⁵

Introducción

El desarrollo del pensamiento matemático es una de las necesidades cognitivas más importantes en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, porque aporta conocimientos, habilidades y técnicas que se relacionan con su entorno inmediato y les proporciona, a su vez, un manejo del lenguaje lógico formal. Ahora bien, los estudiantes de la Institución Educativa la Sabana del municipio de Meta han venido presentando dificultades a lo largo de su formación, específicamente, en el desarrollo del pensamiento matemático. Se ha podido observar que los alumnos no dominan, en grado

4 Magíster en Didáctica de la Matemática, Especialista en Didáctica de la Matemática para la educación Básica, Licenciada en Educación Básica con énfasis en Matemáticas Humanidades y Lengua Castellana; Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Docente Centro Educativo La Sabana Municipio de Puerto Rico Meta. Correo electrónico susan.garcia@uptc.edu.co

5 Investigador Asociado (I) SNCTeI, convocatoria 894/2021. Doctorando en Educación Cohorte XII. Magíster en Educación, Especialista en Evaluación Educativa, Especialista en Pedagogía y Docencia, Licenciado en Teología, Licenciado en Filosofía y Educación Religiosa, Universidad Santo Tomás. Docente Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Orcid ID: <https://orcid.org/0000-0001-5702-620X>. Correo electrónico: joseeriberto.cifuentes@uptc.edu.co

satisfactorio, habilidades para la resolución de problemas en donde se aplique el pensamiento numérico de forma específica como, por ejemplo, el uso de conceptos y relaciones de estructura numérica o el empleo de sistemas simbólicos lógico-matemáticos para la resolución de problemas o fenómenos naturales o sociales.

Tiene como problema central ¿Cómo identificar el pensamiento numérico en los estudiantes de grado tercero del Centro Educativo La Sabana Municipio de Puerto Rico Meta, mediante el Monopolio como estrategia didáctica? El objetivo general fue identificar el pensamiento numérico mediante una estrategia didáctica basada en el juego del Monopolio para estudiantes de grado tercero del Centro Educativo La Sabana Municipio de Puerto Rico Meta. Entre los objetivos específicos se tiene: Determinar en los estudiantes las dificultades que se presentan en el proceso de desarrollo del pensamiento numérico en las competencias comunicación, razonamiento y resolución de problemas; Diseñar una estrategia didáctica basada en el Monopolio y enfocada al pensamiento numérico en cuanto a la competencia comunicativa, razonamiento y resolución de problemas y evaluar los avances en el desarrollo de las competencias del pensamiento numérico de los estudiantes.

La investigación fortalece los métodos de enseñanza y aprendizaje ya que hace uso de temas formales y académicos y los inscribe en la esfera dinámica del juego; esto no quiere decir, de ninguna manera, que la planeación, organización y ejecución de la secuencia didáctica sea menos rigurosa; por el contrario, “para que esta propuesta tenga una validez pedagógica es vital contar con soportes, estudios y análisis que resalten la importancia de los juegos de mesa en la adquisición de destrezas matemáticas en la edad temprana” (2002, p. 291), como apunta Minerva. Los juegos sirven para aclarar conceptos o mejorar destrezas matemáticas, pero deben reunir características como ser sencillos, adecuados al nivel de los estudiantes, tener una finalidad, ser atractivos, motivadores, contar con reglas, ser asequibles.

Para realizar el estado del arte, se tuvo en cuenta la revisión bibliográfica a partir de motores de búsqueda como Google Académico, Redalyc,

Dialnet, Unirioja, entre otros, con investigaciones de 5 años atrás, teniendo en cuenta la restricción de términos de búsqueda en revistas indexadas, y trabajos de grado que potencialmente podían ser incluidos en la revisión de acuerdo con criterios de inclusión (tema) y exclusión (año de publicación, revista no indexada), para su síntesis.

Se siguieron las fases: i) construcción de una matriz de antecedentes, heurística, búsqueda y compilación de las fuentes de información (monografías, artículos, documentos, trabajos de investigación); luego, se identificaron los temas (lectura al hacer uso de la exploración, descripción de los documentos, generación de ideas con la información encontrada, compilación de la información y selección del material); ii) Hermenéutica, se llevó a cabo la lectura, análisis e interpretación de la información. Con la información recolectada, se estableció el estado del arte al tener en cuenta los estudios en el ámbito internacional, nacional y regional de los últimos años.

Dentro de los antecedentes se tiene en la categoría de enseñanza-aprendizaje de matemáticas a escala internacional a Ortiz (2017) afirma que el uso de juegos matemáticos se puede convertir en una estrategia exitosa, produce una mejor actitud, se mejora el rendimiento a causa de mayor interés, los estudiantes aprenden nuevas habilidades y conceptos, entre otros

González (2016) establece que el uso de juegos hace que los estudiantes pierdan el miedo a las matemáticas, se asimilan los conocimientos de forma divertida y creativa, se adquiere rapidez en los cálculos matemáticos mentales, se socializa con los demás jugadores y se establece que el escenario creado por el juego brinda gran versatilidad para el entrenamiento de los estudiantes permitiendo aprender de sus acciones creando espacios de aprendizaje dinámicos.

A escala nacional, Chacón y Fonseca (2017) fijan que una estrategia didáctica tiene un papel esencial en los procesos de enseñanza-aprendizaje y se resalta la importancia de los ambientes de aprendizaje con experiencias significativas. Como docentes se debe reorientar y

reformular a la luz de los retos y desafíos nuevas formas de enseñar. En el trabajo de Vivas et al. (2017) se encontró que los estudiantes manifestaron su interés para interpretar, comprender, argumentar, plantear y formular sus propios procedimientos matemáticos. Por otra parte, Carvajal y Díaz (2020) afirman que se debe enseñar a los estudiantes a analizar los problemas a profundidad, a ser perseverantes, recursivos y estar en constante ejercitación

En la categoría pensamiento numérico se sigue a escala internacional a Blanco et al. (2016) reflexionan sobre cómo las creencias, actitudes y emociones influyen en la adquisición de conocimientos y el desarrollo de habilidades de los estudiantes; así como en la preparación de las clases y la motivación que los maestros logran despertar en sus alumnos hacia el área de matemáticas. Echenique (2016) establece que abordar la enseñanza desde esta perspectiva requiere un proceso lento y continuo que debe iniciarse desde los primeros años de la etapa

A escala nacional, López et al. (2015) determinaron que es necesario observar la interpretación de enunciados del problema por parte de los estudiantes. En cuanto a Guzmán (2018), analiza que es necesario fortalecer las habilidades matemáticas: interpretar, analizar, resolver, probar y comunicar la solución a problemas matemáticos; y, a la vez, afianzar los conocimientos matemáticos. Parra y Pinzón (2017) analizan que la contextualización de los problemas matemáticos, promueven el aprendizaje significativo; debido a que los estudiantes tuvieron la posibilidad de evocar sus conocimientos previos respecto a un tema, realizaron conexiones entre conceptos de diversas áreas y por ende comprendieron la utilidad del conocimiento en situaciones matemáticas de la vida cotidiana.

Cárdenas y González (2017) enfatizan en que el uso apropiado de las TIC sirve como mediador para que los estudiantes aumentaran un nuevo proceso de razonamiento matemático, también permite que los estudiantes se apropien del aula virtual, desarrollando en su mayoría todas las actividades allí propuestas, con autonomía, recursividad, responsabilidad e innovación. Lara y Quintero (2016) resaltan la necesidad de realizar

seguimiento a la implementación de la enseñanza basada en problemas con observaciones en el aula. Por otro lado, Velasco (2019) establece que para fortalecer el pensamiento numérico de los estudiantes es importante diseñar y aplicar actividades significativas desde su entorno. Así mismo se tiene que la resolución de problemas debe ser un acto creativo y no solo cognitivo donde el estudiante logre comprender y descifrar el problema.

En la categoría juegos se menciona a escala internacional a Brito (2020), quien afirma que los juegos de mesa ayudan a adquirir diferentes habilidades y nociones lógico-matemáticas integrándose. Carmona y Cardeñoso (2019) establecen que el docente debe actuar como mediador entre los conocimientos de los estudiantes y las demandas del juego para producir aprendizaje. Mariana (2016) destaca que los juegos están conformados por varios elementos como jugadores, acciones, estrategias, resultados y reglas que son la base para el juego ya que generan pautas de conducta estableciendo el orden y rumbo de los jugadores.

A nivel nacional, Aristizábal et al., (2016), afirman que el uso de juegos es una didáctica en donde la matemática adquiere un nuevo significado para el estudiante. Álvarez (2017) confirma que el uso de los juegos en el aprendizaje de matemáticas es una estrategia que permite adquirir competencias de una manera divertida y atractiva y se logra un aprendizaje significativo. Luis y Mojica (2017) resaltan que la lúdica facilita los procesos de aprendizaje en las diferentes áreas del conocimiento así mismo la comunicación efectiva y los acuerdos deben ser tenidos en cuenta entre padres de familia, profesores y estudiantes para que haya una convivencia de responsabilidad.

A nivel local se hace referencia a Daza et al. (2018). Los autores mencionados establecen que juegos de mesa ayudan a adquirir diferentes habilidades y nociones lógico-matemáticas integrándose, así mismo afirman que el docente debe actuar como mediador entre los conocimientos de los estudiantes y las demandas del juego para producir aprendizaje. En cuanto a las estrategias lúdicas haciendo uso de juegos afirman que mejoran significativamente la predisposición e interés por aprender matemáticas. Se establece que el uso de juegos matemáticos se puede convertir en una estrategia exitosa, produce una mejor actitud, se

mejora el rendimiento a causa de mayor interés, los estudiantes aprenden nuevas habilidades y conceptos, entre otros. Por otra parte, tiene que la resolución de problemas debe ser un acto creativo y no solo cognitivo donde el estudiante logre comprender y descifrar el problema.

Fundamentación teórica

Se realiza un análisis de la literatura que permite fundamentar, desde diversas teorías, los componentes que comprenden la enseñanza de las matemáticas, y que proporcionan perspectivas constructivas para el pleno desarrollo del ser humano. Por lo tanto, se plasman algunas teorías que guían el proceso de investigación al considerar su importancia en la educación.

Enseñanza aprendizaje matemáticas

En esta sección se empezará hablando de las categorías enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, pensamiento numérico y juegos.

De acuerdo con Carretero (1993), en cuanto al constructivismo, establece que “el conocimiento es una construcción del ser humano” (p. 56), es una construcción que se produce día a día en donde el docente debe diseñar estrategias metodológicas pertinentes y reflexionar sobre su práctica para el logro de aprendizajes. Astolfi (2001) afirma que “una práctica pedagógica docente debe tener en cuenta las representaciones del docente en función de su evolución” (p. 35), la relación que se tiene con el saber (conceptos abstractos que construir y reutilizar), la forma en que dirige la clase y las finalidades que asigna para la formación de sus estudiantes. Por otro lado, un docente con fundamentación teoría siguiendo el modelo constructivista implica que se identifique con la práctica pedagógica, que asuma una postura flexible donde pueda aprender, evolucionar y que sea capaz de percibir que como docente necesita estar actualizado y validando su labor.

En la teoría cognitiva del aprendizaje se deben relacionar conocimientos previos con nuevos para lograr la construcción de aprendizajes. El

aprendizaje “es una construcción” (1993, p. 60), como lo afirma Carretero. Entre los precursores de la teoría cognitiva están Piaget, que considera a los sujetos como elaboradores o procesadores de información; es decir: construye a medida que interactúa con la realidad teniendo en cuenta procesos como la asimilación y la acomodación.

Vygotsky: ve al ser humano como un ser cultural donde el medioambiente tiene una gran influencia (zona de desarrollo próximo). Las funciones mentales superiores se dan con la interacción social en palabras de Ausubel. El aprendizaje debe ser una actividad significativa para la persona que aprende (tanto el conocimiento nuevo como el que se ya se posee) (Carretero, 1993, p. 61). Es muy importante comprender el desarrollo cognitivo de los estudiantes y entender su mentalidad en cada etapa para poder favorecer y enriquecer su aprendizaje. El ritmo de aprendizaje de los niños es asombroso. En sus primeros años de vida se produce un desarrollo de su inteligencia y capacidades mentales, como la memoria, el razonamiento, la resolución de problemas o el pensamiento (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 72).

La teoría de Piaget mantiene que los niños pasan a través de etapas específicas conforme su intelecto y capacidad para percibir las relaciones maduras. Estas etapas del desarrollo infantil se producen en un orden fijo en todos los niños, y en todos los países. No obstante, la edad puede variar ligeramente de un niño a otro. Se analiza la siguiente etapa según Piaget (1952) debido a que los estudiantes objeto de estudio de esta investigación se encuentran en las edades de los 11 a 13 años:

En la etapa de operaciones concretas de 7 a 11 años aproximadamente, los niños en este período del desarrollo empiezan a pensar de forma más lógica, sin embargo, su pensamiento aún puede ser muy rígido. Suelen tener limitaciones con los conceptos abstractos e hipotéticos. En esta fase, los niños empiezan a ser menos egocéntricos y son capaces de pensar, sentir y ponerse en el lugar de otras personas. Los niños en la etapa operativa concreta también empiezan a entender que sus pensamientos son solamente para ellos y que no todo el mundo necesariamente comparte sus pensamientos, sentimientos y opiniones. “Adquieren el concepto de

conservación de la materia por lo cual ya son capaces de inferir que la cantidad arcilla es igual independiente de su forma” (Piaget, 1952).

Por otra parte, la educación es un “proceso humano y cultural complejo” como lo establece León, (2007, p. 1) la educación es un intento humano racional, intencional de concebirse y perfeccionarse en el ser natural total. La educación transforma y potencia al hombre natural para hacer emerger un hombre distinto, lo hace sabio, inteligente y conocedor. Por otro lado, la educación consiste en la creación y desarrollo evolutivo e histórico de sentido de vida y capacidad de aprovechamiento de todo el trabajo con el que el hombre se esfuerza y al cual se dedica, durante los años de su vida. Para Bruner (1990), “la educación es una empresa compleja” (p. 65). Adaptar una cultura a las necesidades de sus miembros. La educación y la escuela para Bruner son espacios de creación de conocimiento y representación genuina de la cultura, son elementos claves en la psicología.

Por otro lado, es necesario tener en cuenta la pedagogía que es la ciencia que estudia la educación como fenómeno socio cultural. La pedagogía orienta las acciones educativas teniendo en cuenta técnicas, principios y métodos. La pedagogía es una herramienta de la planificación educativa. De acuerdo con Calzadilla (2004). La pedagogía es el arte de enseñar ciencia particular, social o del hombre, cuyo objeto es el descubrimiento, apropiación cognoscitiva y aplicación adecuada y correcta de leyes y regularidades que condicionan los procesos de aprendizaje, conocimiento, educación y capacitación (p. 140).

Para Sancén (1997, p. 285), “la pedagogía tiene mucho más de arte que de ciencia”, es decir que acepta sugerencias y técnicas, pero que nunca se domina más que por el ejercicio mismo de cada día, puesto que en la mayoría de los casos esto depende más de la intuición. La pedagogía se ocupa en su esencia del conocimiento, en el tiempo y en el espacio, de las acciones imprescindibles y necesarias. Por otra parte, Nassif (1974, p. 89) establece que “la pedagogía es una ciencia en sentido amplio”, tiene por *objeto* la educación, como una tarea y como una realidad humana, individual y social”. Meumann (1960) considera que “la pedagogía es una ciencia sistemática pues tiene un sistema dotado de unidad, dominado

de un modo sistemático por un concepto superior” (p. 62); se menciona que la educación posee su propia base empírica en las investigaciones pedagógicas empíricas y experimentales.

Cabe resaltar que otro aspecto para tener en cuenta es la didáctica que es la ciencia y arte de enseñar ya que como ciencia investiga y experimenta técnicas de enseñanza de acuerdo con diferentes disciplinas y es arte al establecer normas de comportamiento didáctico, científico y empírico. “La didáctica no se puede separar de la teoría y la práctica, deben estar fusionadas para una mayor eficacia” como lo establece (Vásquez, 2017, p. 36).

La didáctica, como lo establecen Abreau et al. (2017, p. 84), tiene diferentes significados y ha sido definida como “arte de enseñar, aprendizaje estudio científico, estudio de la educación intelectual del hombre y del conocimiento sistemático, técnica, procedimiento, disciplina pedagógica, conjunto de técnicas de enseñanza,” entre otros. Comenio (2003, p. 87) la definió como “el artificio fundamental para enseñar todo a todos”. Zabalza (2017) retoma el análisis de la enseñanza y el aprendizaje como proceso asociado a la didáctica y la define como ese “campo de conocimientos, de investigaciones, de propuestas teóricas y prácticas que se centran en los procesos de enseñanza y aprendizaje” (p. 180).

Por otro lado, en cuanto a la enseñanza que es el resultado de una relación docente-estudiante, de acuerdo con contenidos y estrategias didácticas, de ahí radica la importancia de ser docente con el acompañamiento al estudiante en su aprendizaje. Por otra parte, una de las tareas del docente es ofrecer procesos y estrategias para que el estudiante tenga acceso a la información, comprensión y autoevaluación para aprender y desaprender para que actúen de manera autorregulada y sean conscientes de su rol.

De acuerdo con Pico, el aprendizaje se enmarca en una “agrupación de procesos que permiten adaptar hábitos, habilidades o acciones desde un procedimiento previo de razonamiento” (2015, p. 48). El aprendizaje potencia el conocimiento tiene inmerso el significado o sentido, se puede transmitir a otras personas siendo atemporal y espacial. Otras definiciones

de aprendizaje apuntan a ser un proceso de cambio en el comportamiento de una persona que se genera a partir de la experiencia.

Gómez establece que “el aprendizaje y la enseñanza se da continuamente a través de toda la vida” (2017, p. 69), van unidos como una estructura. En donde se tienen como elementos el docente, el estudiante, el contenido y las variables externas como el aula. Todos los elementos tienen una influencia dependiendo de su interrelación. Por ejemplo, el estudiante posee la capacidad, motivación para aprender conocimientos previos, disposición e interés. En cuanto al conocimiento es la aplicabilidad práctica. El aula es la esencia del proceso educativo y el docente juega un papel importante teniendo en cuenta su actitud, capacidad innovadora y compromiso.

Cabe resaltar que las estrategias pedagógicas, de acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (2006), se deben incorporar para que “promuevan el aprendizaje de las matemáticas como una actividad humana culturalmente, mediada y de incidencia en la vida social, cultural y política de los ciudadanos” (p. 48). Para ello, es indispensable tener en cuenta las vivencias de los niños, sus aprendizajes previos como punto de partida para construir conocimiento.

Monereo (2007, p. 501), establece que “las estrategias de aprendizaje son un proceso de toma de decisiones en donde se seleccionan conocimientos procedimentales, conceptuales y actitudinales para dar cumplimiento a un objetivo”. Por otra parte, Díaz (2017, p. 98), señala que “son procedimientos que un aprendiz emplea de manera consciente y controlada para aprender de manera significativa”.

Es de anotar, que un docente debe contar con diferentes estrategias de aprendizaje que aborden tanto la cognición como la metacognición para aprender por sí mismo en donde aprenda a que aprender y aprenda a pensar lo que lleva a la autonomía. Por lo tanto, como docentes se debe enseñar a los estudiantes a modificar sus acciones y enseñarle a evaluar su proceso de aprendizaje, a anticipar cambios en el aula que le permitan modificar y generar las competencias y hacer uso extensivo, de ser posible,

de los recursos tecnológicos. En cuanto a los contenidos se deben enfocar para que sean útiles y prácticos para la vida de los estudiantes, deben ser experiencias significativas. Como lo establecen Chaves et al. (2015), “el papel de los docentes es fundamental para la autorregulación cuando el estudiante solicita apoyo” (p. 70).

No se puede dejar de lado para fortalecer el pensamiento numérico la evaluación. Más allá que una rendición de cuentas. Díaz Barriga (2010) plantea un significado de tipo constructivista sobre la evaluación, más centrado en su importancia y su función: “La actividad de evaluación es ante todo compleja, de comprensión y reflexión sobre la enseñanza, en la cual al profesor se le considera el protagonista y responsable principal” (p. 70). La evaluación aporta un mecanismo de autocontrol para conocer las causas de problemas y establece la forma en que los significados son contruidos por los estudiantes.

Se resalta que la evaluación del proceso de aprendizaje y enseñanza es una tarea necesaria, en tanto que aporta al profesor un mecanismo de autocontrol que la regula y le permite conocer las causas de los problemas u obstáculos que se suscitan y la perturban. Desde una perspectiva constructivista la evaluación de los aprendizajes de cualquier clase de contenidos debería poner al descubierto lo más posible todo lo que los alumnos dicen y hacen al construir significados valiosos a partir de los contenidos curriculares. De igual manera, se debe procurar obtener información valiosa sobre la forma en que dichos significados son contruidos por los alumnos de acuerdo con criterios estipulados en las intenciones educativas (Díaz Barriga, 2010, p. 72).

Para Cerpe (1984), citado por Rojas (2002, p. 160), señala que “la evaluación escolar es un proceso educativo formativo en sí mismo, que tiene por objetivo valorar la acción educativa centrada en el alumno”. De acuerdo con Perrenoud (2008, p. 47) en cuanto a la metodología de la enseñanza y de los resultados de los estudiantes “la evaluación es entendida como un conjunto de actividades para identificar errores, comprender causas y tomar decisiones frente a estos hallazgos”. Por otra parte, Sanmartí (2007, p. 15), la evaluación además de medir resultados condiciona “¿qué

se enseña? y ¿cómo? y especialmente ¿qué aprenden los estudiantes? y ¿cómo lo hacen?”; por lo tanto, no se puede considerar la evaluación de manera separada de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Por lo tanto, se deduce que una de las funciones de la evaluación es asegurarse de que el futuro estudiante tiene unos conocimientos previos que le permitirá adquirir nuevos. Algunos docentes a la hora de evaluar se centran en el grado de adquisición de competencias, otros en el logro de objetivos y otros en los contenidos. Actualmente se cuenta con indicadores para realizar la evaluación, los cuales pueden estar graduados de acuerdo con el nivel de competencia de los estudiantes desde excelente hasta insuficiente. Es de anotar que la evaluación forma parte del proceso enseñanza-aprendizaje y es un recurso metodológico por su valor como motivador y puede contribuir a que el docente mejore su práctica docente, si es necesario hacer cambios si hay errores en la comprensión de los estudiantes; es decir, actúa como retroalimentación sobre la calidad de su propio trabajo.

Tyler (1950) citado por Escobar (2014, p. 45), establece que “la evaluación es un proceso para determinar hasta qué punto los objetivos educativos se han alcanzado comparando lo esperado con lo obtenido”, de esta manera se pueden tomar decisiones basándose en la congruencia entre los objetivos y los resultados. Por lo tanto, como ventajas del método expuesto por Tyler se puede mencionar que la evaluación se convierte en un proceso formal, la planificación se lleva a cabo por objetivo de manera racional y sistemática. Como desventajas se tiene que se les da mucha importancia a los datos, existen limitaciones técnicas y se dejan de lado habilidades para evaluar acciones concretas. Así mismo se ve la evaluación como un proceso terminal y no se le da un juicio sobre el mérito o valor al resaltar la parte sumativa descuidando el contexto.

Pensamiento numérico

En cuanto a la matemática, de acuerdo con Ortiz (1998) “es un método, un arte y lenguaje; es un cuerpo de conocimiento con contenido propio” (p. 43); para el aprendizaje de las matemáticas existen estrategias

metodológicas que ayudan a que las estrategias didácticas creadas funcionen de manera exitosa. Por lo general, las investigaciones en educación matemática se centran en los procesos cognitivos de los estudiantes y los aspectos curriculares de la enseñanza y el aprendizaje; sin embargo, no se reconoce el papel del profesor en el aprendizaje. A continuación, se referencian los estudios que privilegian la importancia del docente.

Las matemáticas están presentes en la vida cotidiana y su estudio favorece el desarrollo del razonamiento y el pensamiento analítico. Las matemáticas ayudan a descomponer argumentos o premisas para llegar a conclusiones beneficiando a los estudiantes ya que logran tener agilidad mental mediante el pensamiento racional. Si se hace uso del pensamiento analítico se desarrolla la habilidad de investigar y conocer mejor el mundo que nos rodea. Con las matemáticas se aprende a ordenar ideas y a expresarlas de forma correcta y se enseña a pensar, además este campo se relaciona con otros ámbitos como la tecnología.

Los contenidos matemáticos que se enseñan en Colombia en ocasiones se alejan de la vida cotidiana de los estudiantes, pues los asuntos que les interesan no son abordados en el aula de clase. Por otro lado “los docentes tienen capacitaciones limitadas sobre cómo satisfacer las necesidades educativas de los estudiantes” (Qualificar, 2012, p. 1). Esto sugiere que es necesario que los docentes se capaciten sobre la manera de motivar el autoaprendizaje de los estudiantes para que puedan adquirir las destrezas que requieren.

Cabe resaltar que, en cuanto a las competencias matemáticas, la UNESCO (1999), citada por Argudín (2015), define el término de competencia como el conjunto de “comportamientos socioafectivos, y habilidades cognoscitivas, psicológicas sensoriales y motoras que permiten llevar a cabo adecuadamente un desempeño, una función, una actividad, o una tarea” (p. 12).

El Ministerio de Educación a través del Sistema nacional de evaluación de la calidad de la educación (Sinec), ha expandido el uso generalizado

del concepto de competencia a todos los ámbitos de la educación, con las pruebas de Estado “ICFES”, Saber y Saber Pro ha establecido el desarrollo de competencias matemáticas como el eje transversal en los estándares básicos de calidad; abarcando mucho más que el “saber hacer en contexto” (MEN, 2006, p. 48). De este modo se define la competencia matemática como el “conjunto de conocimientos, habilidades, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores” (MEN, 2006, p. 49).

En cuanto al componente numérico el Ministerio de Educación Nacional (2017, p. 3) establece que corresponde a aspectos asociados a los números y la numeración, al significado y la estructura del sistema de numeración, las operaciones propiedades y relaciones entre ellas, el reconocimiento de patrones y su comportamiento, la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia, las convenciones y esquemas o representaciones.

Por lo tanto, el estudiante debe de acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional, (2017):

Reconoce el uso de números naturales en diferentes contextos. Reconoce equivalencias entre diferentes tipos de representaciones relacionadas con números. Construye y describe secuencias numéricas Usa fracciones comunes para describir situaciones continuas y discretas.

El presente trabajo tendrá en cuenta las competencias matemáticas en comunicación, razonamiento, planteamiento y resolución de problemas. En cuanto a la comunicación se tendrá en cuenta de acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (2017) la capacidad para expresar ideas, interpretar, usar diferentes tipos de representación, describir relaciones matemáticas, describir situaciones o problemas usando el lenguaje escrito, concreto, pictórico y gráfico. Describir cadenas de argumentos orales y escritos, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones, interpretando lenguaje formal.

Es necesario tener en cuenta que, frente a los problemas con las matemáticas, las matemáticas se caracterizan por su alto grado de abstracción, razonamiento inductivo, estructuración del conocimiento e intuición espacial. Según Fernández (1997), “se deben tener presentes las destrezas cognitivas y enseñar las matemáticas haciendo uso de situaciones de la vida cotidiana” (p. 47). De acuerdo con Ortiz (1998), “la matemática es un método, arte y lenguaje; se debe hacer uso de estrategias metodológicas y didácticas para su aprendizaje” (p. 84).

De acuerdo con lo aseverado por Gómez (2007), “los docentes de matemáticas deben ser eficaces y eficientes, tener conocimientos, capacidades, formarse de manera continua y poseer un carácter integrador” (p. 1). Como lo establecen Hernández et al., (2017), “los estudiantes acumulan las falencias desde la primaria hasta llegar al bachillerato afectando la educación superior, llevando al fracaso en matemáticas” (p. 81). Se establecen varias razones para este fracaso, por ejemplo, la asignatura se percibe como aburrida, se cree que no aporta para la vida diaria, hay rechazo generalizado, apatía y ansiedad en las clases todo lo cual que lleva a los estudiantes a obtener un bajo rendimiento. Entre las razones que dan los estudiantes está la “falta de compromiso con el aprendizaje de las matemáticas, el no estar atento a las clases y la falta de hábitos de estudio para las matemáticas” (Sepúlveda et al., 2016, p. 115).

Por otro lado, los problemas en el aprendizaje de las matemáticas tienen la dificultad para el razonamiento, uso o formulación de definiciones, clasificación y demostración. Es necesario analizar los diferentes procesos de razonamiento de los estudiantes, y sus niveles. De acuerdo con Plaza (2016), “los docentes deben conocer la forma en que los estudiantes abordan los problemas matemáticos, las estrategias que usan y los conceptos erróneos que les impiden realizar las tareas asignadas” (p. 180). Entre las dificultades encontradas están la falta de comprensión del lenguaje matemático, la ausencia de conceptos matemáticos y se señalan como causa la interpretación de un contexto en donde el estudiante tiene dificultades en la lectura, su interpretación y entendimiento, la disponibilidad para investigar, la falta de empeño o compromiso y se resalta como punto fundamental los aprendizajes deficientes en cursos

previos, lo que genera que el estudiante pierda interés por la falta de bases necesarias para la comprensión de los procesos matemáticos.

Juegos

Algunos juegos tienen como finalidad “inventar una atmósfera apropiada para ejecutar una acción” (Huizinga, 1972, p, 87), y desarrollar la creatividad, que es necesaria para el disfrute de la experiencia lúdica, representa un gran impulso a las cualidades subjetivas (imaginación, memoria) y volitivas (iniciativa, independencia) del niño transformándose a la larga en un estímulo de las funciones vitales. De acuerdo con Huizinga (1972), “se tienen diferentes clases de juego como el juego y resolución de tensión que tiene el origen en la competencia” (p. 90); el juego de simple ejercicio o juegos funcionales o sensorios motores para explorar; el juego simbólico para evocar objetos y el juego de reglas para el proceso de sociabilización.

Los juegos cooperativos: fomentan la aproximación y entendimiento entre jugadores. La cooperación se relaciona con la comunicación, cohesión, autoestima.

Los juegos lúdicos. Se constituyen como actividades de goce y esparcimiento por medio de las cuales se pueden abordar a los niños para enseñarles una temática.

Los juegos matemáticos. Son una herramienta ideal para enseñar matemáticas a los niños, pues resulta una forma de aprendizaje innovadora y atractiva para ellos.

Los juegos de conocimiento contienen algo de matemática y se enfocan en una enseñanza activa, creativa y participativa.

Los jugos de estrategias el jugador debe elegir una de las posibilidades que se ofrecen.

Los juegos de azar se caracterizan por tener un desarrollo aleatorio.

Leyva (2005, p. 30) hace referencia a una definición de juego como una característica inherente a la naturaleza humana, su significado en la “palabra latina *iocus*, reconocida como broma, chanza, gracia, juerga, chiste y su forma adjetivada está representada por *ludus*, *ludicrum*, *ludicrus* o *ludicer*, que significan diversión o entretenimiento”. Huizinga (1972) sostiene en su obra *Homo Ludens* que “el juego es una acción u ocupación libre, que se desarrolla dentro de unos límites temporales y espaciales determinados” (p. 158). Además de esto, durante el juego reina el entusiasmo y la emotividad, ya sea que se trate de una simple fiesta, de un momento de diversión, o de una instancia más orientada a la competencia. “La acción por momentos se acompaña de tensión, aunque también conlleva alegría y distensión”. (Huizinga, 1972, p. 159).

De acuerdo con la UNESCO (1980, p. 1) “todos los niños del mundo juegan, y esta actividad es tan preponderante en su existencia que se diría que es la razón de ser de la infancia”. Efectivamente, el juego es vital; condiciona un desarrollo armonioso del cuerpo, de la inteligencia y de la afectividad. Para Benítez (2009, p. 58), el juego es una actividad propia del ser humano y se presenta en todos los niños, aunque su contenido varía debido a las influencias culturales que los distintos grupos sociales ejercen. La relación entre el juego y el aprendizaje se da para que las clases sean más amenas y atractivas en temas que no le llaman la atención. Se puede establecer que el juego se ve como una canal de expresión donde los estudiantes pueden descargar sentimientos positivos o negativos lo que contribuye al equilibrio emocional. Así mismo se conocen los comportamientos de los estudiantes y se pueden encauzar comportamientos. Mediante el uso del juego se pueden crear vínculos de afecto y confianza.

El juego es una actividad no orientada y lúdica, Cagigal (1999, p. 1) define el juego como “una acción libre que se sale de la vida habitual y hace uso de reglas y una limitación temporal y espacial”. Para Guy (196, p. 66) “el juego proporciona placer moral del triunfo que aumenta la personalidad”. Entre las ventajas de los juegos se pueden señalar de acuerdo con Caneo (1966, p. 28) “romper la rutina dejando de lado la enseñanza tradicional, desarrollar capacidades, aumentar la disposición para el aprendizaje, permite la socialización, fomenta la observación, atención, capacidades lógicas, entre otras habilidades”.

El juego se ha usado como técnica de aprendizaje a través de la historia, resaltando su importancia como promover el trabajo en equipo, favorecer la sociabilidad, desarrollar la creación, crítica y comunicación. Dewey (1989, p. 105) resalta que “en Grecia se ejercitaba a los niños haciendo uso de juegos educativos. Platón pensaba que la educación se fundamentaba en el uso del juego; Las primeras escuelas romanas recibieron el nombre de ludí (juego)”.

Rojas et al., (2009, p. 59) sostienen que “el juego es esencial en el acercamiento y conocimiento de su medio”. Es de anotar que el juego es un medio de apoyo de los conocimientos y actúa como un refuerzo para el desarrollo de capacidades tanto intelectuales como morales fomentando prácticas de amor y respeto. Piaget (1952, p. 63) toma el juego como una “herramienta pedagógica para asegurar el éxito de la enseñanza en matemáticas”. En sus observaciones destaca la importancia del juego en los procesos de desarrollo. Desarrolló los estadios cognitivos en donde se evidencian diversas formas de juego a lo largo del desarrollo infantil y su influencia en las estructuras cognitivas.

Vygotsky (1988, p. 78) establece que lo que caracteriza al juego es que se “da inicio a un comportamiento conceptual o guiado por las ideas”. La relación entre el juego con el desarrollo y el aprendizaje es estrecha ya que se potencia el desarrollo físico y psíquico. El juego como una herramienta pedagógica brinda al estudiante experiencias en el aula cumple una función muy importante ya que a través de esté el sujeto va construyendo una forma de enfrentar los retos propuestos y en esta construcción adquiere la capacidad de convicción, crítica y acción social, autónoma con sus compañeros, por tal motivo se abren espacios para que se incorporen las prácticas que desde temprana edad han aprendido en su ambiente familiar, escolar y social, donde de manera dinámica afianzan sus emociones y controlan sus actuaciones.

Al ofrecerle al estudiante estrategias innovadoras en el aula de matemáticas se estimula y se generan altos niveles de disposición hacia la enseñanza-aprendizaje de matemáticas. Los juegos pueden ser útiles para presentar contenidos matemáticos despertando la motivación y el interés,

desarrollando la creatividad y habilidades para resolver problemas. El juego es un recurso didáctico para un aprendizaje significativo, pero se debe tener presente que sea sencillo de comprender, provocar interés, estar acorde con el nivel evolutivo, ser agente socializador, adaptarse a diferentes individuos. Frente a la resolución de problemas matemáticos haciendo uso del juego se puede hablar de la lógica que estudia la forma de razonamiento, por medio de reglas y técnicas se determina si un argumento es válido. De manera implícita el juego invita a los estudiantes a razonar.

La teoría de los juegos. Se conoce que fue desarrollada en sus comienzos como una “ayuda para comprender el comportamiento de la economía”, pero esta teoría se sigue utilizando actualmente en variadas ciencias y campos, desde la biología a la filosofía y la academia. (Rubinstein, 2013, p. 25). La teoría de juegos se considera un área de la matemática aplicada, que utiliza modelos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos (los llamados juegos) y llevar a cabo procesos de decisión. Quienes la han identificado e investigado, estudian las estrategias óptimas, así como el comportamiento previsto y observado en diversas personas en juegos. “Tipos de interacción aparentemente distintos pueden, en realidad, presentar estructuras de incentivos similares y, por lo tanto, representar conjuntamente un mismo juego”. (Rubinstein, 2013, p. 25). Pero fue a partir de los trabajos de John von Neumann y Oskar Morgenstern, antes y durante la Guerra Fría que la teoría de los juegos experimentó un crecimiento más significativo y se formalizó por primera vez, cuando se aplicó a la estrategia militar en particular a causa del concepto de destrucción mutua garantizada. (Rubinstein, 2013, p. 26).

Desde los años 60, de acuerdo con Zapardiel (2014) dicha teoría se ha aplicado a la conducta animal, incluyendo el desarrollo de las especies por selección natural. Pero a raíz de juegos como “el dilema del prisionero, en los que el egoísmo generalizado perjudica a los jugadores, la teoría de juegos se ha usado en ciencia política, ética y filosofía” (p. 39). Finalmente, ha atraído también la atención de los investigadores en informática, usándose en inteligencia artificial y cibernética.

Representación de juegos. Los juegos estudiados por la teoría de juegos están bien definidos por objetos matemáticos. Un juego consiste en un conjunto de jugadores, un conjunto de movimientos (o estrategias) disponible para esos jugadores y una especificación de recompensas para cada combinación de estrategias.

Hay dos formas comunes de representar a los juegos:

Forma normal de un juego. La forma normal o estratégica de un juego es una matriz que muestra los jugadores, las estrategias, y las recompensas. Hay dos tipos de jugadores; uno elige la fila y otro la columna. Cada jugador tiene dos estrategias, que están especificadas por el número de filas y el número de columnas.

Las recompensas se especifican en el interior. El primer número es la recompensa recibida por el jugador de las filas (el Jugador 1 en nuestro ejemplo); el segundo es la recompensa del jugador de las columnas (el Jugador 2 en nuestro ejemplo). Si el jugador 1 elige arriba y el jugador 2 elige izquierda entonces sus recompensas son 4 y 3, respectivamente. Cuando un juego se presenta en forma normal, se presupone que todos los jugadores actúan simultáneamente o, al menos, sin saber la elección que toma el otro. Si los jugadores tienen alguna información acerca de las elecciones de otros jugadores el juego se presenta habitualmente en forma extensiva. También existe una forma normal reducida. Ésta combina estrategias asociadas con el mismo pago. (Guevara, 2013, p. 1).

Tabla 1. *Juego en forma normal*

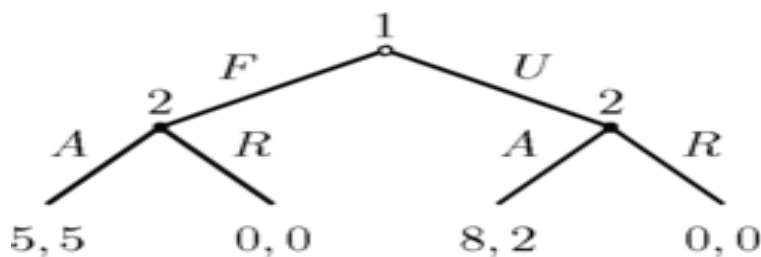
	El jugador 2 elige izquierda	El jugador 2 elige derecha
El jugador 1 elige arriba	4, 3	-1, -1
El jugador 1 elige abajo	0, 0	3, 4

Fuente: (Guevara, 2013).

La representación de juegos en forma extensiva modela juegos con algún orden que se debe considerar (véase Figura 1). Los juegos se presentan como árboles. Cada vértice o nodo representa un punto donde el jugador toma decisiones. El jugador se especifica por un número situado junto al vértice. Las líneas que parten del vértice representan acciones posibles para el jugador. Las recompensas se especifican en las terminaciones de las ramas del árbol.

Representación de un juego normal (fuente: la teoría del juego)

Figura 1. *Forma extensiva de un juego*



Fuente: (Guevara, 2013).

La teoría de juegos tiene la característica de ser un área en que la sustancia subyacente es principalmente una categoría de matemáticas aplicadas, pero la mayoría de la investigación fundamental es desempeñada por especialistas en otras áreas. En algunas universidades se enseña y se investiga casi exclusivamente fuera del departamento de matemática. “Esta teoría tiene aplicaciones en numerosas áreas, entre las cuales cabe destacar las ciencias económicas, la biología evolutiva, la psicología, las ciencias políticas, el diseño industrial, la investigación operativa, la informática y la estrategia militar” (Guevara, 2013, p. 1).

Según Martínez (2016, p. 58), para los niños “jugar es la forma de relacionarse con el mundo”. Experimentan y aprehenden conocimientos a través de las experiencias resultantes del juego. Manifiesta además la psicóloga y pedagoga, que la imaginación y los juegos que realizan los niños les ayudan a crear asociaciones que les permiten entender cómo funciona

la realidad en la que viven. A través del juego practican las relaciones sociales, el conocimiento del medio y la inteligencia emocional. Pero no sólo eso. Jugando los niños aprenden a conocer su cuerpo, desarrollan sus habilidades y destrezas motoras, su motricidad fina, su lenguaje y su creatividad.

El juego en la metodología Montessori, de acuerdo con Martínez (2016), permite al niño “desarrollar su independencia, tomar decisiones propias e ir paulatinamente desarrollando su capacidad para enfrentarse a problemas y encontrar la solución por sí mismo” (p. 60). Pero está sucediendo algo que, aunque se esperaba, no se creía que afectaría tanto el aprendizaje, y es que, con la era tecnológica infestada de aparatos electrónicos, el juego didáctico y activo puede pasar a un segundo plano. Hoy muchos niños se divierten con dispositivos electrónicos, videoconsolas, televisores. Como resultado de este nuevo estilo de vida, se generan dinámicas familiares y sociales muy poco sanas. Es nuestra responsabilidad proporcionarles a los niños un entorno que favorezca el juego. Así le estaremos dando la oportunidad para que desarrollen capacidades primordiales para tener una vida adulta plena.

Según lo establece Martínez (2016), “María Montessori daba mucha importancia al juego como estrategia de aprendizaje para lo cual ideó materiales didácticos, y propuso mobiliario adecuado al tamaño de los niños” (p. 61). También resaltó la importancia de la participación de los padres en el proceso educativo de los hijos. Por su parte se puede evocar que el cerebro se desarrolla con la estimulación, y el juego proporciona parte de esa estimulación. Algunos neurocientíficos sugieren que el juego podría ayudar al importante proceso de eliminación o poda de la sinapsis cerebral durante la niñez

Por medio del juego los niños experimentan de manera segura mientras aprenden acerca de su entorno, prueban nuevas conductas, resuelven problemas y se adaptan a nuevas situaciones. También según Montessori el juego les ayuda a cumplir con las funciones cognitivas pre-lingüísticas. “El objetivo de estas destrezas es desarrollar el uso de los conceptos sensoriomotores de: Contacto visual, Permanencia de objetos, Lapso de

atención, Medios fines, Imitación, Juego simbólico, Atención visual y auditiva, Causa y efecto, Percepción de espacio uso de objetos” (Guevara, 2013)

De acuerdo con Ferrari, (s.f.) “ha existido cambios en la concepción de la estrategia: un aprendizaje de la Teoría de Juegos”, lo cual explica el autor que consiste en que definimos a un comportamiento como estratégico cuando se adopta teniendo en cuenta la influencia conjunta sobre el resultado propio y ajeno de las decisiones propias y ajenas. Los resultados que obtiene cada empresa dependen no solo de su decisión sino de las decisiones de las demás.

Juegos de mesa. Los juegos de mesa vienen desde las primeras civilizaciones, pero hasta el siglo XX, en los años 90, se dieron a conocer de manera comercial. “En Mesopotamia se jugaba con fichas 2000 años antes de Cristo, se han encontrado vestigios de juegos que usaban los antepasados” (King, 2006, p. 5). De acuerdo con Palomar (2012), “el juego más antiguo conocido es el Senet con el uso de tableros y fichas” (p. 48). Se han encontrado en tumbas de faraones, no se conserva ningún vestigio de las reglas del juego. Entre otros juegos está el Juego real de Ur, hallado en el desierto de Nasiriya, el go ajedrez oriental de China. El juego de mancala practicado en África con hileras de agujeros. Surge el chaturanga (indio), chatranj de Persia y luego el ajedrez. El alquerque y juego de las damas con fichas para dos jugadores. Luego el domino que surgió entre el 100 y 1100 d. C en China. El parchís de la India con el uso de dados. El juego de la oca que se usaba como mapa simbólico. El Monopolio en 1935 y otros que son derivados de la revolución industrial como Stratego en Holanda, Scrabble y Cluedo en 1948, Risk 1957, Mastermind 1970, Trivial Pursuit 1979, Party, Tabú, Twister, Tragabolas, Dungeons and Dragons, Civilization, juegos de cartas como Magic, Stone Age 7 (2008), Wonders (2010), Cartas de ciudadelas (2000), Mil (2011), entre otros (Palomar, 2012).

Como lo establecen Cruz y Hernández (2016), “son practicados sobre una mesa u otro objeto similar, y es jugado por una o, más personas estas se ubican alrededor” (p. 84). Se hace uso de razonamiento táctico,

estratégico, coordinación, memoria, deducción. Ejemplos de juego de mesa están el bingo, parques, dominó, Uno, escalera, stop, ajedrez, entre otros.

Los juegos de tablero se clasifican de la siguiente manera. Elementos usados: cartas, tablero, miniaturas, juegos de rol. Clasificación por mecánicas: Abstracto Sin tema definido. Party game, su objetivo es la diversión. Eurogame, son juegos competitivos. Ameritrash con alta dosis de azar. Wargame juegos de guerra y juegos cooperativos (Palomar, 2012, p. 47).

Enseñanza-aprendizaje de matemáticas en primaria a través del juego.

De acuerdo con García (2013), el juego y las matemáticas se caracterizan por la finalidad educativa, mientras que las matemáticas les dan a los estudiantes un conjunto de instrumentos para potenciar estructuras mentales y les da la oportunidad de explorar y actuar en la realidad, los juegos potencian el razonamiento, la crítica, actividad mental lo que favorece el aprendizaje de las matemáticas.

La importancia de los juegos en matemáticas es mantener a los estudiantes interesados y motivados en el tema a desarrollar, el objetivo es desarrollar la mente y potencializar la parte intelectual, sensitiva, afectiva de manera armoniosa. Existen diferentes tipos de juegos matemáticos como los de pre-co y post-instrucción; juegos de conocimiento y estrategia; juegos de lápiz y papel, fichas; juegos de numeración cálculo, operaciones, criptogramas, series, adivinanzas, juegos aritméticos manipulativos y lógicos. Así mismo se puede hablar de los juegos prácticos, simbólicos, juegos de reglas, juegos sensoriales, motores, intelectuales, juegos creativos, didácticos.

Los juegos son una estrategia efectiva de aprendizaje si se organizan con un propósito claro y de manera organizada, se debe tener en cuenta los objetivos, métodos de enseñanza e indicaciones de organización escolar. Para que un juego tenga éxito es necesario tener en cuenta como lo establece Cruz (2013. P. 64) “la delimitación de los objetivos que persigue el

juego, la metodología, instrumentos, materiales, roles, responsabilidades, tiempo, reglas, entre otros”.

El juego se ha usado como técnica de aprendizaje a través de la historia, resaltando su importancia como promover el trabajo colaborativo, favoreciendo la sociabilidad, desarrollar la creación, crítica y comunicación. Dewey (1989, p. 105) resalta que en Grecia se ejercitaba a los niños haciendo uso de juegos educativos. Rojas et al. (2009; 58) puntualizan que “el juego es esencial en el acercamiento y conocimiento de su medio”. Es de anotar que el juego es un medio de apoyo de los conocimientos y actúa como un refuerzo para el desarrollo de capacidades tanto intelectuales como morales fomentando prácticas de amor y respeto. Piaget (1952; 54) toma “el juego como una herramienta pedagógica para asegurar el éxito de la enseñanza en las matemáticas”. Desarrolló los estadios cognitivos en donde se evidencian diversas formas de juego a lo largo del crecimiento infantil y su influencia en las estructuras cognitivas.

La UNICEF (2018, p. 1) resalta la importancia del aprendizaje en la primera infancia como parte de la segunda meta del objetivo de desarrollo sostenible cuatro (4) de su agenda internacional y que busca asegurar que para el 2030 que los niños y niñas tengan acceso a servicios de atención y desarrollo para preparados para la enseñanza primaria mediante una educación de calidad que asegure la eficacia de los sistemas educativos. Sin embargo, en este aspecto es posible que los programas no den los resultados requeridos si no se establecen programas que satisfagan las necesidades de los niños, por lo que métodos de enseñanza y aprendizaje adecuados plantean el reto de la planificación escolar alrededor de estrategias efectivas. Un elemento de vital importancia en estas estrategias es el aprendizaje a través del juego o aprendizaje lúdico como herramienta en la expansión y fortalecimiento de la educación básica.

Villalustre (2015, p. 27), resalta que durante las últimas décadas la tendencia a hacer uso de aquellos factores motivadores propios de los escenarios del juego para luego “trasladarlos a espacios formales y contextos de origen no tan lúdico han permitido involucrar a los individuos en procesos complejos y motivarlos a establecer un vínculo con la adquisición de

nuevos aprendizajes de distinto tipo”. Este movimiento denominado *gamificación* (de su traducción del inglés), ha ayudado a convertir a los individuos en jugadores activos, enfrentándose a retos atractivos y con un componente emocional, aumentando sus compromisos frente a las tareas propuestas e incrementando su participación en distintas tareas para ser más competitivos al generar estrategias adecuadas para la resolución de las actividades propuestas.

Ahora bien, el juego como concepto tiene varias aproximaciones a nivel del aprendizaje, como lo establecen Gómez, Molano, y Rodríguez (2015, p. 55), “el juego es una actividad que se utiliza para la diversión y disfrute, pero así mismo es herramienta educativa que le ayuda a conocer la realidad y permite que se afirme en procesos socializadores cumpliendo una función integradora”. El juego es una herramienta pedagógica para favorecer el aprendizaje que logra articular las diferentes asignaturas, no se debe ver como una actividad complementaria sino como mecanismos imprescindibles que facilita el aprendizaje.

Guardo y Santoya (2015) establecen que “el pensamiento lógico es construido por cada estudiante mediante una abstracción reflexiva en donde la interacción social que ofrece el juego se convierte en un papel preponderante” (p. 78). Se establece que los estudiantes pueden ser protagonistas de su propio aprendizaje fomentando la integración. Por otro lado, García (2013) deja claro que “el juego educativo tiene una función recreativa, desarrolla y potencia capacidades y objetivos, fomenta la creatividad, el pensamiento lógico, la autonomía y la interacción social con su entorno” (p. 45). Es de anotar que las estrategias deben ir vinculadas a estructuras psicológicas, cognitivas, afectivas y emocionales logrando la integración de diferentes áreas. Herrera (2016) indica que “el papel como docentes es ser espontáneos como el juego” (p. 33). Al momento de promover actividades se debe permitir al niño dirigir la actividad y participar con ellos generando confianza para una mejor participación.

Frente a la resolución de problemas matemáticos haciendo uso del juego se puede hablar de la lógica que estudia la forma de razonamiento, por medio de reglas y técnicas se determina si un argumento es válido. De

manera implícita el juego invita a los estudiantes a razonar. Al ofrecerle al estudiante estrategias innovadoras en el aula de matemáticas se estimula y se generan altos niveles de disposición hacia la enseñanza-aprendizaje de matemáticas. Los juegos pueden ser útiles para presentar contenidos matemáticos despertando la motivación y el interés, desarrollando la creatividad y habilidades para resolver problemas.

Tabla 2. *Relación entre el juego y el desarrollo del pensamiento matemático*

Juego	Pensamiento matemático
Reglas de juego	Instrucciones, operaciones, reglas lógicas, reglas de construcciones
Situaciones iniciales	Axiomas, definiciones
Jugadas	Deducciones, construcciones
Figuras del juego	Expresiones, términos
Situaciones resultantes	Nuevos conocimientos y teoremas

Fuente: Winter y Zielgler (1983, p. 88).

El juego es un recurso didáctico para un aprendizaje significativo, pero se debe tener presente que sea sencillo de comprender, provocar interés, estar acorde con el nivel evolutivo, ser agente socializador, adaptarse a diferentes individuos. “Existe una relación entre el juego y el pensamiento matemático ya que implica combinar las características del juego y las estrategias involucradas” como lo refieren Winter y Zielgler (1983, p. 88). Muchos juegos utilizan las matemáticas como el dominó, juegos de cartas y Monopolio; otros llevan a cabo relaciones geométricas en donde se ubican fichas que se mueven sobre un tablero; y otros hacen uso de estrategias para ganar la partida. A continuación, se presenta la relación entre el juego y el desarrollo del pensamiento matemático.

En cuanto a la comparación de la resolución de problemas y los juegos se tiene:

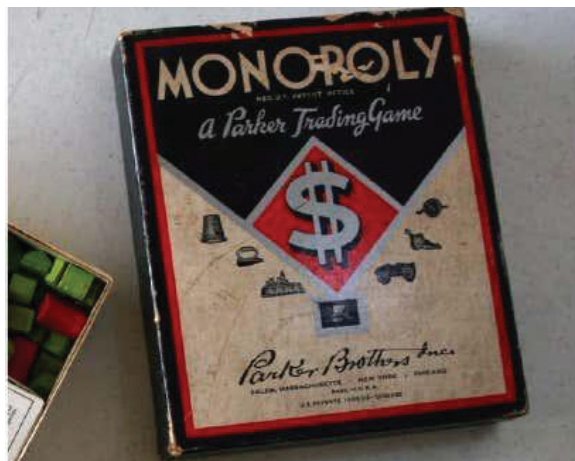
Tabla 3. *Comparativa de resolución de problemas y juegos*

Problemas	Juegos
¿Qué pide?	¿Qué requisitos?
¿Qué datos tengo?	¿Cuáles son las acciones posibles?
¿Qué necesito	¿Cuándo se gana?
¿Conozco algún problema análogo?	¿He jugado algún juego similar?
Ahora establezco conjeturas	Ahora elaboro estrategias
Y examino las conjeturas	Y examino estrategias
Ejecuto un plan	Juego
¿Se trata de una estrategia aplicable en general?	¿Funciona la estrategia ganadora bajo cualquier condición?
¿Se puede modelizar la estrategia para cierta tipología de problemas?	¿Es posible su modelización para cierto tipo de juegos?

Fuente: (Carmona y Cardeñoso, 2019, p. 75).

Ahora bien, en cuanto al juego de mesa Monopolio se tiene que se caracteriza por la compra y venta de bienes raíces que usualmente usa nombres de calles de ciudades o sitios turísticos tiene por objetivo poseer el mayor número de propiedades del juego. Haciendo uso de datos, propiedades, un banco los jugadores compran las propiedades donde caen o el banco la subasta, si otro jugador cae en esa propiedad debe pagar una renta. Tuvo su origen a principios del Siglo XX en el Latndlord's Game de Elizabeth Magie. Se propagó por Estados Unidos y luego por otros países encontrando diferentes versiones. “El juego se patentó en 1904 y en 1935 fue patentado como Monopolio por Charles Darrow con la empresa Parker Brothers hoy parte de la multinacional Hasbro” (Catalán, 2016, p. 1).

Figura 2. *Juego Monopoly - Parker Brothers, 1940*



Fuente: (Catalán, 2016, p. 1)

El Monopolio se inspira en nombres de las calles o sitios de una ciudad o país. Los jugadores mueven sus fichas por turnos de acuerdo con el sentido horario del reloj, al caer en una propiedad pueden comprarla al banco, de no ser así se subasta, si la propiedad tiene dueño se debe pagar alquiler para pasar por la propiedad. En el juego se pueden crear reglas propias. A continuación, se presentan:

El juego Monopolio puede mejorar la calidad del proceso de aprendizaje ya que contiene ejercicios para perfeccionar las habilidades de los estudiantes a medida que se va jugando. El Monopolio basado en el uso de imágenes fortalece la competencia central y la competencia básica. Se entrena la memoria de los estudiantes en el dominio de conceptos materiales, y motivar a los estudiantes para expresar sus argumentos y practicar. El Monopolio tiene diferentes ediciones como la Standard o Deluxe y hay ediciones especiales para cada país o de acuerdo con películas de cine o en honor a aniversarios. En España se crearon ediciones especiales con ciudades como Madrid, Barcelona, Sevilla etc. También se crearon variantes como la ruta del tesoro con el uso de monedas y el Petrópolis con el comercio de petróleo y también se tienen versiones nostalgia electrónica con tarjetas de crédito (Catalán, 2016).

En Argentina se conoce el Monopolio como Estanciero con las provincias de Argentina. En México se le llama Turista; en Guatemala se le conoce como Bancopoly; en Cuba se llama Deuda eterna cuyo tema central es ser el gobierno y su objetivo es derrotar al Fondo Monetario Internacional. En Colombia está la edición que reemplaza los lugares clásicos con lugares de Colombia y la estación del tren se reemplaza por terminales de transporte. En Chile se llama El Gran Santiago o Gran Metrópoli donde se compran calles y avenidas chilenas. En Uruguay se llama Montevideo y es una maleta con el juego y los barrios de Montevideo. En Perú se tiene un Monopolio con 22 destinos culturales y naturales. En el juego original cada jugador está representado por un símbolo pequeño de metal llamado señal que se mueve alrededor del tablero y tiene imágenes de una carretilla, buque de guerra, saco de dinero, jinete de caballo, vehículo, tren, dedal, cañón, perro, sombrero, plancha, gato, entre otros (Catalán, 2016, p. 1).

El Monopolio permite a los jugadores experimentar operaciones matemáticas como la suma, resta y multiplicación; así mismo relaciones de poder que se dan en el juego. El Monopolio es un juego de habilidad, en donde el patrimonio de un jugador depende en gran medida del lanzamiento de un par de dados. Se involucra la imprevisibilidad de lo que va a suceder, menos el adivinar los movimientos del oponente. Los jugadores aprenden estrategias sobre qué propiedades comprar, y cuáles no. Gran parte de la habilidad está relacionada con la evaluación del verdadero valor de una determinada propiedad, que es siempre una función de la ganancia financiera neta esperada, la tasa de ganancia y la certeza de esa ganancia dependiendo si se tienen casas construidas (Catalán, 2016, p. 1).

Los jugadores se turnan para tirar dos dados, el total combinado determina el número de cuadrados sobre los que se mueven. Los jugadores pueden adquirir nuevos activos ya sea comprando propiedades disponibles en que aterrizan al azar, o bien comerciando con otros jugadores por un precio de intercambio de mutuo acuerdo. El alquiler es cobrado cuando un jugador aterriza en una propiedad de otro jugador, que varía según el nivel de desarrollo de esa propiedad en particular. También se deben

considerar otros factores como el valor de la hipoteca de cada propiedad, estrategias para pagar para salir de la cárcel, cuándo desarrollar, cuándo hipotecar (y cancelar la hipoteca).

El Monopolio ha sido usado por docentes universitarios en temas como el cálculo residual económico del ingreso y para ciclos contables para el uso de asientos de diario y preparación de estados financieros. El juego Monopolio tiene un contenido matemático desde la probabilidad y estadística, se puede aplicar en series y límites para estudiantes avanzados. Los enfoques centrados en el estudiante, alentados por investigadores y organizaciones profesionales como el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (2000, citado por Shanklin, 2007), incluyen la exploración, la aplicación de fórmulas y la observación de patrones, exploración, aplicación de fórmulas y observación de patrones en tablas y gráficos creados con el uso de tecnología. Las lecciones se pueden adaptar a una amplia gama de grados y niveles de habilidad (Catalán, 2016, p. 1).

Metodología

Para el desarrollo del trabajo se presenta un enfoque cualitativo de acuerdo con Martínez (2004), identifica la naturaleza de realidades, relaciones y estructura analizando comportamientos y manifestaciones de la población objeto de estudio (p.137). Este enfoque comprende una realidad particular del sujeto. Por otro lado, Hernández, Fernández, y Baptista (2014) establecen que en el enfoque cualitativo se utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación y puede o no probar hipótesis en su proceso de interpretación.

El tipo de investigación que se utilizó fue Investigación Acción en Educación, de acuerdo con Elliot (2000) se relaciona con los problemas cotidianos que experimentan los docentes, en vez de con los “problemas teóricos” definidos por los investigadores puros en el entorno de una disciplina del saber. Es importante tener en cuenta que el propósito de la investigación-acción consiste en profundizar la comprensión de falencias

y darle solución adoptando una postura exploratoria como lo establece Hurtado de Barrera, (2012).

En cuanto a la línea de investigación es desarrollo del pensamiento matemático teniendo en cuenta el Acuerdo 068 2016 Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, (2016). La Institución Educativa La Sabana Municipio de Puerto Rico Meta cuenta con 227 estudiantes de preescolar hasta grado noveno que corresponde a la población universal. En cuanto a la población objeto de estudio se tienen los estudiantes de básica primaria con un total de 90 y la muestra corresponde a los estudiantes de grado tercero un total de 9 para aplicar la secuencia didáctica. En cuanto a la técnica para la selección de la muestra es a criterio de la autora escogiendo el grado tercero de básica primaria en el cual se presentan las falencias en cuanto a pensamiento numérico y las competencias comunicativas, razonamiento y resolución de problemas.

Se tomó el consentimiento de los padres de familia por escrito informándoles de las actividades organizadas y para desarrollar dentro del proyecto de investigación; este consentimiento permite que los estudiantes puedan aparecer en fotografías, videos, talleres y demás actividades.

Se trabajaron tres fases: 1. diagnóstico, fase 2. Acción: diseño de actividades y ejecución de actividades y fase 3 (reflexión), para el desarrollo del trabajo etapa de diagnóstico. Se parte de los resultados de las pruebas saber grado tercero pruebas internas y una prueba de entrada para establecer las falencias en cuanto al pensamiento numérico: competencia comunicativa, razonamiento y resolución de problemas. Etapa de acción (diseño de actividades y aplicación). Se elabora una secuencia didáctica teniendo en cuenta la competencia comunicativa, razonamiento y resolución de problemas. Se diseñaron 6 unidades de aprendizaje: 1. Socialización de la propuesta con padres de familia 2. Socialización a estudiantes 3 Diseño del Monopolio por parte de los estudiantes y familias; 4. Conocimiento de juego y reglas. Dinero en efectivo, propiedades, impuestos, compras, casillas de suerte, cárcel, casas, hoteles, castillos, hipotecas, bancarrota, el ganador; 5 Jugar con la familia; 6. Monopoly en línea.

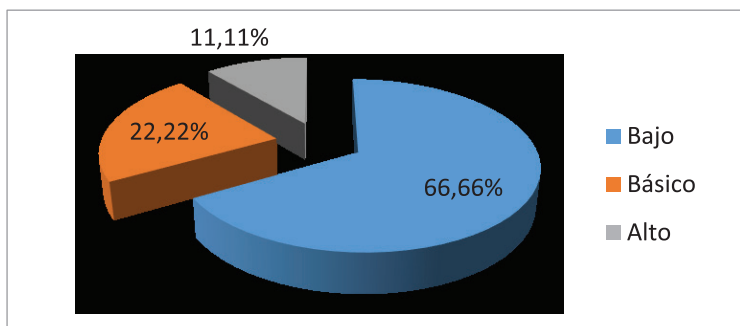
Se desarrolló la secuencia didáctica realizando reuniones virtuales para que los estudiantes participen online y con visitas domiciliarias debido al Covid 19. Las familias deben tener el juego Monopolio o se les suministrará con el apoyo de la biblioteca de la Alcaldía del municipio o donaciones de la comunidad en general para las familias sin recursos para adquirirlo.

Etapa de evaluación (reflexión). Teniendo en cuenta las conversaciones realizadas con los estudiantes y familias participantes en las actividades propuestas se hará una revisión a través del diario de campo y validación de la secuencia diseñada estableciendo un avance. Para calcular la validez, se utilizó el juicio por expertos, docentes con énfasis en matemáticas

Análisis e interpretación de resultados

Fase indagación: Se determinaron las dificultades que se presentan los estudiantes en las competencias comunicación, razonamiento y resolución de problemas mediante la prueba de entrada que consta de 5 preguntas para las competencias comunicación, razonamiento, resolución de problemas. En cuanto al porcentaje por resultados se encontró que 6 estudiantes se encuentran ubicados con nivel bajo con 66,66 %, seguido por básico con 22,22 % y alto un 11,11 % que corresponde a un estudiante. Véase Figura 3:

Figura 3. Resultados prueba de entrada por nivel alcanzado



Fuente: Elaboración propia.

Entre las debilidades encontradas que se mencionan en la Tabla 4 podemos encontrar lo siguiente:

Tabla 4. Debilidades encontradas

Competencia	Debilidad encontrada
Comunicación	Los estudiantes expresan sus ideas, pero no usan diferentes tipos de representación para describir relaciones de acuerdo con el problema dado. Les falta hacer uso de un lenguaje escrito, concreto gráfico para representar el problema. No interpretan ni traducen el problema de manera simbólica ya que es importante que decodifiquen el problema y lo entiendan para luego expresarlo tanto matemáticamente como de forma verbal para su entendimiento. Falta reconocer el uso de números naturales en diferentes contextos. No se reconocen equivalencias entre diferentes representaciones numéricas. Falta construir y describir secuencias numéricas.
Razonamiento	Los estudiantes no usan las operaciones y propiedades de los números naturales para establecer las relaciones entre ellos en situaciones específicas. Los estudiantes tienen dificultad en dar cuenta de cómo y de porqué se escoge un camino para llegar a una conclusión. Deben justificar estrategias y procedimientos para llegar a una solución, proponer ideas y probar sus argumentos, generalizar propiedades y relacionar identificando patrones. Los estudiantes no evalúan los argumentos y son pocos los que se plantean preguntas para llegar a una solución. Los estudiantes no hacen uso de conjeturas. Algunos estudiantes aún no generan equivalencias. No se usan las propiedades de los números al realizar operaciones ni se tiene en cuenta la relación entre los números. Falta hacer uso de conjeturas.
Resolución de problemas	Los estudiantes no resuelven problemas aditivos de composición y transformación y no interpretan las condiciones necesarias para su solución. Es necesario que los estudiantes identifiquen las cantidades a totalizar a través de la composición de los números que representan y realizar las operaciones de manera correcta y relacionada. Aún se presentan errores al resolver problemas aditivos y multiplicativos.

Fuente: Elaboración propia.

Fase de diseño. Se llevaron a cabo las seis secuencias. Secuencia 1 sensibilizó a los padres de familia sobre la importancia de mejorar el pensamiento numérico de los estudiantes. En la secuencia 2 se sensibilizó

a los estudiantes teniendo en cuenta el objetivo, fecha, lugar, participantes, tiempo, recursos, evidencias, estándar, DBA, competencia y los tres momentos en su desarrollo. La socialización permitió comprender la importancia de ser competentes en la resolución de problemas matemáticos, no solo para contribuir en la solución de situaciones cotidianas, sino para mejorar su desempeño en el área y en las pruebas.

Secuencia 3. Diseño del Monopolio por parte de los estudiantes y familias. El diseño del Monopolio fue de gran aceptación por parte de los estudiantes y padres de familia para mejorar los resultados en el aprendizaje al ser recursos motivadores y llamativos al mismo tiempo son más entretenidos para los estudiantes, hay mayor interacción potenciando habilidades sociales.

Secuencia 4. Conocimiento del juego y sus reglas. Se llevaron a cabo reuniones con padres y estudiantes para establecer las reglas de juego del Monopolio. Se explicaron las propiedades: número, el uso de cada una y el pago de la renta o alquiler si alguien cae en una propiedad privada. Para el juego de Monopolio se trabajan sumas, restas y la multiplicación.

Secuencia 5. Jugar con la familia. Se observó que jugar Monopolio en familia generaba gusto, entretenimiento y competitividad. El juego desarrolla creatividad, competencia intelectual, fortalece emocionalmente a los estudiantes generando sentimientos afectivos y de confianza con sus familias. Los estudiantes construyeron aprendizajes considerando las experiencias y pensamientos de sus compañeros de juego procesando esta información para crear estructuras cognitivas.

Secuencia 6. Monopolio en línea. Los estudiantes se mostraron motivados por el uso de colores llamativos y por el uso de la interactividad en el juego. La importancia de los juegos en matemáticas es mantener a los estudiantes interesados y motivados en el tema a desarrollar, el objetivo es desarrollar la mente y potencializar la parte intelectual, sensitiva, afectiva de manera armoniosa y es ahí donde las TIC se convierten en una gran herramienta.

Fase de evaluación. En cuanto al porcentaje por resultados en la prueba de salida todos los estudiantes alcanzaron el nivel alto, 5 estudiantes obtuvieron nota de 5 y 4 estudiantes nota de 4. En la Tabla 5 se observa el contraste entre la prueba de entrada y salida en donde se aprecia que el promedio pasó de 1,44 a 4,22. Y el número de aciertos.

En la fase de evaluación se presenta la prueba de salida, la comparación de la prueba de entrada vs. la prueba de salida, la comparación de resultados antes y después de la propuesta y finalmente los diarios de campo diligenciados de acuerdo con cada secuencia didáctica desarrollada.

Prueba de salida. A continuación, se presentan los resultados obtenidos en la prueba de salida se observa que la prueba tiene al igual que la prueba de entrada 5 preguntas.

Tabla 5. *Resultados prueba de salida*

Competencia	Comunicación	Razonamiento		Resolución		Aciertos	Valoración
Pregunta							
Estudiante 1	1	1	1	1	1	5	Alto
Estudiante 2	1	1	1	1	0	4	Alto
Estudiante 3	1	1	1	1	1	5	Alto
Estudiante 4	1	0	1	1	1	4	Alto
Estudiante 5	1	1	1	1	1	5	Alto
Estudiante 6	1	1	0	1	1	4	Alto
Estudiante 7	1	1	1	1	1	5	Alto
Estudiante 8	0	1	1	1	1	4	Alto
Estudiante 9	1	1	1	1	1	5	Alto
	8	8	8	9	8	4,22	

Fuente: Elaboración propia.

En cuanto al porcentaje por resultados en la prueba de salida todos los estudiantes alcanzaron el nivel alto, 5 estudiantes obtuvieron nota de 5 y

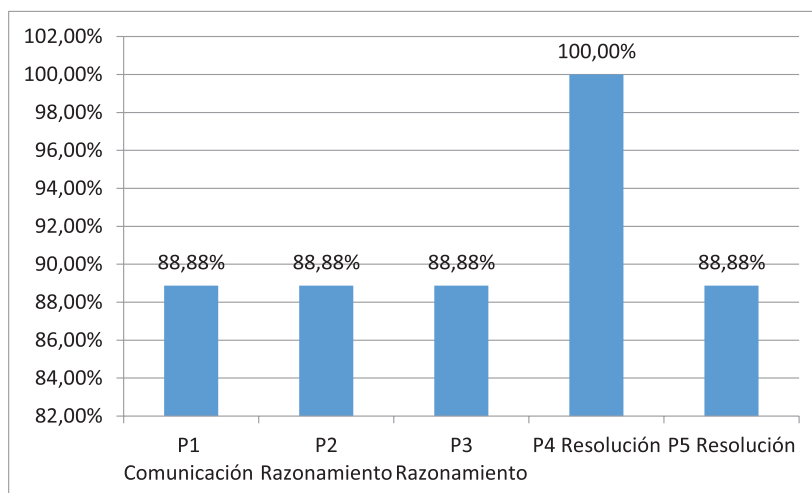
4 estudiantes nota de 4. En cuanto a las competencias, en la competencia de comunicación responden de manera acertada 8 estudiantes, en la competencia razonamiento en la pregunta dos se obtuvieron 8 respuestas acertadas al igual que en la pregunta tres. En la pregunta 4 todos los estudiantes respondieron acertadamente y en la pregunta 5 de competencia resolución 8 estudiantes respondieron acertadamente.

Tabla 6. *Aciertos por competencia y por pregunta prueba de salida*

Competencia	P1 Comunicación	P2 Razonamiento	P3 Razonamiento	P4 Resolución	P5 Resolución
Estudiantes que aciertan	8	8	8	9	8
Porcentaje	88,88 %	88,88 %	88,88 %	100 %	88,88 %

Fuente: Elaboración propia.

Figura 4. *Acuerdo por competencia y por pregunta de prueba de salida*



Fuente: Elaboración propia.

De las cinco preguntas de la prueba de salida se puede observar que la pregunta 1 que corresponde a la competencia comunicación, el 88,88 % de los estudiantes responde acertadamente, es decir 8 estudiantes de los 9;

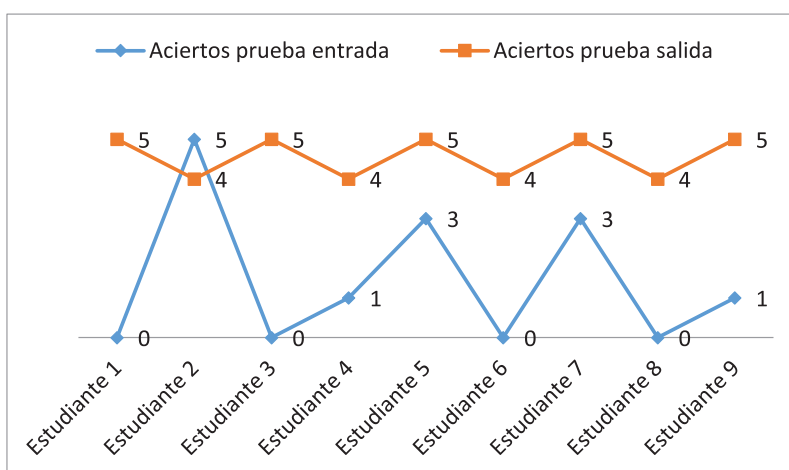
en la pregunta 2, 3 y 5 obtuvieron los mismos resultados y en la pregunta 4 todos los estudiantes respondieron acertadamente.

Tabla 7. Resultados prueba de entrada vs. salida

	Aciertos prueba entrada	Aciertos prueba salida
Estudiante 1	0	5
Estudiante 2	5	4
Estudiante 3	0	5
Estudiante 4	1	4
Estudiante 5	3	5
Estudiante 6	0	4
Estudiante 7	3	5
Estudiante 8	0	4
Estudiante 9	1	5
Promedio	1,44	4,22

Fuente: Elaboración propia.

Figura 5. Resultados prueba de entrada vs. salida



Fuente: Elaboración propia.

Enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Como docentes es necesario motivar el autoaprendizaje de los estudiantes para que puedan adquirir las destrezas que requieren, como lo establece Qualificar (2012) y a través del diseño del Monopolio se mejoraron los resultados en el aprendizaje al ser un recurso motivador y llamativo. Se está de acuerdo con Ortiz (1998) ya que la matemática es un método, arte y lenguaje; que debe hacer uso de estrategias metodológicas y didácticas para su aprendizaje.

Por otro lado, como lo establece Plaza (2016), los docentes deben conocer la forma en que los estudiantes abordan los problemas matemáticos, las estrategias que usan y los conceptos erróneos que les impiden realizar las tareas asignadas, de esta manera es más sencillo afrontar las dificultades. Frente al uso de las TIC Gómez (2007) establece que los docentes de matemáticas deben ser eficaces y eficientes, tener conocimientos, capacidades, formarse de manera continua y poseer un carácter integrador y como lo afirma Herrera (2016), al momento de promover actividades se debe permitir al niño dirigir la actividad y participar con ellos para generar confianza y una mejor participación.

Discusión de resultados

El trabajo parte de la pregunta: ¿Cómo identificar el pensamiento numérico en los estudiantes de grado tercero del Centro Educativo La Sabana Municipio de Puerto Rico Meta, mediante el Monopolio como estrategia didáctica? Se estableció que para identificar el pensamiento numérico se debía tener en cuenta las competencias comunicación, razonamiento y resolución de problemas para fortalecer las debilidades encontradas.

Frente a la pregunta y verificación del objetivo general

Se encontró que la implementación de recursos pedagógicos innovadores en matemáticas en este caso el juego Monopolio generó ventajas, entre las que se puede destacar la captación de la atención de los estudiantes generando su participación en las actividades propuestas. Los estudiantes se mostraron creativos y motivados lo que facilitó la comprensión y el

desarrollo de competencias, lo que está de acuerdo con lo expuesto por la UNESCO (1980), el juego es la razón de ser de la infancia y contribuye con el desarrollo del cuerpo la inteligencia y la afectividad motivo suficiente para tomarlo como estrategia en el área de matemáticas. Se aplicaron recursos y lenguajes matemáticos (gráficos y escritos) adecuados para resolver una situación haciendo uso de papel y lápiz donde se tenían dudas y luego dominaron algunas técnicas de resolución de problemas de manera mental lo que les permitió desarrollar de manera más rápida los ejercicios propuestos.

El uso de juegos matemáticos genera trabajo autónomo, permite tanto el trabajo individual como grupal estimulan el aprendizaje, motivan y generan interés, modifican positivamente la actitud hacia las matemáticas, fomentan el pensamiento matemático, favorecen la resolución de problemas, potencian una enseñanza activa, creativa y participativa, estimulan la confianza en el propio pensamiento, para permitir adquirir procedimientos matemáticos.

El uso del juego Monopolio hizo que los estudiantes plantearan situaciones para pensar, fueran protagonistas de su aprendizaje, fortalecieran la indagación, e investigación por ejemplo buscando en la red temas como la renta, propiedad, pago de impuesto, reparaciones de la casa, alcantarillados, embotellamientos, uso de semáforos, demoliciones, construcciones, remodelaciones, temas tratados en las tarjetas de evento. Lo anterior está de acuerdo con Fernández (1997), quien establece que se debe enseñar matemáticas haciendo uso de situaciones de la vida cotidiana.

Defensa o debate

Tabla 8. *Debilidades encontradas vs. superadas*

Competencia	Debilidad encontrada	Debilidad superada
Comunicación	Los estudiantes expresan sus ideas, pero no usan diferentes tipos de representación para describir relaciones de acuerdo con el problema dado. Les falta hacer uso de un lenguaje escrito concreto gráfico, para representar el problema. No interpretan ni traducen el problema de manera simbólica ya que es importante que decodifiquen el problema y lo entiendan para luego expresarlo tanto matemáticamente, como de forma verbal para su entendimiento. Falta reconocer el uso de números naturales en diferentes contextos. No se reconocen equivalencias entre diferentes representaciones numéricas. Falta construir y describir secuencias numéricas.	Los estudiantes observaron la importancia de usar el lenguaje escrito y gráfico para representar un problema y de esta manera interpretarlo y escoger la operación que le va a dar solución. Se reconoció el uso de números para la compra y venta de propiedades, pago de hipotecas, transacciones bancarias. Se evidencian equivalencias cómo pagar el doble de un alquiler. Se usaron secuencias numéricas pares.
Razonamiento	Los estudiantes no usan las operaciones y propiedades de los números naturales para establecer las relaciones entre ellos en situaciones específicas. Los estudiantes tienen dificultad en dar cuenta de cómo y del porqué se escoge un camino para llegar a una conclusión. Deben justificar estrategias y procedimientos para llegar a una solución, proponer ideas y probar sus argumentos; generalizar las propiedades y relacionarlas identificando patrones. Los estudiantes no evalúan los argumentos y son pocos los que se plantean preguntas para llegar a una solución. Los estudiantes no hacen uso de conjeturas. Algunos estudiantes aún no generan equivalencias. Falta hacer uso de conjeturas.	Se hizo uso de las propiedades de los números naturales estableciendo relaciones entre ellos. Los estudiantes reconocen cuando deben pagar o cobrar dinero y así mismo cuando deben sumar o restar y el hecho de multiplicar al doblarse la renta de una propiedad. Con la colaboración de los padres los estudiantes comprendieron el uso de operaciones matemáticas para la solución de problemas y aprendieron a realizar conjeturas... si compro la propiedad más cara recibo más renta... pero vale más...

Competencia	Debilidad encontrada	Debilidad superada
Resolución de problemas	Los estudiantes no resuelven problemas aditivos de composición y transformación y no interpretan las condiciones necesarias para su solución. Es necesario que los estudiantes identifiquen las cantidades a totalizar a través de la composición de los números que representan y realizar las operaciones de manera correcta y relacionada. Aún se presentan errores al resolver problemas aditivos y multiplicativos.	Los estudiantes reflexionan sobre la importancia de saber sumar y restar rápidamente, de hacer cálculos de manera mental. Los estudiantes realizan ejercicios con operaciones de suma, resta y multiplicación resolviendo dudas en su ejecución y logrando mejores resultados.

Fuente: Elaboración propia.

Enseñanza aprendizaje matemáticas

Como docentes es necesario motivar el autoaprendizaje de los estudiantes para que puedan adquirir las destrezas que requieren como lo establece Qualificar (2012) y a través del diseño del Monopolio se mejoraron los resultados en el aprendizaje al ser un recurso motivador y llamativo. Se está de acuerdo con Ortiz (1998), ya que la matemática es un método, arte y lenguaje; se debe hacer uso de estrategias metodológicas y didácticas para su aprendizaje.

Por otro lado, como lo establece Plaza (2016), los docentes deben conocer la forma en que los estudiantes abordan los problemas matemáticos, las estrategias que usan y los conceptos erróneos que les impiden realizar las tareas asignadas, de esta manera es más sencillo afrontar las dificultades.

Frente al uso de las TIC, Gómez (2007) establece que los docentes de matemáticas deben ser eficaces y eficientes, tener conocimientos, capacidades, formarse de manera continua y poseer un carácter integrador y como lo afirma Herrera (2016), al momento de promover actividades se debe permitir al niño dirigir la actividad y participar con ellos generando confianza para una mejor participación.

Pensamiento numérico. Los estudiantes establecieron la importancia de no mecanizar la solución de problemas sino pensar antes de escoger una operación, graficar, y escoger la mejor manera de solucionarla. Según Fernández (1997), se deben tener presentes las destrezas cognitivas y enseñar las matemáticas haciendo uso de situaciones de la vida cotidiana.

Echenique (2006) indica la importancia de las matemáticas en la sociedad, la necesidad de seguir un proceso para resolver los problemas y el apoyo de los padres para fortalecer el pensamiento matemático. Se observó que jugar Monopolio en familia generaba gusto, entretenimiento y competitividad. El juego desarrolla creatividad, competencia intelectual, fortalece emocionalmente a los estudiantes generando sentimientos de confianza y afectividad con sus familias. Los estudiantes construyeron aprendizajes considerando las experiencias y pensamientos de sus compañeros de juego procesando esta información para crear estructuras cognitivas.

Con el uso de las TIC Echenique (2006) afirma que se debe enseñar a los estudiantes a resolver problemas, lo que implica enseñarles a pensar matemáticamente, pero no sólo para que sean capaces de abstraer en diferentes situaciones; sino para que disfruten el proceso de descubrimiento, de búsqueda, entiendan la importancia de la colaboración y se desinhiban cuando se trate de plantear preguntas o dudas que lleven a la solución de los problemas planteados.

Juegos. Se estableció que los juegos son una estrategia efectiva de aprendizaje si se organizan con un propósito claro y de manera organizada, se debe tener en cuenta los objetivos, métodos de enseñanza e indicaciones de organización escolar. Para que un juego tenga éxito es necesario tener en cuenta como lo establece Cruz (2013) la delimitación de los objetivos que persigue el juego, la metodología, instrumentos, materiales, roles, responsabilidades, tiempo, reglas, entre otros.

Se está de acuerdo con la UNESCO (1980), el juego es la razón de ser de la infancia y contribuye con el desarrollo del cuerpo, la inteligencia y la afectividad motivo suficiente para tomarlo como estrategia en el área

de matemáticas. También como lo establece Benítez (2009), el juego es propio del ser humano y varía de acuerdo con la influencia cultural y su relación con la parte académica es porque atrae y motiva.

Entre las ventajas de los juegos se pueden señalar, de acuerdo con Caneo (1966), romper la rutina dejando de lado la enseñanza tradicional, desarrollar capacidades, aumentar la disposición para el aprendizaje, permitir la socialización, fomentar la observación, atención y capacidades lógicas, entre otras habilidades, lo que se observa con claridad en la construcción de tableros y el juego en familia. El juego como concepto tiene varias aproximaciones a nivel del aprendizaje, como lo establecen Gómez, Molano y Rodríguez (2015), el juego es una actividad que se utiliza para la diversión y el disfrute, pero así mismo es una herramienta educativa que le ayuda a conocer la realidad y permite que se afirme en procesos socializadores cumpliendo una función integradora.

En cuanto al aprendizaje, los juegos que tienen que ver con las matemáticas potencian y enriquecen las estructuras mentales y propician el pensamiento lógico y el razonamiento. Los estudiantes a través de las actividades mostraron motivación, fueron activos y participativos. Se fomentó la observación, atención, capacidades lógicas, imaginación e iniciativa. Se interiorizó el conocimiento por medio del uso de diferentes partidas con las familias, hermanos y amigos siguiendo las medidas de protección de bioseguridad.

Se desarrollaron procesos de pensamiento como el anticipar, combinar elementos, clasificar, relacionar y solucionar problemas. El estudiante al integrarse con sus padres construye aprendizajes considerando experiencias, pensamientos y procesando información para crear nuevas estructuras cognitivas. Se confrontan ideas para encontrar estrategias y lograr ganar el juego como por ejemplo qué propiedades comprar para recibir la mejor renta o en qué momento realizar hipotecas o alianzas con otros jugadores.

Al jugar Monopolio se rompió con la rutina, se aumentó la disposición hacia el aprendizaje. Los estudiantes se motivaron a jugar Monopolio ya

que ellos mismos diseñaron y decoraron los tableros, además el hecho de jugar con la familia los emocionó mucho. Se profundizó en los hábitos de estudio al sentir mayor interés por dar solución a los problemas planteados con la colaboración de los padres. Se incentivó el espíritu competitivo y de superación. Los estudiantes aprendieron a relacionarse, ser respetuosos y respetar los turnos del juego siguiendo reglas. Echenique (2006) indica la importancia de las matemáticas en la sociedad, la necesidad de seguir un proceso para resolver los problemas y el apoyo de los padres para fortalecer el pensamiento matemático.

Los estudiantes mostraron un cambio positivo hacia las matemáticas ya que se divirtieron y al mismo tiempo se les facilitó el aprendizaje. Entre las ventajas de los juegos se pueden señalar, según Caneo (1966), algunas de ellas como romper la rutina dejando de lado la enseñanza tradicional, desarrollar capacidades, aumentar la disposición para el aprendizaje, permitir la socialización, fomentar la observación, atención y las capacidades lógicas, entre otras habilidades.

Los estudiantes mejoraron la comunicación a través del intercambio de ideas mejorando el vocabulario y expresión oral. Con el estudio se confirmó que los estudiantes aprenden matemáticas a través de las experiencias que les proporcionan sus docentes; por lo tanto, la comprensión de conocimientos, la habilidad para aplicarlos y cómo resolver problemas depende en gran medida de los profesores; es necesario motivar la curiosidad de los estudiantes.

Guy (1966) dice que el juego proporciona placer de triunfar lo que aumenta la personalidad; a su vez, Callois (1958) menciona las características del juego: permite articularse libremente, no está dirigido desde afuera, tiene una combinación de datos reales y fantaseados, no prevé pasos en su desarrollo ni desenlace, lo que contribuye a un desafío permanente haciendo descubrir y resolver alternativas.

Se resalta lo establecido por García (2013), quien considera que el juego y las matemáticas se caracterizan por la finalidad educativa, mientras que las matemáticas les dan a los estudiantes un conjunto de instrumentos

para potenciar estructuras mentales y les da la oportunidad de explorar y actuar en la realidad, los juegos potencian el razonamiento, la crítica, actividad mental lo que favorece el aprendizaje de las matemáticas.

Conclusiones y reflexiones finales

Con el uso del juego Monopolio los estudiantes fortalecieron la competencia numérica en cuanto a comunicación, razonamiento y resolución de problemas, al reflexionar sobre la importancia de saber sumar y restar rápidamente, de hacer cálculos de manera mental. Los estudiantes realizaron ejercicios con operaciones de suma, resta y multiplicación resolviendo dudas en su ejecución y logrando mejores resultados.

Con la aplicación de la prueba de entrada se encontró que 6 estudiantes se encuentran ubicados con nivel bajo con 66,66 %, seguido por básico con 22,22 % y alto un 11,11 % que corresponde a un estudiante. De las cinco preguntas de la prueba de entrada en la competencia “comunicación”, el 55,55 % de los estudiantes responde acertadamente, en la pregunta 2, que corresponde a la competencia razonamiento, el 22,2 % responde acertadamente, al igual que en la pregunta 3 de razonamiento el 22,22 %, y en la pregunta 4 que corresponde a la competencia resolución. En la pregunta 5, de la competencia resolución, el 11,11 % responde acertadamente. Se estableció la necesidad de fortalecer todas las competencias, pero hacer énfasis en la competencia resolución ya que solo un estudiante logró superarla.

Se diseñó y aplicó la estrategia didáctica basada en el Monopolio y enfocada al pensamiento numérico, en cuanto a la competencia comunicativa, razonamiento y resolución de problemas teniendo en cuenta una secuencia didáctica con las siguientes actividades: 1. Socialización de la propuesta con padres de familia, 2. Socialización de la propuesta con estudiantes, 3. Diseño del Monopolio por parte de los estudiantes y familias, 4. Conocimiento de juego y reglas. Dinero en efectivo, propiedades, impuestos, comprar, casillas de suerte, cárcel, casas, hoteles, castillos, hipotecas, bancarrota, el ganador. 5. Jugar con la familia y 6.

Monopolio online. Se evaluó la propuesta pedagógica encontrando en la prueba de salida, que en la pregunta 1 que corresponde a la competencia comunicación, el 88,88 % de los estudiantes responde acertadamente, en la pregunta 2, 3 y 5 se obtuvo el 88,88 % y en la pregunta 4 el 100 %, es decir, todos los estudiantes respondieron acertadamente. Al comparar la prueba de entrada con la de salida se pasa de un promedio de 1,44 en la prueba de entrada a un promedio de 4,22 en la prueba de salida.

En cuanto a la competencia de comunicación los estudiantes observaron la importancia de usar el lenguaje escrito y gráfico para representar un problema y de esta manera interpretarlo y escoger la operación que le va a dar solución. Se reconoció el uso de números para la compra y venta de propiedades, pago de hipotecas, transacciones bancarias. Se reconocen equivalencias como pagar el doble de un alquiler. Se usaron secuencias numéricas pares. Frente a la competencia razonamiento se hizo uso de propiedades de los números naturales estableciendo relaciones. Los estudiantes reconocen cuando deben pagar o cobrar dinero y así mismo cuando deben sumar o restar y el hecho de multiplicar al doblarse la renta de una propiedad. Con la colaboración de los padres los estudiantes comprendieron el uso de operaciones matemáticas para la solución de problemas y aprendieron a realizar conjeturas... si compro la propiedad más cara recibo más renta... pero vale más...

El uso de juegos tiene gran aceptación por parte de los estudiantes ya que se obtienen mejores resultados en el aprendizaje al ser recursos motivadores y llamativos al mismo tiempo son más entretenidos para los estudiantes, hay mayor interacción potenciando habilidades sociales; por lo tanto, los docentes deben promover el desarrollo del pensamiento numérico por medio de diversas estrategias para que los niños piensen con mayor amplitud, profundidad y autonomía.

En el desarrollo del proyecto fue de suma importancia el apoyo de los padres de familia ya que ellos se convirtieron en motivadores de la experiencia para que los estudiantes participaran y jugarán debido a la alternancia educativa por el Covid 19. Para que un juego tenga éxito es necesario la delimitación de los objetivos que persigue el juego, la

metodología, instrumentos, materiales, roles, responsabilidades, tiempo, reglas, entre otros.

El docente debe tener un conocimiento del material didáctico a utilizar y sus posibilidades, viendo resultados a mediano y largo plazo. El uso de juegos debe ser de manera planificada y esporádica y hay que tener en cuenta limitaciones como dificultades económicas de los padres para la compra de materiales, el número de estudiantes, el desarrollo curricular y su cumplimiento debido a su extensión.

El rol del docente es fundamental en el uso de juegos en matemáticas ya que es mediador entre el material y el alumno y de él depende que no se presente desorden a la hora de jugar que impida el aprendizaje.

Referencias

- Abreau, O., Gallegos, J., y Jacome, R. (2017). La didáctica: epistemología y definición en la Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas de la Universidad Técnica del Norte del Ecuador. *Formación universitaria*, 10(3), 81-92.
- Acuerdo 068 (2016). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, (2016).
- Álvarez, R. (2017). *El juego como estrategia didáctica para la superación de errores y dificultades en la iniciación al álgebra en el grado octavo* [Licenciatura en Matemáticas y Estadística, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. <https://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/2652>
- Aristizábal, J., Colorado, H., y Gutiérrez, H. (2016). El juego como una estrategia didáctica para desarrollar el pensamiento numérico en las cuatro operaciones básicas. *Sophia*, 12(1), 117-125.
- Blanco, L., Cárdenas, J., y Caballero, A. (2016). *La resolución de problemas de matemática en la formación inicial de profesores de primaria*. Universidad de Extremadura, servicio de publicaciones. <http://dehesa.unex.es/handle/10662/5241>
- Brito, C. (2020). *Los juegos de mesa en el aprendizaje de las nociones lógico-matemáticas en niños de 3 a 5 años en el Centro de Desarrollo Integral Kinder Gym* [Monografía de psicología, Universidad de las Américas]. <http://dspace.udla.edu.ec/bitstream/33000/12132/1/UDLA-EC-TLEP-2020-06.pdf>
- Bruner, J. (1990). *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Alianza. Col. Psicología Menor.
- Cárdenas, C., y González, D. (2017). *Estrategia para la resolución de problemas matemáticos desde los postulados de Polya mediada por*

las TIC, en estudiantes del grado octavo del Instituto Francisco José de Caldas [Tesis de posgrado, Universidad Libre de Colombia]. <https://repository.unilibre.edu.co/handle/10901/9559>

Carmona, E., y Cardenoso, J. (2019). Situaciones basadas en juegos de mesa para atender la elaboración del conocimiento matemático escolar. *Épsilon-Revista de Educación Matemática*, 101(1), 57-81.

Carretero, M. (1993). *Constructivismo y educación*. Aique.

Carvajal, A., y Díaz, O. (2020). *Dinamización del proceso de enseñanza-Aprendizaje de matemáticas grados cuarto y quinto incorporando un sitio web* [Magíster en Gestión de la Tecnología Educativa]. Universidad de Santander.

Chacón, J., y Fonseca, L. (2017). Didáctica para la enseñanza de la matemática a través de los seminarios talleres: Juegos inteligentes. *Rastros y Rostros del Saber. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia*, 2, 11-26.

Daza, E., Roa, R., Serrato, D., y Sterling, J. (2018). *Escenarios que promueven la enseñanza del pensamiento numérico, a través de la resolución de problemas en contextos escolares* [Trabajo de Maestría en didáctica, Universidad Santo Tomás]. <https://repository.usta.edu.co/bitstream/handle/11634/16413/2018everttdaza.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Díaz Barriga, A. (2013). Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas? *Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 17(3), 11-33.

Echenique, I. (2016). *Matemáticas, resolución de problemas*. Gobierno de Navarra. <https://www.orientacionandujar.es/wp-content/uploads/2014/12/RESOLUCI%C3%93N-DE-PROBLEMAS-PRIMARIA-ISABEL-ECHENIQUE.pdf>

- García, P. (2013). *Juegos educativos para el aprendizaje de la matemática* [Trabajo de grado, Universidad Rafael Landívar Facultad de Humanidades Campus de Quetzaltenango]. <http://biblio3.url.edu.gt/Tesario/2013/05/09/Garcia-Petrona.pdf>.
- Gasteriger, H., y Moeller, K. (2021). Fostering early numerical competencies by playing conventional board games. *Journal of experimental child psychology*, 204, 1-15.
- González, A. (2016). *Impacto de los juegos didácticos como herramienta metodológica en el proceso enseñanza-aprendizaje de la asignatura matemática básica, en los estudiantes de primer año, curso regular, turno matutino, en las carreras de ingeniería civil e industrial de ucc-sede matagalpa, primer cuatrimestre 2016* [Trabajo de grado, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua]. <https://repositorio.unan.edu.ni/4689/1/5722.pdf>
- Guzmán, W. (2018). *La Resolución de Problemas Matemáticos a través de un Ambiente de Aprendizaje mediado por TIC en la Escuela Normal Superior “Nuestra Señora de las Mercedes”* [Tesis de Maestría en Proyectos educativos mediados por TIC, Universidad de la Sabana]. <https://intellectum.unisabana.edu.co/bitstream/handle/10818/33941/Proyecto%20William%20Guzman.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Hernández, Fernández, y Baptista. (2014). *Metodología de la investigación* (6.ª ed.). McGraw-Hill.
- Herrera, L. (2016). *El juego como herramienta de aprendizaje en la educación infantil* [Trabajo de posgrado, Especialista en Pedagogía de la Lúdica, Fundación Universitaria Los Libertadores]. <https://repositorio.libertadores.edu.co/bitstream/handle/11371/1139/Herreraluzangela2017.pdf?sequence=2&isAllowed=y>
- Huizinga, J. (1972). *Homo Ludens*. Alianza Editorial.

Lara, E., y Quintero, M. (2016). *Efecto de la enseñanza a través de la resolución de problemas, en el uso de los procesos cognitivos y metacognitivos de los estudiantes* [Maestría en educación énfasis en pensamiento matemático]. <http://manglar.uninorte.edu.co/bitstream/handle/10584/7615/eivis.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

López, C., Morales, D., Castrillón, D., y Flórez, K. (2015). *Fortalecimiento de la resolución y formulación de problemas matemáticos a través del uso de las tecnologías de información y comunicación en los estudiantes de quinto*. [Trabajo de grado maestría, Universidad Pontificia Bolivariana]. https://repository.upb.edu.co/bitstream/handle/20.500.11912/2848/INFORME_FINAL_MTIC_CLAUDIA_LOPEZ_DIANA_MORALES_SANTIAGO_CASTRILLO.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Luis, M., y Mojica, A. (2017). *La función pedagógica del juego como herramienta para la resignificación de los conflictos escolares*. Universidad Santo Tomás.

Mariana, C. (2016). *Modelo de Reglas para Juegos Móviles basados en Posicionamiento* [Trabajo de grado, licenciatura, Universidad Nacional de la Plata]. http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/58931/Documento_completo.%20Modelo%20de%20reglas%20para%20juegos%20m%C3%B3viles%20basados%20en%20posicionamiento.pdf-PDFA.pdf?sequence=4&isAllowed=y

Ortiz, E. (2017). *Enseñanza de álgebra a alumnos de 1º de FPB basada en el juego como recurso didáctico* [Trabajo de Maestría, Universidad internacional de la Rioja, UNIR]. <https://reunir.unir.net/handle/123456789/4725>

Ortiz, J. (1998). *Didáctica de las matemáticas*. Editorial Norma.

Parra, O., y Pinzón, D. (2017). *Los contextos y vivencias de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos*, [Maestría en Educación con

énfasis en Profundización. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia].

Plaza, L. (2016). Obstáculos presentes en la modelación matemática. Ecuaciones diferenciales en la formación de ingenieros. *Revista científica CIDC. Universidad Distrital Francisco José de Caldas*, 25, 176-187.

Qualificar. (2012). Informe propositivo de la oferta de educación media. Bogotá: *Qualificar. Documento de circulación interna*.

UNESCO. (1980). *El niño y el Juego. Planteamientos Teóricos y aplicaciones Pedagógicas*. <http://unesdoc.unesco.org/images/0013/001340/134047so.pdf>

Velasco, D. (2019). *Aportes del ciclo de Kolb al pensamiento numérico del área de matemáticas de estudiantes de grado cuarto* [Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. <https://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/2726>

Vivas, C., Murillo, Z., y Cristancho, J. (2017). Scratch. Estrategia didáctica para el aprendizaje de las tablas de multiplicar en escuela nueva. *Educación y Ciencia*, 20(43-60). <https://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/2467>

Capítulo 3

Propuesta de secuencia didáctica para fortalecer el pensamiento variacional en el estudio de funciones polinómicas⁶

*Julián David Quiroga Garcés⁷
José Antonio Chacón Benavides⁸*

Introducción

El presente trabajo surge de la experiencia docente adquirida en los últimos dos años, ante la necesidad de reducir las dificultades de aprendizaje de las matemáticas, evidenciadas en los resultados de pruebas internas y externas (las pruebas Saber 11, el análisis del día de las pruebas OEA y el Test Diagnóstico) de la Institución Educativa San Lorenzo del municipio de Suaza (Huila, Colombia), específicamente en el pensamiento variacional, mediante el tema de funciones polinómicas, teniendo en cuenta que las

.....
6 Se deriva del proyecto de investigación para optar por el título de Maestría en Didáctica de la Matemática.

7 Magíster en Didáctica de la Matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Docente de matemáticas de la Institución Educativa San Lorenzo (Suaza, Huila). Correo: daqui02_jdq@hotmail.com

8 Investigador Junior (I) SNCTel, convocatoria Minciencias 894/2021. Magíster en Administración y Planificación Educativa, Especialista en Educación Personalizada, Licenciado en Ciencias de la Educación Física y Matemáticas. Integrante grupo de Investigación SIEK. Profesor-investigador de la Licenciatura en Educación Básica Primaria, Facultad de Estudios a Distancia, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-8515-7386>. Contacto: jose.chacon@uptc.edu.co

dificultades de aprendizaje son mayoritariamente causadas por prácticas pedagógicas poco eficientes y relacionadas con la construcción del concepto de función, la falta de situaciones significativas y del contexto, la poca utilización de diversas representaciones y la excesiva ejercitación de procesos algebraicos.

Teniendo en cuenta la evolución que está sufriendo la educación matemática gracias al avance tecnológico, algunas investigaciones refieren que el estudio de funciones puede darse mediante el uso de recursos virtuales como Excel y GeoGebra, influenciando positivamente en el aprendizaje.

Sin embargo, el reto que se plantea frente a estos innovadores recursos es la adecuada utilización de éstos para lograr los resultados esperados, por tanto, ¿de qué manera el uso de GeoGebra y Excel podría fortalecer el pensamiento variacional en el aprendizaje de funciones polinómicas? Para ello, es importante conocer las dificultades claves del aprendizaje relacionadas con el pensamiento variacional en los estudiantes, seguido de una examen de la documentación disponible en búsqueda y análisis de investigaciones que fundamenten las secuencias didácticas mediadas por el uso de Excel y GeoGebra y finalmente lograr el diseño de una secuencia didáctica que tenga en cuenta las recomendaciones y estrategias encontradas en otras investigaciones para lograr el desarrollo de las habilidades del pensamiento variacional mediante el abordaje de funciones polinómicas.

Fundamentación teórica

Atendiendo al modelo pedagógico constructivista adoptado por la Institución Educativa San Lorenzo en su Proyecto Educativo Institucional, se exponen algunas teorías de la didáctica como la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007), Teoría de la Transposición Didáctica de Chevallard (1985) y la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1993), que justifican lo propuesto en el presente trabajo; se incorpora el concepto del pensamiento variacional y de la modelación

matemática y se resalta la importancia de las TIC en la educación matemática teniendo en cuenta su marco legal en Colombia.

Teoría de situaciones didácticas: Guy Brousseau

Según Brousseau (2007), una situación didáctica es aquella situación construida intencionalmente por el profesor con el fin de que los estudiantes adquieran un saber determinado o en vías de constituirse. La situación didáctica se planifica con base en actividades de situaciones problema, cuya necesidad de ser resueltas, implique el conocimiento matemático que da sentido a la clase, en un escenario llamado triángulo didáctico (profesor, estudiante y saber). En ciertas ocasiones se requiere que el estudiante logre aprender bajo otra circunstancia o medio, no solamente bajo situaciones didácticas (ejercicios o problemas), para lo cual, Brousseau denomina el polígono didáctico (profesor, estudiante, saber y medio).

Para Brousseau, cuando un estudiante logra acercarse a los resultados esperados mediante la invención de nuevos procesos sin la influencia de condiciones didácticas específicas, se le denomina *situaciones didácticas* o *la teoría de las situaciones matemáticas*. Para Brousseau, es importante que los profesores estén en la capacidad de diseñar prácticas pedagógicas compuestas de situaciones didácticas que faciliten la construcción del conocimiento, logrando que éste se demuestre en la solución de problemas matemáticos.

Teoría de la transposición didáctica: Chevallard

La teoría de transposición didáctica de Yves Chevallard (1985) define el concepto de transposición didáctica como el paso del saber sabio al saber enseñado y luego a la obligatoria distancia que los separa. Hay de esta forma transposición didáctica (en el sentido restringido) cuando los elementos del saber pasan al saber enseñado” (Gómez Mendoza, 2005, p. 87).

Chevallard define también la transposición didáctica como el paso de un contenido de saber preciso a una versión didáctica de este objeto del saber.

De este modo, la transposición didáctica permite que un saber científico o académico sufra una serie de transformaciones para adaptarlo a un nivel asequible para estudiantes.

Teniendo en cuenta la teoría de la transposición didáctica, es importante destacar las diversas representaciones que posee una función matemática para el desarrollo del pensamiento variacional, logrando que conceptos ligados al tema puedan expresarse de manera que se pueda enseñar.

Teoría de registros de representación semiótica: Duval

La teoría de registros de representación semiótica propuesta por Duval (1993) establece que el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial.

Las representaciones semióticas son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica, etc.), son el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. (Huapaya, 2012, p. 52)

Esto implica que “no existen otras maneras de tener acceso a los objetos matemáticos, sino a través de la producción de representaciones semióticas, y que cada registro de representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que él representa” (Castro et al, 2017, p. 4). Por tanto, “el aprendizaje de las funciones no se ha de limitar al de una sola de estas formas de representación, sino que ha de incluir la capacidad de traducir la información de una representación a otra” (Font, 2001, p. 182).

En cuanto a los registros de representación asociados a la función, Janvier (citado por Font, 2001) menciona cuatro: verbal, tabular, gráfico y algebraico, cada uno de los cuales pone en funcionamiento diferentes procesos cognitivos. A continuación, Font (2001) presenta una adaptación de las posibles relaciones que pueden establecerse entre los registros de representación propuestas por Janvier:

Tabla 1. *Relación entre registros de representación asociadas a una función*

Hacia Desde	Situación, Descripción verbal	Tabla	Gráfica	Expresión analítica
Situación, Descripción verbal	Distintas descripciones	Estimulación/ cálculo de la tabla	Boceto	Modelo
Tabla	Lectura de las relaciones numéricas	Modificación de la tabla	Trazado de la gráfica, unidades, origen, etc.	Ajuste numérico
Gráfica	Interpretación de la gráfica	Lectura de la gráfica	Variaciones de escalas.	Ajuste gráfico
Expresión analítica	Interpretación de la fórmula. (Interpretación de parámetros)	Cálculo de la tabla dando valores.	Representación gráfica	Transforma- ciones de la fórmula.

Fuente: Adaptación de la tabla propuesta por C. Janvier (Font, 2001, p. 182).

Las teorías sobre la didáctica son importantes ya que brindan información relevante acerca de las características que se deben considerar al momento de generar un ambiente de aprendizaje y en el diseño e implementación de estrategias didácticas. Las anteriores teorías sobre la didáctica aportan información importante para el desarrollo del pensamiento variacional.

Marco metodológico de la investigación

Enfoque de la investigación

La investigación se centra en la revisión de la literatura disponible, recopilando investigaciones antecedentes relevantes relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional, el estudio de funciones y modelación matemática mediante el uso de las TIC, presentando como resultado de la investigación una propuesta de secuencia didáctica mediada por el uso de GeoGebra y Excel. Con lo anterior, se establece el enfoque cualitativo de la investigación.

Tipo de investigación

La investigación permite establecer características fundamentales de la educación matemática, de la didáctica de las matemáticas, en el uso de las TIC para el desarrollo del pensamiento variacional, en la construcción de una propuesta de secuencia didáctica basada en trabajos prácticos recopilados de la literatura disponible. De este modo, se clasifica como una *investigación de tipo descriptiva*, ya que busca especificar las propiedades de los procesos educativos que se llevan a cabo dentro del aula en relación con el desarrollo del pensamiento variacional, incluyendo el análisis de éstos, además de destacar las características de algunos recursos considerados importantes para la didáctica de las matemáticas, con el fin de establecer un método efectivo de enseñanza.

Este tipo de investigación tiene como objetivo central “obtener un panorama más preciso de la magnitud del problema o situación y sus resultados se ubican en un nivel intermedio en cuanto a la profundidad de los conocimientos se refiere” (Gallardo, E. 2017, p. 53).

Método inductivo de la investigación

Según Rodríguez y Pérez (2017):

La inducción es una forma de razonamiento en la que se pasa del conocimiento de casos particulares a un conocimiento más general, que refleja lo que hay de común en los fenómenos individuales. Su base es la repetición de hechos y fenómenos de la realidad, encontrando los rasgos comunes en un grupo definido, para llegar a conclusiones de los aspectos que lo caracterizan. Las generalizaciones a que se arriban tienen una base empírica. (p. 187)

Los diferentes apartados de este trabajo de investigación se componen de los resultados y conclusiones de la recopilación de diversas investigaciones particulares acerca del tema, induciendo o generalizando los aportes más concurrentes de éstas. La propuesta didáctica de esta investigación está conformada por aportes de diversos estudios prácticos que hacen

uso de herramientas de GeoGebra y Excel en el estudio de funciones de educación media.

Diseño de la investigación

La presente investigación se clasifica en el *diseño documental* puesto que su proceso está “basado en la búsqueda, recuperación, análisis, crítica e interpretación de datos obtenidos y registrados en diversas fuentes documentales: impresas, audiovisuales o electrónicas”. (Gallardo, 2017, p. 54). En la clasificación tradicional sobre investigaciones, muy pocas veces se incluye el diseño documental. Esto puede deberse a que los resultados obtenidos podrían asimilarse como parte del marco teórico, por tanto, es importante que se sepa diferenciar este tipo de diseño con la revisión bibliográfica que obligatoriamente debe contemplar cualquier tipo de investigación.

Para Gómez L. (2010), la consulta de fuentes como diseño de investigación para la construcción del conocimiento “es una forma de velar por la tradición del pensamiento original y desde esa perspectiva, traerlo al presente con una lectura hermenéutica que favorezca la discusión al hacer nuevos aportes al desarrollo científico con propuestas que pueden ser cuestionadas permanentemente pero que siempre se orientaran a alcanzar nuevos desarrollos” (p. 230). En el *diseño documental*, el análisis de contenido documental es análogo a la validación de instrumentos de otros tipos de investigaciones.

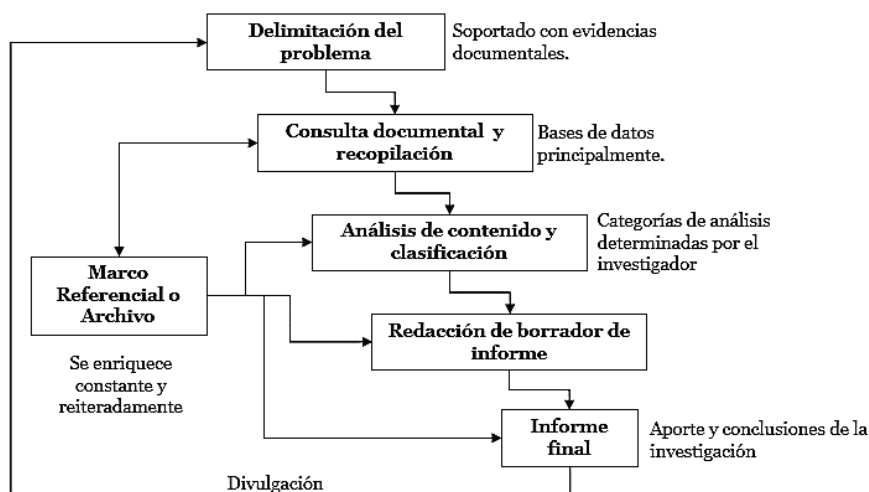
En este sentido, se puede catalogar la presente investigación como una investigación reconstructiva “con nuevas preguntas se reelabora un conocimiento que ha producido unos resultados y un saber previo en esta medida modifica los fenómenos objeto de reflexión” (Vargas, 1992, p. 26, citado en Gómez L., 2010, p. 230).

Nota aclaratoria: El diseño documental responde al estado actual de la educación, debido a la emergencia sanitaria a nivel mundial, permitiendo con la continuación de la investigación.

Proceso de investigación de carácter documental

Debido a que en el enfoque cualitativo la revisión constante de la literatura o marco referencial puede revisarse en cualquier etapa de la investigación, el diseño documental encaja cómodamente con el enfoque. A continuación, se presenta el esquema del proceso de investigación de carácter documental.

Figura 1. *Esquema del proceso de la investigación*



Fuente: Elaborado con base en los planteamientos de Chong de la Cruz (2007).

Fases metodológicas de la investigación

Teniendo en cuenta el diseño documental de la investigación, se establecen las siguientes fases:

Fase I. Diagnóstico DAM

Teniendo en cuenta reportes de pruebas internas y externas, los resultados del Día E, 2019 y un test diagnóstico de conocimientos, se identificaron las principales dificultades de aprendizaje de los estudiantes de grado once de la Institución Educativa San Lorenzo, que obstaculizan el desarrollo

del pensamiento variacional. Se caracterizan estas dificultades de modo que se puede delimitar la problemática.

Fase II. Revisión y análisis documental

Con base en el diseño documental, una etapa muy importante es la recopilación de la información, para ello se deben preparar fichas bibliográficas. En el análisis de contenido de las investigaciones y textos escolares, dirigidos a la enseñanza y aprendizaje de funciones donde se haga uso de GeoGebra y Excel, es fundamental la clasificación de las fuentes recabadas mediante fichas de trabajo, según el aporte de la información, la naturaleza y el alcance del documento en condición de análisis.

Fase III. Aporte de la investigación (informe final)

Mediante la repetitiva y constante corrección del borrador para la presentación del aporte de la investigación. Finalmente, se diseña una secuencia didáctica enfocada al desarrollo del pensamiento variacional mediante el uso de GeoGebra y Excel, donde se estudia las diversas representaciones semióticas de las funciones polinómicas, centrando la atención en la relación entre la representación algebraica, tabular y gráfica, y en la aplicabilidad de estas funciones en el modelamiento de situaciones de la realidad para la solución de problemas, principales dificultades identificada en los estudiantes de grado once de la I. E. San Lorenzo.

Tabla 2. *Fases de la investigación*

Fases	Objetivo específico
Fase I. Diagnóstico DAM	Identificar las dificultades de aprendizaje relacionadas con el pensamiento variacional en los estudiantes de grado once de la I. E. San Lorenzo.
Fase II. Revisión y análisis documental	Examinar la documentación disponible, en búsqueda y análisis de investigaciones que fundamenten prácticas didácticas mediadas por el uso de Excel y GeoGebra.

Fases	Objetivo específico
Fase III. Aporte de la investigación (informe final).	Diseñar una secuencia didáctica, permitiendo el desarrollo de las habilidades del pensamiento variacional mediante el abordaje de funciones polinómicas.

Fuente: Elaboración propia.

Nota. La fase de implementación de la secuencia didáctica se suprimió debido a la situación de emergencia sanitaria actual obstaculiza su realización. Por tanto, el aporte de la investigación concluye con la presentación de la secuencia didáctica, a espera de implementarse dentro del aula, y de momento expuesta al análisis de otros investigadores.

Técnicas e instrumentos de recolección de datos

En el enfoque cualitativo se trabaja con múltiples fuentes de datos, que pueden ser entrevistas, observaciones directas, documentos, material audiovisual, etc. Además, recolecta datos de diferentes tipos: lenguaje escrito, verbal y no verbal, conductas observables e imágenes. Como se ha resaltado, con el *Diseño Documental* de la investigación, la información requerida para el desarrollo del trabajo es obtenida mediante, la recopilación de diferentes fuentes bibliográficas a escala nacional e internacional: libros, artículos de investigaciones, trabajos de campo y tesis de grado de nivel posgradual. Por tal razón, las investigaciones de carácter documental, se habla de instrumentos destinados al manejo de información, que pueden ser estructurados según lo exija la naturaleza de los datos. Cabe resaltar que se hizo uso fundamental de la base de datos de la Universidad Pedagógica y Tecnología de Colombia.

Tabla 3. *Fases e Instrumentos de la investigación*

Fases	Instrumento	Validación	Autores que soporta la validación
Fase I. Diagnóstico DAM	- Reportes de pruebas externas e internas I. E. San Lorenzo.	- <i>Análisis de contenido</i> de las pruebas Saber 11, cuatrienio 2016-2020.	(Gómez L., 2010) (Chong de la Cruz, 2007)
	- Día de 2019	- <i>Análisis de contenido</i> del anexo 1 del Día E, 2019.	
	- Cuestionario de diagnóstico.	- <i>Cuestionario</i> . Consiste en un listado de preguntas escritas relacionadas con los diferentes sistemas de representación de funciones polinómicas y su aplicabilidad en algunas situaciones.	(Gallardo E, 2017, p. 73)
Fase II. Revisión y análisis documental	- Teorías que fundamenta la investigación.	- <i>Análisis de contenido</i> de las fuentes seleccionadas que exponen las teorías de situaciones didácticas de Brousseau, Transposición Didáctica de Chevallard y Registros de Representación Semiótica de Duval.	(Gómez L, 2010) (Chong de la Cruz, 2007)
	- Investigaciones relacionadas con el tema.	- <i>Análisis de contenido</i> de las diferentes investigaciones encontradas sobre el uso de recursos virtuales en el estudio de funciones.	
Fase III. Aporte de la investigación (informe final).	- Secuencia Didáctica.	La validación se realiza con la implementación posterior a la divulgación de la investigación.	Prueba piloto

Fuente: Elaboración propia.

Nota. La validación de la secuencia didáctica se realiza mediante su implementación, ya que los resultados de la investigación corresponden a lo encontrado en el diseño y su construcción, de momento quedando expuesta al análisis por otros investigadores.

Contexto, población y muestra

A continuación, se describe brevemente la población objeto de estudio, la muestra representativa y su contexto.

Población

La Institución Educativa San Lorenzo, es un colegio oficial mixto, con cinco sedes de primaria (dos urbanas y tres rurales) y una de secundaria (urbana). Actualmente la sede de secundaria cuenta con 668 estudiantes, divididos en tres cursos de grado sexto, tres séptimos, dos octavos, dos novenos, tres décimos y tres undécimos. De acuerdo con el contexto, los estudiantes de la institución educativa diariamente están contemplando situaciones relacionadas a la producción agrícola: siembra, cultivo, transporte y comercialización. Además, se busca que los apuntes considerados en este trabajo sean tenidos en cuenta por otros docentes, extendiendo las características de los ejercicios problemas al contexto en el que se encuentran sus estudiantes.

Muestra

La muestra para el enfoque cualitativo no es probabilística. Para este caso, la muestra puede ser clasificada como una *muestra por conveniencia*, ya que se tiene acceso a los individuos que la componen, en este caso, un grupo de estudiantes de una institución educativa (Hernández, Fernández, y Baptista, 2014, p. 401).

Se espera a corto plazo la implementación de la unidad didáctica diseñada en el presente trabajo con estudiantes de grado once de la I. E. San Lorenzo, que cuenta actualmente con 107 estudiantes cursando este grado, que representan el 16 % de la población objeto de estudio,

sus edades están comprendidas entre los 16 y 18 años, la mayoría de ellos residentes de zona urbana del municipio, sin embargo, un grupo considerable de estudiantes habitan en la zona rural.

Contexto

La Institución Educativa San Lorenzo está situada en la zona urbana del municipio de Suaza-Huila, sin embargo, son bastantes los estudiantes que residen en zona rural y que hacen parte de la institución. Además, Suaza es un municipio que basa su economía principalmente en actividades agrícolas como el cultivo del café, aguacate, maracuyá, entre otros.

Recordando que las dificultades de aprendizaje identificadas en los estudiantes de grado once de la Institución Educativa San Lorenzo, me llevó a desarrollar este trabajo; es por esta razón que los fenómenos propuestos para ser modelados mediante las funciones polinómicas, en búsqueda del desarrollo del pensamiento variacional, son tomados del medio en el que diariamente se encuentran expuestos los estudiantes.

Análisis e interpretación de resultados

Este capítulo presenta los resultados obtenidos durante el diseño y la construcción de la secuencia didáctica, exponiendo el análisis de contenido de los documentos que soportan la investigación, y consigo la clasificación de las fuentes según el aporte de su contenido. Se expone una secuencia didáctica como el aporte de la investigación para el desarrollo del pensamiento variacional mediante el uso de Excel y GeoGebra, centrándose en el estudio de representaciones semióticas de las funciones polinómicas y la aplicación de éstas en el modelamiento de situaciones problema.

Fase I. Diagnóstico DAM

Una vez analizados los resultados de pruebas Saber 11 de la Institución Educativa San Lorenzo, se pudo establecer que a pesar de haber logrado superar la media nacional en una unidad en el año 2019, aún no logra

superar el promedio de las instituciones que conforman el ente territorial, lo que indica un camino largo para lograr destacar a la institución a nivel departamental y nacional.

Por otro lado, los resultados de las pruebas OEA muestran el grado de acierto de los estudiantes en ejercicios y problemas que implican el desarrollo del pensamiento variacional, representando las preguntas correctas el 46 %, lo que denota que no alcanzan a contestar de manera acertada la mitad de las pruebas referentes al componente variacional.

Cabe destacar los resultados obtenidos en las actividades establecidas para el Día E del año 2019, en los que se ubica a los estudiantes de grado once, en su gran mayoría y de manera equitativa, en los desempeños básico y alto, significando que los estudiantes demuestran un aprendizaje mínimo y sobresaliente del contenido temático.

Mediante la aplicación de un cuestionario a 68 estudiantes, se presenta un diagnóstico de conocimientos de los estudiantes de grado once actual (2020), obteniéndose un 57,8 % de respuestas correctas, en las que se relaciona los diferentes sistemas de representación de funciones polinómicas (algebraico, gráfico, tabular y verbal).

Nota aclaratoria: No se logró aplicar el test a la totalidad de estudiantes debido a la no disponibilidad de recursos y de internet de algunos de ellos.

Este análisis permite concluir que se debe trabajar arduamente en estrategias que permitan elevar el desempeño general de los estudiantes, con el fin de obtener un porcentaje cada vez mayor en el desempeño superior.

Fase II. Revisión y análisis documental

Los trabajos de investigación práctica, recopilados para el diseño de la secuencia didáctica, centran la atención en el estudio principalmente en funciones lineales, cuadráticas, exponenciales o logarítmicas, haciendo enfoque en dos aspectos principales: i) el comportamiento gráfico de

funciones mediante la variación de los parámetros que componen la expresión algebraica general de las funciones o ii) en la aplicación de funciones a través de la modelación de situaciones problema.

Algunos trabajos integran ambos aspectos de estudio, sin embargo, hacen uso de Excel, GeoGebra u otro software, y el tema central está dirigido al análisis de una función matemática específica (lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica).

Tabla 4. *Resumen de análisis de investigaciones por categorías*

Nombre de la investigación	Categorías de análisis	Función matemática de estudio	Recurso virtual usado	Estudio de variación gráfica	Modelación de situaciones problemas
Desarrollo de tópicos de matemática asistido con Excel (Pareja H., 2012).		Función lineal y cuadrática	Excel	Sí	Sí
Utilización de la hoja de cálculo Excel como recurso didáctico para facilitar el aprendizaje de las matemáticas de 3° de ESO (Almendo 2014).		Funciones cuadráticas	Excel	Sí	No
Representación automática de funciones en Excel y su aplicación docente (Bernal et al. 2011).		Funciones de una variable	Excel	Sí	No
Utilización de la hoja de cálculo Excel en el rendimiento académico del área de matemáticas en estudiantes del noveno grado, Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro; Medellín-2014 (Pérez, 2016).		Función lineal	Excel	Sí	No
Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria (Huapaya, 2012).		Función Cuadrática	Excel	No	Sí
Teaching basic physics through Excel spreadsheets (Subramaniyan, A. L., 2014).		Funciones exponenciales y trigonométricas.	Excel	No	Sí

Nombre de la investigación	Categorías de análisis	Función matemática de estudio	Recurso virtual usado	Estudio de variación gráfica	Modelación de situaciones problemas
Modelado de funciones: Una propuesta didáctica mediada por diversos contextos de las ciencias naturales (Medina, 2012).		Funciones de una variable	Excel	No	Sí
Teaching Mathematical Functions Using Geometric Functions Approach and Its Effect on Ninth Grade Students' Motivation (Akçakin V., 2017).		Funciones de una variable	GeoGebra	Sí	No
Apropiación del concepto de función usando el software libre GeoGebra (Martínez, 2013).		Función lineal y cuadrática	GeoGebra	Sí	No
El uso del GeoGebra como recurso educativo digital en la transposición didáctica de funciones de proporcionalidad (Debárbora, 2012).		Función lineal	GeoGebra	Sí	No
Introducing parameters of linear function at undergraduate level: use of GeoGebra (Ersin, 2013).		Función lineal	GeoGebra	Sí	No
Static Versus Dynamic Disposition: The Role of GeoGebra in Representing Polynomial-Rational Inequalities and Exponential-Logarithmic Functions (Caglayan, 2014).		Funciones polinómicas y racionales	GeoGebra	Sí	No
La importancia de las funciones en la formulación de modelos matemáticos utilizando tecnología: implementación del modelo 1 a 1 (Roumieu, 2014).		Función lineal y cuadrática	GeoGebra	Sí	No
			Excel	No	Sí
Geogebra and Grade 9 Learners' Achievement in Linear Functions (Mushipe M. y Ogbonnaya U. I., 2019).		Función lineal	GeoGebra	Sí	No
Matematiksel Modellemede GeoGebra Kullanımı: Boy-Ayak Uzunluğu Problemi (Hidiroğlu C. y Bukova-Guzel E., 2014).		Función lineal	GeoGebra	No	Sí

Nombre de la investigación	Categorías de análisis	Función matemática de estudio	Recurso virtual usado	Estudio de variación gráfica	Modelación de situaciones problemas
An Example how Geogebra can be Used as a Tool for STEM (Budinski N., 2017).		Funciones de una variable	GeoGebra	No	Sí
Modelación y simulación con GeoGebra: Una experiencia en el estudio de situaciones con medidas de área y volumen (Flórez C. y Yemail C., 2017)		Funciones polinómicas	GeoGebra	No	Sí
Synthesising Algebraic and Graphical Representations of the Maximum and the Minimum Problems (Hong D. S. y Lee J. K., 2013).		Derivada de Funciones Cuadráticas y Cúbicas	GeoGebra	Sí	No
Propuesta didáctica para la enseñanza del tema de optimización, apoyado con Excel y GeoGebra, para estudiantes de bachillerato (Rojas et al. 2017).		Derivadas de funciones	GeoGebra	Sí	No
Propuesta didáctica: la enseñanza del concepto de límite en el grado undécimo, haciendo uso del GeoGebra (Bustos, 2013).		Límites de funciones	GeoGebra	Sí	No
Cartilla TIC para la enseñanza de matemáticas (González, 2013).		Derivadas de funciones cuadráticas	GeoGebra	Sí	No

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 4 relaciona las características de las investigaciones que componen los antecedentes. La investigación de Roumieu es una de las más completas, puesto que integra el uso de GeoGebra y Excel para un estudio de las funciones lineales y cuadráticas; se debe aclarar que Roumieu también hace uso de otros recursos virtuales como Lagrange y Functionswin-32, además del estudio de funciones exponenciales. El papel que cumple GeoGebra y Functionswin-32 en el trabajo de Roumieu es únicamente gráfico, por otro lado, Excel y Lagrange son usados para el modelamiento de experimentos propuestos.

La investigación de Roumieu (2014) fue un punto de partida clave para la realización del trabajo, ésta inspiró para hacer el análisis gráfico de las funciones polinómicas mediante una estrategia del uso de GeoGebra y otra con Excel. De igual manera, el modelamiento de fenómenos cotidianos con regresiones polinómicas a través de una estrategia mediada por el uso de GeoGebra y otra con Excel.

Para lograr el estudio de la variación gráfica de las funciones polinómicas mediante el uso de excel, fue importante el trabajo realizado por Bernal et al (2001); a pesar de que ellos hacen uso de macro (programación), brindaron una idea inicial de cómo podría realizarse la variación gráfica relacionada con el cambio de valores de los parámetros de las funciones.

En la realización del presente trabajo también fueron importantes algunos textos de matemáticas para bachillerato, éstos brindan aspectos teóricos importantes y plantean ejercicios y problemas que inspiraron el diseño de las actividades de la secuencia didáctica.

Tabla 5

Resumen de análisis de textos por categorías

Nombre de la investigación \ Categorías de análisis	Función matemática de estudio	Recurso virtual recomendado	Aspectos teóricos de funciones	Problemas de aplicación
Precálculo: Matemáticas para el cálculo sexta edición (Stewart, 2012).	Funciones de una variable	Ninguno	Sí	Sí
Matemáticas B (Alonso et al, 2008) (Libro interactivo virtual)	Funciones de una variable	Ninguno	Sí	Sí
Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas en MAD 3 (Gómez, 2018)	Función lineal, afín, exponenciales crecientes.	Ninguno	Sí	Sí
Aplicaciones de las funciones algebraicas (Rojas A., 2018).	Funciones de una variable	Ninguno	No	Sí

Fuente: Elaboración propia.

Algunos libros de matemáticas presentan aspectos teóricos importantes del comportamiento de funciones, sin embargo, no incorporan o recomiendan el uso de algún recurso virtual que permita la construcción de los conceptos, o para el modelamiento matemático en la solución de problemas; y se centran en la aplicación de conceptos algebraicos. Bajo este análisis de la literatura, se diseña la secuencia didáctica que promete la utilidad de GeoGebra y Excel para el estudio de aspectos mencionados de las funciones polinómicas, bajo una guía instructiva del uso de estos recursos para cada actividad planteada.

Fase III. Aporte de la investigación

Finalmente, este trabajo integra los siguientes aspectos en el contenido de la secuencia didáctica:

Tabla 6. Aspectos generales contenidos de la secuencia didáctica

Propuesta de secuencia didáctica para fortalecer el pensamiento variacional en el estudio de funciones polinómicas					
Funciones matemáticas de estudio	Recurso virtual usado	Estudio de variación gráfica	Modelación de situaciones problemas	Aspectos teóricos de funciones	Problemas de aplicación
Funciones polinómicas	GeoGebra	Sí	Sí	Sí	Sí
	Excel	Sí	Sí		

Fuente: Elaboración propia.

Como resultado del diseño de la secuencia didáctica, se tiene que hacer enfoque en la construcción de conceptos mediante prácticas para deducir la variabilidad gráfica de las funciones polinómicas a partir de los parámetros que la constituyen. Además de la aplicación de conceptos mediante la determinación de modelos matemáticos para dar respuesta a situaciones planteadas, validando y justificando el ajuste hallado en cada problema.

Atendiendo a las consideraciones de Díaz Barriga (2002) para el diseño de secuencias didácticas, también se propone una estrategia de evaluación contemplada en el momento de cierre de la secuencia compuesta de una

rúbrica y dos evaluaciones. Esta fase presenta la estructura general de la secuencia didáctica propuesta, los momentos, estrategias y actividades que la componen. La secuencia didáctica muestra fundamentalmente dos maneras de abordar el tema de funciones polinómicas: i) mediante el uso de GeoGebra y ii) el uso de Excel.

Estructuración de la secuencia didáctica

El presente trabajo adopta los planteamientos de Díaz Barriga (2013), para el diseño de la secuencia didáctica, delimitando tres momentos: apertura, desarrollo y cierre.

Tabla 7. *Momentos de la secuencia didáctica*

Momento de la secuencia didáctica	Descripción y finalidad del momento
Apertura	Es una fase diagnóstica que permite conocer el estado cognitivo inicial de los estudiantes, está destinada a la recuperación de saberes y preconceptos de los estudiantes para crear andamios entre sus experiencias y las nuevas competencias que se desea adquirir. Es un momento introductorio para abordar funciones polinómicas, es importante anticipar la interacción con los recursos tecnológicos e informáticos que se requerirán en el desarrollo de la secuencia didáctica.
Desarrollo	Este momento está destinado a la creación de escenarios y ambientes de aprendizaje y cooperación, uso de las TIC, la aplicación de estrategias y actividades centradas en el aprendizaje; la integración y ejercitación de competencias y experiencias para aplicarlas en situaciones reales o parecidas. es una etapa importante para la recolección de evidencias.
Cierre	Esta fase propone la elaboración de síntesis, conclusiones y reflexiones argumentativas que permiten advertir los avances o resultados del aprendizaje en el estudiante.

Fuente: Basado en Díaz, A. (2013), *Guía para la elaboración de secuencia didáctica*, UNAM.

Estrategias de aprendizajes de la secuencia didáctica

Cada momento de la secuencia didáctica está compuesto por estrategias de aprendizaje mediadas por actividades que en su mayoría requieren de

la interacción de GeoGebra y Excel, ya sea para conocimiento mismo de estos recursos virtuales, como para determinar propiedades específicas de las diversas representaciones de las funciones polinómicas, además de la resolución de problemas mediante el modelamiento de fenómenos que componen cada problemática. Se describen las estrategias que componen cada momento de la secuencia didáctica.

Tabla 8. *Estrategias de la secuencia didáctica para cada momento*

Momento	Estrategia de aprendizaje	Descripción de la estrategia
Apertura	Situaciones introductorias	Este espacio está destinado a identificar situaciones de la vida diaria que representan la relación y variabilidad entre dos magnitudes, retomando el concepto de función matemática.
	Interacción con los recursos virtuales	Es importante destinar un espacio previo al desarrollo de la secuencia didáctica para el conocimiento de las herramientas de GeoGebra y Excel, mediante la interacción y manejo de éstas.
Desarrollo	Prácticas guiadas	Esta estrategia está compuesta de actividades instruccionales que requieren del uso de GeoGebra y Excel para determinar el cambio del comportamiento gráfico de las funciones polinómicas de acuerdo con las constantes que componen su expresión algebraica.
	Trabajo basado en problemas	Las actividades propuestas en esta estrategia se componen de situaciones problemáticas comunes del entorno que requieren de su modelamiento para su solución, haciendo uso de GeoGebra y Excel.
Cierre	Rúbrica de seguimiento	Es importante resaltar que el proceso de evaluación de la secuencia didáctica debe darse en todos los momentos que la componen (apertura, desarrollo y cierre).
	Evaluación final	Sin embargo, es en la fase de cierre donde se mide el alcance de lo aprendido, por tanto, esta estrategia se compone de un test evaluativo de conocimientos.

Fuente: Elaboración propia.

Carácter evaluativo de los momentos de la secuencia

El carácter evaluativo de cada momento se debe diferenciar, con el fin de obtener un proceso evaluativo lo más preciso posible durante la secuencia didáctica.

Tabla 9. *Carácter evaluativo de los momentos de la secuencia didáctica*

Momento	Carácter evaluativo
Apertura	Evaluación diagnóstica de conocimientos previos
Desarrollo	Evaluación continua (formativa) para verificar y retroalimentar el desempeño del estudiante.
Cierre	Es final o sumativa, busca valorar la información recabada durante el inicio y en el desarrollo del proceso.

Fuente: Elaboración propia.

Categorías de análisis de la secuencia didáctica

Teniendo en cuenta los tres momentos que componen la secuencia didáctica, se definen para el análisis de esta, 5 categorías y 16 indicadores de desempeño:

Tabla 10. *Categorías de análisis de la secuencia didáctica*

Momento	Categoría	Indicadores de desempeño
Apertura	Caracterización de funciones	1. Identifica situaciones del contexto que muestran variabilidad y dependencia entre dos magnitudes. 2. Reconoce una función como una regla de dependencia entre variables, mediante el uso de varios sistemas de representación semiótica. 3. Identifica y diferencia las principales funciones polinómicas.
	Uso de GeoGebra y Excel	4. Reconoce las principales herramientas que ofrece la hoja gráfica de GeoGebra 5. Reconoce las principales herramientas que ofrece la hoja de cálculo de Excel.
Desarrollo	Relación entre representaciones semióticas	6. Transforma las principales funciones polinómicas en sus diferentes sistemas de representaciones semióticas. 7. Relaciona las representaciones algebraicas, tabulares y gráficas de las principales funciones polinómicas.
	Resolución de problemas mediante la modelación	8. Delimita la problemática de las situaciones propuestas. 9. Identifica las variables que rigen el problema. 10. Establece relaciones de dependencia entre variables según los datos obtenidos en la práctica. 11. Transforma los datos obtenidos a representaciones tabulares y gráficas. 12. Propone un modelo matemático de acuerdo con las relaciones de dependencia establecidas para las variables. 13. Justifica el modelo propuesto, mediante su validación.
Cierre	Confrontación de lo observado	14. Demuestra interés en cada una de las actividades propuestas.
	Evaluación final	15. Desarrolla con facilidad el test de evaluación de conceptos. 16. Demuestra conocimiento del tema mediante el modelamiento de problemas planteados.

Fuente: Elaboración propia.

Momento de apertura

Consideraciones para la apertura. Conocimientos previos requeridos:

Cuando se aborda el tema de funciones, es importante que los estudiantes cuenten con algunos conocimientos matemáticos que son indispensables para el aprendizaje del tema. Gómez (2018) identifica los conocimientos previos requeridos para resolver las tareas propuestas para el aprendizaje de funciones constantes, lineales y a fin; por ende, son conocimientos que también se extienden para el aprendizaje de funciones polinómicas.

Tabla 11. Listado de conocimientos previos del tema de funciones polinómicas

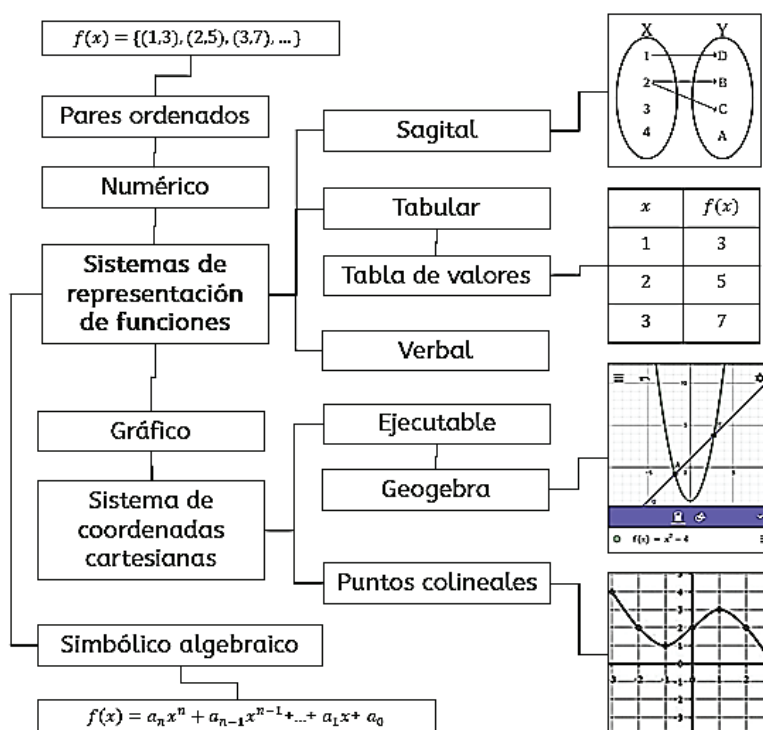
CP	Descripción de capacidades
1	Usar el plano cartesiano
2	Completar tablas
3	Utilizar lenguaje algebraico
4	Operar con números reales
5	Diferenciar relación de función
6	Solucionar ecuaciones de primer y segundo grado
7	Solucionar sistemas de ecuaciones de 2×2 y 3×3 .
8	Utilizar notación funcional
9	Hallar el valor numérico de expresiones algebraicas
10	Usar GeoGebra
11	Usar Excel

Fuente: Adaptado de Gómez (2018)

Es importante aclarar que durante el momento de apertura no es necesario abordar todos conocimientos previos, ya que algunos de ellos son temas extensos que se debieron haber estudiado con anterioridad, de acuerdo con lineamientos curriculares coherentes. Teniendo en cuenta el listado de conocimientos, en sus tres primeras capacidades previas requeridas, se mencionan las diferentes formas de representar las funciones matemáticas.

Sistemas de representación de funciones polinómicas. Existen diversas maneras de representar una función. a continuación, se presenta un esquema que resume las diferentes representaciones de las funciones polinómicas

Figura 2. *Sistemas de representación de funciones polinómicas*



Fuente: Elaboración propia.

En este momento de la secuencia didáctica se presenta como base introductoria la presentación de las principales funciones polinómicas y su utilidad en el ajuste de puntos dados por una base de datos de algún evento en estudio. Además, se incluye un espacio exclusivo para conocer las principales herramientas de Excel y Geogebra que serán usadas en el desarrollo de la secuencia. Este espacio de exploración de las características de los recursos permitirá una familiarización de los estudiantes con Excel y Geogebra.

Momento de desarrollo

Esta etapa de la secuencia la integra algunas consideraciones conceptuales básicas acerca de las principales funciones polinómicas, seguido de una serie de prácticas guiadas por el docente donde los estudiantes deberán usar de Excel y Geogebra una herramienta que les permita variar los coeficientes que componen las funciones polinómicas para lograr observar y concluir el efecto de los valores de los coeficientes en el aspecto gráfico de las funciones, y de esta manera contestar el test incluido en la secuencia didáctica. Este espacio de la unidad temática refuerza el dominio y las transformaciones de las representaciones simbólicas-algebraicas, tabulares y gráficas, de esta manera al finalizar las prácticas propuestas se generaliza las características de las funciones polinómicas: constante, lineal, cuadrática y cúbica.

Dentro de este momento de la secuencia didáctica se presenta un espacio para el trabajo basado en problemas. En este espacio se plantean algunas situaciones problemas del contexto que necesariamente llevará a los estudiantes a la recolección de datos, datos que deberán ser modelados en Excel y Geogebra con el fin de encontrar la función polinómica que mejor se ajusta a éstos, y así dar solución a las situaciones planteadas mediante proyecciones. Este fragmento de la secuencia didáctica es crucial debido a que refuerza el dominio y las transformaciones de la mayoría de las representaciones semióticas de las funciones polinómicas: numérica, verbal, simbólico-algebraica, tabular y gráfica.

Momento de cierre

Consideraciones finales. Esta fase busca valorar la información recabada durante el inicio y en el desarrollo del proceso, para vincularla con los resultados del cierre, con el propósito de identificar en qué medida se cumplieron las metas establecidas al inicio, mediante la elaboración de síntesis, conclusiones y reflexiones argumentativas que permiten advertir los avances o resultados del aprendizaje en el estudiante. Sin embargo, es en la fase de cierre donde se mide el alcance de lo aprendido, por tanto, esta estrategia se compone de un test evaluativo de conocimientos.

Tabla 12. Estructura del momento de cierre

Cierre	Rúbrica de seguimiento	Evalúa los desempeños del estudiante y el ambiente de aprendizaje.
	Test de conocimientos	Evaluación 1: Evalúa la relación de las representaciones semióticas: <pre> graph TD A[Algebráica] --> B[Tabular] B --> A A --> C[Gráfica] C --> A B <--> C </pre>
		Evaluación 2: Evalúa la aplicación de conceptos en el modelamiento de fenómenos. Además, evalúa la capacidad de representación verbal con la justificación del modelo encontrado.

Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones y reflexiones finales

Inicialmente, el bajo desempeño encontrado en las pruebas externas e internas, especialmente en el componente variacional en los estudiantes de grado once de la Institución Educativa San Lorenzo (Suaza-Huila), fue lo que inspiró la búsqueda de nuevas prácticas para el desarrollo del pensamiento variacional. El presente trabajo considera como causa primaria de las dificultades, las prácticas pedagógicas implementadas, es decir, la continuación de metodología tradicionales dentro del aula, por lo que se enfoca en la realización de una secuencia didáctica para abordar el tema de funciones polinómicas, con el fin de orientar el desarrollo del pensamiento variacional mediante el uso de GeoGebra y Excel.

Para lograr el diseño adecuado de la secuencia didáctica encaminada a enfocar el tema, fue importante la revisión de la literatura, la recopilación

de investigaciones que tienen como eje central la utilización de recursos virtuales para la construcción del concepto de función, el análisis y la aplicación en el mundo real.

En el análisis de contenido de los diferentes documentos consultados, se observa que algunas investigaciones se enfocan en analizar las propiedades gráficas de ciertas funciones, olvidando la utilidad de éstas en la resolución de problemas mediante la modelación. El análisis documental también permitió identificar el aporte que éstas brindan al estudio de funciones matemáticas, extendiendo estos aportes al estudio de funciones polinómicas. Por otro lado, las metodologías empleadas por los diferentes autores dieron una idea central de cómo podría ser usado GeoGebra y Excel para el estudio y utilidad de las funciones polinómicas.

Diferentes autores, mediante el carácter práctico que poseen sus investigaciones, después de analizar los resultados, concluyen que el uso de recursos de las TIC, como GeoGebra y Excel, es fundamental para la educación matemática actual. Se debe tener en cuenta que la anterior conclusión, es recurrente en varios autores con investigaciones que implican diferentes poblaciones y los contextos. Por lo anterior, se puede generalizar que, ante un buen uso y dirección de estos recursos, se pueden obtener óptimos resultados para cualquier grupo de estudiantes.

Uno de los aportes más relevantes que se tiene con la implementación de prácticas mediadas por recursos digitales en el estudio de funciones, es que se puede agilizar el análisis gráfico, haciéndolo deductivo y constructivista, para dar paso a la interpretación y análisis de fenómenos que requieren ser modelados para la solución de problemáticas. Además de la influencia positiva en el ambiente de aprendizaje, la motivación e interés de los estudiantes.

Teniendo en cuenta las apreciaciones anteriores, se consolida el diseño de una secuencia didáctica para el estudio de funciones polinómicas, dirigida a fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional, retomando ideas, estrategias y aspectos teóricos de otras investigaciones, fundamentadas en las teorías de las didácticas de las matemáticas, especialmente en la Teoría

de Registros de Representaciones Semióticas de Duval y la Modelación Matemática.

El aporte didáctico de la secuencia retoma consideraciones importantes de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Duval con el fin de que el estudiante pueda identificar las propiedades gráficas de las funciones, buscando desarrollar la capacidad de transformación a sus diferentes sistemas de representación. Las actividades presentes en la secuencia didáctica están dirigidas para su desarrollo entre estudiantes y profesores con el fin de socializar y generalizar cada una de las propiedades de las funciones. También algunas actividades propuestas requieren del trabajo colaborativo en la obtención de datos y análisis de resultados, el aporte conjunto busca la construcción social de conceptos. Adicionalmente, se tiene en cuenta la modelación de situaciones con funciones polinómicas para la solución de las problemáticas planteadas por cada situación, con el objetivo de fortalecer la capacidad de resolución de problemas.

Referencias

- Akçakın, V. (27 de Julio de 2017). Teaching Mathematical Functions Using Geometric Functions Approach and Its Effect on Ninth Grade Students' Motivation. *International Journal of Instruction*, 11(1), 17-32. doi:e-ISSN: 1308-1470
- Alonso, J., Cabezón, M., Fernández, J., y García, M. R. (2018). *Matemáticas B*. Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado. CIDEAD.<http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatemáticasB/index.htm>
- Bernal García, J. J., Martínez María-Dolores, S. M., y Bernal Soto, P. (2011). Representación automática de funciones en Excel. *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA*, 12,141-157.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.
- Budinski, N. (2017). An Example how Geogebra can be Used as a Tool for STEM. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 24(3), 149-153. doi:10.1564/tme_v24.3.07
- Bustos González, I. (2013). *Propuesta didáctica: La enseñanza del concepto de límite en el grado undécimo, haciendo uso de Geogebra*. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales].
- Castro R., M. C., González, M. D., Flores, S., Ramírez, O., María, C., y Fuentes, M. C. (2017). Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte I. *Entre ciencias: diálogos en la Sociedad del Conocimiento*, 12.
- Chong de la Cruz, I. (2007). Métodos y técnicas de la investigación documental. *Investigación y Docencia en Bibliotecología*, 183-201. <http://hdl.handle.net/10391/4716>

- Díaz Barriga, A. F., y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. McGraw Hill.
- Duval, R. (1993). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive*, 5, 37-65.
- Florez, C., y Yemail, C. (2017). *Modelación y simulación con GeoGebra: Una Experiencia en el Estudio de Situaciones con medidas de Área y Volumen*. [Tesis de Maestría, Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín].
- Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *Revista EMA*. 6(2), 180-200.
- Gallardo, E. (2017). *Metodología de la Investigación: manual autoformativo interactivo*. Universidad Continental.
- Gómez Mendoza, M. A. (2005). LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA: HISTORIA DE UN CONCEPTO. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 83-115.
- Gómez, L. (2010). Un espacio para la investigación documental. *Revista Vanguardia Psicológica*, 1(2), 226-233. doi:ISSN-e 2216-0701
- Gómez, P. (2018). *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas en MAD3*. Ediciones Uniandes.
- Hernández S., R., Fernández C., C., y Baptista L., M. d. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill.
- Hong, D. S., y Lee, J. K. (2017). Synthesising Algebraic and Graphical Representations of the Maximum and the Minimum Problems. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 20(4).

- Huapaya G., E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria*. [Tesis de Maestría, Universidad Tecnológica del Perú].
- Martínez Gómez, J. N. (2013). *Apropiación del concepto de función usando el software GeoGebra*. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales].
- Mushipe, M., y Ogbonnaya, U. I. (2019). Geogebra and Grade 9 Learners' Achievement in Linear Functions. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)*, 14(8), 206-219. doi:<https://doi.org/10.3991/ijet.v14i08.9581>
- Pérez, F. (2016). *Utilización de la hoja de cálculo Excel en el rendimiento académico del área de matemáticas en estudiantes del noveno grado, Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro; Medellín-2014*. [Tesis de Maestría, Universidad Privada Norbert Weiner. Medellín].
- Rodríguez, A., y Pérez, A. O. (enero-junio de 2017). Métodos científicos de indagación y de construcción del conocimiento. *Revista EAN* (82), 179-200. doi:<https://doi.org/10.21158/01208160.n82.2017.1647>
- Rojas A., C. J. (2018). *Aplicaciones de las funciones algebraicas*. Editorial Universidad del Norte.
- Rojas Escribano, L., Báez Rojas, J., y Corona Galindo, M. (2017). *Propuesta didáctica para la enseñanza del tema de optimización, apoyado con Excel y Geogebra, para estudiantes de bachillerato. El cálculo y su enseñanza de las ciencias y la matemática*, 9(1),52-63.
- Roumieu, S. M. (2014). La importancia de las funciones en la formulación de modelos matemáticos utilizando tecnología: implementación del modelo 1 a 1. [Congreso] *Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*, 14, Instituto San Gabriel de Quilmes.

Capítulo 4

Diseño de lámparas como recurso didáctico para el desarrollo del pensamiento geométrico en grado séptimo⁹

Nayibe Gómez Condía¹⁰

José Eriberto Cifuentes Medina¹¹

Introducción

En la búsqueda de la comprensión y adquisición de conocimiento, se generan cada día expectativas sobre la forma correcta en la cual se logre proporcionar el conocimiento, la manera más adecuada en la que, el estudiante explore sus capacidades como: organizar, analizar y estructurar los conocimientos geométricos, sobre los intereses y expectativas de los estudiantes con respecto a las matemáticas del espacio.

.....
9 Se deriva del proyecto de investigación para optar por el título de Maestría en Didáctica de la Matemática.

10 Magíster en Didáctica de la Matemática y Licenciada en Educación Básica con énfasis en matemáticas humanidades y lengua castellana; Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Docente en la Institución Educativa Abrahán Lincoln. Correo electrónico nayibe.gomez@gmail.com

11 Investigador Asociado (I) SNCTeI, convocatoria de Minciencias 894/2021. Doctorando en Educación Cohorte XII. Magíster en Educación, Especialista en Evaluación Educativa, Especialista en Pedagogía y Docencia, Licenciado en Teología, Licenciado en Filosofía y Educación Religiosa, Universidad Santo Tomás. Docente Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Orcid ID: <https://orcid.org/0000-0001-5702-620X>. Correo electrónico: joseeriberto.cifuentes@uptc.edu.co

Estas expectativas se vuelven relevantes para investigadores y comenzar a revisar e innovar en recursos didácticos, en formas adecuadas para propiciar más oportunidades en el aula, por tanto, implementar la geometría desde la experimentación con diferentes recursos del entorno, de ese entorno que rodea la vida cotidiana, se torna en una oportunidad que logre que el estudiante gradualmente llegue a tener un conocimiento más amplio en relación al análisis, clasificación y propiedades de las formas tridimensionales, estableciendo relaciones espaciales que permitan el entendimiento de ese mundo.

Para Gamboa-Araya y Ballester-Alfaro (2010) “el aprendizaje de la geometría implica el desarrollo de habilidades visuales y de argumentación. Más aún, para lograr un aprendizaje significativo es necesario construir una interacción fuerte entre estos dos componentes” (p. 130).

Se tiende a enseñar la geometría informando a los estudiantes sobre las propiedades de las formas bidimensionales o tridimensionales, que aprendan fórmulas que luego son aplicadas completando ejercicios donde deben demostrar lo que han aprendido, esto hace que el estudiante no aplique el razonamiento. Jones (2002) refiere que, si se desea desarrollar el pensamiento espacial y geométrico se debe tener en cuenta variedad de enfoques; unos de manera formal y otros desarrollados deductivamente o encontrados a través de la exploración y la experimentación, es importante Asegúrese de que los estudiantes entiendan los conceptos que están aprendiendo y los pasos que están involucrados en procesos particulares en lugar de que los estudiantes sólo aprendan reglas, una enseñanza eficaz alienta a los estudiantes a reconocer las conexiones entre diferentes formas de representar ideas geométricas y entre geometría y otras áreas de las matemáticas.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) trabaja arduamente para generar mecanismos que permitan conocer si las políticas que se tienen para la enseñanza están dando los resultados esperados. Por tanto, el MEN realiza pruebas Saber y Avancemos que se aplican en todos los niveles de educación desde educación primaria hasta la educación media en grados específicos. Estas son las herramientas que tiene el Estado

Colombiano para evaluar cuantitativamente el nivel de competencia en el que se encuentra el estudiante y las instituciones en el proceso educativo.

Es por ello que hoy día los establecimientos educativos colombianos aspiran a mejorar el bienestar de sus estudiantes, dando prioridad al desarrollo de las capacidades necesarias para afrontar cada uno de los retos que la vida moderna requiere, de modo que la educación se ha constituido en un instrumento indispensable para que las personas y las sociedades puedan avanzar hacia los ideales de paz, libertad y cambio, aportando herramientas para que así mismo ellos puedan aprovechar y desarrollar sus propios talentos, capacidades y realizar su proyecto de vida; para que pueda integrarse y cooperar con los demás. Uno de los objetivos primordiales es formar mejores personas para la vida desarrollando virtudes e intentando ser mejores, se viven profundas transformaciones motivadas por el desarrollo de tecnologías y el avance e investigación de la ciencia, el cual, aunque no obedece a una formula específica si demanda un conjunto de factores, condiciones, capacidades y aspectos que el sistema educativo debe acoplar en cada una de las dimensiones base sobre la cual trabaja el sistema educativo acordando los parámetros idearios del futuro que desean alcanzar una educación para el mañana.

Por esta razón, resulta imprescindible el papel que juegan las herramientas de aprendizaje y la posibilidad de obtener medios para estimular procesos de razonamiento y argumentación del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes, escapando de las interpretaciones deductivas, tratando de pasar una geometría experimental de interpretación inductiva, alcanza gran importancia pues esta hace indispensable incluir fuentes dinámicas, accesibles, lúdicas y pedagógicas que posibiliten al estudiante adquirir el conocimiento.

Fundamentación teórica

Con los referentes teóricos que orientan la investigación, se hace énfasis en tres categorías concernientes a la enseñanza y aprendizaje de la geometría; en primer lugar, se proporciona una visión general sobre el pensamiento geométrico desde la concepción de Piaget, el modelo de enseñanza de Van Hiele, el razonamiento geométrico de Duval (2016)

desde lo cognitivo y los modelos figurativos de Fischbein (1993). Cada una de estas teorías aporta recursos para el desarrollo del trabajo con los estudiantes en cuanto a la construcción de pensamiento geométrico. También se tienen en cuenta los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias en Matemáticas sugeridas por el MEN.

Se tiene en cuenta la importancia de los recursos didácticos, como un facilitador para la comprensión de conceptos geométricos por parte de los estudiantes por intermedio de la experimentación, visualización, manipulación y construcción de objetos en dos y tres dimensiones. Finalmente se abordan algunas situaciones que pretenden afrontar desde otras perspectivas la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

Pensamiento geométrico

La geometría es el campo de las matemáticas que se encarga del estudio de los cuerpos, sus propiedades y las relaciones entre ellos, de las transformaciones que puedan experimentar de los objetos que se encuentran en movimiento como también de aquellos que permanecen inamovibles. Se relaciona con las formas de medir líneas, ángulos, lados, espacio que ocupan o qué tan lejos o cerca los elementos que nos rodean, desde el punto de vista de (Godino y Ruíz, 2002):

La geometría se ocupa de una clase especial de objetos que designamos con palabras como, punto, recta, plano, triángulo, polígono, poliedro, etc. Tales términos y expresiones designan “figuras geométricas”, las cuales son consideradas como abstracciones, conceptos, entidades ideales o representaciones generales de una categoría de objetos. (p. 456)

La geometría es un área increíble, con infinitud de recursos que se pueden utilizar como herramientas para enseñarla y aprenderla, tiene una facilidad extraordinaria para abordarla desde distintas direcciones como pintura, escultura, música, artesanía entre otros, además, tiene la habilidad de conquistar los sentidos admirando sus maravillosas manifestaciones que conlleva a estimular la creatividad, y en virtud de ello, lograr utilizarlo como recurso que capture la atención de los estudiantes para superar las dificultades a las cuales se enfrentan a la hora de comprender las matemáticas.

¿Es importante estudiar geometría? En la actualidad, la geometría está recobrando la importancia que tuvo en sus inicios, las instituciones educativas cada vez más, retoman nuevamente lo que en algún momento dejaron de lado, esa matemática que ofrece verdad, pero con infinita belleza. El objetivo principal es desarrollar el pensamiento geométrico, entendido hoy como algo básico para lograr comprender el espacio que lo rodea. Araya y Alfaro (2009) sostienen que, “El desarrollo de la geometría ha estado relacionado con las necesidades del ser humano por comprender su mundo. La aplicación de ella en la vida cotidiana muchas veces pasa inadvertida durante la enseñanza de esta disciplina” (p. 116), en virtud de ello, el estudio de la geometría debe ser algo profundo y significativo para el alumno, logrando que dichos conocimientos adquiridos puedan ser aplicados en su entorno.

Además, contribuye a desarrollar la capacidad de explorar y resolver racionalmente situaciones problema del espacio en el que viven los estudiantes, cabe resaltar a Jones (2002), autor que resume algunos de los objetivos de la enseñanza de la geometría:

Proporcionar experiencias para lograr el desarrollo del pensamiento espacial, intuición y visualización. Vivenciar y describir en forma ordenada una amplia gama de experiencias con objetos en dos y tres dimensiones. Dominar el conocimiento, la comprensión y la capacidad para utilizar la geometría para resolver problemas, hacer conjeturas y razonamientos deductivos. El modelado como un recurso que permite desarrollar habilidades aplicables al mundo real. Descubrir la existencia de objetos que se pueden ver, tocar, mover, transformar tomando conciencia del patrimonio que es la geometría de la sociedad y las aplicaciones en el día a día. (p. 125)

Es necesario justificar el por qué es importante estudiar geometría y desarrollar el pensamiento geométrico, solo se requiere observar el ambiente en el cual el ser humano se desenvuelve de manera natural, y así lo resume Bursill-Hall (2002):

Al menos en un nivel, la respuesta es sorprendentemente simple. Durante la mayor parte de los últimos dos mil quinientos años en la

tradición europea u occidental, se ha estudiado la geometría porque se ha considerado la verdad más exquisita, perfecta y paradigmática disponible para nosotros fuera de la revelación divina. Es la forma más segura y clara de pensar disponible para nosotros. Estudiar geometría revela, de alguna manera, la verdadera esencia más profunda del mundo físico. Y enseñar geometría entrena la mente en un pensamiento claro y riguroso. (p. 1)

Teóricos para el aprendizaje del razonamiento geométrico. Para hablar del pensamiento geométrico es necesario, retomar algunas teorías que permitan dar cuenta de los procesos mentales o cognoscitivos realizados por los sujetos, para ello se hará una breve referencia a la teoría Psicogenética de Jean Piaget, el modelo de pensamiento de Van Hiele en la geometría, el modelo cognitivo de razonamiento geométrico de Duval (2016) y la teoría de los conceptos figurativos de (Fischbein, 1993). A continuación, se presenta una sinopsis general de las posturas de los autores mencionados anteriormente.

Pero ¿cómo el pensamiento geométrico se desarrolla en las personas? ¿Cómo se expresan las habilidades y comportamientos de los individuos en su proceso de conocimiento geométrico? Uno de los más importantes estudios los realizó el biólogo y epistemólogo, reconocido por sus estudios realizados en el desarrollo de la inteligencia de los niños desde su teoría constructivista, de origen suizo Piaget apoyado con Inhelder realizó diversos experimentos respecto al desarrollo del pensamiento geométrico en los niños, a través de experimentos centrados en la concepción de espacio, en el cual a los niños se le entregaban distintas actividades geométricas

Piaget et al. (2013) plantean que, “como en todos los otros ámbitos del conocimiento humano, la inteligencia comienza a partir de una perspectiva inconscientemente egocéntrica como el primer paso hacia la combinación lógica de las relaciones espaciales” (p. 25) Así pues, la concepción del espacio se desarrolla a muy temprana edad, desde que se realiza interacción con el espacio que lo circunda, pero aún sin tener conceptualización o conciencia de ello, en consecuencia plantea dos hipótesis de lo observado:

Hipótesis constructivista: la representación del espacio depende de una organización progresiva de las acciones motoras y mentales que permiten el desarrollo de sistemas operacionales. Hipótesis de la primacía topológica: la organización progresiva de ideas geométricas sigue un orden definido que es más lógico que histórico; inicialmente se desarrollan ideas topológicas, luego se construyen relaciones proyectivas y después, surgen las relaciones euclídeas. (Uribe, 2011, p. 43)

Estas hipótesis anteriormente mencionadas fueron comprobadas en los experimentos que realizó Piaget acerca de los aprendizajes de la geometría, desde la concepción del espacio del niño y la relación con los conceptos. Siendo estos tan acertados que aún siguen vigentes y se consideran el punto de partida en los aprendizajes de la geometría. Algunos de esos estudios realizados se detallan a continuación en la Tabla 1:

Tabla 1. *Diferenciación de figuras geométricas*

Diferenciación de figuras geométricas		
Descripción de la actividad		Percepción Háptica: palpar con los ojos cerrados algunos sólidos geométricos, posteriormente escoger entre otros sólidos aquel que tuviera características similares al palpado.
Observaron Propiedades	Topológicas	Cerradura, continuidad o conectividad.
	Proyectivas	Rectilineidad o curvatura.
	Euclidianas	Paralelismo y perpendicularidad de los lados, congruencia de lados y ángulos.
Estadio del desarrollo	Sensorio-motor	Eran tímidos en sus exploraciones. Al tocar la figura lograban establecer relaciones entre ambas percepciones generando la representación del sólido por primera vez.

Nota. Experimento realizado por Piaget en torno a la observación del desarrollo del pensamiento geométrico.

Fuente: Elaboración propia teniendo en cuenta los aportes de Uribe (2011, p. 44).

En la actividad anterior aplicada por Piaget e Inhelder (2013) concluyen que, se podría catalogar como una hipótesis constructivista, dado a que, el orden lógico se daba luego del incremento en la coordinación de acciones que realizaba el niño, y que por tanto descartaron la hipótesis topológica. Pero posteriormente en otros estudios realizados por investigadores contradecían lo afirmado por Piaget (1967), aplicando la misma actividad a niños de las mismas edades, concluyendo que los alumnos eran capaces de diferenciar formas y junto con sus propiedades topológicas que las euclidianas. Con base en este debate y tratando de confirmar o descartar el estudio realizado y dar claridad sobre las figuras utilizadas en el experimento, crearon diversos tipos formas bidimensionales y tridimensionales que nutrieron de materiales a las clases de geometría (Uribe, 2011).

Tabla 2. *Representación de figuras geométricas*

Representación de figuras geométricas	
Descripción de la actividad	Pedían a los niños que dibujaran figuras geométricas planas, las cuales debían copiar de un modelo dado por los investigadores.
Evidencia de la observación	Los resultados mostraron inexactitud, lo cual era muestra de ausencia de conocimiento de pensamiento geométrico adecuado para lograr representar el Espacio.

Nota. Experimento realizado por Piaget en torno a la observación del desarrollo del pensamiento geométrico.

Fuente: Elaboración propia teniendo en cuenta los aportes de Uribe (2011, p. 47).

De acuerdo con este experimento realizado Piaget e Inhelder (2013) con su hipótesis constructivista y topológica, indican que, cuando se trata de representar una realidad mostrada y obtener un dibujo lo más parecido posible a observado, los niños privilegian las características topológicas y de igual manera actividades de discriminación, por ello, cuando se les pedía dibujar una figura geométrica, no estaban en la capacidad para determinar las características de determinada figura. Pero que a medida que la edad de los niños avanza, estos son capaces de diferenciar

y relacionar conceptos y discriminar características específicas de la geometría (Uribe, 2011, p. 47).

Tabla 3. *Construcción de sistemas de referencia para comparar figuras*

Construcción de sistemas de referencia para comparar figuras	
Descripción de la actividad	Solicitaban a los niños organizar en un trayecto recto una secuencia de objetos, estos se presentaban en forma desordenada sobre un escritorio, los objetos debían ser ordenados de tal forma que no fueran paralelos a los lados de la mesa.
Evidencia de la observación	Entre los 6 y los 7 años los niños fracasaban en la realización de la tarea, algunos de ellos alineaban las figuras siguiendo la dirección paralela de la mesa o realizaban una línea curva que se inclinaba hacia un camino paralelo de uno de los lados de la mesa. Influenciados por el distractor “lado de la mesa” debido a lo cual les impedía realizar la tarea en forma correcta.

Nota. Experimento realizado por Piaget en torno a la observación del desarrollo del pensamiento geométrico.

Fuente: Elaboración propia teniendo en cuenta los aportes de Uribe (2011, p. 49).

Del experimento anterior Piaget e Inhelder (1967, citado en Uribe, 2011) pudieron concluir que “el éxito en el establecimiento de relaciones proyectivas y euclídeas dependía de la construcción de un complejo sistema de puntos de vista lo suficientemente fuerte como para inhibir los distractores” (p. 49); por tanto, para que los niños lograran identificar características como la semejanza entre figuras bidimensionales y tridimensionales se da sólo cuando se logra establecer relaciones desde diferentes perspectivas de las figuras en una combinación de orientaciones e inclinaciones. Piaget e Inhelder (1967, citado en Uribe, 2011) dedujeron que, para realizar la ubicación de algunos objetos tridimensionales, se tenía un mayor éxito si se les permitía una visualización de la figura, esto permitía una capacidad superior de entendimiento en el niño. A continuación, se presentan los niveles de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico en el individuo, luego de las indagaciones realizadas por Piaget a partir de sus trabajos investigativos.

Tabla 4. *Niveles en el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico*

Niveles	El desarrollo de la habilidad de justificar
7-8 años	Realizan las actividades propuestas sin un orden lógico o plan definido, en estas edades los niños no son conscientes de sus pensamientos, en consecuencia, no cuentan con los mecanismos para sistematizarlos y organizarlos, por ello, las conclusiones de las observaciones realizadas pueden ser contradictorias.
7-8 a los 11-12 años	En este nivel, sus conclusiones están basados en creencias, sus exploraciones son hechas con base en un carácter anticipatorio y propositivo, por lo general la información que poseen la utilizan para suponer lo que posiblemente puede suceder como resultado de la exploración hecha, pero no logran aún establecer una formulación general, por lo general intenta justificar sus predicciones, sin lograr hacer deducciones.
11-12 en adelante	Los estudiantes en este nivel alcanzan a realizar deducciones lógicas, por tanto, su razonamiento se ajusta a un sistema matemático. Parten de inducciones empíricas, pero llegando a justificarlos por medio de hechos geométricos a través de la deducción.

Fuente: Elaboración propia teniendo en cuenta los aportes de Uribe (2011, p. 51).

Para Piaget (citado en Uribe, 2011) cada nivel de pensamiento evoluciona a medida que la edad del niño avanza, también lo hace la capacidad de argumentación y desarrollo de habilidades en el contexto de la geometría, yendo desde una serie de intuiciones básicas y espontáneas hasta llegar a un razonamiento matemático propio, como resultado de la interacción con la escuela y su contexto.

Desde esta perspectiva, el desarrollo del pensamiento geométrico comienza desde edades muy tempranas con nociones empíricas presentes en todos seres humanos, que, sin ser conscientes hacen uso de conceptos geométricos básicos, cuando aún no ha habido contacto con algún grado de escolaridad, como sostiene Uribe et al. (2014):

[...] que los niños, cuando ingresan en la escuela, poseen muchas nociones intuitivas sobre el espacio, las cuales los ayudan a solucionar problemas a los que se enfrentan diariamente. Esto hace necesario que, en su inicio, la escuela se preocupe por aprovechar, enriquecer y ampliar esas ideas. (p. 139)

Conceptos figurativos (Fischbein). En el concepto figurativo Fischbein sugiere que la geometría parte de entidades mentales como las geométricas, las cuales contiene características específicas: las figurales y las conceptuales, para Fischbein (1993) una imagen “posee una propiedad que los conceptos habituales no poseen, es decir, incluye la representación mental de la propiedad espacial” (p. 141). Según esta postura de conceptos figurativos, el razonamiento geométrico se caracteriza por la interacción entre estos dos aspectos. Afirma Fischbein (1993) que los conceptos figurales refieren a propiedades espaciales y su relación.

La principal idea del trabajo investigativo de Fischbein (1993) describe la geometría una fusión entre la figura y el concepto:

Los objetos de investigación y representación en el razonamiento geométrico son por tanto entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales - como idealidad, abstracción, generalidad, perfección. (p. 143)

Además, agrega que la figura geométrica (mental) posee una determinada estructura donde Fischbein (1993) describe algunas especificaciones.

Una figura es una imagen mental cuyas propiedades están completamente controladas por una definición. Un dibujo no es una figura geométrica en sí misma, sino una representación material, gráfica o concreta del mismo. La imagen mental de una figura geométrica es, por lo general, la representación del modelo materializado de la misma. Así que una figura geométrica en sí misma es una idea correspondiente que es la entidad figurativa abstracta idealizada y purificada. (p. 149)

Siguiendo esta argumentación, una imagen mental es así una representación donde se consideran tres categorías como se observa en la siguiente tabla.

Tabla 5. Síntesis del desarrollo del pensamiento geométrico

Categorías de entidades mentales de las figuras geométricas	
Definición	Significado de una entidad abstracta.
Imagen	Basada en la experiencia sensorial-perceptiva, como la imagen de un dibujo.
Figural	Es la realidad mental. Es la construcción manejada por el razonamiento matemático en el dominio de la geometría. Pero carece de propiedades sensoriales concretas (color, peso, densidad etc.) Se necesita un esfuerzo intelectual para comprender que las operaciones lógico-matemáticas manipulan solo una versión purificada de la imagen es decir el contenido espacial figurativo de la imagen.

Fuente: Elaboración propia basada en información de *The Theory of Figural Concepts* (Fischbein, 1993).

Fischbein (1993) considera que, “el componente figurativo está generalmente influenciado por las fuerzas figurales-gestálticas” (p. 145) es decir que las imágenes que percibe de su alrededor y que es relevante lo lleva a construir imágenes mentales e induciendo al razonamiento geométrico. Siendo esta la base del desarrollo del pensamiento geométrico, e incluyendo un vínculo entre las imágenes y los atributos teóricos como base para el aprendizaje de la geometría. Finalmente, la geometría es un campo donde se hace necesario interactuar entre conceptos e imágenes para llegar a comprender la geometría.

Razonamiento geométrico de Duval (2016). Para comprender la geometría se requiere interpretar diferentes representaciones de los objetos tanto bidimensionales como tridimensionales, el modelo cognitivo de razonamiento geométrico propuesto por el francés Duval, propone un modelo para abordar la geometría desde lo cognitivo y lo perceptivo para lograr el desarrollo del sentido geométrico.

Abordar la geometría a través de la utilización de recursos para su enseñanza, donde los estudiantes no logren conectar la representación de un objeto con desarrollo del sentido geométrico, también puede ser una de las frustrantes ya sea en la primaria o la secundaria dado a que según Duval (2016) “la geometría exige una actividad cognitiva más

completa” (p. 13) no es suficiente con el análisis clásico pues “apela al gesto, al lenguaje y la mirada, para este, es necesario construir, razonar y ver indisociablemente” (p. 13), con el fin de comunicar correctamente la información en el individuo y no generar “un conflicto potencial entre percepción perceptiva de una figura y percepción matemática” (Jones, 1998, p. 31).

Para Duval (2016) observar una figura permite conocer sus “propiedades cualitativas” y es allí donde ocurre “el primer umbral crítico para el aprendizaje de la geometría. En la enseñanza, es quizá el umbral que tiene mayor dificultad” (p. 14) se requiere proporcionar al estudiante situaciones que favorezcan la intuición para que realmente comprendan el funcionamiento de la geometría. Es importante que en el reconocimiento de dichas propiedades cualitativas “se encuentre con gran variedad de actividades: observación, reproducción, construcción, descripción, definición etc.” (Duval, 2016, p. 14).

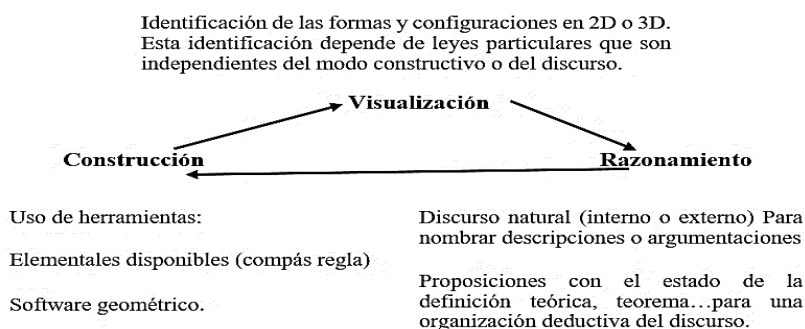
Cuando se aborda la tridimensionalidad es muy importante la visualización. Para Duval (2016) “el espacio ya no se aborda desde el aspecto de magnitud.... Sino desde el aspecto de sus dimensiones y del cambio de números de estas” (p. 15), la visualización permite una descripción detallada lo cual facilita el desarrollo de la intuición y un mayor desarrollo del entendimiento por parte del estudiante.

Ninguna de las actividades que se utilizan clásicamente para iniciar a los estudiantes en el estudio de la geometría permite verdaderamente desarrollar esta manera de ver. Sin embargo, es la única requerida para comprender las diferentes maneras de utilizar el lenguaje natural en geometría: enunciación de propiedades, definiciones, deducción de otras propiedades, teoremas (Duval, 2016, p. 15).

Así mismo, resaltar que la comprensión del pensamiento geométrico de Duval (2016) involucra tres tipos procesos cognitivos en el proceso de construir un razonamiento geométrico como lo explica Jones (1998):

Procesos de visualización, por ejemplo, la representación visual de una declaración geométrica, la exploración heurística de un complejo de Situación geométrica. Procesos de construcción (usando herramientas) procesos de razonamiento - particularmente procesos discursivos para la extensión de conocimiento, para explicación, para prueba Duval señala que estos diferentes procesos se pueden realizar por separado. (pp. 31-32)

Figura 1. *Interacciones cognitivas involucradas en el desarrollo del sentido geométrico de Duval*



Fuente: Elaboración propia basada en información de *Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning* (Jones, 1998).

Importancia de la visualización en la geometría. Para la geometría la vista toma gran notabilidad, pues, es la manera en que el individuo toma conciencia de todo lo que lo rodea, logrando interpretar los fenómenos más notorios e importantes de su vida cotidiana, para Spence (2001, citado en Torres, 2009) apunta que la “visualización es una actividad cognitiva humana relacionada con la formación de un modelo o imagen mental de algo” (p. 163). Desde la perspectiva de Duval (2016) el acto de ver implica dos niveles de operaciones, aclarando que cada uno es independiente, dichos niveles los clasifica en el “nivel el reconocimiento distintivo de formas y la identificación de los objetos que corresponden a las formas reconocidas” (p. 20).

Por otra parte, realiza una articulación entre la visualización y la geometría, a lo cual se refiere como un hiato dimensional para lograr observar

cada una de sus “propiedades relativas a las diferentes configuraciones posibles que se pueden formar a partir de las relaciones entre rectas y de propiedades relativas a la comparación de dos segmentos deben formar las piezas elementales” (Duval, 2016, p. 54). Este hiato dimensional desde la enseñanza de la geometría se deduce a desmontar una imagen o una estructura desde el análisis cognitivo. En la siguiente figura se observa la relación entre la imagen y el lenguaje. Entre la visualización y verbalización.

El modelo de pensamiento de Van Hiele en geometría. En el ámbito de las investigaciones en cuanto al desarrollo del pensamiento geométrico, y en la búsqueda continua de cambios para mejorar las formas de enseñar y aprender matemáticas, el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele ha resultado ser con mucha certeza un modelo que conlleva a la construcción de conocimiento en la geometría. Al respecto, Gutiérrez y Jaime (2012, citado Iglesias y Ortiz, 2015), al reflexionar sobre la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, expresan que “el modelo de razonamiento de Van Hiele es, en la actualidad, el marco más provechoso para organizar la enseñanza de la geometría y realizar una correcta evaluación del aprendizaje comprensivo de los estudiantes” (p. 209).

Araya y Alfaro (2009) señalan que el modelo de Van Hiele surgió como una investigación de “profesores de secundaria, que reflexionaron sobre la problemática relacionada con la incompreensión, por parte de los estudiantes, de la materia que ellos les explicaban” (p. 127). La admiración y continuidad de este modelo se centra en la forma en que está estructurado, resultando ser claro sobre la naturaleza y los fundamentos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría “partiendo de la consideración de las matemáticas como actividad y el proceso de aprendizaje como proceso de reinención” (Corberán et al., 1989, p. 13).

Estudiar geometría teniendo como esencia este modelo contiene dos aspectos muy interesantes, el descriptivo y el instructivo: “primero intentan explicar cómo razonan los estudiantes a través de una secuencia de niveles de razonamiento. La segunda parte del modelo da algunas pautas a seguir, llamadas fases de aprendizaje” (Araya y Alfaro, 2009, p.

127). Es un modelo de progresión como lo expresan Corberán et al. (1989): “los alumnos deben transitar ordenadamente por todos los niveles. Para poder actuar con éxito en un determinado nivel deben haber adquirido las estrategias de los niveles precedentes” (p. 18). Para Jones (1998), “el alumno progresa a través de una serie de niveles caracterizados por una abstracción creciente” (p. 30). A continuación, se hace una descripción de los diferentes niveles basados en la investigación realizada por el holandés Van Hiele como se observa en la siguiente tabla.

Tabla 6. Descripción de los niveles del modelo de razonamiento geométrico

Niveles de razonamiento geométrico	
Nivel	Descripción
Reconocimiento o visualización	El estudiante reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo, pero aún no diferencia partes ni tampoco sus componentes, pero si, algunas características básicas. No es capaz de reconocer o explicar las propiedades determinantes de las figuras, las descripciones son principalmente visuales y las compara con elementos familiares de su entorno. No hay un lenguaje geométrico básico para referirse a figuras geométricas por su nombre.
Análisis	El estudiante puede ya reconocer y analizar las partes y propiedades de una figura geométrica, aquellas como lados ángulos internos, sabe cambiarlas de posición, pero no le es posible establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades de distintas familias de figuras. Establece las propiedades de las figuras de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación. Como muchas de las definiciones de la geometría se establecen a partir de propiedades, no puede elaborar definiciones.
Deducción informal	El estudiante interrelaciona lógicamente propiedades y reglas, reconoce como algunas propiedades se derivan de otras descubiertas previamente dando o siguiendo argumentos informales, hace algunos razonamientos deductivos sencillos a partir del nivel anterior. Sin embargo, su razonamiento lógico sigue basado en la manipulación. Sigue demostraciones, pero no es capaz de entenderlas en su globalidad, por lo que no le es posible organizar una secuencia de razonamientos lógicos que justifique sus observaciones.
Deducción	El alumno prueba los teoremas deductivamente y establece interrelaciones, comprende el significado de los axiomas o postulados, siendo capaz de realizar demostraciones de teoremas.

Niveles de razonamiento geométrico	
Nivel	Descripción
Rigor	El alumno establece teoremas en diferentes postulaciones y analiza y compara estos sistemas. Puede apreciar la consistencia, complejidad de los postulados de la geometría. Este nivel es el más complejo de alcanzar.

Fuente: Elaboración propia basada en los autores Araya y Alfaro (2009); Corberán (coord.) (1989); Iglesias y Ortiz B. (2015); y Vargas y Araya (2013).

Desde lo expuesto anteriormente, el modelo se caracteriza por brindar al docente herramientas convirtiéndolas en guía dentro del aula a la hora de enfrentarse a los diferentes problemas que surgen en la orientación de los contenidos geométricos. Este debe ser un observador de los progresos de los estudiantes, además, ser autocrítico de los métodos que se están utilizando, pues “de la adecuada o desafortunada elaboración del método se deriva la intensificación del progreso o su retraso” (Corberán, 1989, p. 18).

Conjuntamente, el modelo de Van Hiele propone unas fases para orientar al docente en las propuestas didácticas llevadas al aula, enfocadas en el estudiante, logrando el progreso de cada nivel al que este llegue, se proponen las siguientes fases:

Fase 1: Encuesta/información. En esta fase el docente presenta el tema al estudiante, realiza una exploración de los saberes que este posee de experiencias anteriores, si las hay. Desde luego verificando su nivel de razonamiento: “se expone la dirección que tomará el estudio con posterioridad y toda la observación que sea pertinente” (Corberán, 1989, p. 16).

Fase 2: Orientación dirigida. Posterior a la indagación anterior, el docente realiza un análisis del conocimiento que posee el alumno y procede a entregar las herramientas adecuadas “si se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento de nivel superior” (Vargas y Araya, 2013, p. 85).

Fase 3: Orientación libre. En esta fase los estudiantes logran expresar con palabras los procedimientos realizados, a partir de los resultados obtenidos realizan discusiones con sus compañeros para reforzar la labor efectuada. El docente debe ser orientador en la correcta utilización del vocabulario matemático.

Fase 4: Explicitación. En esta fase el docente propone problemas muchos más complejos al alumno debe consolidar los conocimientos alcanzados enfrentándose a la resolución de la situación expuesta, “el objetivo es la correcta consolidación de los conocimientos adquiridos” (Corberán, 1989, p. 17).

Fase 5: El estudiante es capaz de expresar lo aprendido del tema desde una visión general, integrando los conocimientos adquiridos durante el proceso, superada esta fase los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de conocimiento y están dispuestos a repetir la fase de aprendizaje en el nivel inmediatamente superior” (Corberán, 1989, p. 17).

Pensamiento geométrico y los programas implementados en Colombia.

La enseñanza de la geometría ha pasado por diversos cambios, y unos de los referentes más conocidos en la época reciente y quien ha estado presente en gran parte de la historia de las modificaciones y adaptaciones de la educación en Colombia es Carlos Eduardo Vasco, cuando en 1976 hizo parte de la creación de la primera gran reforma y nació un nuevo programa de matemáticas, convirtiéndose un punto de referencia para los docentes de época que enseñaban en secundaria, así lo recuerda Molano (2011):

Esos programas del 74 eran muy claros y fáciles de recordar: aritmética en 6º y 7º, que en ese momento todavía no se llamaban así; álgebra en 8º y 9º, y geometría analítica, trigonometría y cálculo en 10º y 11º, ahí fue cuando el cálculo se volvió obligatorio, lo que a mí me pareció un error; pero bueno, de todas maneras, nadie protestaba. (Molano, 2011, p. 172)

Tuvieron que pasar casi dos décadas para darse cuenta que habían grandes falencias en la enseñanza y aprendizaje: “uno de cada diez de las

escuelas entraban a la secundaria” (Molano, 2011, p. 175), uno debido a la poca capacitación de los docentes en primaria pero además, la forma en que se enseñaba matemáticas “en ese momento no había una didáctica para las matemáticas; simplemente la discusión era si uno debía seguir la psicología de Piaget o la de Skinner, era más predominante el conductismo” (p. 177).

En atención a lo cual, se formuló un nuevo enfoque, tratando de plantear una línea clara acerca competencias que los estudiantes deben alcanzar, desde el MEN (1998) a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos desde una perspectiva sistémica que los comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones. Con la puesta en marcha de los Lineamientos curriculares de matemáticas ahora se daba cumplimiento a la Ley General de Educación de 1994 en su Artículo 22, numeral C, indica MEN (1998) que, los objetivos específicos de la enseñanza y el aprendizaje en secundaria se deben encauzar en:

El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, lógicos analíticos, de conjuntos, de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana. (p. 9)

Desde allí en adelante, el desarrollo de los conocimientos geométricos tomó relevancia en la enseñanza y aprendizaje. Posteriormente, el MEN (2006) conforma el documento de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, un documento orientador que se deriva de los Lineamientos Curriculares, fue organizado por grupos de grados lo cual permite indicar los estándares que los estudiantes deben manejar.

Constituyen uno de los parámetros de lo que todo niño, niña y joven debe saber y saber hacer para lograr el nivel de calidad esperado a su paso por el sistema educativo y la evaluación externa e interna es el instrumento por excelencia para saber qué tan lejos o tan cerca se está de alcanzar la calidad establecida con los estándares. Con base en esta información, los planes

de mejoramiento establecen nuevas o más fortalecidas metas y hacen explícitos los procesos que conducen a acercarse más a los estándares e inclusive a superarlos en un contexto de construcción y ejercicio de autonomía escolar. (p. 9)

La propuesta de los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas surgen como un referente que contiene criterios claros en la educación de los estudiantes, el MEN (2006) resalta que estos, “permiten evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los y las estudiantes en el transcurrir de su vida escolar” (p. 12) considerando importante el conocimiento que se va adquiriendo en cada nivel, buscando potenciar el pensamiento matemático de los estudiantes, al establecer las competencias, también se establecen los fines y principios fundamentales de la educación en matemáticas.

También el (MEN, 2006) hace referencia a dos tipos básicos del conocimiento matemático: el conceptual lo describe como “conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el saber qué y el saber por qué” (p. 50). El procedimental como “las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente” (p. 50). Acorde a esta nueva perspectiva, estructural los tipos de pensamiento matemático, distribuidos en cinco grupos: numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio.

Con respecto al pensamiento geométrico los subdivide dos categorías: el pensamiento espacial y los sistemas geométricos y el segundo El pensamiento y los sistemas métricos o de medidas. El primero lo define como: “el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales” (p. 61).

En cuanto al pensamiento métrico el MEN (2006) se refiere como: “la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones” (p. 63). Por otra parte, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) nacen como un complemento que entrega el MEN en sus pautas para que las instituciones logren los objetivos de calidad educativa, tal como lo enuncia el MEN (2006) es “un conjunto de aprendizajes estructurantes que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar, desde transición hasta once” (p. 5), estas sugerencias son libres de tomar por cada Institución Educativa.

La Matriz de Referencia Matemática (MRM) se constituye en un instrumento basado en los Estándares Básicos de Competencias, el cual permite orientar los procesos de planeación de las clases, identificando cada uno de los aprendizajes que los estudiantes deben alcanzar. En la siguiente tabla se resumen las definiciones más relevantes de la Matriz de Referencia Matemática.

Tabla 7. *Definiciones de los componentes de la Matriz de Referencia Matemática*

Componentes de la Matriz de Referencia		Definición
Competencia		Es la capacidad que integra nuestros conocimientos, potencialidades, habilidades, destrezas, prácticas y acciones, manifestadas a través de los desempeños o acciones de aprendizaje propuestas en cada área. Podemos reconocerla como un saber hacer en situaciones concretas y contextos específicos. Las competencias se construyen, se desarrollan y evolucionan permanentemente de acuerdo con nuestras vivencias y aprendizajes.
Componente		Son las categorías conceptuales sobre las cuales se realizan los desempeños de cada área a través de situaciones problematizadoras y acciones que se relacionan con el contexto de los estudiantes.
Aprendizaje		Corresponde a los conocimientos, capacidades y habilidades de los estudiantes, atendiendo a la pregunta ¿qué procesos esperamos que adquiera el estudiante frente a las acciones pedagógicas propuestas en una evaluación, situación o contexto determinados?

Componentes de la Matriz de Referencia Definición

Evidencia	Son los productos que pueden observarse y comprobarse para verificar los desempeños o acciones a los que se refieren los aprendizajes. Se relaciona con la siguiente pregunta: ¿qué deben responder los estudiantes en las pruebas de Lenguaje y Matemáticas, de tal manera que nos permita confirmar las competencias, conocimientos o habilidades con los que cuentan?
-----------	--

Fuente: Elaboración propia basada en la información de la Matriz de Referencia de Referencia Matemáticas (MEN, 2016).

Por tal razón, el pensamiento geométrico resulta fundamental para el desarrollo de procesos de visualización, exploración y la comprensión del entorno, forjando la capacidad de entendimiento del individuo. El pensamiento geométrico se crea a partir de la exploración, reconocimiento de las formas, descripción de las propiedades de cada una de sus partes.

Pensamiento espacial y geométrico. Para De Miguel González (2015) “el pensamiento espacial describe no sólo la comprensión de los procesos espaciales sino también incluye elementos de conceptos espaciales, herramientas y métodos para la representación espacial, así como el proceso de razonamiento espacial” (p. 9).

A juicio de Guillén (2010), “concebimos la geometría como ciencia del espacio físico, del espacio en el que el niño vive y se desarrolla y que sirve como vehículo para desarrollar el pensamiento lógico” (p. 24). Los seres humanos construyen las relaciones espaciales en sus mentes y al contacto con los demás desarrolla ese conocimiento profundizando conceptos y relaciones geométricas.

Según el MEN (2006) se “contempla[n] las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas” (p. 61). Al respecto, Alsina et al. (1989) estructuran la definición de espacio desde tres perspectivas:

Tabla 8. *Nociones de espacio*

Filosófico	Físico	Psicológico
Espacio absoluto. Los objetos y las relaciones son independientes de la existencia del espacio.	Cualquier espacio atribuido al mundo exterior.	Cualquier espacio representado en la mente.
Espacio relativo. Determinado por la posición de los objetos.		

Fuente: Elaboración propia basada en información del libro *Invitación a la didáctica de la geometría*, Alsina et al. (1989, p. 84).

La noción de espacio en el aprendizaje de la geometría se puede concebir como la interacción de diversas habilidades como manejar el espacio, percibir, elaborar imágenes mentales entre otras,

[...] es un proceso cognitivo de interacciones. Desde un espacio intuitivo o sensorio-motor, que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales (Alsina et al., 1989, p. 87).

Importancia de los sólidos geométricos en la práctica escolar. Es indiscutible que mucha de la geometría ligada a los sólidos se encuentra en el contexto cotidiano del niño, por tanto, no se puede desconocer la familiarización que se tiene con la naturaleza y sus formas en las cuales se encuentra inmerso. Para Alsina et al. (1989) “el entorno natural siempre ha sido fuente de estudio e inspiración de la actividad humana” (p. 28). Al iniciar la actividad matemática en la escuela, esta debe ser precisa, en aplicar una geometría desde una concepción que abarque la realidad del niño, Bishop (1992, citado en Guillén, 2010) indica como “necesario extender las ideas espaciales que tienen los niños cuando llegan a la escuela, que provienen de su propio mundo espacial, y lograr introducir las habilidades básicas de matematización, clasificación, descripción y relación” (p. 29).

Estrategias didácticas para el aprendizaje en la enseñanza de la geometría en secundaria.

Concebir el pensamiento geométrico requiere conocer una serie de conceptos, axiomas y razonamientos, así como, capacidades de representación e imaginación espacial que resultan tediosos para el estudiante cuando se entregan contenidos magistrales. En una reflexión sobre la función de las estrategias didácticas en el aprendizaje y la enseñanza de la geometría y el papel fundamental del docente, De Camilloni et al. (2007) señalan lo que sigue: “La enseñanza es, finalmente, la acción de un docente” (p. 141) basada en la creación de situaciones para que la enseñanza sea exitosa, por esto, resulta importante utilizar técnicas que ayuden a elevar el interés por parte de los alumnos. Diversos autores como Brousseau (1986; 2007); D’Amore (2005; 2008), entre otros, han definido la finalidad de proporcionar diversas estrategias de aprendizaje para facilitar el conocimiento.

Didáctica

Para esta investigación se harán algunas conceptualizaciones relevantes sobre el papel indudable de la didáctica respecto al aprendizaje de la geometría. Juan Amós Comenio es primer referente y a quien se le atribuye el inicio del proceso de la transformación de la enseñanza y del aprendizaje de los nuevos conocimientos. Comenius (citado por Zuluaga, 1992) “soñaba con un conocimiento integral quien al escribir una *Gran Didáctica* y sus tratados especiales contribuyó a crear una ciencia de la educación y una teoría didáctica” (p.102). Según Comenius (citado en D’Amore, 2008) “un método único basta para enseñar todas las materias... las artes, las ciencias y las lenguas” (p. 89).

También, Zuluaga et al. (2003) afirman que “La didáctica es el conjunto de conocimientos referentes a enseñar y aprender que conforman un saber. En la didáctica se localizan conceptos teóricos y conceptos operativos que impiden una asimilación de la didáctica a meras fórmulas” (p. 38). De acuerdo con Gutiérrez y Jaime (1998), “podemos decir que la Didáctica de las Matemáticas se interesa por todo aquello que influya en el aprendizaje

y comprensión de las matemáticas, no sólo en el contexto educativo, sino también fuera de él” (p. 1). Por su parte, De Camilloni et al. (2007) señalan que

La didáctica es una disciplina que habla de la enseñanza y, por ello, que se ocupa del estudio y el diseño del currículo, de las estrategias de enseñanza, de los problemas de su puesta en práctica y de la evaluación de los aprendizajes y de la enseñanza. (p. 18)

Retomando las anteriores definiciones, se puede expresar que, la didáctica, son todos aquellos elementos y recursos necesarios a los cuales se puede recurrir para que el proceso de formación de competencias sea el adecuado, llegando a cumplir con los objetivos que el docente planea en su práctica educativa, pero también, el conocimiento que el alumno desea obtener de su interacción con el medio educativo.

Situación didáctica y situación didáctica. De acuerdo con Brousseau (2007), una situación “es un entorno del alumno diseñado y manipulado por el docente” (p. 17), dicha situación se convierte en una ruta para docente quien inicialmente tiene la intención de enseñar un conocimiento matemático y elige el qué y cómo quiere transmitir dicho conocimiento a sus alumnos, para Brousseau (2007, p. 31). La situación didáctica se presenta cuando se da la interacción con el alumno y un medio para dar solución a dicha situación generada por el docente, “el aprendizaje se da de manera natural, sin intención didáctica” (Brousseau, 2007, p. 31). Para Parraguez et al. (2015) “como el medio es impersonal, no tiene ninguna intención didáctica: no desea enseñarle nada al alumno. Por eso este tipo de situación recibe el nombre de “didáctica” (p. 411).

La enseñanza y aprendizaje de la matemática desde la didáctica. Para D’Amore (2005) la didáctica “de una parte es “artesano” (el docente que prepara y elige las lecciones los ejemplos...) y de otra parte es el arte (elección de variables comunicativas, modalidades para captar la atención para motivar) (p. 11). Por lo anterior, el docente tiene la responsabilidad de reestructurar la información que intenta transmitir para convertirla en herramientas útiles y prácticas para los jóvenes. “El docente debe

fortalecer sus convicciones pues el objetivo principal es crear situaciones (bajo la forma de clases, actividades, objetos, ambientes, juegos) para una mejor enseñanza de la matemática” (D’Amore, 2005, p. 11).

De la misma manera, D’Amore (2008) considera que la didáctica de la matemática “es el arte de concebir y de crear condiciones que pueden determinar el aprendizaje de un conocimiento matemático por parte del individuo” (p. 90), esto en la práctica docente, implica aprender y comprender las necesidades de acuerdo a las cualidades de los alumnos para adecuar la enseñanza favoreciendo la motivación hacia el aprendizaje, el compromiso del profesor como un artista, ofreciendo sus mejores pinceladas en la creación de procesos significativos y coherentes con el medio social en el cual interactúa. “El arte del docente está entonces en la organización de una relación entre alumno y el *milieu*” (D’Amore, 2008, p. 90) y, en consecuencia, “si se mejora la enseñanza también se mejora el aprendizaje” (D’Amore, 2005, p. 11).

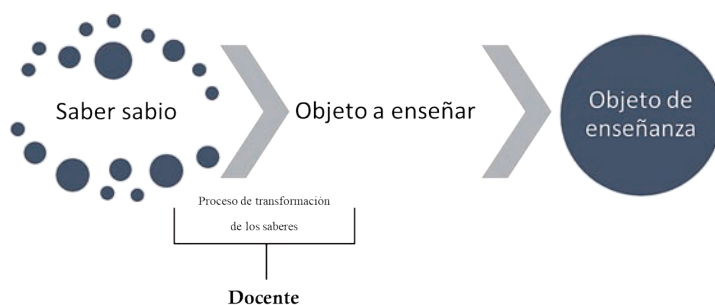
Jiménez (2011) refiere que “la didáctica de la matemática está relacionada con la actividad matemática misma y el estudio de las transformaciones de la Matemática, ya sea desde la investigación o desde la enseñanza” (p. 7). El docente en su rol de investigador debe crear acciones didácticas y convertirlas en oportunidades para que los alumnos construyan los saberes matemáticos.

La didáctica como mediadora en las dificultades del aprendizaje de las matemáticas. El rendimiento académico en matemáticas muchas veces se ve frustrado por la predisposición que el alumno trae desde sus experiencias previas, ya sea desde el seno de sus familias donde cuentan sus malas experiencias con esta materia o también por sus experiencias vivenciadas en el aula en ciclos anteriores. Estas malas experiencias generan ansiedad la cual se ha definido como “un sentimiento de tensión y ansiedad que interfiere con la manipulación de números y la resolución de problemas matemáticos en... la vida cotidiana y situaciones académicas” (Richardson y Suinn, 1972, citado en Dowker et al., 2016, p. 1).

Resulta significativo crear relaciones que apoyen el proceso de aprendizaje matemático “los padres y maestros podrían intentar modelar actitudes positivas hacia las matemáticas y evitar expresar negativas a los niños” (Dowker et al., 2016, p. 10), teniendo en cuenta el componente afectivo y la didáctica como fundamentales en la creación situaciones encaminadas a fomentar confianza en los alumnos que conlleven a la resolución de problemas matemáticos.

Transposición didáctica (Chevallier). La transposición didáctica se puede establecer como un proceso para adaptar los saberes, el arte de lograr las alternativas didácticas para enseñar un contenido. Desde el punto de vista de Chevallard (1998) es el “conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza es denominado transposición didáctica” (p. 16) significa entonces que, se debe recorrer por diferentes fases para lograr generar una experiencia a partir de contenidos transformados por el docente dando un significado único a la comunicación de los saberes, como se observa en la siguiente figura.

Figura 2. *Transposición didáctica*



Fuente: Elaboración propia basada en el libro *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado* (Chevallard, 1998).

En síntesis, por una parte, toma lo implícito (saber sabio) como todas las definiciones y propiedades que están contenidos en los textos, en la siguiente fase se toman los objetos del saber escolar de acuerdo con

los planes y programas, y partiendo de estos el docente clasifica los que crea conveniente para el contexto, los adecúa (didáctica), los organiza (conocimiento implícito) con relación a su conjetura de aprendizaje de los alumnos. Sin embargo, hace énfasis en la vigilancia epistémica para evitar los riesgos, que, en efecto, de las diferentes transformaciones se desvirtúe el contenido, por tanto, el docente debe ser autocrítico realizando un análisis a las adaptaciones cuando se hace el proceso constructivo de la formulación didáctica (Chevallard, 1998).

Geometría y el arte

La geometría es una de las áreas más versátiles, donde se pueden utilizar diferentes herramientas para una mejor comprensión de sus conceptos, hoy día existen distintas alternativas desde los materiales manipulables hasta softwares geométricos especializados en desarrollo de figuras bidimensionales y tridimensionales, permitiendo al alumno una exploración, experimentación e interacción con los objetos logrando más claramente observar sus características demostrables. Guillen (2010) agrega:

Ver la geometría como un inventario de formas, esto es, el punto de vista de las artes plásticas supone que la secuencia de actividades se organice al centrarse en la observación y análisis de formas que se presentan en la naturaleza (cristales...), en la arquitectura (simetría de las iglesias góticas...), en el arte (ornamentos), etc. (p. 29)

El arte es una forma de concretizar la geometría, logra ser un recurso que el docente pocas veces lo utiliza a su favor en el proceso de enseñanza, sin embargo, por sus características puede llegar a ser muy innovador para trabajar la geometría mediante proyectos acordes al medio. De este modo, permite que la geometría entre al aula a través de diversos recursos artísticos. Flores (2018) sugiere en su artículo que trabajar los poliedros a través de materiales sencillos permite desarrollar el sentido espacial en los estudiantes. Resalta también que, la construcción de lámparas puede contener una gran riqueza para desarrollar y profundizar sobre la construcción de sólidos para analizar sus cualidades.

La relación entre la geometría y el arte ha estado presente a lo largo de la historia a través de figuras elaboradas en papel (papiroflexia) y madera, grabados, esculturas, pinturas. Para Padrón (s.f.) “a conexión entre arte y poliedros ha sido realmente fructífera en el Renacimiento. Muchos de los grandes artistas de la época utilizaron los poliedros como un instrumento para desarrollar ciertas técnicas relacionadas con la perspectiva” (p. 9).

Buckminster (1982) es llamado el poeta de la geometría, un arquitecto que se hizo famoso por sus hermosas construcciones donde predominaban las formas geométricas. Sus construcciones con formas poliédricas truncadas, cuboctaedros, poliedros, icosaedros (Figura 3), entre otros, demostrando así, las ventajas que ofrece la geometría, no se puede quedar en los libros en una explicación sin fundamento alguno, sino que, se pueden desarrollar ideas, inventar y soñar, además, integrar en otras áreas.

Buckminster (1982) en su libro *Exploraciones en la geometría del pensamiento*, escrito con un enfoque matemático relata la importancia de los sistemas sensoriales a la hora de aprender geometría “el niño aprende sensorialmente (tacto, olfato, oído, vista) cada experiencia” (p. 4). Además, agrega que “los niños tienen un impulso innato primero de escuchar subjetivamente, encontrar orden y comprender integrativamente y sinérgicamente” (p. 4).

De igual manera, Senechal (2013) resalta que “la geometría sólida prácticamente ha desaparecido de la escuela, la construcción de modelos se ha relegado al jardín de la infancia. Las razones de esta desafortunada tendencia incluyen falta de capacitación docente y presiones para enseñar habilidades comprobables” (p. 5). Hace referencia a explorar con la infinidad de posibilidades que ofrecen las formas geométricas para hacer que la geometría sea accesible a los estudiantes mediante construcciones artísticas, así mismo “explorando los poliedros en la naturaleza” (p. 16), por lo general, después de un poco de experimentación, los estudiantes descubrirán tetraedros, octaedros, las bipirámides triangulares, pentagonales y el icosaedro” (p. 16).

La utilización de recursos manipulables favorece los aprendizajes en el aula permitiendo reflexionar y comunicar la información observada desde la experimentación, a su vez interpretarla a través de representaciones artísticas como dibujos, cuadros, maquetas entre otros, a partir de materiales que rodean el entorno del estudiante.

Figura 3. Modelos de poliedros impresos en 3D



Fuente: Tomada de *Visualizing mathematics with 3D printing* (Segerman, 2016).

Por otra parte, Segerman (2016) es un investigador matemático, que por medio de la bidimensionalidad y tridimensionalidad ha convertido la complejidad de la geometría en arte, usando impresiones en 3D logra realizar esculturas de poliedros (Figura 3). Para Segerman (2016), cuando se construyen figuras se deben relajar algunas reglas para realizar poliedros regulares, las caras tienen que ser polígonos regulares no tienen que ser iguales siempre, de esta manera se consiguen los prismas y los antiprismas (pp. 29-30).

Segerman(2016) describe que, para comprender mejor la bidimensionalidad es necesaria la tridimensionalidad “cuando un amigo vive en un plano bidimensional y se le quiere mostrar ese plano en el que vive, así que, se le tiene que mostrar algo dentro de su plano” (p. 36). Para ello, proyecta una sombra generada por una luz sobre un objeto geométrico (Figura 3) significa, entonces, que la sombra generada permite observar en este caso el poliedro en dos dimensiones a la vez, pero además observar cómo se ve la figura geométrica tridimensional en la mente. Basado en el diseño de objetos geométricos, crea lámparas que al estar encendidas proyectan sus formas permitiendo apreciar con detalles sus formas y proyecciones 2D, 3D y 4D (como se observa en la Figura 3).

Segerman (2016) muestra la gran riqueza de la geometría en su trabajo, las grandes obras que se pueden desarrollar junto con los estudiantes profundizando un tema que se vuelve complicado cuando se limita a dar conceptos y axiomas, pero con un poco de imaginación y creatividad se abren puertas para estudiar los poliedros a profundidad, apreciando sus dimensiones en todo su esplendor. En tal sentido, Segerman, (2016) afirma que “realizar un modelo tridimensional de un objeto matemático es una excelente manera para aprender sobre este” (p. 158).

Metodología

Los aspectos fundamentales de la metodología asumida en la investigación, destacando: enfoque de la investigación, tipo de investigación, línea de la investigación, la contextualización y población, etapas de la investigación y los instrumentos empleados para la recolección de la información.

De acuerdo con Ugalde y Balbastre (2013) la metodología de investigación:

Hace referencia a todas las decisiones que el investigador toma para alcanzar sus objetivos, las cuales se enfocan en aspectos tales como el diseño de la investigación, la estrategia a utilizar, la muestra a estudiar, los métodos empleados para recoger los datos, las técnicas seleccionadas para el análisis de los resultados y los criterios para incrementar la calidad del trabajo, entre otras. (p. 180)

En consecuencia, de lo expuesto la metodología realiza una descripción de los métodos que se utilizarán y desarrollarán en la investigación, con el propósito de dar respuesta a la pregunta de investigación, nadie tiene un parámetro establecido para llevar a cabo una investigación, puede nacer en forma accidental, una experiencia significativa, un sueño, de una discusión, en fin todo aquello que requiera de una deducción, para Baena (2017): “La metodología ejerce el papel de ordenar, se apoya en los métodos, como sus caminos y éstos en las técnicas como los pasos para transitar por esos caminos del pensamiento a la realidad y viceversa” (p. 31).

A continuación, en la Tabla 9, se presentan aspectos fundamentales de la metodología cualitativa, la cual orientará la implementación de la propuesta, se tienen en cuenta a autores como Arraiz (2014), Galeano (2004) y Hernández-Sampieri, et al. (2014), en sus concepciones del enfoque cualitativo, también Lewin (1946) y Zalazar (2006) con sus aportes en el tipo de investigación-acción y finalmente la Línea de investigación de la Maestría en Didáctica de la Matemática de la UPTC, que, en esencia, plantea una reflexión a construir conocimiento mediante estrategias a los diferentes problemas que se presentan dentro del aula en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Tabla 9. Aspectos fundamentales de la metodología

Aspecto	Descripción	Autores que fundamentan la metodología
Enfoque de la investigación	Cualitativo	<i>Teoría fundamentada en los datos: un ejemplo de investigación cualitativa aplicada a una experiencia educativa virtualizada en el área de matemática</i> (Arraiz, 2014). <i>Diseño de proyectos en la investigación cualitativa</i> (Galeano, 2004). <i>Metodología de la investigación.</i> (Hernández-Sampieri et al., 2014).
Tipo de la investigación	Investigación acción	<i>Metodología de la investigación: propuesta, anteproyecto y proyecto</i> (Lerma González, 2016). <i>La Investigación Acción Participativa (IAP) en los estudios de psicología política y de género</i> (Obando -Salazar, 2006). <i>Action Research and Minority Problems</i> (Lewin, 1946).
Línea de investigación	Conocimiento y aplicación de la didáctica de la matemática. Eje: Estrategias para la enseñanza de la matemática	<i>Acuerdo 068</i> (UPTC, 2016). Didáctica de la matemática e investigación. (Rico y Sierra, 2000). <i>The flipped classroom: Cómo convertir la escuela en un espacio de aprendizaje</i> (Tourón, Santiago y Díez, 2014). <i>Estrategias de enseñanza y aprendizaje</i> (González Ornelas, 2008). <i>Matemática: estrategias de enseñanza y aprendizaje</i> (Ortiz Rodríguez, 2001).

Fuente: Elaboración propia.

La investigación cualitativa será integrada para este estudio como rumbo para analizar la forma en que los estudiantes de grado séptimo construyen e interpretan figuras tridimensionales a partir de elementos de su entorno, tratando de llevar la realidad a la práctica en el aula, utilizando estrategias que permitan generar un lugar de aprendizaje construido por todos los actores del proceso educativo.

Población y muestra

Para desarrollar la propuesta investigativa de enfoque cualitativo se tendrán en cuenta a estudiantes que cursan grado séptimo en el año 2020, con el objetivo de mejorar las prácticas educativas en el aula, y contribuir a la reflexión sobre las formas de enseñar y aprender geometría. A continuación (Tabla 10) se hace una descripción de la población objeto de estudio.

Tabla 10. *Población y muestra*

Aspecto	Descripción
Población universo	1,156 estudiantes de grado transición a grado 11.
Población objeto de estudio	86 estudiantes de grado séptimo de la institución educativa Abraham Lincoln.
Muestra	32 estudiantes del grado séptimo jornada tarde con edades de 12-15 años equivalente al 27,52 % de la población objeto de estudio.
Contexto	Zona urbana de Villavicencio, Meta, barrio El retiro.

Fuente: Elaboración propia.

Fases de investigación

Esta investigación se centra en fortalecer el pensamiento geométrico en los estudiantes de grado séptimo, a través del desarrollo de actividades mediadas por el diseño de lámparas con formas geométricas, que permitan mejorar las habilidades espaciales, dando prioridad a la

creatividad con representación de formas que encuentran en su entorno. Para la recolección de información se utilizarán distintos instrumentos relacionados en la siguiente tabla:

Tabla 11. *Fases de la investigación*

Fase de investigación	Objetivo específico	Instrumento
Diagnóstica	Diagnosticar las competencias del pensamiento geométrico en los estudiantes del séptimo grado de la institución educativa Abraham Lincoln.	Cuestionario diagnóstico: Para conocer el nivel de terminología con respecto a la geometría a estudiantes de séptimo grado.
Diseño y trabajo de campo	Construir recursos didácticos para la enseñanza de la geometría en estudiantes del séptimo grado de la institución educativa Abraham Lincoln.	Diario de campo: Obtener información relevante del proceso guiado. Se realizarán 5 sesiones por plataforma Zoom donde se orientarán la construcción de las lámparas con los materiales como papel, cartón o cartulina. Además, se trabajarán los temas objeto de fortalecimiento. Talleres: Con el fin de evidenciar el proceso de aplicación de los recursos didácticos. Cuestionario de salida: Para conocer si la aplicación de la estrategia obtuvo resultados positivos con respecto a la terminología en geometría en estudiantes de séptimo grado.
Análisis y sistematización	Catalogar la propuesta encaminada a mejorar habilidades en el pensamiento geométrico en los estudiantes del grado séptimo de la institución educativa Abraham Lincoln.	Organización y análisis de la información obtenida antes, durante y después de la aplicación de la propuesta.

Fuente: Elaboración propia.

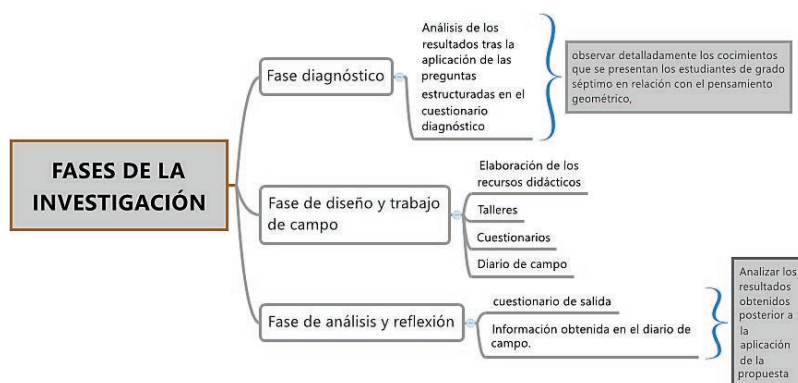
Se realiza un esbozo general de las fases de la presente investigación, centrada en fortalecer el pensamiento geométrico en los estudiantes

del grado séptimo, a través del desarrollo de actividades de aprendizaje enfocadas en la construcción de lámparas con formas geométricas. Así mismo, se señalan los diversos instrumentos, métodos y técnicas para la recopilación de la información en cada una de las etapas de ejecución de la propuesta.

Análisis e interpretación de resultados

La investigación realiza un análisis detallado de cada uno de los instrumentos seleccionados para la recopilación de información relevante en cada una de las tres fases que se plantearon en el trabajo investigativo. Se realiza la sistematización de los datos organizándose en cifras estadísticas de cada una de las actividades propuestas, posteriormente lograr una interpretación al fenómeno de estudio.

Figura 4. *Fases de la investigación*



Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se realiza el análisis de cada una de las fases establecidas por el investigador, iniciando con la descripción del trabajo realizado en la fase de diagnóstico, los instrumentos aplicados y la información obtenida, posteriormente la fase de diseño y trabajo de campo, donde se presenta la intervención en el aula y finalmente la fase de análisis y

reflexión sobre todo el proceso realizado detallando la viabilidad de la propuesta presentada.

Fase de diagnóstico

A continuación, se exponen los resultados obtenidos en la fase de diagnóstico en la cual se identifican las características de la problemática.

Tabla 12. *Fase de diagnóstico*

Fase de investigación	Instrumento
Fase de diagnóstico	Cuestionario: El cuestionario diagnóstico tiene como objetivo averiguar el nivel de conocimiento en cuanto al pensamiento geométrico, para ello se plantearon preguntas relacionadas con poliedros, clasificación, elementos de los poliedros, pirámides y prismas y fórmula de Euler.

Fuente: Elaboración propia.

En este apartado se realiza un análisis de los resultados tras la aplicación de las preguntas estructuradas en el cuestionario diagnóstico observando detalladamente los conocimientos que se presentan los estudiantes de grado séptimo en relación con el pensamiento geométrico, tanto en forma general como a manera individual. Esta verificación ayuda al investigador a orientar el estudio, crear estrategias y plantear acciones que permitan mejorar conocimientos y habilidades del pensamiento geométrico.

1. Adriana tiene un papel de forma rectangular y lo recorta en tres partes, como lo muestra la imagen:

Figura 5. *Figura original*



Fuente: Elaboración propia.

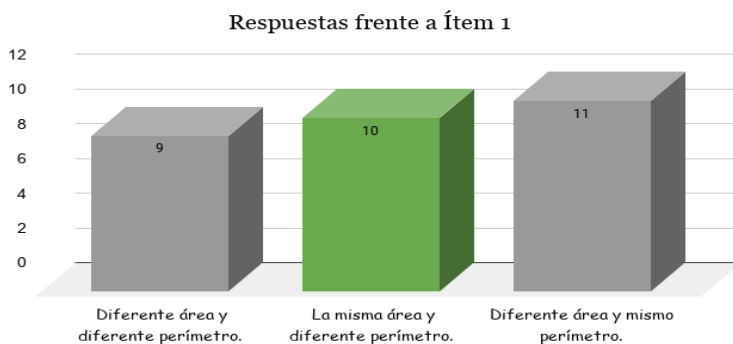
Con las partes recortadas, ella arma la siguiente figura:

Figura 6. *Figura armada*



Fuente: Elaboración propia.

Figura 7. *Resultados del cuestionario diagnóstico*



Fuente: Elaboración propia.

En esta pregunta se buscó conocer el sí estudiante identifica la diferencia entre área y perímetro en figuras bidimensionales, se observa en la gráfica que 10 estudiantes contestaron correctamente lo cual representa en la figura un 33.3%, 20 estudiantes que corresponde a 66.7 % no identifican la diferencia entre perímetro y área, se concluye que en general el grupo presenta dificultades en el tema.

2. El siguiente cubo tiene un volumen de 3 m^3



Si el siguiente sólido está compuesto por cubos de mismo tamaño: ¿Cuál es el volumen del sólido?

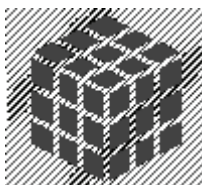
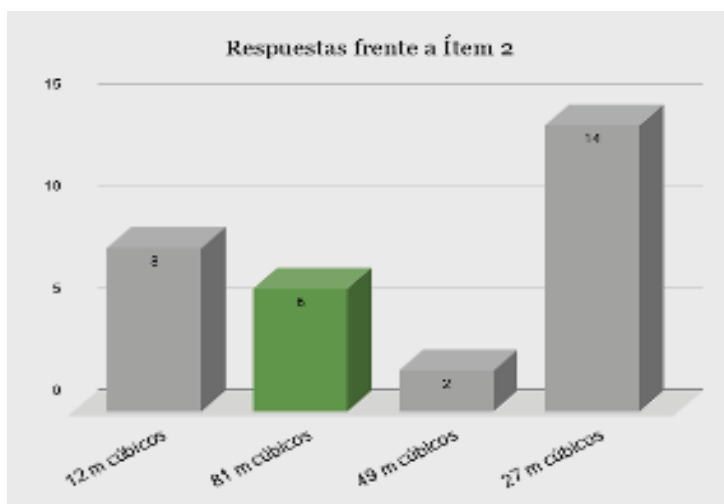


Figura 8. Resultados del cuestionario diagnóstico. Respuesta frente al ítem 2



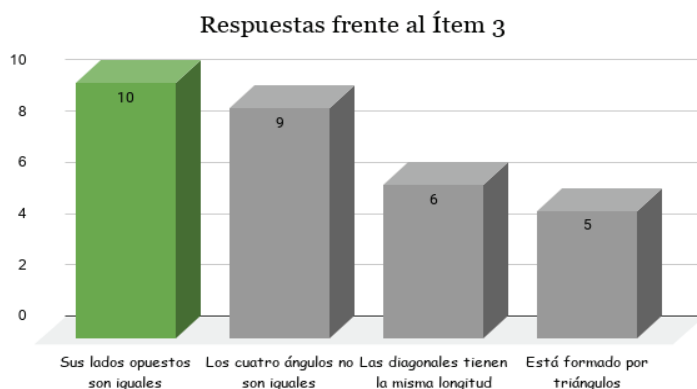
Fuente: Elaboración propia.

En este punto se buscó obtener el nivel de análisis que tienen los estudiantes en la solución de situaciones relacionadas con el volumen de sólidos geométricos, en la figura se observa que el porcentaje de aciertos sólo llegó a un 20 % mientras que un 80 % lo hizo incorrectamente, además que un 46.7 % de los estudiantes contestaron erróneamente 27 m³ se puede inferir que no tomaron en cuenta el dato del volumen del cubo dado en el enunciado de la pregunta. Y que hallaron el volumen del sólido contando las unidades que este contiene.

3. Explicar cuál de las siguientes frases es más relevante para caracterizar.



Figura 9. Resultados del cuestionario diagnóstico. Respuesta frente al ítem 3



Fuente: Elaboración propia.

Con este ítem se pretendió saber el conocimiento de los alumnos sobre de las propiedades de una figura plana, observando la figura se puede percibir que 33.4 % que 10 estudiantes fueron capaces de identificar propiedades y conceptos matemáticos, pero el restante 66.7 % del grupo no tiene claro dichas propiedades lo cual llevó a contestar desacertadamente, se puede concluir que desconocen las propiedades de un rectángulo donde los lados opuestos son paralelos, que los ángulos en este caso no son relevantes puesto que hay otro cuadrilátero que cumple con esta característica.

4. Observa las figuras 1, 2 y 3 y describe las diferencias con un tetraedro (figura 4):

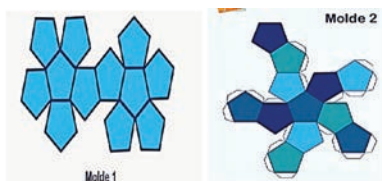


En esta pregunta se pretendió que los estudiantes describieron las diferencias entre las figuras 1, 2 y 3 y las propiedades más relevantes que describe el octaedro (figura 4), para esto el estudiante determina las propiedades de la figura a través de un proceso visual de un todo de la figura, en el análisis de las respuestas dadas por los 30 estudiantes, solo el 30 % acertaron en la respuesta, mientras que el 70 % no logró responder acertadamente debido a que muy probablemente se desconoce los ángulos diedros que se forman en sus vértices.

5. Observa los dodecaedros.



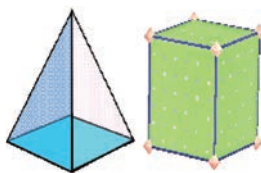
Carla y Wilson deben hacer la figura tridimensional, buscan en internet opciones, Carla cree que el molde 2 es el correcto, pero Wilson cree que el molde correcto es el Molde 1.



La temática abordada en esta pregunta corresponde al desarrollo de un poliedro correspondiente a la superficie que resulta al extender sobre el plano, una figura tridimensional convertir en una figura bidimensional que conlleva a observar características de los polígonos que la conforman. Evidenciando en los resultados que 12 de los estudiantes contestaron correctamente reconociendo que los dos moldes son aptos para construir el dodecaedro, 9 estudiantes marcaron que la opción de Wilson era la

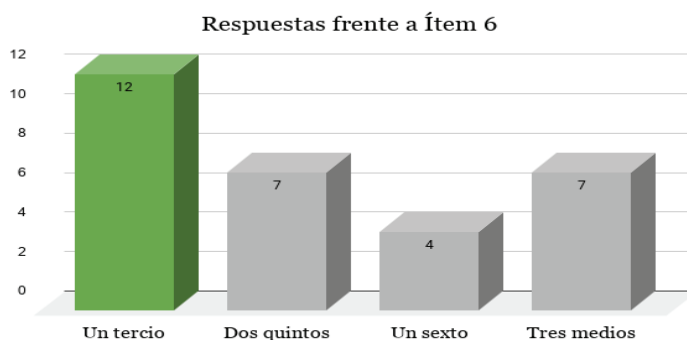
correcta, siete estudiantes creen que la opción de Carla es la correcta y dos estudiantes contestó que ninguno de los moldes es apropiado para la construcción del sólido. De esta forma se concluye que se presentan dificultades en cuanto a la temática.

6. Las bases de dos cajas son cuadradas y congruentes, la longitud del lado de la base en 9 cm y la altura 30 cm.



Luego de hallar el volumen la Fig. 1 es de 810cm^3 y la Fig.2 2430 cm^3 respectivamente, si lo comparamos por medio de una razón, la que mejor opción representa la situación es:

Figura 10. Resultados del cuestionario de diagnóstico. Respuesta frente al ítem 6

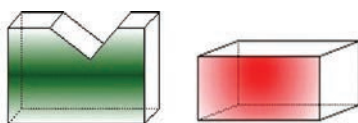


Fuente: Elaboración propia.

En esta pregunta se evidencia que el 40 % de los estudiantes relacionan conocimientos del pensamiento variacional para resolver una situación geométrica, pero el restante 60 % contestó de manera errónea por tanto

no tiene claro qué hacer frente a la argumentación. Se concluye que en general el grupo presenta falencias con respecto al tema.

7. ¿Qué tipo de poliedro son los siguientes sólidos?



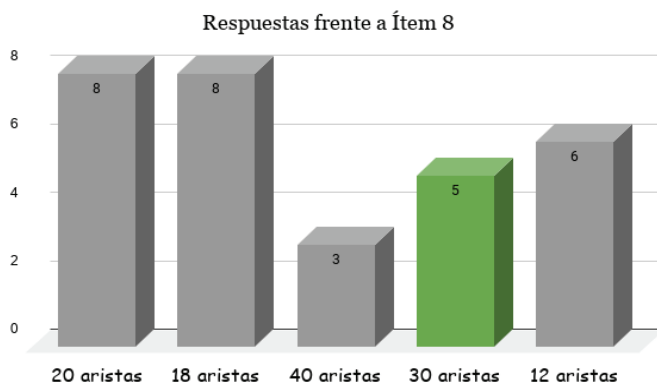
En este punto se evidencia que el 40 % de los estudiantes identifican la diferencia entre un poliedro cóncavo. Algunas de sus caras no pueden apoyarse en un plano, y convexo todas sus caras pueden apoyarse sobre un plano, pero el 60 % de los estudiantes no identifican la diferencia respecto a esta característica de los poliedros. Se concluye que el grupo en general presenta dificultades frente al tema.

8. Leonard Euler (1707-1783) fue uno de los más grandes matemáticos. Fue el creador de la fórmula que, si C representan el número de caras de un poliedro, A representa el número de aristas y V el número de vértices, entonces se cumple que $C + V - A = 2$.



Aplicando la fórmula de Euler para determinar el número de aristas de la anterior figura, se puede concluir que el dodecaedro tiene:

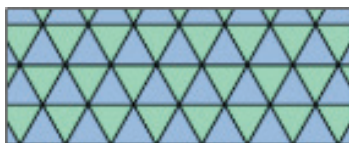
Figura 11. Resultados de cuestionario diagnóstico. Respuesta frente al ítem 8



Fuente: Elaboración propia.

La temática abordada en esta pregunta corresponde a el número de aristas que contiene una figura tridimensional en este caso un dodecaedro, el estudiante podía realizarlo de dos maneras de resolver la situación planteada, observando la figura y contando las aristas o aplicando la fórmula de Euler. Solo cinco estudiantes respondieron correctamente que se representa en la gráfica con un 16.7 %, los restantes 25 estudiantes no lograron identificar la cantidad de aristas del dodecaedro concluyendo que el concepto de arista no está claro, ni la forma de determinarla.

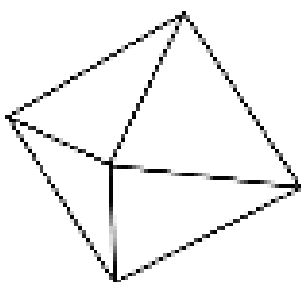
9. Algunas formas poligonales tienen la propiedad de recubrir completamente un plano sin dejar espacios, cuando un polígono cumple con esas características se dice que tesela el plano. Para ello es necesario que las uniones de todos los vértices sumen 360° .



Los tres polígonos regulares que cumplen esta condición son:

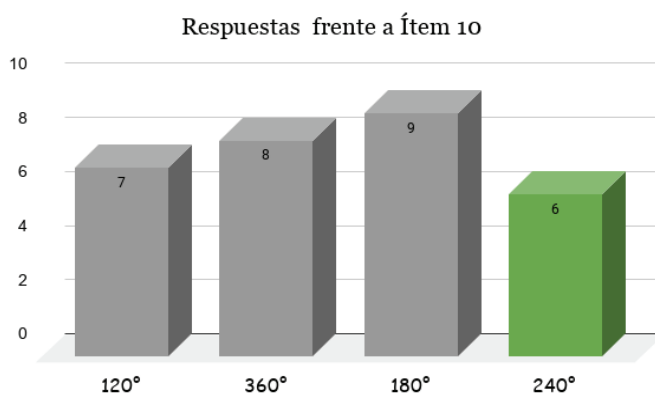
En este punto se buscaba que el estudiante identificará la regularidad de figuras planas que logren cubrir una superficie sin dejar espacios, solo el 23,3 % contestaron correctamente, pero el 66.7 no logró identificar las tres formas que cumplen con esta condición, concluyendo que el grupo en general no tiene aún una modelización acerca de las características que forman estos patrones.

10. Uno de los cinco sólidos platónicos es el octaedro.



Algunas de sus características es que, en cada vértice confluyen cuatro aristas y la suma de los ángulos que allí se forman suman:

Figura 12. Resultados de cuestionario diagnóstico. Respuesta frente al ítem 10



Fuente: Elaboración propia.

En este punto se aborda la temática de los elementos de un poliedro en este caso en específico los ángulos diedros que concluyen en un vértice, es este caso observando la imagen del octaedro solo 6 estudiantes contestaron correctamente y el 80 % lo resolvió en forma incorrecta por tanto se concluye que la gran mayoría de los estudiantes desconocen las características principales de una figura tridimensional.

Fase diseño y de trabajo de campo

Esta fase está conformada por cinco sesiones, cada sesión se explica en forma clara la temática a trabajar, al igual que se facilita el material didáctico que se diseñó para la intervención, cada sesión contiene un taller que se desarrolla a la par donde se plantean situaciones geométricas que el estudiante debe resolver ayudado por los recursos didácticos entregados, además de las orientaciones que el docente investigador realice en cada sesión. Como parte del cierre de la intervención se aplicará un cuestionario de salida que busca evidenciar si la aplicación de la propuesta generó el impacto esperado de los recursos didácticos creados para abordar el desarrollo de habilidades cognitivas asociadas a la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

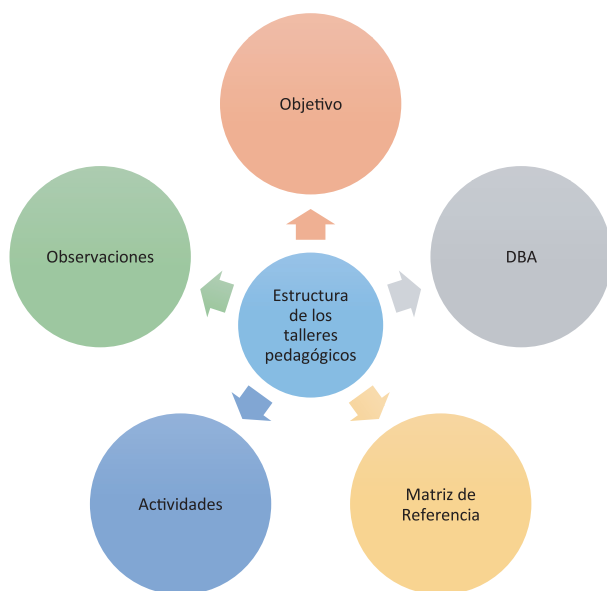
Tabla 13. *Instrumentos utilizados en la fase 1*

Fase de la investigación	Instrumentos
Diseño y trabajo de campo.	Talleres: Como instrumento con actividades elaboradas por los estudiantes del grado séptimo en cada sesión planeada para el trabajo de campo.
	Diario de campo: Obtener información relevante del proceso guiado durante las cinco sesiones por plataforma Zoom, se registra cada detalle del comportamiento de los estudiantes para luego realizar una reflexión profunda y detallada sobre el trabajo desarrollado.

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se describen los talleres pedagógicos aplicados en cada una de las sesiones del trabajo de campo, observando cada una de las acciones, específicamente sobre la labor y posición de los estudiantes frente a la estrategia de enseñanza propuesta por el investigador encaminado a potenciar el pensamiento geométrico.

Figura 13. *Estructura de los talleres pedagógicos*



Fuente. Elaboración propia.

Talleres pedagógicos

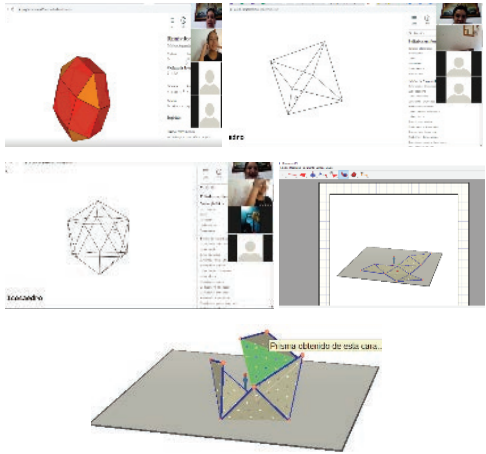
En el primer taller pedagógico se realiza con los estudiantes una explicación detallada del trabajo a realizar, mediante programas de geometría dinámica como Polyhedra y Geogebra se expone las representaciones de los distintos tipos de sólidos a trabajar, como apoyo para la representación de modelos y conceptos de cada una de las estructuras a construir. Los grupos de trabajo estarán conformados por máximo 4 estudiantes, se les darán las orientaciones generales del trabajo a realizar para evitar incertidumbres en el desarrollo de la actividad planteada, se realiza una

verificación de los materiales que fueron solicitados previamente dando inicio con la primera parte del diseño y construcción de las lámparas.

El taller correspondiente a esta sesión contiene una introducción de cada temática, también acompañado de gráficas para orientación de la actividad a realizar a medida que avanza con la utilización del material didáctico.

Tabla 14. *Ficha técnica del taller pedagógico, primera sesión*

Taller pedagógico	
DOCENTE: Nayibe Gómez	FECHA:
DURACIÓN: 2 horas	
OBJETIVO: Familiarizar a los estudiantes con poliedros con un solo tipo de polígonos (regulares).	
DBA: Observa objetos tridimensionales desde diferentes puntos de vista, los representa según su ubicación y los reconoce cuando se transforman mediante rotaciones, traslaciones y reflexiones.	
Matriz de Referencia Matemática 7° COMUNICACIÓN	APRENDIZAJE: Reconocer características de objetos geométricos y métricos.
	EVIDENCIA: Identificar relaciones entre figuras bidimensionales y tridimensionales.
	Descripción de actividades En la primera sesión se realiza presentación e introducción a los estudiantes del tema objeto de estudio, se explica cada una de las actividades propuestas para la intervención, el objetivo que se espera cumplir con el desarrollo de las actividades. Mediante geometría dinámica específicamente la aplicación Cabri 3D y Polyhedra, se realiza una exposición de los distintos tipos de poliedros, así como sus características generales. Estas aplicaciones permiten observar el truncamiento de un sólido platónico. Se hace referencia a los sólidos arquimedianos, dando a conocer que siete de estos sólidos se obtienen truncando sólidos platónicos como el cubo octaedro, el dodecaedro truncado entre otros.

ACTIVIDADES	Se presenta de la misma forma el desarrollo en el plano de una figura tridimensional mediante la aplicación Cabri.  Fuente: Elaboración propia Cada uno de los estudiantes buscó en sus casas formas como las vistas en la actividad anterior. Se les propuso que dibujaran la que creían más interesantes.
--------------------	---

Fuente. Elaboración propia.

Se relaciona el diario de campo 1 el cual utilizó el investigador como instrumento para la observación durante el desarrollo del taller pedagógico en la primera sesión del trabajo de campo, para un posterior análisis y reflexión sobre aspectos relevantes durante la implementación de la propuesta para estudiantes de séptimo grado.

Fase de análisis y reflexión

En esta fase se implementa el análisis de la información obtenida posterior a la aplicación del cuestionario de salida, además la caracterización realizada en el diario de campo aplicado a la par con los talleres pedagógicos, utilizados por el investigador para plasmar datos relevantes durante cada sesión estructurada en el trabajo de campo. Este instrumento narra información acerca de aspectos relevantes durante cada intervención, observando fortalezas y debilidades de la aplicación de la propuesta.

Tabla 15. *Instrumento utilizado en fase de análisis y reflexión*

Fase de la investigación	Instrumento
Análisis y reflexión	Cuestionario de salida: Tiene como objetivo evidenciar el nivel de conocimiento en cuanto al pensamiento geométrico, posterior a la aplicación de la propuesta de investigación.
	Análisis de diarios de campo: Instrumento de observación para realizar apuntes sobre conductas, actitudes, preguntas que le realizaban el grupo de estudiantes, dificultades, identificar si en las actividades formulaban preguntas.

Fuente: Elaboración propia.

Se analiza a manera de reflexión la información recolectada por el investigador en los diarios de campo que se llenó a la par con cada sesión trabajada durante el trabajo de campo de la fase dos, se interpreta cada una de las vivencias observadas a través de la plataforma virtual.

Cuestionario de salida

El investigador busca por medio de este instrumento evidenciar el impacto del proyecto de investigación, mediante el desarrollo del cuestionario observar el nivel del estudiante posterior a las actividades trabajadas con temáticas abordadas durante el trabajo de campo y aplicadas en cada una de las fases.

El cuestionario consta de diez preguntas con situaciones geométricas relacionadas con cada uno de los temas trabajados en cada sesión, este se desarrolla en forma individual con un tiempo de 45 minutos, permite comprobar el nivel de éxito de los recursos didácticos utilizados para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y por tanto el fortalecimiento del pensamiento geométrico en comparación con los resultados obtenidos en la actividad diagnóstica.

Responde las preguntas 1 y 2 de acuerdo con la información de la siguiente *Figura 1:*

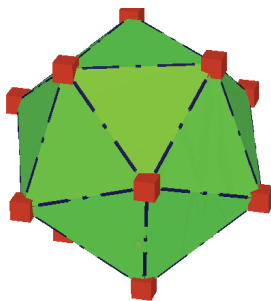


Figura 1

1. Los puntos en color naranja donde concurren los lados en el poliedro de la anterior figura se identifican.

En esta pregunta se pretendió que los estudiantes identificaran el vértice de una figura tridimensional, como los puntos donde concluyen una determinada cantidad de aristas que forman una cara de un poliedro, para esto el estudiante determina las propiedades de la figura a través de un proceso visual de los elementos de la figura, en el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes, el 62,5 % acertaron en la respuesta, mientras que el 37,5 % no logró responder acertadamente, por tanto se concluye que el grupo en general logra identificar este elemento correspondiente a un sólido y desde allí realizar una disertación que conlleve a generar una conceptualización.

2. Con base en el poliedro observado en la *Figura 1* es:

Con este ítem se pretendió saber el conocimiento de los alumnos sobre de las algunas propiedades que identifican un icosaedro, observando la gráfica se puede percibir que 58,3 % que corresponde a 14 estudiantes fueron capaces de identificar propiedades de un icosaedro en este caso la amplitud de los ángulos que conforman sus cinco caras que concluyen en un vértice, pero el restante 41,1 % del grupo no tiene claro dichas propiedades, lo cual llevó a contestar desacertadamente, se puede concluir que el grupo en general tiene apropiación respecto a la distensión de conjeturas.

3. Los polígonos regulares se nombran según el número de lados o vértices que tienen.

Obsrva el cuadro que contiene polígonos y organízalos por su nombre de izquierda a derecha.

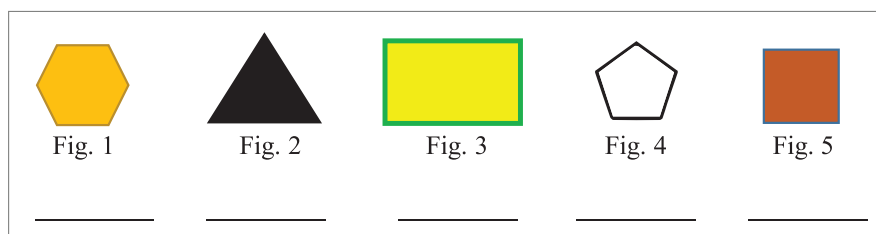
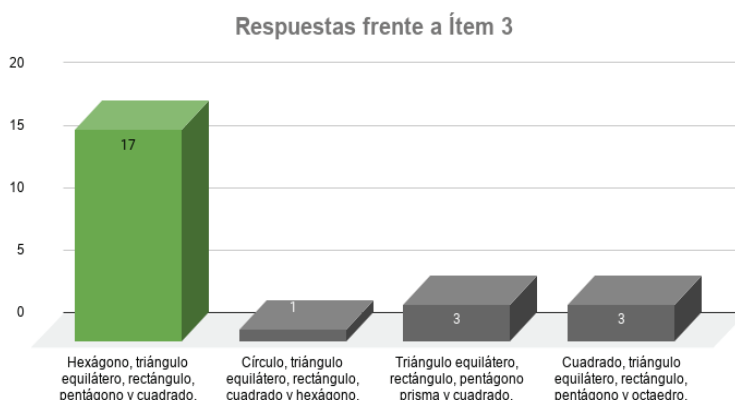


Figura 14. Resultados de cuestionario de salida. Respuesta frente al ítem 3



Fuente: Elaboración propia.

En este punto se evidencia que 17 estudiantes reconocen el nombre de un polígono regular de acuerdo con el número de lados que contenga la figura bidimensional, por lo contrario, siete estudiantes no identificaron la clasificación de los polígonos que contiene la figura, se concluye que en general el grupo presenta una comprensión respecto a este tema. Se puede decir que, en general, los resultados en este ítem fueron positivos, pues dan muestra de un avance en el pensamiento geométrico de los estudiantes.

4. Leonard Euler (1707-1783) fue uno de los más grandes matemáticos. Fue el creador de la fórmula que, si C representan el número de caras de un poliedro, A representa el número de aristas y V el número de vértices, entonces se cumple que $C+V-A = 2$.

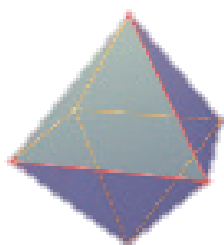
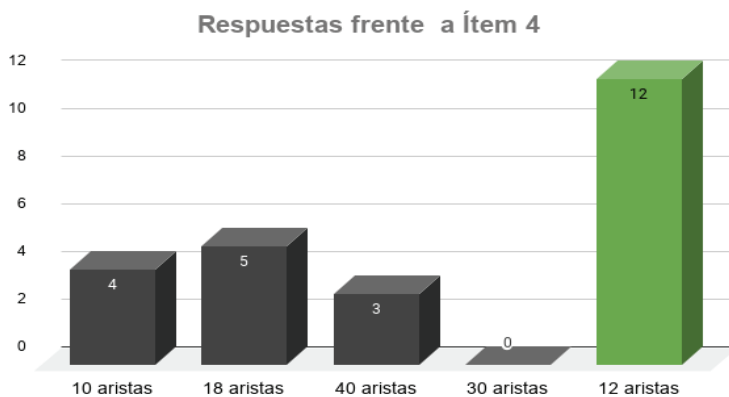


Figura 2

Aplicando la fórmula de Euler para determinar el número de aristas del octaedro, se puede concluir que está formada por:

Figura 15. Resultados de cuestionario de salida. Respuesta frente al ítem 4



Fuente: Elaboración propia.

La temática abordada en esta pregunta corresponde a el número de aristas que contiene una figura tridimensional en este caso un octaedro, el estudiante puede determinarlo desde lo visual mediante la deducción,

el conocimiento que tenga de sus propiedades, aplicando la fórmula de Euler, donde conociendo el número de vértices y caras se puede determinar el número de aristas de un sólido. 12 estudiantes respondieron correctamente que se representa en la gráfica con un 50 %, el otro 50 % de los estudiantes no lograron identificar correctamente la cantidad de aristas del octaedro, concluyendo que, retomando los resultados de la prueba diagnóstica se observa una mejoría significativa, pero aún hay que trabajar más en el conocimiento razonamiento deductivo del estudiante.

5. Los sólidos platónicos son cinco cuerpos geométricos que comparten un conjunto de características. También reciben el nombre de sólidos perfectos, poliedros platónicos y de cuerpos cósmicos, entre otros.

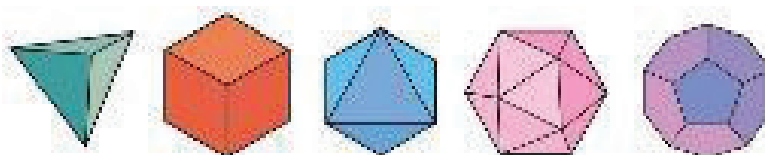


Figura 3

Algunas de sus propiedades son:

En esta pregunta los estudiantes deben identificar las características principales de los cinco sólidos platónicos, el 60 % de los estudiantes lograron contestar correctamente, frente a un 40 % que respondieron incorrectamente no logrando describir correctamente las características de los poliedros regulares convexos, se puede decir que, en general los resultados obtenidos son positivos, observando un significativo avance en cuanto a la temática, esto a factores ligados a la motivación y disposición de los estudiantes.

6. Si se hacen cortes en las esquinas a un sólido regular da origen a un nuevo sólido como se observa en la *Figura 4*:

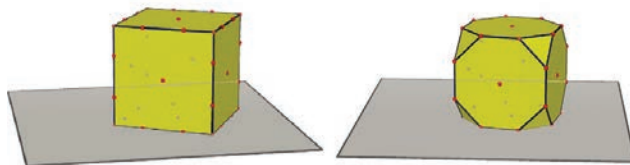
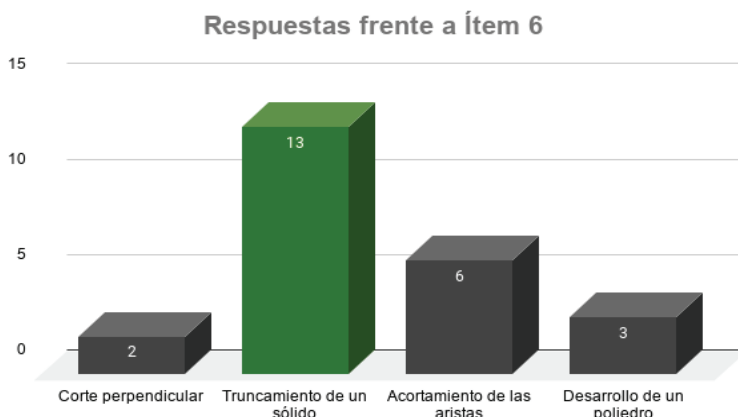


Figura 4

Este proceso se llama:

Figura 16. Resultados de cuestionario de salida- Respuesta frente al ítem 6



Fuente: Elaboración propia.

En este punto se aborda el tema del truncamiento de los poliedros regulares, que se tiene realizando cortes a las esquinas del sólido obteniendo a partir de este corte una cara nueva, uno de los más conocidos es el icosaedro truncado por su asociación a un balón de fútbol. Se evidencia que 13 estudiantes respondieron correctamente este ítem, pero 11 estudiantes contestaron erróneamente a la pregunta, por tanto, se concluye que el grupo tiene un mejor conocimiento acerca del tema posterior a la aplicación de la propuesta.

7. Se acerca navidad y Camilo va de compras para adquirir los detalles que dará a sus familiares. Cuando regresa a casa que necesita envolver los obsequios, toma las medidas para saber la cantidad de papel que necesita para cada obsequio de acuerdo con el área total.

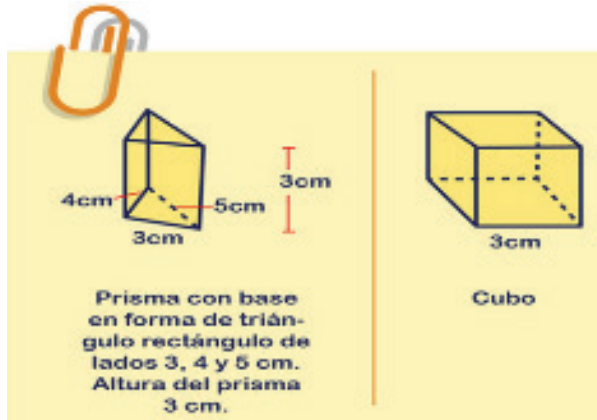
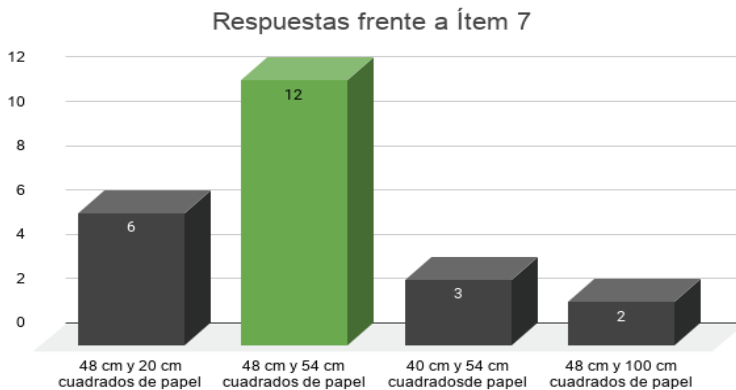


Figura 5

¿Cuál de las siguientes opciones es la cantidad de papel que necesitará Camilo para envolver sus obsequios

Figura 17. Resultados de cuestionario de salida- Respuesta frente al ítem 7



Fuente: Elaboración propia.

En esta pregunta se buscó conocer el nivel de análisis del estudiante en cuanto a la resolución de problemas en situaciones geométricas, se evidenció que el 50 % de los estudiantes marcaron la opción correcta y 50 % restante de estudiantes marcaron la opción incorrecta, se puede concluir que, aunque los resultados supera visiblemente los resultados obtenidos en situación geométrica similar en el cuestionario de entrada, algunos estudiantes siguen con debilidades, por tanto, se debe tratar de hacer más énfasis en aplicar estrategias que impliquen resolver problemas geométricos.

8. Observa el hexaedro *fig. 5* y elige la opción que contiene los elementos de un poliedro.

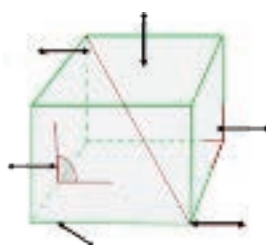
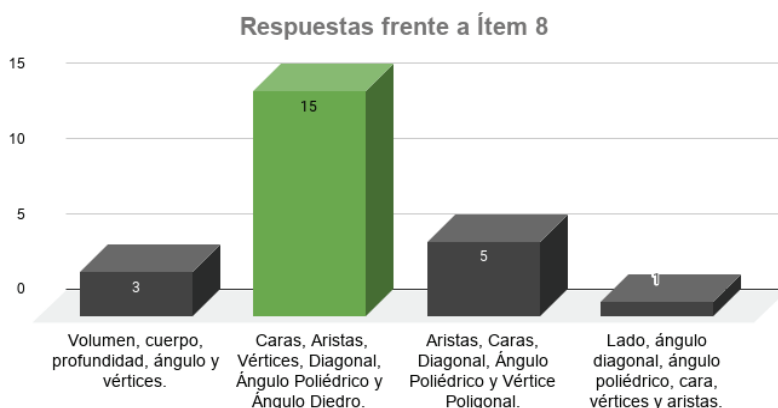


Figura 6

Figura 18. Resultados de cuestionario de salida-Respuesta frente al ítem 8



Fuente: Elaboración propia.

En este punto se aborda la temática de los elementos de un poliedro, en este caso en específico observando la imagen del hexaedro se evidencia que el 60 % de los participantes respondieron correctamente identificando los elementos de un poliedro, aunque el 40 % resolvió en forma incorrecta, esto dado por el desconocimiento de propiedades geométricas como vértices, aristas, además pueden seguir existiendo debilidades en situaciones que involucran definiciones, sin embargo, se puede concluir que, en general los resultados obtenidos en este ítem son satisfactorios, dando muestra de un avance significativo en el desarrollo del pensamiento geométrico, propiciado por los recursos didácticos utilizados como un factor de motivación en los estudiantes que se debe seguir trabajando en los estudiantes

9. Si a un poliedro lo cortamos por un número suficiente de aristas de forma que quede una sola pieza y la extendemos en el plano, obtenemos un desarrollo del poliedro.

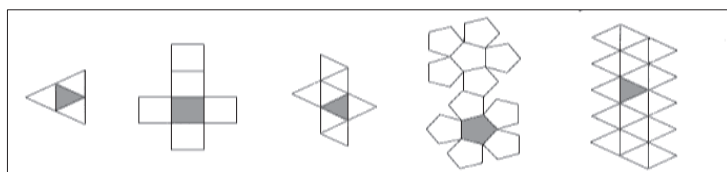


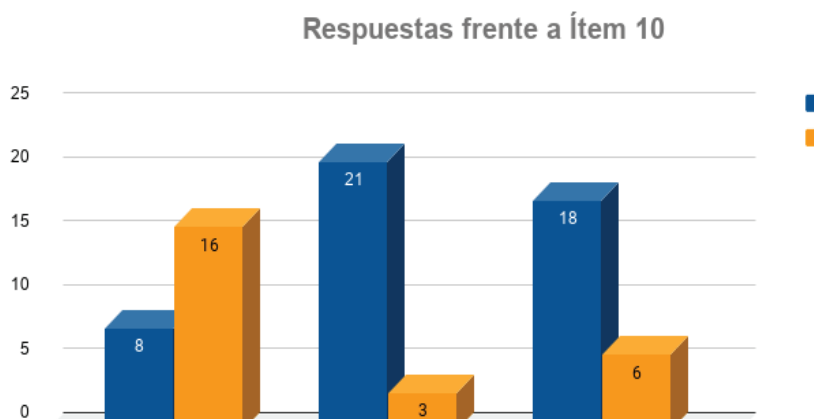
Figura 7

Determina qué poliedros se forman con el desarrollo de los planos de la *Figura 6*:

En este punto se pretendió llevar al estudiante al razonamiento mediante las descomposiciones y composiciones desde el desarrollo de un poliedro regular en el plano, observando la representación bidimensional de una figura tridimensional, en esta pregunta 12 estudiantes respondieron correctamente, evidenciado el progreso en la comprensión, análisis, visualización y deducción de los estudiantes en cuanto al pensamiento geométrico, a partir de los resultados obtenidos con la aplicación del cuestionario final, se puede concluir que con el desarrollo de estrategias y trabajo constante enfocado a fortalecer este pensamiento se llegan a tener avances muy positivos.

10. Clasifica cada una de las siguientes afirmaciones como falsa (F) o verdadera (V).

Figura 19. Resultados de cuestionario de salida- Respuesta frente al ítem 10



Fuente: Elaboración propia.

La temática abordada en esta pregunta corresponde a algunas de las características elementales de los prismas, evidenciando que, al enunciado en todo prisma regular la apotema es mayor que la longitud de su radio respondieron correctamente 16 estudiantes, al enunciado la altura de un prisma es la distancia entre las bases del prisma, 21 estudiantes respondieron correctamente y tres erróneamente, al enunciado un prisma es cóncavo si sus bases son polígonos concavos 18 estudiantes respondieron correctamente frente a seis que lo respondieron incorrectamente.

Se observa un evidente progreso tras la aplicación de las estrategias planteadas durante la fase del trabajo de campo de la investigación. Los resultados obtenidos fueron positivos para el grupo en general, adquiriendo herramientas que les permitan fortalecer adecuadamente el pensamiento geométrico. Tomando en cuenta los resultados generales del cuestionario aplicado se puede decir que, los recursos didácticos funcionan como una herramienta que logran mejorar ostensiblemente el desarrollo del pensamiento geométrico, cabe destacar también que la

experimentación a través de las construcciones de las figuras, brindando seguridad en sí mismos conllevando a un aprendizaje de los procesos matemáticos.

Conclusiones y reflexiones finales

Diseñar recursos didácticos como lo es la elaboración de lámparas con formas poliédricas planteada en esta investigación, es una alternativa para suplir en parte las dificultades en el aprendizaje de la geometría y a partir de allí lograr interacciones en un ambiente de confianza capaz de generar un cambio significativo.

A partir del análisis realizado a los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario diagnóstico, se logró determinar las dificultades en cuanto a las competencias del pensamiento geométrico y partiendo de allí crear estrategias encaminadas a lograr un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes.

En la búsqueda realizada por esta investigación, se focalizó en indagar sobre estrategias alternativas y versátiles para mejorar los procesos en el aula, enfatizando en la capacidad de percibir el conocimiento a través de la experimentación y observación, tratando de lograr un acercamiento interesante de los estudiantes en el proceso de la enseñanza de la geometría, además, permitió una interacción con el entorno, sus familias y compañeros conformando un equipo de trabajo que contribuyó a en la consecución de los resultados esperados en medio anómala situación que vive el mundo en este momento.

El análisis de los resultados posterior a la aplicación de la propuesta permitió realizar un proceso de reflexión acerca de cambiar los paradigmas para lograr una pedagogía más cercana al estudiante, generando un clima de confianza tendiente a mejorar la calidad de los aprendizajes. El éxito de un investigador radica en gran parte en la construcción de estrategias con el rigor necesario teniendo en cuenta los estilos de aprendizaje y la contextualización de los estudiantes, con el fin de obtener resultados favorables en los aprendizajes matemáticos.

Referencias

- Aguirre, G. M. (1993). *Juan Amós Comenio: obra, andanzas, atmósferas en el IV centenario de su nacimiento (1592-1992)*. Universidad Autónoma de México. UNAM.
- Alsina, C., Burgués, C., y Fortuny, J. M. (1989). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Síntesis.
- Arango Pinzón, P. A. (2015). *Pensamiento geométrico: ¿qué se planea enseñar en el aula? vs. ¿Qué se evalúa en las pruebas saber 9°?* [Trabajo de Grado, Universidad de los Llanos]. <https://repositorio.unillanos.edu.co/jspui/bitstream/001/354/1/TESIS.pdf>.
- Araya, R., y Alfaro, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 4(5),113-136. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6915/6601>.
- Arraiz, G. A. (2014). Teoría fundamentada en los datos: un ejemplo de investigación cualitativa aplicada a una experiencia educativa virtualizada en el área de matemática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 41,19-29. <https://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/462/996>.
- Baena, G. (2017). *Metodología de la investigación* (3a. ed.). Grupo Editorial Patria. http://www.biblioteca.cij.gob.mx/Archivos/Materiales_de_consulta/Drogas_de_Abuso/Articulos/metodologia%20de%20la%20investigacion.pdf
- Baldissera, A. (2011). *A geometria trabalhada a partir da construção de figuras e sólidos geométricos*. (3ed.). Gestaoescolar.
- Bejarano, M. A. (2016). La Investigación Cualitativa. *INNOVA Research Journal*, 1(2), 1-9. doi:Guerrero Bejarano, M. A. (2016). La Investiga <https://doi.org/10.33890/innova.v1.n2.2016.7>.

- Blandón, E., Gulfo, J., y Marín, W. (2016). *Los sólidos platónicos en origami para la comprensión de la fórmula de euler en el contexto de van hiele*. [Tesis de maestría, Universidad Pontificia Bolivariana]. <https://es.scribd.com/document/423286310/Trabajo-de-Grado-Erlin-Blandon-Joel-Gulfo-Wilson-Marin-1>.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. *Recherches en didactique des mathematiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Zorzal.
- Buckminster, Fuller, R. (1982). *Explorations in the geometry of thinking*. Macmillan Pub Co.
- Bursill, Hall, P. (2002). *Why do we study geometry?: Answers through the ages*. DPMMS Centre for Mathematical Sciences Wilberforce Road, University of Cambridge. https://www.dpmms.cam.ac.uk/~piers/F-I-G_opening_ppr.pdf.
- Cabero A., J., y Llorente, M. d. (2013). La Aplicación del Juicio de experto como técnica de evaluación de las tecnologías de la información y comunicación TIC. *Tecnología de Información y Comunicación en Educación*, 7(2), 11-21. https://www.researchgate.net/publication/260750592_La_aplicacion_del_juicio_de_experto_como_tecnica_de_evaluacion_de_las_tecnologias_de_la_informacion_y_comunicacion_TIC.
- Carmona, P. A., y Correa Villa, P. A. (2019). Resignificación de los conceptos geométricos en los poliedros a través de la modelación: el hexaedro. *Mova*, 1(1), 67-83. <http://revistas.medellin.edu.co/movaojs/index.php/revistamova/article/view/art3>.

- Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado*. (3ª ed.) AIKE. https://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID_Chevallard_Unidad_3.pdf.
- Corberán, R. M. (Coord.). (1989). *Didáctica de la geometría: el modelo Van Hiele*. Universitat de València.
- D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Reverté.
- D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática)*, 17(1), 87-106.
- De Camilloni, A., Cols, E., Basabe, L. y Feeney, S. (2007). *El saber didáctico*. (1ª ed.). Paidós.
- De Miguel González, R. (2015). Del pensamiento espacial al conocimiento geográfico a través del aprendizaje activo con tecnologías de la información geográfica. *Giramundo*, 2(4), 7-13. [file:///C:/Users/Administrador/Downloads/Dialnet-Del Pensamiento Espacial AlConocimientoGeograficoATra-5489976.pdf](file:///C:/Users/Administrador/Downloads/Dialnet-Del%20Pensamiento%20Espacial%20AlConocimientoGeograficoATra-5489976.pdf).
- Dowker, A., Sarkar, A., y Looi, C. Y. (2016). Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? *Frontiers in psychology*, 7. <https://psycnet.apa.org/record/2016-20878-001>
- Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow. (Eds.). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas Énfasis*. (pp. 13-60). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Fernandez, T., Díaz, J., y Cajaraville, A, J. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico.

Bolema: Boletim de Educação Matemática, 26(42A), 39-64. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000100004>.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162. <http://web.math.unifi.it/users/dolcetti/Fischbein.pdf>

Flores, P. (2018). Poliedros modulares. En P. Flores, J.L. Lupiáñez, y I. Segovia, (Eds.). *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 103-114). Atrio.

Galeano, M. E. (2004). *Diseño de proyectos en la investigación cualitativa*. Fondo Editorial Universidad EAFIT.

Gamboa-Araya, R., y Ballesterio-Alfaro, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Educare*, 14(2), 125-142. <https://www.redalyc.org/pdf/1941/194115606010.pdf>

Godino, J., y Ruíz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf.

Gómez Morales, J. J. (2018). *Desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de séptimo grado con apoyo de materiales manipulables*. [Tesis de maestría, Universidad Externado de Colombia]. <https://1library.co/document/q2n5wleq-desarrollo-pensamiento-espacial-estudiantes-septimo-grado-materiales-manipulables.html>

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: Describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática*, 16(3), 103-125. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40516306.pdf>.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?

En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). SEIEM.

Hernández-Sampieri, R., Hernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.

Iglesias, M. y., Ortiz, J. (2015). La investigación en pensamiento geométrico y didáctica de la geometría. En J. Ortiz y M. Iglesias, Martha (Eds.). *Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación* (pp. 207-224). Universidad de Carabobo.

Jiménez Espinosa, A. (2011). Didáctica de la matemática, educación matemática en investigación. *Ciências em foco*, 4(1), 1-15. <https://econtents.bc.unicamp.br/inpec/index.php/cef/article/view/9198>. Acesso em: 17 out. 2020.

Jiménez, A., y Sánchez, D. (2019). La práctica pedagógica desde las situaciones didácticas en matemáticas. *Revista de Investigación, Desarrollo E Innovación*, 9(2), 333-346. <https://doi.org/10.19053/20278306.v9.n2.2019.9179>.

Jones, K. (1998). Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1-2), 29-34. https://www.researchgate.net/publication/279652830_Theoretical_frameworks_for_the_learning_of_geometrical_reasoning.

the_learning_of_geometrical_reasoning.

Jones, K. (2002), Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In: Linda Haggarty (Ed). *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*. Chapter 8, (pp. 121-139). Routledge Falmer.

Lagos, R., Mella, M., y Strocchi, M. V. (2019). Taller de sólidos platónicos. Transferencia del modelo del proyecto en arquitectura a la enseñanza media. *Revista AUS*, 26(05), 22-28.

DOI:10.4206/aus. 2019.n26-05. file:///C:/Users/Administrador/Downloads/5306-1-7997-1-10-20190521.pdf

Lerna-González, H. D. (2016). *Metodología de la investigación: propuesta, anteproyecto y proyecto*. (4ª ed.). Ecoe Ediciones.

Lewin, K. (1946). Action Research and Minority Problems. *Cuestiones sociales*, 2(4), 34-46.

http://www.secretariasenado.gov.co/senado/basedoc/ley_0115_1994.html

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Matriz de Referencia Matemáticas. Siempre es día E*. MEN. <http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/siempreodiae/Documento-Orientador-Dia-E-2019.pdf>

Ministerio de Educación Nacional. (2019). *Documento Orientador*. <http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/siempreodiae/Documento-Orientador-Dia-E-2019.pdf>

Molano, C. (2019). *La visualización en el pensamiento espacial a partir del cálculo de volúmenes*. [Tesis de Maestría en Educación Matemática, Universidad Pedagógica y tecnológica de Colombia]. https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/001/2993/1/TGT_1614.pdf

Molano, M. (2011). Carlos Eduardo Vasco Uribe. Trayectoria biográfica de un intelectual colombiano: una mirada a las reformas curriculares en el país. *Reflexiones Revista Colombiana de educación*, 61, 161-198. <http://www.scielo.org.co/pdf/rcde/n61/n61a08.pdf>

Monsalve-Fernández, A., y Pérez-Roldán, E. (2012). El diario pedagógico como herramienta para la investigación. The daily teaching and research tool. *Itinerario educativo*, 60, 117-128.

- Orozco-Berdugo, E. (2017). *Estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento geométrico a través de la utilización y construcción de objetos de aprendizaje*. [Tesis de Maestría en educación con énfasis en pensamiento matemático, Fundación Universidad del Norte]. <http://manglar.uninorte.edu.co/bitstream/handle/10584/7656/130224.pdf?sequence=1>
- Parraguez, M., Rojas. J., y Vásquez, P. (2015). *Situaciones didácticas para la enseñanza aprendizaje de estrategias de conteo utilizando la resolución de problemas como medio*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Piaget, J. y Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. Norton y Co.
- Piaget, J., Inhelder, B., y Szeminska, A. S. (2013). *Child's Conception of Geometry*. Routledge. <https://books.google.com.ag/books?id=-tPoNSV35kQC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>
- Rivera, M. y Salas, R. (2016). La Geometría en la construcción de cajas de regalo y Lámparas artesanales. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C*, 29,1170-1176.
- Rojas, O. Á. (2019). *Aprendizaje significativo en geometría para el octavo grado*. [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia].
- Segerman, H. (2016). *Visualizing mathematics with 3D printing*. Johns Hopkins University Press.
- Senechal, M. (2013). *Shaping Space: Exploring Polyhedra in Nature, Art, and the Geometrical.*: Springer Science y Business Media.

- Torres, D. (2009). Aproximaciones a la visualización como disciplina científica. *ACIMED*, 20(6), 161-174. <https://www.medigraphic.com/pdfs/acimed/aci-2009/aci096e.pdf>
- Ugalde, N., y Balbastre, F. (2013). Investigación cuantitativa e investigación cualitativa: buscando las ventajas de las diferentes metodologías de investigación. *Revista de Ciencias económicas*, 31(2), 179-187. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/economicas/article/view/12730>
- Uribe, L. C. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría. *Reflexiones Revista Colombiana de Educación*, 60, 41-60. <http://www.scielo.org.co/pdf/rcde/n60/n60a3.pdf>
- Uribe, S., Cárdenas, O. y Becerra, J. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educación Matemática*, 26(2), 135-160. <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v26n2/v26n2a5.pdf>
- Vargas, G., y Araya, R. G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94. <file:///C:/Users/Administrador/Downloads/Dialnet-ElModeloDeVanHieleYLaEnseñanzaDeLaGeometria-4945319.pdf>
- Zuluaga, O., Echeverry, A., Quiceno, H., Sáenz, J., Álvarez, A., y Martínez, A. (2003). *Pedagogía y Epistemología*. El Magisterio.

Glosario

Secuencia didáctica: El término secuencia didáctica refiere al ámbito de la enseñanza. Comprende las sucesivas actividades que tienen como fin enseñar un contenido educativo y tiene características de linealidad.

Función: Una función (f) es una relación entre un conjunto dado X (llamado dominio) y otro conjunto de elementos Y (llamado codominio) de forma que a cada elemento x del dominio le corresponde un único elemento $f(x)$ del codominio (los que forman el recorrido, rango o ámbito).

Pensamiento variacional: El pensamiento variacional está relacionado con el reconocimiento, la percepción y el cambio de diferentes contextos, una de las características de este pensamiento son los aspectos de variación, tales como el cambio y las variables intervienen, teniendo en cuenta las posibles relaciones de las variables de cambio.

Pensamiento lógico: Se entiende por pensamiento lógico aquellas formas de razonamiento netamente relacionales, es decir, que involucran objetos reales o abstractos y una serie de relaciones entre ellos. Es un tipo de pensamiento que proviene de la propia elaboración individual, y que requiere de la elaboración abstracta, hipotética.

Estrategias didácticas: hace referencia al conjunto de acciones que el personal docente lleva a cabo, de manera planificada, para lograr la consecución de unos objetivos de aprendizaje específicos.

Recursos didácticos: se entiende por recurso didáctico al conjunto de medios materiales que intervienen y facilitan el proceso de enseñanza y aprendizaje. Las funciones que tienen los recursos didácticos deben tomar en cuenta el grupo al que va dirigido, con la finalidad que ese recurso realmente sea de utilidad.

Enseñanza: es el proceso de transmisión de una serie de conocimientos, técnicas, normas, y/o habilidades. Está basado en diversos métodos, realizado a través de una serie de instituciones, y con el apoyo de una serie de materiales.

Sobre los autores

Coordinadores

José Eriberto Cifuentes Medina (Magíster en Educación)

Profesor de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia - UPTC.

Correo: joseeriberto.cifuentes@uptc.edu.co

José Antonio Chacón Benavidez (Magíster en Administración y planificación Educativa)

Profesor de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia - UPTC

Correo: jose.chacon@uptc.edu.co

Susan Sareth García Gualdrón (Magister en Didáctica de la Matemática)

Profesora del Centro Educativo La Sabana, Municipio de Puerto Rico, Meta.

Correo: susan.garcia@uptc.edu.co

Nayibe Gómez Condía (Magíster en Didáctica de la Matemática)

Profesora de la Institución Educativa Abraham Lincoln.

Correo: docenteconsuelo24@gmail.com

Julián David Quiroga Garcés (Magíster en Didáctica de la Matemática)

Profesor de la Institución Educativa San Lorenzo (Suaza, Huila).

Correo: daqui02_jdq@hotmail.com

Ana Elizabeth Palacio Ramírez (Magíster en Didáctica de la Matemática)

Profesora de la Institución Educativa Aquileo Parra, sede Las Pilas (Pacho, Cundinamarca).

Correo: elizapalacio@hotmail.com

Colección de Investigación UPTC N.º 7

Las matemáticas están presentes en todos los ámbitos y quehaceres de la cotidianidad de las personas, de allí, la importancia de la enseñanza-aprendizaje de esta ciencia en el marco de la formación integral de los individuos como personas y seres sociales, ámbito en el cual, la formación de conocimiento en este campo durante la etapa de educación básica, resulta fundamental, pues, constituye la base que ha de sustentar el aprendizaje durante la educación formal y, por extensión, a lo largo de toda la vida. Esta obra es el resultado de la experiencia investigativa de los autores y directores de trabajo de grado del área mencionada, con el fin de generar una reflexión e inquietud permanente por la mejora y desarrollo, tanto de la fundamentación teórica como de la práctica educativa, como investigadores y también del desarrollo profesional como docentes. En la obra se han considerado las experiencias de los estudiantes de Maestría en Didáctica de la Matemática, que se desempeñan como docentes de Educación en Básica Primaria, Básica Secundaria y Media Académica en Colombia, para ello, se ha considerado la fundamentación teórica, epistemológica y resultados de las investigaciones a lo largo de cuatro capítulos en los que se describen las problemáticas identificadas por los estudiantes en sus diferentes contextos educativos. Dentro de estas temáticas se destacan en el capítulo 1, aspectos como el desarrollo del pensamiento lógico-matemático para la resolución de problemas mediante estrategias lúdico-pedagógicas.