Física paso a paso

Más de 100 problemas resueltos

Física paso a paso

Más de 100 problemas resueltos

Sebastián Murgueitio Ramírez

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Murgueitio Ramírez, Sebastián
Física paso a paso: más de 100 problemas resueltos / Sebastián Murgueitio Ramírez. – Bogotá: Universidad de los Andes, Facultad de Ciencias, Departamento de Física, Ediciones Uniandes, 2018.
1 recurso en línea (734 páginas: ilustraciones)

ISBN: 978-958-774-700-3 (electrónico)

1. Física – Problemas, ejercicios, etc. I. Universidad de los Andes (Colombia). Facultad de Ciencias. Departamento de Física II. Tít.

CDD 530.076 SBUA

Primera edición: junio del 2018

Ediciones Uniandes
Calle 19 n.° 3-10, oficina 1401
Bogotá, D. C., Colombia
Teléfono: 3394949, ext. 2133
http://ediciones.uniandes.edu.co
infeduni@uniandes.edu.co

ISBN *e-book*: 978-958-774-700-3

Corrección de estilo: Nicolás Pernett
Diseño de cubierta: La Central de Diseño S. A. S.
Diagramación en Latex: Patricia Chávez

Convenciones y misceláneas

1. En este libro, los números se aproximan a las primeras dos cifras decimales. Por ejemplo, 2.677 se aproxima a 2.68, 4.655 se aproxima a 4.66 y 1.321 se aproxima a 1.32.

2. En muchos problemas del libro se hace referencia a "la regla de oro", la cual se explica en la nota 1.20 del problema 1.27 (página 89).

3. La constante de aceleración gravitacional cerca de la superficie terrestre será representada con la letra "g" y su valor será aproximado a 9.81 m/s^2.

4. Se pueden escribir sugerencias y comentarios acerca del libro en la página web http://sites.nd.edu/sebastian-murgueitio/.

Contenido

Presentación

¿Por qué este libro?

Existen muchos libros de texto para enseñar física en los últimos años de bachillerato y en los primeros semestres de universidad. Lo que no existe en nuestro país —hasta donde he podido comprobar—, y es la razón por la cual decidí escribirlo, es un libro que esté totalmente dedicado a la resolución de problemas de física. En esta obra se explica con gran detalle cómo resolver más de 100 problemas de física, entre los que se incluyen problemas de cinemática, caída libre, movimiento parabólico, fuerzas y energía. El libro está pensado para estudiantes de último año de bachillerato, pero también para estudiantes universitarios de pre-física, e incluso de física 1, que deseen aclarar ciertos conceptos o quieran poner en práctica lo que han aprendido.

Para empezar, es pertinente aclarar cómo están resueltos los problemas en este libro: en él se explica cada ecuación que se presenta y casi nunca se reemplaza en una ecuación más de un resultado previamente obtenido. Además, hay un gran número de ilustraciones que ayudan a comprender mejor la situación planteada en cada problema. El nivel de detalle aquí alcanzado puede ser innecesario para los estudiantes que están familiarizados con la manipulación y el despeje de ecuaciones, pero lo que se busca es llegar al mayor número posible de estudiantes, incluyendo aquellos que no han tenido la oportunidad de desarrollar buenas bases matemáticas y físicas en su formación escolar.

Con el fin de ofrecer la mayor claridad posible en la resolución de los ejercicios, la solución de cada problema empieza con dos cuadros que aclaran qué información nos están pidiendo y qué información nos están dando. En mi experiencia como docente de física he notado que muchas veces el primer error que cometen los estudiantes es no identificar correctamente lo que les están preguntando o la información que les están dando. Por otra parte, a lo largo de todo el libro se hace énfasis en el uso de vectores, y por eso el primer capítulo está dedicado a estos. Además, se ahonda en el manejo de sistemas de coordenadas, algo que no es tan común en la formación escolar pero es crucial en clases más avanzadas de física universitaria.

Al final de cada capítulo, para que el lector ponga en práctica lo que ha aprendido, he puesto varios ejercicios sin solucionar. Cada uno de estos ejercicios sin respuesta está inspirado en alguno de los que sí fueron resueltos en el libro (en el enunciado de los ejercicios sin resolver se indica qué problemas resueltos se recomienda estudiar para entenderlos). El lector nunca encontrará un ejercicio sin respuesta que no sea similar a uno de los problemas con respuesta.

Para hacer más divertido el aprendizaje he procurado usar problemas inspirados en la vida cotidiana, en la idiosincrasia colombiana y en la cultura popular. ¡No más problemas abstractos con bloques ideales de masa M deslizándose por planos inclinados! Los problemas en este libro involucran, entre otros, a buses de Transmilenio, a James Rodríguez, a Caterine Ibargüen, a Atenea, a Mariana Pajón y a John Lennon.

Aunque hace énfasis en el nivel práctico del aprendizaje de la física, el libro también enseña conceptos teóricos y podría ser usado como un libro de texto sobre los temas aquí discutidos. Muchas veces los conceptos teóricos son presentados en ejercicios prácticos, para que el estudiante aprenda al mismo tiempo cómo resolver un problema y cómo entender cierto concepto. Los conceptos teóricos más importantes presentados en los diferentes problemas son resaltados en cuadros azules y enumerados. Al final de cada capítulo se da una lista de los conceptos teóricos usados para que el estudiante pueda repasar fácilmente lo aprendido en el capítulo y el libro pueda ser usado como uno de consulta.

Si se usa como libro de texto, se recomienda seguir el orden de cada capítulo porque los conceptos son presentados de forma paulatina (antes de introducir un nuevo concepto hay uno o varios ejercicios prácticos relacionados con el concepto previo). Además, el nivel de dificultad de los problemas generalmente crece a medida que avanza el capítulo. Sin embargo, es pertinente aclarar que todos los problemas son independientes, es decir, el lector no necesita resolver o leer un problema X para leer o resolver un problema Y. Además, cada problema comienza con una lista de palabras clave que le permite al estudiante o al docente hacerse una idea rápida de los conceptos que se estudian en él.

Escribí este libro porque me di cuenta de que hay algunos temas puntuales que, aunque pueden parecer obvios, se dejan por fuera de las aulas de física y pueden llegar a confundir a más de un estudiante. Por ejemplo, no recuerdo que alguien me mostrara cómo resolver un problema de plano inclinado con un sistema de coordenadas que no está inclinado. O, por ejemplo, es muy común encontrar a un estudiante que divide por una fuerza o por una aceleración, lo cual no tiene sentido ya que la fuerza y la aceleración son vectores. Como último ejemplo, nunca aprendí en clase que podemos transformar una ecuación vectorial en una ecuación escalar si nos concentramos sólo en las magnitudes (por ejemplo, de la ecuación $3\hat{x} + 2\hat{x} = a\hat{x}$ se sigue la ecuación $3 + 2 = a$). Por eso en este libro trato de decir explícitamente cosas muy útiles que a mí nunca me dijeron.

Todos los problemas aquí propuestos fueron imaginados por mí, aunque, por supuesto, mi imaginación está influenciada por todas las clases de física que tuve en mi formación escolar y universitaria. No pretendo decir que los problemas presentados aquí son totalmente diferentes a los miles con los que todos nos educamos, pues todo libro de texto de física va a repetir un gran número de problemas clásicos. Pero sí quiero insistir en que hice un esfuerzo para convertir los problemas estándar que todos hemos encontrado incontables veces en ejercicios divertidos que pueden despertar el interés del lector. Y así como no seguí ningún libro de texto al escribir los problemas, tampoco seguí ningún libro al introducir y explicar los conceptos teóricos; todo lo que explico aquí está basado en lo que aprendí en mi formación universitaria y escolar, y si tuviera que citar referencias bibliográficas sólo podría citar a mis excelentes profesores y a mis muy inteligentes amigos físicos[1].

En resumen, el objetivo principal de este libro es brindar las bases para que cualquier estudiante se sienta cómodo en su primera clase de física universitaria.

¿Cómo usar este libro?

Este libro se puede usar (por lo menos) de tres maneras diferentes:

(1) Un estudiante que sólo quiera practicar para un examen o taller puede ir directamente a los problemas relacionados con el tema que le interesa, y puede aproximarse a ellos en cualquier orden (como los problemas tienen palabras clave, el estudiante puede encontrar rápidamente los que le son relevantes). Además, si quiere practicar, debe intentar primero resolver el problema por su cuenta y sólo después de intentarlo puede mirar la solución. Para facilitar la comprobación rápida de cada solución, se han indicado en rojo las respuestas finales de los problemas. Igualmente, el estudiante que quiera practicar puede tratar de resolver los ejercicios del final del capítulo (que se presentan sin su solución).

(2) Un estudiante que desee aprender teoría debe leer el capítulo que le interesa y debe tratar de seguir la solución de cada problema con cuidado, empezando por los problemas teóricos. Al hacer esto, debe prestar especial atención a las notas, pequeños comentarios en azul en los que se resalta lo más importante que se ha explicado en algunos de los problemas. Además, el estudiante puede buscar los problemas de opción

[1] La ausencia de referencias bibliográficas en un texto académico puede asustar a algunos, pero los temas tratados aquí son asuntos básicos que todo físico está en capacidad de discutir y explicar sin necesidad de consultar otras fuentes.

múltiple (que se llaman *problemas de repaso*), pues estos le permiten comprobar rápidamente si ha comprendido correctamente los conceptos teóricos.

(3) Un profesor que desee explicar un concepto puede seguir los problemas teóricos incluidos, en los que se ha tratado de presentar cada concepto de forma sencilla, didáctica y precisa. Además, el profesor puede usar problemas del libro para mostrarles a los estudiantes cómo aplicar cierto concepto, y por supuesto puede usar problemas cambiando los datos o cambiando lo que se pregunta para realizar talleres o pruebas. Finalmente, el profesor puede asignar como tareas o talleres problemas de las secciones sin respuesta (que están al final del capítulo), como una forma de medir la comprensión de los estudiantes. Otra forma de medir la comprensión de los alumnos es pidiéndoles que expliquen paso a paso alguno de los problemas resueltos.

Agradecimientos

Quiero agradecerles, ante todo, a mis padres y a mi hermano, que me han dado infinita felicidad. El ejemplo de esfuerzo y dedicación de mis padres me sirvieron de inspiración mientras escribía el libro. Por supuesto, el resto de mi familia ha sido muy importante en mi vida, y en particular debo reconocer la influencia que mi tío Guillermo ha tenido en buena parte de mis intereses académicos. Estoy muy orgulloso y agradecido por la familia que tengo.

Quiero hacer una mención especial de mi hermano. Uno no escoge con quién compartir padres pero si pudiera escoger sería inconcebible para mí no volver a escogerlo a él. ¡Me hace feliz pensar que aún tenemos tantos años por compartir!

Quiero también agradecer a mis profesores de la Universidad de los Andes y del Colegio Berchmans. Este libro es, casi por completo, resultado de lo que aprendí en sus excelentes clases. Hago una mención especial de Roberto, mi primer profesor de física en el colegio, quien me enseñó lo bonita que es esta ciencia. Es muy probable que yo haya decidido estudiar física gracias a sus clases.

No puedo olvidarme de todos mis amigos, tanto en el colegio como en la universidad, quienes fueron tan importantes para hacer de mi vida una vida que quiero tanto. He sido muy afortunado por haber encontrado gente tan especial en todos los momentos. A todos ustedes también dedico este libro.

Les agradezco mucho a Nicolás Barbosa Berrío, Luis Aníbal García, Verónica Gómez, Tania López, Stacy Sivinski y Camilo Zapata. Nicolás y Luis, ambos muy buenos amigos, tuvieron la dedicación suficiente para revisar y corregir los problemas iniciales del libro. A Luis, además, le agradezco todo lo que me enseñó en sus años como monitor de la clínica de problemas (de alguna manera espero que este libro funcione como un monitor de física portátil). A

Verónica, quien, además de ser especial conmigo en muchos aspectos, tuvo la paciencia suficiente para discutir algunos enredos conceptuales con los que me encontré. A Tania, quien en muy pocos días realizó los muy bonitos dibujos de todos los problemas sin solucionar que están al final de cada capítulo. A Stacy, cuya compañía ha sido crucial, pues me ha protegido de todos los peligros asociados con ser un estudiante de doctorado (*i. e.*, olvidarse de comer o creer que cualquier minuto usado en una actividad de ocio disminuye las posibilidades de continuar en la academia) y, sobre todo, me ha hecho muy feliz. Por su parte, Camilo me ha ayudado con algunos problemas y gracias a las discusiones con él aprendí mucho durante toda mi carrera; además es un gran amigo.

Finalmente, les agradezco al Programa de Historia y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Notre Dame por ayudar con algunos costos; a dos revisores anónimos por sus oportunas correcciones y sugerencias; al Departamento de Física y la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes por apoyar este proyecto; a Ediciones Uniandes por su gran ayuda en la edición de esta obra.

Capítulo 1

Vectores

Problema (teórico) 1.1.

Palabras clave: introducción a vectores, cantidades escalares, cantidades vectoriales, símbolos de vectores.

(a) ¿Qué es un vector?

(b) ¿Para qué sirve un vector?

(c) ¿Cómo se simboliza un vector?

(d) ¿Cómo se simboliza la magnitud de un vector?

(a) Un vector es un objeto matemático que consta de dos propiedades: magnitud y dirección. La magnitud es lo que *mide* el vector (qué tan largo es) y la dirección nos indica hacia dónde apunta el vector (¿apunta hacia la derecha, hacia el norte, hacia el oeste?). La magnitud de un vector nunca puede ser negativa, pues no tiene sentido que algo mida una longitud negativa.

(b) Un vector sirve para representar las cantidades conocidas como *cantidades vectoriales*. Una cantidad vectorial es una cantidad que debe ser especificada con una magnitud y una dirección. Por ejemplo, la velocidad es una cantidad vectorial porque para determinar la velocidad necesitamos saber qué tan rápido se mueve el objeto (es decir, conocer la magnitud de la velocidad) pero también necesitamos saber en qué dirección se mueve. Dos carros que se mueven a 100 km/h, uno hacia el sur y el otro hacia el norte, no tienen la misma velocidad pues no se mueven en la misma dirección (aunque sí tienen la misma rapidez). La fuerza es otro ejemplo de una cantidad vectorial; para especificar una fuerza no es suficiente decir cuál es la magnitud de la fuerza (qué tan "fuerte" es la fuerza), sino que debemos decir en qué dirección apunta (si hacia arriba, hacia la derecha, etc.).

Existen otras cantidades que se denominan *cantidades escalares* y que se representan sólo con una magnitud, es decir, con un número (no requieren una dirección). Por ejemplo, la edad, la masa o la energía se representan con números (4 años, 40 kilogramos, 30 julios). Como no tiene sentido preguntar hacia dónde apunta la edad, pero sí tiene sentido preguntar hacia dónde apunta la velocidad, podemos inferir que la edad es una cantidad escalar y la velocidad es una vectorial.

(c) El símbolo típico de un vector es una variable (generalmente una letra) que tiene una flecha pequeña encima. Por ejemplo, $\vec{A}$. También se suele representar un vector mediante una variable en negrilla, por ejemplo $\boldsymbol{A}$. Por último, un vector puede escribirse como $A\hat{r}$, en donde A (sin negrilla) se refiere a la magnitud del vector (cuánto mide) y $\hat{r}$ indica la dirección del vector (hacia dónde apunta). Más adelante volveremos a esta último notación.

(d) La magnitud o *norma* de un vector se simboliza típicamente así: $\|\vec{A}\|$. También se puede escribir A (sin negrilla) para referirse a la magnitud del vector $\vec{A}$, es decir, se puede quitar la flecha del símbolo de vector para referirse a la magnitud del vector.

Problema (teórico) 1.2.

Palabras clave: símbolos de vectores, identificar vectores.

Para los símbolos $\|\vec{B}\|$, A, $\vec{B}$, $3\hat{r}$, B y $\boldsymbol{b}$, responder:

(a) ¿Cuál representa un vector?

(b) ¿Cuál representa la magnitud del vector $\vec{B}$?

Solución

(a) Según lo que se explicó en la sección (c) del problema anterior, los símbolos $\vec{B}$, $\boldsymbol{b}$ y $3\hat{r}$ representan vectores (en el caso de $3\hat{r}$, 3 es la magnitud del vector y $\hat{r}$ indica la dirección).

(b) Según lo visto en la sección (d), la magnitud se representa con dobles barras verticales o quitando la flecha al símbolo del vector. En nuestro caso, B y $\|\vec{B}\|$ sirven para representar la magnitud de $\vec{B}$.

Nota 1.1. Símbolos para representar un vector

En este libro vamos a representar a los vectores como $\vec{B}$ o como $B\hat{r}$. Además, la magnitud de los vectores será representada como B (sin negrilla) o como $\|\vec{B}\|$.

Problema (teórico) 1.3.

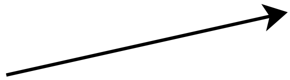
Palabras clave: representación gráfica de vectores, dirección de vectores.

(a) ¿Cómo representamos gráficamente un vector?

(b) ¿Cómo especificamos la dirección de un vector?

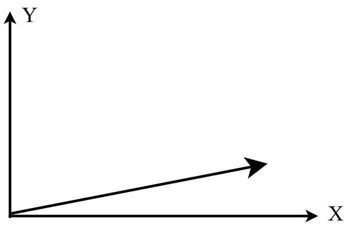
Solución

(a) A un vector lo representamos gráficamente con una flecha, como se indica a continuación[1]:



Un vector se dibuja como una flecha. La punta del vector indica la dirección y la cola es el inicio del vector.

Los vectores se suelen situar en el origen de un sistema de coordenadas. Más adelante veremos que para los problemas de física no importa cuál sistema de coordenadas usemos, y también veremos que podemos situar un vector en una parte del plano que no es el origen. Si usamos el sistema de coordenadas cartesiano, el anterior vector se dibujaría así:

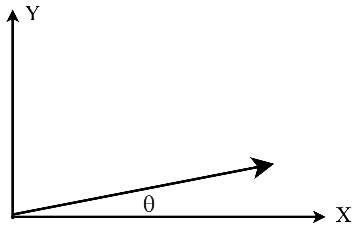


Los vectores suelen dibujarse poniendo su cola en el origen de un sistema de coordenadas. Aquí hemos usado el plano cartesiano.

(b) Recordemos que un vector tiene magnitud y dirección. La magnitud nos dice cuánto mide el vector y la dirección nos dice hacia dónde apunta el vector.

[1] Por razones de diagramación y formato, muchas veces en este capítulo se ha modificado el tamaño de los vectores dibujados, de forma que el dibujo inicial de un vector se vuelve más grande o más pequeño a medida que la solución del problema avanza. Por esa razón, si desea comprobar algunas de las ideas explicadas en el capítulo se le recomienda al lector dibujar los vectores usando una regla y un transportador.

¿Cómo especificamos la dirección del vector anterior? Una forma natural de hacerlo es usando el ángulo que hay entre alguno de los ejes y el vector. Por ejemplo, podemos marcar el ángulo que hay entre el vector y el eje X:



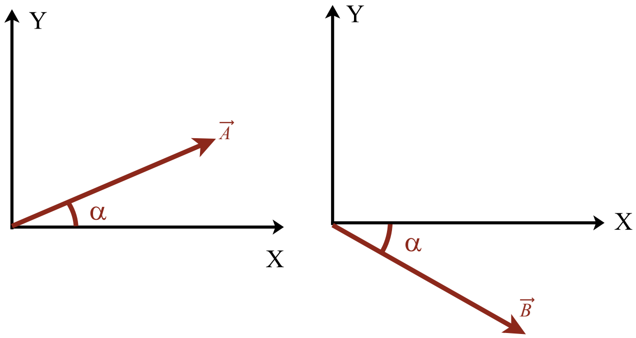
Notemos que hemos llamado θ al ángulo que se forma entre el vector y el eje X.

El ángulo θ nos sirve para decir cuál es la dirección del vector. Por ejemplo, si θ es 30 grados podemos decir: “el vector apunta en la dirección 30 grados por encima del eje X”. Notemos que si no dibujamos el vector sobre un sistema de coordenadas, no tenemos cómo indicar la dirección del vector (necesitamos un sistema para marcar el ángulo que hace el vector con alguno de los ejes).

Problema (teórico) 1.4.

Palabras clave: representación gráfica de vectores, dirección de vectores.

Si en ambos casos el valor de α es el mismo (véase figura) y si la magnitud de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es la misma, ¿hay alguna diferencia entre los vectores? Explique.



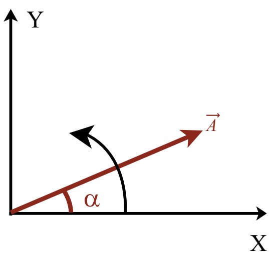
Solución

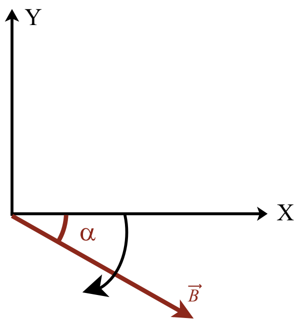
Aunque en ambos casos el valor de α es el mismo y la magnitud de los vectores es igual, sí hay una diferencia entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$: *los vectores no apuntan en la misma dirección*.

Este problema ilustra que no sólo importa el valor del ángulo con respecto a uno de los ejes (en este caso con respecto al eje X), sino que es fundamental tener en cuenta cómo medimos dicho ángulo. En el caso de $\vec{A}$ se midió el ángulo empezando en el eje X y luego nos movimos en la dirección contraria a las manecillas del reloj. En el caso de $\vec{B}$, también comenzamos en el eje X pero nos movimos en el sentido de las manecillas del reloj:

Así, para indicar la dirección de un vector debemos tener cuidado con el sentido en el que medimos el ángulo. *Cuando vamos a dibujar varios vectores usando el mismo sistema, debemos medir los ángulos en el mismo sentido siempre*. Por ejemplo, si queremos comparar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, debemos decidir si queremos medir los ángulos en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario. Si, por ejemplo, medimos los ángulos en el sentido contrario de las manecillas (y esta es la forma más común de medirlos), el ángulo del vector $\vec{B}$ debe ser medido como se indica en la siguiente figura.

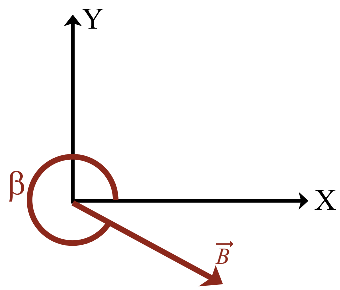
Como se puede apreciar en el dibujo, este ángulo β es distinto al ángulo α, lo que rectifica que los vectores no apuntan en la misma dirección. Las direcciones de dos vectores sólo son iguales si el valor del ángulo de cada vector es igual, y si este es medido en el mismo sentido.





Medimos el ángulo en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

Medimos el ángulo en el sentido de las manecillas del reloj.



El ángulo de $\vec{B}$ es medido en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

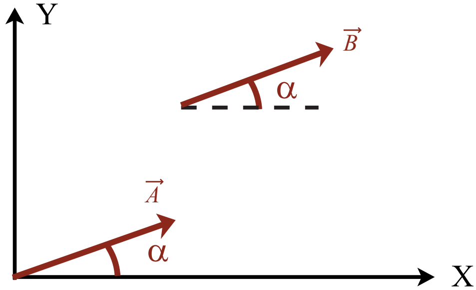
Nota 1.2. Dirección de un vector

Cuando vamos a dibujar varios vectores usando el mismo sistema de coordenadas, debemos medir los ángulos con respecto al mismo eje (puede ser X o Y) y en el mismo sentido (al contrario o en el sentido de las manecillas del reloj).

Problema (teórico) 1.5.

Palabras clave: vectores que no empiezan en el origen.

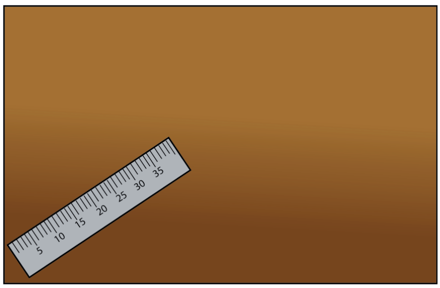
¿Cuál es la diferencia entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura si los ángulos marcados son iguales, si la línea punteada es paralela a X y si las magnitudes de los vectores son las mismas?



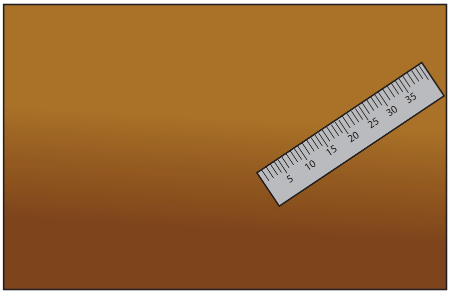
Solución

Las únicas dos cosas que caracterizan a un vector son la magnitud y su dirección. Aunque podemos ver que el vector $\vec{B}$ fue dibujado en un lugar del plano que no comienza en el origen, esto no nos debe confundir: ambos vectores son exactamente iguales porque ambos tienen la misma dirección y ambos miden lo mismo (la línea punteada sirve para marcar el ángulo del vector $\vec{B}$ ya que no está cerca del eje). En realidad, $\vec{B}$ no es otra cosa que una copia del vector $\vec{A}$ que ha sido trasladada a otra posición en el plano.

Para entender esto mejor, supongamos que tenemos una regla de 40 cm sobre una mesa como se ilustra a continuación:



Ahora movemos con mucho cuidado la regla a otra posición sobre la mesa, de manera que no cambiamos su dirección (no la giramos ni un poco):



Imaginemos que la regla representa el vector $\vec{A}$. Cuando la regla estaba en la primera posición, tenía cierta dirección y cierta magnitud (su magnitud es lo que mide, es decir, 40 cm). Si ahora movemos la regla a otra posición, su magnitud no va cambiar, va a seguir midiendo 40 cm. Y si además tenemos cuidado de no cambiar la dirección, la regla en la posición final va a representar exactamente el mismo vector $\vec{A}$ que representaba al comienzo. De esta manera, podemos entender el vector $\vec{B}$ como una copia del vector $\vec{A}$, que ha sido trasladada en el espacio.

Sin embargo, habíamos dicho en el problema 1.3 que usualmente un vector debe ser dibujado al comienzo del origen del sistema de coordenadas, pues de esa forma podíamos determinar la dirección del vector. Por supuesto, podemos dibujar al vector $\vec{B}$ en el origen del sistema de coordenadas, de hecho, ese sería precisamente el vector $\vec{A}$. En problemas de física muchas veces vamos a encontrar situaciones en las que tenemos que dibujar muchos vectores (uno encima del otro) y, por razones de visualización y claridad, es mucho más conveniente dibujar un vector comenzando en un punto diferente del origen. Cuando no dibujamos un vector en el origen debemos indicar la dirección del vector usando alguna línea de referencia que sea paralela a alguno de los ejes, como la línea punteada paralela al eje X que servía para indicar la dirección de $\vec{B}$.

El resultado del problema que realicemos no va a cambiar si dibujamos el vector en el origen o en otro lugar porque, como lo ilustra la analogía con la regla, si trasladamos un vector de un punto a otro sin cambiar su dirección, el vector sigue siendo el mismo (su magnitud y su dirección siguen siendo iguales).

Nota 1.3. Traslación de un vector sobre el plano

Si movemos un vector del origen del sistema de coordenadas a otro punto del sistema sin cambiar la dirección, el vector sigue siendo el mismo.

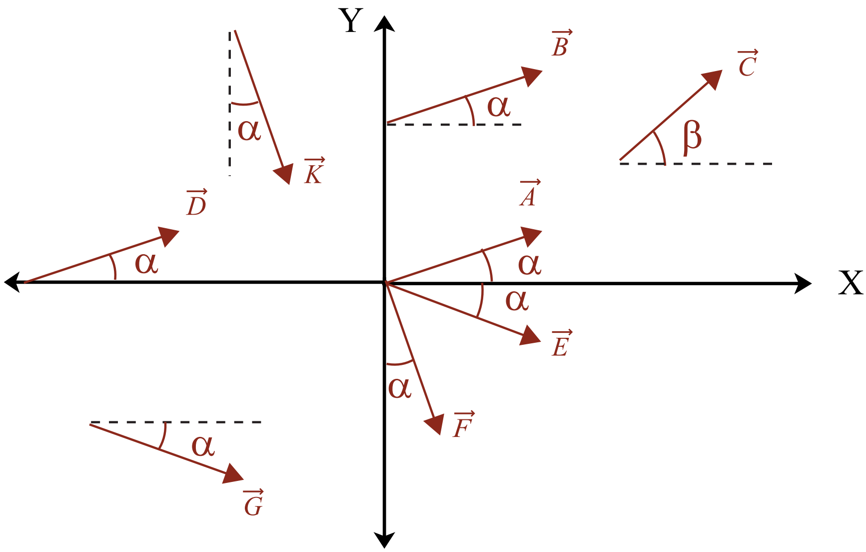
Muchas veces es más conveniente dibujar los vectores de modo que comiencen en puntos diferentes del origen. En general, si no cambiamos la dirección o la longitud, podemos mover el vector de cualquier punto del plano a cualquier otro punto sin alterarlo.

Problema 1.6.

Palabras clave: vectores que no empiezan en el origen, identificar vectores gráficamente.

(a) Identifique cuáles de los siguientes vectores son el mismo vector, teniendo en cuenta el sistema de coordenadas usado y el hecho de que todos tienen la misma magnitud.

(b) Diga con respecto a lo determinado en (a) cuáles vectores son translaciones y cuál es el vector *original* (el vector original es el que está en el origen).



Solución

(a) Como en el enunciado nos dicen que todos los vectores tienen la misma magnitud, para saber qué vectores son iguales sólo debemos buscar aquellos que apuntan en la misma dirección. Según esto, $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{D}$ apuntan en la misma dirección así que estos tres vectores son iguales. También podemos notar que los vectores $\vec{E}$ y $\vec{G}$ son el mismo vector. Por último, $\vec{K}$ y $\vec{F}$ también son iguales.

(b) El vector original es el que está en el origen. $\vec{A}$ está en el origen así que $\vec{B}$ y $\vec{D}$ son traslaciones de $\vec{A}$. Por otro lado, $\vec{G}$ es una traslación de $\vec{E}$ (este último es el "original") y $\vec{K}$ una traslación de $\vec{F}$.

Problema (teórico) 1.7.

Palabras clave: suma gráfica de vectores.

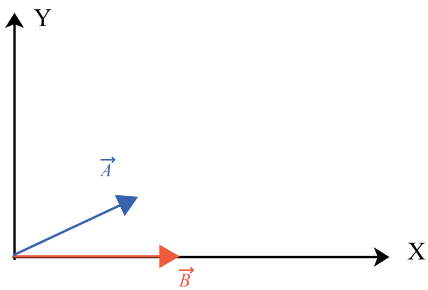
Con base en los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dibujados en la figura, dibuje el vector $\vec{A}+\vec{B}$. Explique paso a paso su respuesta.

Solución

Así como la suma de dos números da como resultado otro número, la suma de vectores da un nuevo vector; si sumamos vectores vamos a obtener un objeto que tiene magnitud y dirección. Si tenemos dibujados los vectores que vamos a sumar, podemos hallar el vector resultante de la suma siguiendo tres pasos.

Paso 1

Dibujamos los vectores en el origen de un sistema de coordenadas (somos libres de utilizar cualquier sistema de coordenadas):

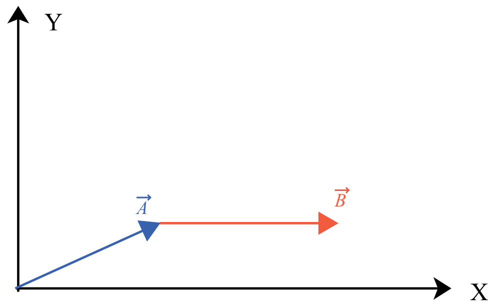


Paso 2

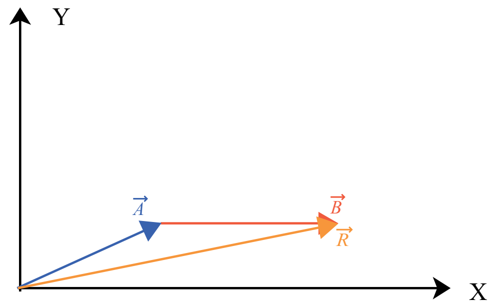
Ahora escogemos cualquiera de los dos vectores que vamos a sumar y hacemos lo siguiente: lo trasladamos sin cambiar su dirección, hasta que la cola del vector coincida con la punta del otro vector (del vector que no movimos). En nuestro caso vamos a trasladar el vector $\vec{B}$ (recordemos de la nota 1.3 que si movemos un vector sin cambiar su dirección, el vector movido representa exactamente el mismo vector).

Paso 3

Ahora trazamos un vector que una la cola del vector que no movimos (en nuestro caso el vector que no movimos fue $\vec{A}$), con la punta del vector que movimos.



Movemos el vector $\vec{B}$ de manera que su cola coincida con la punta del vector $\vec{A}$.



Trazamos un vector nuevo que comienza en la cola de $\vec{A}$ y va hasta la punta de $\vec{B}$. Hemos llamado $\vec{R}$ a este nuevo vector.

El nuevo vector $\vec{R}$ (en naranja) representa el resultado final de la suma.

Nota 1.4. Suma de dos vectores (método gráfico)

Para sumar vectores de forma gráfica debemos seguir tres pasos:

(a) Situamos los vectores en el origen de un sistema de coordenadas.

(b) Movemos la cola de uno de los vectores (somos libres de escoger cuál) hasta la punta del vector que no movimos. Debemos tener cuidado de no cambiar la dirección del vector que movemos.

(c) Trazamos un vector desde la cola del vector que no movimos hasta la punta del vector que movimos. Este último vector es el resultado de la suma.

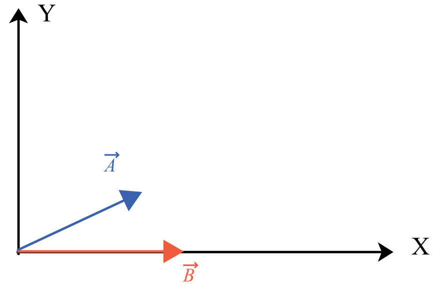
Problema 1.8.

Palabras clave: suma gráfica de vectores, conmutatividad de la suma de vectores.

Muestre gráficamente que el resultado de $\vec{A}+\vec{B}$ no cambia si en el paso 2, explicado en el problema anterior (nota 1.4), movemos el vector $\vec{A}$ y dejamos quieto a $\vec{B}$.

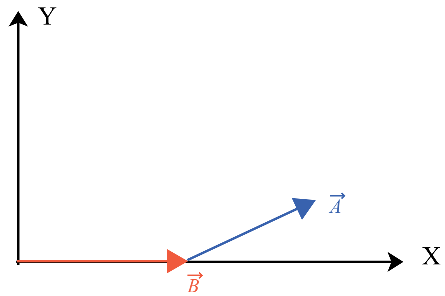
Solución

Repitamos el paso 1:



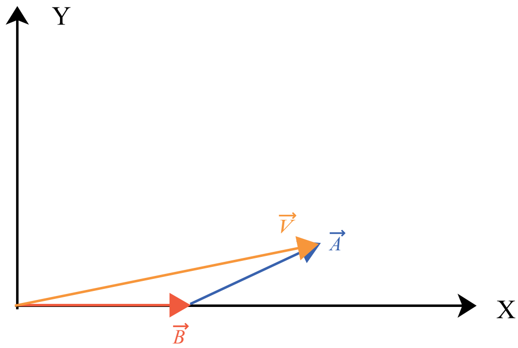
Paso 2

Ahora debemos mover el vector $\vec{A}$ y dejar quieto el vector $\vec{B}$:



Movemos el vector $\vec{A}$ de manera que su cola coincida con la punta del vector $\vec{B}$.

Paso 3



Trazamos un nuevo vector que comienza en la cola de $\vec{B}$ y va hasta la punta de $\vec{A}$. Hemos llamado $\vec{V}$ a este nuevo vector.

El lector puede comprobar que $\vec{V}$ es exactamente igual al vector $\vec{R}$ hallado en el problema anterior (el lector puede medir con una regla la magnitud de ambos vectores y sus direcciones con un transportador). Así, hemos mostrado que al sumar no importa cuál vector movemos en el paso 2.

Problema 1.9.

Palabras clave: suma gráfica de vectores, suma de vectores.

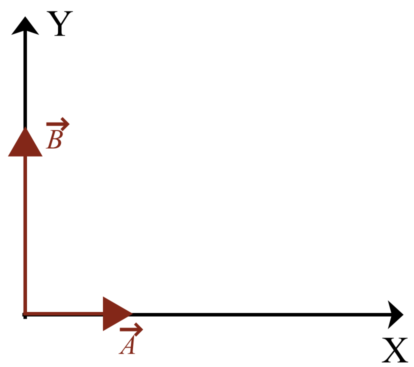
Si un vector $\vec{A}$ mide 3 cm y apunta en la dirección positiva del eje X y si un vector $\vec{B}$ mide 5 cm y apunta en la dirección positiva del eje Y, ¿cuánto mide el vector $\vec{A}+\vec{B}$ y en qué dirección apunta?

Solución

Apliquemos los tres pasos explicados anteriormente para sumar vectores.

Paso 1

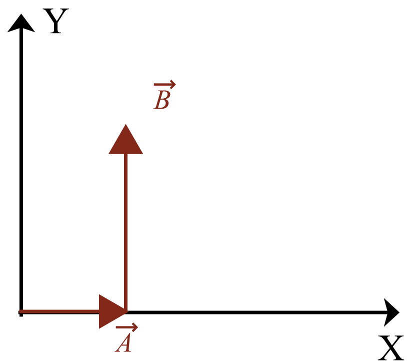
Dibujamos los vectores en el origen de un sistema de coordenadas. Debemos tener presente que $\vec{A}$ mide 3 cm y apunta en la dirección positiva de X mientras que $\vec{B}$ mide 5 cm y apunta en la dirección positiva de Y.



Dibujamos los vectores en un sistema de coordenadas.

Paso 2

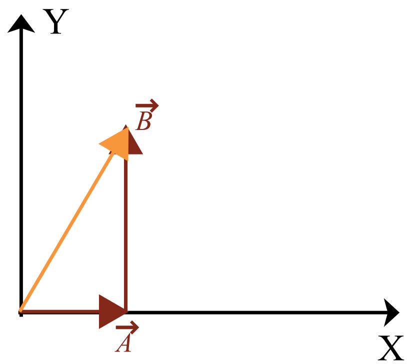
Vamos a trasladar el vector $\vec{B}$ y dejar quieto a $\vec{A}$ (como vimos en el problema 1.8, el resultado de la suma es el mismo sin importar cuál vector movamos).



Movemos el vector $\vec{B}$ de manera que su cola coincida con la punta del vector $\vec{A}$.

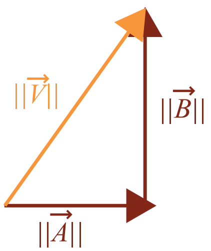
Paso 3

Ahora trazamos un vector que una la cola del vector que no movimos (en nuestro caso el vector que no movimos fue $\vec{A}$), con la punta del vector que movimos.



Trazamos un nuevo vector que comienza en la cola de $\vec{A}$ y va hasta la punta de $\vec{B}$.

El nuevo vector que hemos trazado (en naranja) representa el resultado final de la suma. Llamemos a este nuevo vector $\vec{V}$. ¿Cuánto mide? De la figura se puede inferir que tenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la magnitud de $\vec{V}$ y las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son los catetos:



Es claro en el dibujo que la magnitud del vector $\vec{B}$ y la magnitud de $\vec{A}$ son los catetos del triángulo rectángulo.

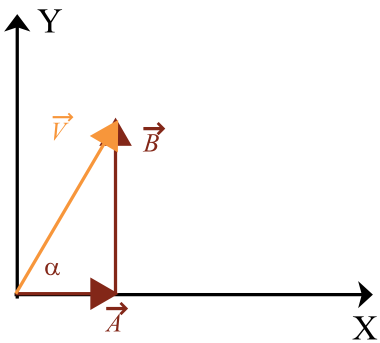
Según el teorema de Pitágoras tenemos:

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2} \tag{1}$$

Como $\|\vec{B}\| = 5$ cm y $\|\vec{A}\| = 3$ cm, entonces

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{(5 \text{ cm})^2 + (3 \text{ cm})^2} = \sqrt{34 \text{ cm}} \tag{2}$$

Ahora debemos hallar la dirección de $\vec{V}$. Para hacerlo debemos encontrar el ángulo que forma con el eje X (también, si quisiéramos, podríamos buscar el ángulo con respecto al eje Y). Vamos a medir el ángulo en el sentido contrario de las manecillas del reloj:

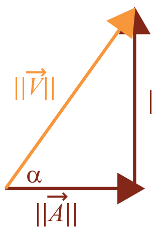


Debemos buscar el ángulo α medido en sentido contrario de las manecillas de reloj que el vector $\vec{V}$ forma con el eje X.

Si tenemos un triángulo rectángulo y conocemos el valor de los catetos, podemos hallar el ángulo usando la tangente:

$$\tan\alpha = \frac{C_O}{C_A}, \tag{3}$$

donde C_O se refiere al cateto opuesto y C_A, al adyacente. En nuestro caso podemos ver que el cateto opuesto al ángulo α es la magnitud de $\vec{B}$ mientras que el cateto adyacente es la magnitud de $\vec{A}$, como se ilustra a continuación:



En este dibujo es claro que la magnitud del vector $\vec{B}$ es la longitud del cateto opuesto y la magnitud de $\vec{A}$ es la longitud del cateto adyacente del triángulo rectángulo.

Por lo tanto, tenemos

$$\tan\alpha = \frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{A}\|}. \tag{4}$$

Aplicando la arcotangente a ambos lados ($\arctan(\tan\theta) = \theta$ así como $\arcsin(\sin\theta) = \theta$ o $\arccos(\cos\theta) = \theta$) obtenemos

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{A}\|}\right). \tag{5}$$

Al remplazar los valores obtenemos finalmente:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{5\text{ cm}}{3\text{ cm}}\right) = 59°. \tag{6}$$

Así, $\vec{A} + \vec{B}$ nos da un vector de magnitud $\sqrt{34}$ cm y apunta en la dirección dada por un ángulo de 59° medido en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

Problema (teórico) 1.10.

Palabras clave: suma de vectores paralelos, resta gráfica de vectores, negativo de un vector.

Un vector $\vec{V}$ tiene una longitud de 3 cm y un vector $\vec{B}$, una de 4 cm. Ambos vectores apuntan en la dirección positiva del eje X.

(a) Sume el vector $\vec{V}$ más el vector $\vec{B}$.

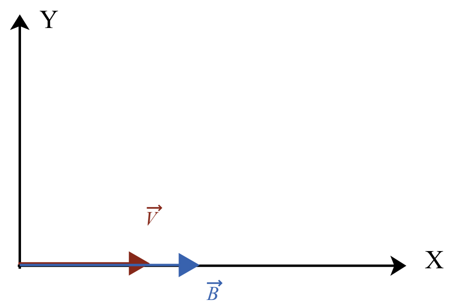
(b) Dibuje el vector $-\vec{B}$ y diga si su magnitud es la misma que la de $\vec{B}$.

(c) Calcule $\vec{V} - \vec{B}$.

Solución

(a) *Paso 1*

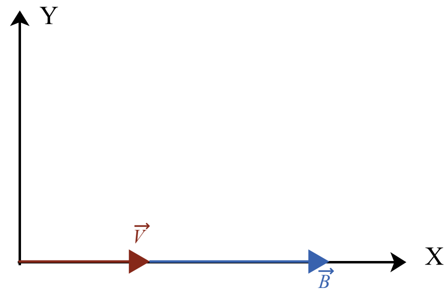
Dibujamos los vectores en el origen de un sistema de coordenadas teniendo en cuenta que $\vec{V}$ mide 3 cm y $\vec{B}$ mide 4 cm. Además, ambos apuntan en la dirección positiva del eje X:



Situamos ambos vectores en el origen de un sistema de coordenadas.

Paso 2

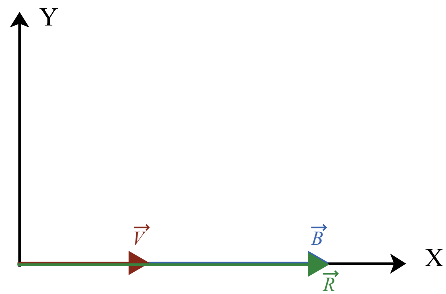
Movemos la cola de uno de los vectores hasta la punta del vector que no movimos:



Movemos el vector $\vec{B}$ de modo que su cola quede en la punta de $\vec{V}$.

Paso 3

Finalmente, trazamos un vector desde la cola del vector que no movimos (en este caso $\vec{V}$) hasta la punta del que movimos (en este caso $\vec{B}$):



Trazamos un vector desde la cola de $\vec{V}$ hasta la punta de $\vec{B}$. Llamamos $\vec{R}$ a este vector (en verde). $\vec{R}$ es el resultado de la suma de $\vec{B}$ con $\vec{V}$.

El vector $\vec{R}$ en verde es la suma que estábamos calculando. Del dibujo se infiere que la magnitud de este vector es 7 cm y su dirección es la dirección positiva del eje X. Esto señala algo importante: *cuando sumamos vectores que son paralelos, el resultado es un vector que tiene la misma dirección de los vectores que sumamos y la magnitud es simplemente la suma de las magnitudes de los vectores iniciales* (en nuestro caso, la magnitud de $\vec{V}$ es 3 cm y la de $\vec{B}$ es 4 cm así que la suma es 3 cm + 4 cm = 7 cm).

Nota 1.5. Suma de dos vectores paralelos (método gráfico)

Para sumar vectores que son paralelos simplemente sumamos la magnitud de cada uno de ellos. El resultado es la magnitud del vector final:

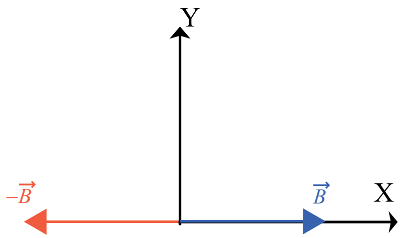
$$\|\vec{A}+\vec{B}\| = \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$$

Además, la dirección del vector final es la misma que la dirección de los vectores sumados.

(b) Un vector con un signo negativo es un vector con la misma magnitud pero dirección contraria al vector sin el signo negativo. Por ejemplo, $-\vec{C}$ tiene la misma magnitud que $\vec{C}$, pero dirección contraria. En nuestro caso, $-\vec{B}$ y $\vec{B}$ tienen la misma magnitud pero direcciones opuestas. Como tienen direcciones opuestas, para dibujar a $-\vec{B}$ sólo hay que cambiar la cola por la punta de $\vec{B}$:

Para dibujar $-\vec{B}$ a partir de $\vec{B}$, sólo debemos cambiar la cola por la punta de $\vec{B}$. Al hacer eso obtenemos un vector de igual magnitud pero dirección contraria.

En el plano cartesiano $-\vec{B}$ queda así:



Como ya dijimos, la magnitud de $-\vec{B}$ es la misma que la de $\vec{B}$, 4 cm.

(c) Ahora debemos calcular $\vec{V}-\vec{B}$. Notemos que $\vec{V}-\vec{B}$ no es más que la suma del vector $\vec{V}$ con el vector $-\vec{B}$:

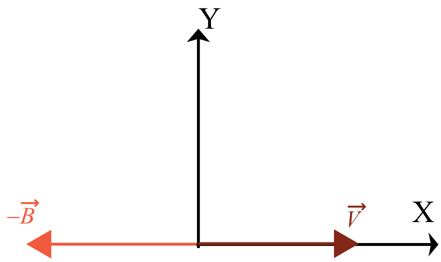
$$\vec{V}-\vec{B} = \vec{V} + (-\vec{B}) \tag{1}$$

En la sección anterior ya supimos cómo es $-\vec{B}$. Así, vemos que toda resta se puede entender como una suma entre un vector dado y otro vector con un signo menos.

Para realizar $\vec{V} - \vec{B}$ debemos seguir los tres pasos que ya conocemos.

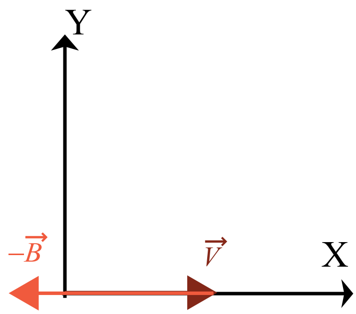
Paso 1

Situamos los vectores que vamos a sumar en el origen:



Paso 2

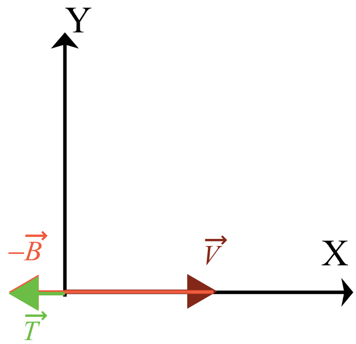
Movemos la cola de uno de los dos vectores hasta la punta del vector que no movimos:



Movemos el vector $-\vec{B}$ de modo que su cola quede en la punta de $\vec{V}$.

Paso 3

Finalmente, trazamos el vector resultante que va desde la cola del vector que no movimos ($\vec{V}$) hasta la punta del que movimos ($-\vec{B}$):



Trazamos un vector que hemos llamado $\vec{T}$ (en verde) desde la cola $\vec{V}$ hasta la punta de $-\vec{B}$. Este vector representa la suma de $\vec{V}$ con $-\vec{B}$.

De la figura se infiere que la magnitud de $\vec{T}$ es 1 cm y su dirección es la dirección negativa del eje X. Cuidado: La magnitud de $\vec{T}$ es 1 cm (no -1 cm), pues la magnitud siempre es positiva (el signo menos indica solamente la dirección).

Notemos lo sencillo que es realizar $\vec{V} - \vec{B}$ cuando los vectores están sobre el mismo eje: simplemente restamos la magnitud de $\vec{V}$ (que es 3 cm) con la magnitud de $\vec{B}$ (que es 4 cm): 3 cm $-$ 4 cm $= -1$ cm. El resultado de esa resta nos dice que la magnitud del vector final es 1 cm y el signo menos nos dice que apunta en la dirección negativa de X (más adelante entenderemos mejor este signo usando vectores unitarios).

Nota 1.6. Resta de vectores paralelos (método gráfico)

Para realizar $\vec{A} - \vec{B}$ debemos dibujar $-\vec{B}$ y luego sumamos $\vec{A}$ con $-\vec{B}$ siguiendo los tres pasos de la suma explicados en la nota 1.4. Para dibujar $-\vec{B}$ a partir de $\vec{B}$ simplemente cambiamos la cola por la punta de $\vec{B}$ teniendo en cuenta que la magnitud no cambia.

Problema (teórico) 1.11.

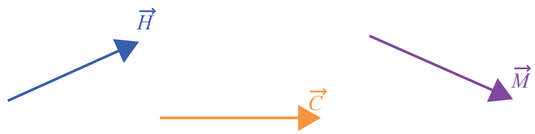
Palabras clave: suma de más de dos vectores, conmutatividad de vectores.

Con base en la figura, realice de forma gráfica las siguientes operaciones respetando el orden de los paréntesis:

(a) $(\vec{H} - \vec{M}) + \vec{C}$.

(b) $-\vec{M} + (\vec{C} + \vec{H})$.

(c) Compare el resultado de (a) con el de (b).



Solución

(a) Para hacer $(\vec{H} - \vec{M}) + \vec{C}$ primero debemos hacer $(\vec{H} - \vec{M})$ y al resultado le sumamos $\vec{C}$, pues nos piden que respetemos el orden indicado por los paréntesis.

$$(\vec{H} - \vec{M}):$$

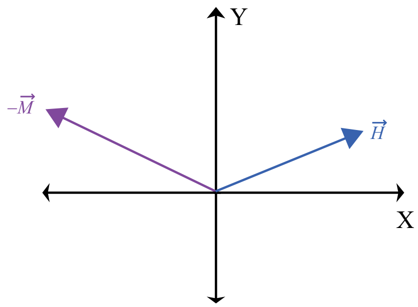
En primer lugar, debemos encontrar $-\vec{M}$. Como en la figura nos muestran $\vec{M}$, podemos hallar $-\vec{M}$ de forma simple, cambiando la cola por la punta:

Para dibujar $-\vec{M}$ a partir de $\vec{M}$ sólo debemos cambiar la cola por la punta.

Ahora que conocemos $-\vec{M}$ podemos hacer la suma $\vec{H} + (-\vec{M})$. Note que esto es lo mismo que hacer $(\vec{H} - \vec{M})$.

Paso 1

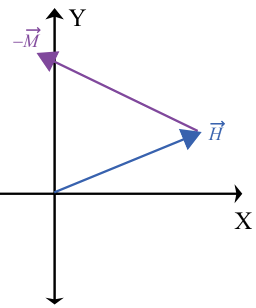
Situamos los vectores en el origen de un sistema de coordenadas:



Situamos los vectores $\vec{H}$ y $-\vec{M}$ en el origen de un sistema de coordenadas.

Paso 2

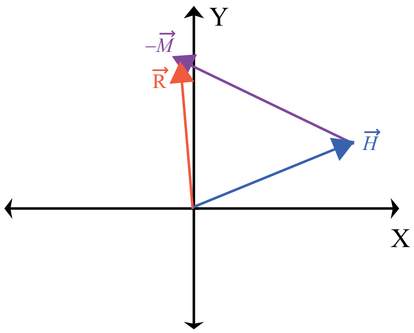
Movemos la cola de uno de los vectores hasta la punta del otro vector:



Movemos la cola de $-\vec{M}$ hasta la punta de $\vec{H}$.

Paso 3

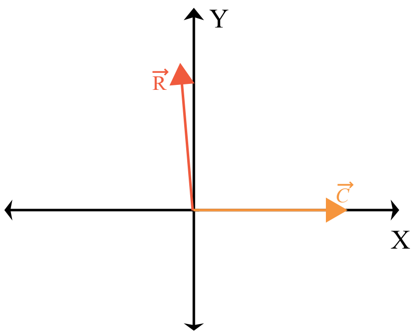
Trazamos un vector desde la cola del vector que no movimos hasta la punta del que movimos:



Trazamos un vector que hemos llamado $\vec{R}$ desde la cola de $\vec{H}$ hasta la punta de $-\vec{M}$.

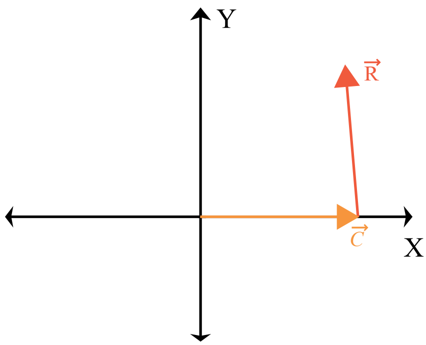
El vector $\vec{R}$ es el resultado de $\left(\vec{H}-\vec{M}\right)$. Ahora debemos sumarle a $\vec{R}$ el vector $\vec{C}$. De nuevo, hacemos los tres pasos:

Paso 1



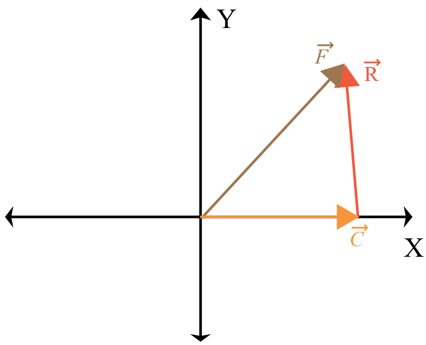
Situamos los vectores $\vec{R}$ y $\vec{C}$ en el origen del sistema de coordenadas.

Paso 2



Movemos la cola de $\vec{R}$ hasta la punta de $\vec{C}$.

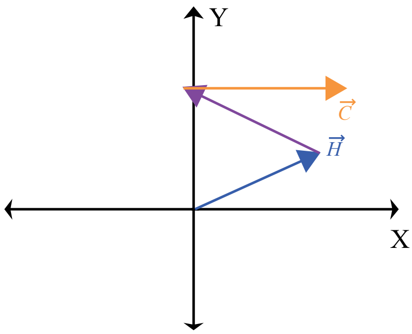
Paso 3



Trazamos un vector que hemos llamado $\vec{F}$ desde la cola de $\vec{C}$ hasta la punta de $\vec{R}$.

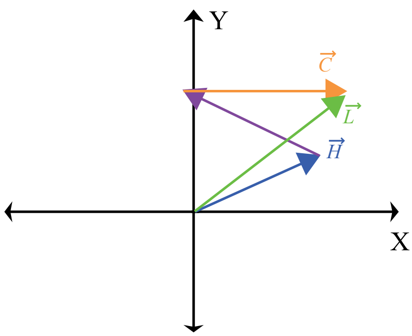
El vector $\vec{F}$ es el resultado final, es decir, $\left(\vec{H} - \vec{M}\right) + \vec{C} = \vec{F}$.

Otro método: también hubiéramos podido sumar los vectores $\vec{H}$, $-\vec{M}$ y $\vec{C}$ de forma directa sin necesidad de obtener el vector intermedio $\vec{R}$. Es decir, hubiéramos podido añadir el vector $\vec{C}$ directamente, poniendo su cola en la punta de $-\vec{M}$. Si hubiéramos hecho esto, tendríamos lo siguiente:



Podemos situar la cola de $\vec{C}$ directamente sobre la punta de $-\vec{M}$ sin necesidad de trazar el vector $\vec{R}$.

Si ahora unimos la cola del vector $\vec{H}$ que no movimos con un vector que llega hasta la punta del último vector que movimos ($\vec{C}$), obtenemos

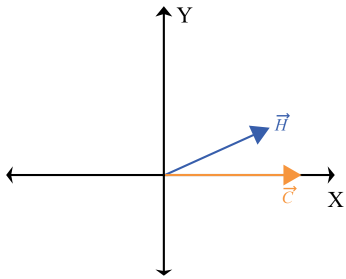


Unimos con un vector llamado $\vec{L}$ la cola de $\vec{H}$ con la punta de $\vec{C}$.

El lector puede comprobar que $\vec{L}$ es igual a $\vec{F}$. Por lo tanto, para sumar más de dos vectores podemos sumar primero dos vectores y encontrar el vector que resulta de esa suma inicial y luego sumar ese vector intermedio con los vectores que faltan, o sumar directamente los diferentes vectores, poniendo la cola de cada vector sobre la punta del vector anterior, tal como acabamos de hacer.

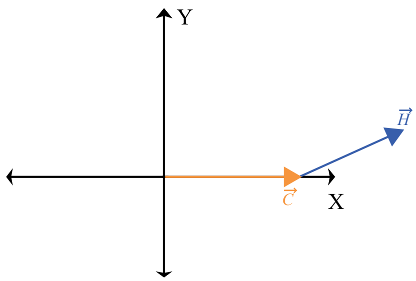
(b) Ahora debemos realizar $-\vec{M} + \left(\vec{C} + \vec{H}\right)$. Para hacerlo debemos calcular primero $\left(\vec{C} + \vec{H}\right)$ y luego sumar $-\vec{M}$ con el resultado de $\left(\vec{C} + \vec{H}\right)$.

Paso 1



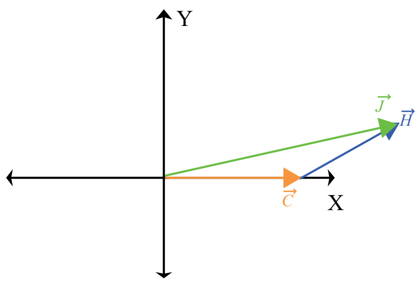
Situamos los vectores $\vec{H}$ y $\vec{C}$ en el origen del sistema de coordenadas.

Paso 2



Movemos la cola de $\vec{H}$ hasta la punta de $\vec{C}$.

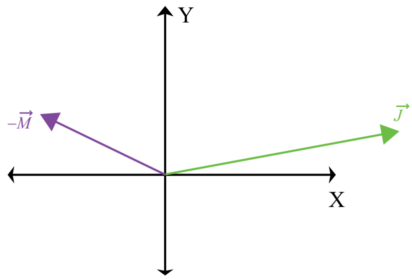
Paso 3



Trazamos un vector que hemos nombrado $\vec{J}$ desde la cola de $\vec{C}$ hasta la punta de $\vec{H}$.

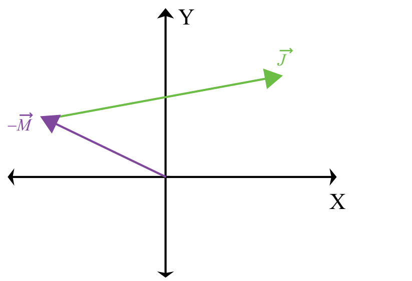
El vector $\vec{J}$ es el resultado de $\left(\vec{C}+\vec{H}\right)$. Ahora debemos sumar $-\vec{M}$ (que ya lo conocemos por la sección anterior) con $\vec{J}$.

Paso 1



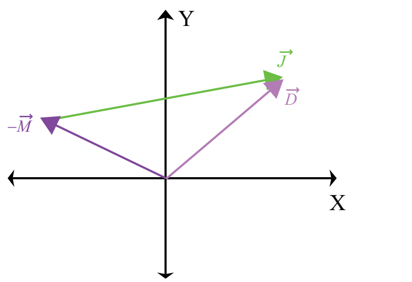
Situamos los vectores $\vec{J}$ y $-\vec{M}$ en el origen del sistema de coordenadas.

Paso 2



Movemos la cola de $\vec{J}$ hasta la punta de $-\vec{M}$.

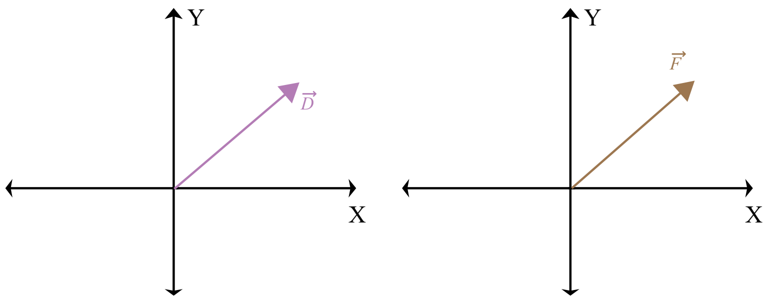
Paso 3



Trazamos un vector que hemos llamado $\vec{D}$ desde la cola de $-\vec{M}$ hasta la punta de $\vec{J}$.

El vector $\vec{D}$ es el resultado de la suma de $-\vec{M}$ con $\vec{J}$, y como $\vec{J}$ es el resultado de $\left(\vec{C}+\vec{H}\right)$, entonces $\vec{D}$ es el resultado de hacer $-\vec{M}+\left(\vec{C}+\vec{H}\right)$.

(c) Si comparamos la última figura con la figura donde se traza F en la sección (a), podemos notar que $\vec{D}$ es igual al vector $\vec{F}$:



El vector $\vec{D}$ es igual al vector $\vec{F}$.

Como ambos vectores son iguales, entonces $\left(\vec{H}-\vec{M}\right)+\vec{C}$ es igual a $-\vec{M}+\left(\vec{C}+\vec{H}\right)$. Esto quiere decir que *la suma de vectores es conmutativa*, es decir, no interesa en qué orden sumemos los vectores.

Nota 1.7. Conmutatividad de vectores

La suma de vectores es conmutativa, es decir, no interesa en qué orden los sumemos.

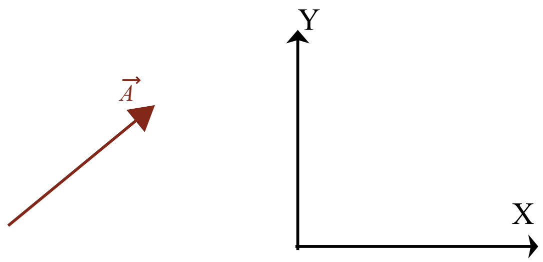
Problema (teórico) 1.12.

Palabras clave: descomposición de un vector.

(a) Explique qué es descomponer un vector.

(b) Descomponga el vector $\vec{A}$ de la figura en el plano de coordenadas dibujado.

(c) Escriba una expresión para la magnitud del vector $\vec{A}$ en término de la magnitud de sus componentes.



Solución

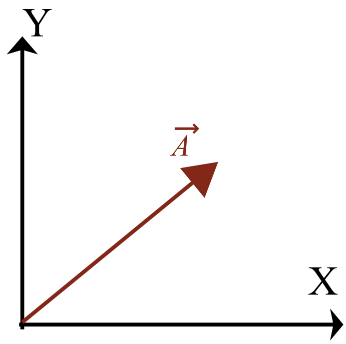
(a) Descomponer un vector es encontrar dos vectores que al sumarlos formen el vector que queremos descomponer. Estos vectores deben cumplir los siguientes requisitos: uno de ellos debe estar alineado con el eje X (no importa si apunta en la dirección positiva o negativa de X) y el otro debe estar alineado con el eje Y (de nuevo, no importa si apunta en la dirección positiva o negativa de Y). Los dos vectores que cumplen con estas condiciones son las *componentes* del vector inicial.

Notemos que el vector $\vec{A}$ se descompone en una componente X y una Y. Esto quiere decir que el vector $\vec{A}$ es de dos dimensiones. En general, el número de dimensiones de un vector es igual al número de componentes que necesitamos para descomponer el vector. En este libro sólo vamos a trabajar con vectores de una y dos dimensiones (vectores con una o dos componentes respectivamente).

(b) Para encontrar las componentes del vector $\vec{A}$ podemos seguir los siguientes pasos:

Paso 1

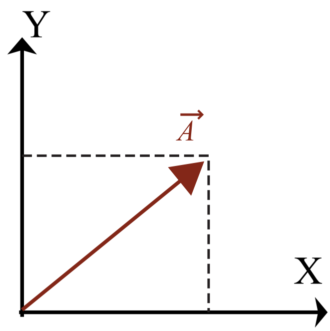
Situamos nuestro vector en el origen del plano de coordenadas.



Situamos el vector en el origen del plano de coordenadas.

Paso 2

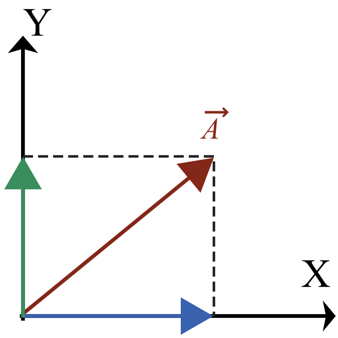
A continuación, trazamos dos líneas punteadas (estas líneas son sólo una guía) que cumplan las siguientes condiciones: una de ellas es paralela al eje Y y se extiende desde la punta del vector hasta el eje X. La otra es paralela al eje X y va desde la punta del vector hasta tocar el eje Y:



Trazamos una línea paralela al eje X que va desde la punta del vector hasta el eje Y. Trazamos otra línea paralela a Y que va desde la punta del vector hasta el eje X.

Paso 3

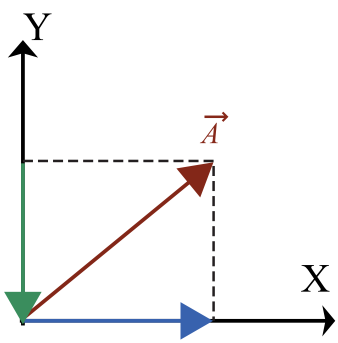
Finalmente, trazamos un vector en el eje X que comience en el origen y llegue hasta el punto en que la línea punteada que acabamos de dibujar corta el eje X. También trazamos un vector sobre el eje Y, que comienza en el origen y llega hasta la línea punteada que corta el eje Y.



Trazamos un vector alineado con el eje Y que empieza en el origen y llega hasta el punto en el que la línea punteada corta el eje Y. Trazamos un vector en X que va desde el origen hasta el punto en que la otra línea punteada corta el eje X.

Los vectores en azul y verde son las componentes de $\vec{A}$ en el eje X y en el eje Y respectivamente. Estas componentes se suelen denotar usando la letra inicial del vector original con un subíndice X o Y que indica si es la componente X o Y respectivamente. En este caso, a la componente X (en azul) la podemos llamar $\vec{A}_x$ y a la componente Y (en verde) la podemos llamar $\vec{A}_y$.

Cuidado: es muy importante tener en cuenta la dirección de las componentes. Siempre debemos pintarlas de modo que vayan del origen hacia el punto en que la línea punteada corta el eje (nunca pintarlas desde la línea punteada hasta el origen). Por ejemplo, sería un error pintar la componente Y así:



Es un error pintar la componente en Y apuntando hacia el origen. Las componentes siempre se deben trazar ubicando su cola en el origen y su punta en el punto en que la línea punteada corta el eje.

Nota 1.8. Descomponer un vector

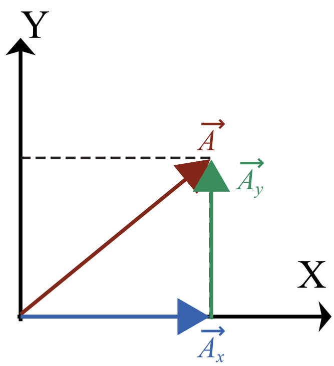
Descomponer un vector es encontrar sus componentes. Por ejemplo, encontrar $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$. Para descomponer un vector debemos seguir tres pasos:

Paso 1: Situamos el vector en el origen de un sistema de coordenadas.

Paso 2: Trazamos una línea (mejor si es punteada para no confundirla con un vector) paralela al eje Y que va desde la punta del vector hasta que toca el eje X. Trazamos una línea paralela al eje X que va desde la punta del vector hasta que toca el eje Y.

Paso 3: Trazamos un vector en el eje X que comience en el origen y que llegue hasta el punto en que la línea que acabamos de dibujar toca el eje X. Esta es la componente X. Trazamos un vector que comienza en el origen y llega hasta el punto en que la línea punteada toca el eje Y. Esta es la componente Y.

(c) Ahora debemos escribir la magnitud de $\vec{A}$ en términos de la magnitud de sus componentes. Esto se puede calcular de forma muy rápida si formamos un triángulo rectángulo entre las dos componentes y el vector $\vec{A}$. Para formar este triángulo a partir de la figura donde encontramos las componentes del vector $\vec{A}$, podemos por ejemplo trasladar $\vec{A}_y$ hasta la línea punteada paralela al eje Y. Recordemos de la nota 1.3 que si trasladamos el vector sin rotarlo o sin cambiar su dirección, este sigue siendo el mismo.



Podemos trasladar $\vec{A}_y$ desde el eje Y hasta la línea punteada que es paralela a Y para formar un triángulo rectángulo entre las componentes y el vector inicial.

De este triángulo que hemos formado es muy fácil deducir que la magnitud de $\vec{A}$ no es más que la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos son las dos componentes[2]. Es decir,

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\|\vec{A}_x\|^2 + \|\vec{A}_y\|^2} \tag{1}$$

Además, en la última figura es claro que la suma de $\vec{A}_y$ con $\vec{A}_x$ nos da $\vec{A}$. Esto muestra que, como dijimos en (a), descomponer un vector es encontrar dos vectores, uno alineado en X y otro en Y, que al sumarlos nos dan el vector que queríamos descomponer.

Nota 1.9. Vector en términos de sus componentes

Muchas veces, para hallar la dirección o magnitud de un vector, debemos formar un triángulo rectángulo de modo que las componentes del vector sean los catetos y el vector sea la hipotenusa. Para formar dicho triángulo, debemos mover una de las dos componentes desde su eje correspondiente hasta la línea punteada paralela a dicho eje.

Todo vector se puede escribir como una suma de sus componentes. Por ejemplo $\vec{A}$ se puede escribir como $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$.

La magnitud de un vector siempre se puede escribir como la raíz cuadrada de la suma de la magnitud de cada componente al cuadrado. Por ejemplo,

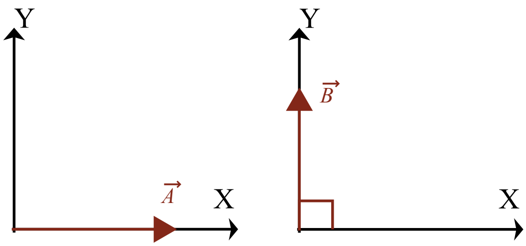
$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\|\vec{A}_x\|^2 + \|\vec{A}_y\|^2}.$$

[2] En este libro llamamos *componentes* a los vectores que descomponen el vector. En otros libros se llama *componente* a la magnitud de estos vectores, y se llama *vector componente* a los vectores que descomponen el vector.

Problema 1.13.

Palabras clave: descomposición de un vector, vectores sin alguna componente.

Descomponer los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura.



Empecemos por descomponer a $\vec{A}$. Antes de repetir los tres pasos de la nota 1.8 para descomponer los vectores, notemos que el vector $\vec{A}$ está alineado con el eje X (si trazáramos una línea punteada paralela al eje X desde la punta del vector, esta línea estaría también sobre el eje X). En otras palabras, podemos decir que el vector es su propia componente en X, es decir, $\vec{A} = \vec{A}_x$. Como el vector está alineado en X, no tiene ninguna componente Y. Es decir, $\vec{A}_y = \vec{0}$ (este cero no representa el número cero sino el vector cero, o vector nulo, que es un vector cuya magnitud es cero).

Recordemos que descomponer es encontrar dos vectores, uno en X y uno en Y, tales que al sumarlos se forme el vector que queremos descomponer. En este caso, podemos escribir a $\vec{A}$ como $\vec{A} = \vec{A}_x$, que es lo mismo que $\vec{A} = \vec{A}_y + \vec{0}$ (la componente Y es cero).

Para el caso de $\vec{B}$ sucede algo similar. El vector $\vec{B}$ está completamente alineado con el eje Y, así que él mismo es su propia componente en Y y no tiene componente en X; $\vec{B} = \vec{B}_y$ y $\vec{B}_x = \vec{0}$ (la componente X de este vector es el vector nulo).

Nota 1.10. Vector sobre un eje

Cuando un vector está alineado con uno de los ejes no hay que descomponer al vector; él mismo ya está descompuesto en el eje sobre el que está alienado y no tiene componente en el otro eje.

Problema 1.14.

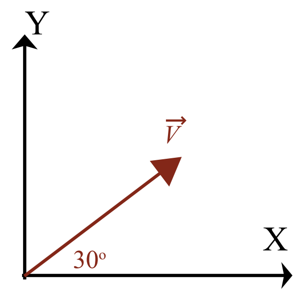
Palabras clave: descomposición de un vector, magnitud de las componentes.

Si un vector $\vec{V}$ mide 5 cm y forma un ángulo de 30° con respecto al eje X, ¿cuánto miden sus componentes?

Solución

Lo primero que debemos hacer para descomponer el vector es dibujarlo en un sistema de coordenadas (este es el paso 1 de la nota 1.8):

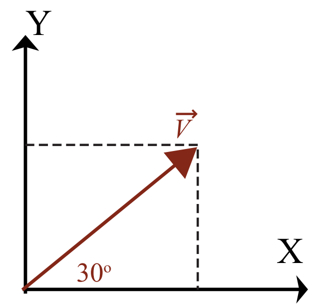
Paso 1



Situamos el vector en el origen del plano de coordenadas.

Paso 2

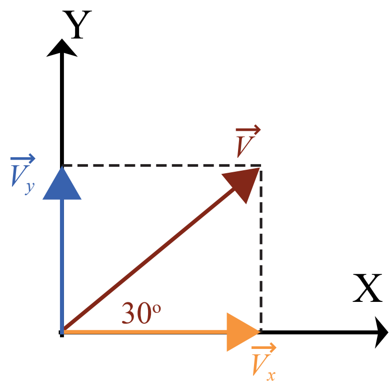
Ahora dibujamos dos líneas punteadas, una paralela al eje X que va desde la punta del vector hasta el eje Y y otra paralela a Y que une la punta del vector con el eje X:



Dibujamos las dos líneas guía que unen la punta del vector con los ejes.

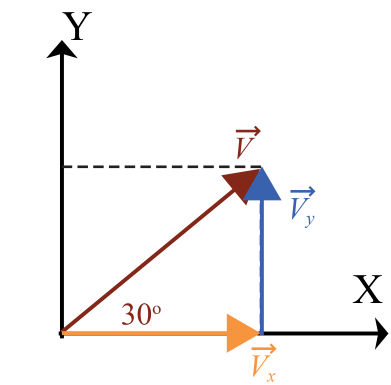
Paso 3

Dibujamos las componentes teniendo en cuenta que la componente Y va desde el origen hasta el punto en que la línea punteada corta el eje Y y la componente X va desde el origen hasta que la línea punteada corta el eje X:



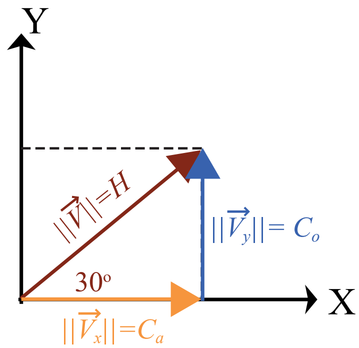
Trazamos la componente X y Y.

Ahora podemos aplicar la nota 1.9, que nos dice que para hallar la magnitud de un vector es conveniente formar un triángulo rectángulo con las componentes del vector. Para formar ese triángulo simplemente movemos la componente Y hasta la línea punteada paralela al eje Y:



Formamos un triángulo rectángulo moviendo la componente Y desde el eje Y hasta la línea punteada paralela a Y.

Con este triángulo ya es sencillo hallar las componentes porque la magnitud de $\vec{V}_x$ es la longitud del cateto adyacente y la magnitud de $\vec{V}_y$ es la longitud del cateto opuesto. Gráficamente, esto se puede ilustrar así:



La magnitud de la componente X es el cateto adyacente C_a, la magnitud de la componente Y es el cateto opuesto C_o y la magnitud del vector $\vec{V}$ es la hipotenusa H.

A partir de esta figura se ve claramente que

$$\sin 30^\circ = \frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}\|} \tag{1}$$

pues el seno de un ángulo es igual al cateto opuesto sobre la hipotenusa. Podemos despejar $\|\vec{V}_y\|$ multiplicando la anterior ecuación por $\|\vec{V}\|$:

$$\|\vec{V}\| \sin 30^\circ = \|\vec{V}_y\| \tag{2}$$

Como la magnitud de $\vec{V}$ es 5 cm, la anterior ecuación nos da

$$\underbrace{(5 \text{ cm})}_{\|\vec{V}\|} \sin 30^\circ = 2.5 \text{ cm} = \|\vec{V}_y\| \tag{3}$$

En palabras, la componente Y mide 2.5 cm.

Por otro lado, como el coseno del ángulo es la componente adyacente dividida entre la hipotenusa, tenemos:

$$\cos 30^\circ = \frac{\|\vec{V}_x\|}{\|\vec{V}\|} \tag{4}$$

Entonces, si multiplicamos la anterior ecuación por $\|\vec{V}\|$, tenemos:

$$\|\vec{V}\| \cos 30^\circ = \|\vec{V}_x\| \tag{5}$$

Si usamos que la magnitud de $\vec{V}$ es 5 cm, obtenemos

$$\underbrace{(5\text{ cm})}_{\|\vec{V}\|}\cos 30^\circ = 4.33\text{ cm} = \|\vec{V}_x\| \tag{6}$$

También podíamos haber obtenido la componente X usando la función tangente, ya que conocemos el ángulo y conocemos $\|\vec{V}_y\|$, que es el cateto opuesto del triángulo. Así que de

$$\tan 30^\circ = \frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}_x\|} \tag{7}$$

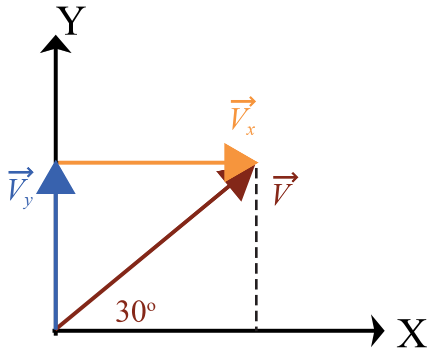
podíamos despejar $\|\vec{V}_x\|$.

Vemos entonces que hay diferentes formas de hallar las componentes, ya sea usando la magnitud del vector original y el ángulo, ya sea usando la magnitud de la otra componente y el ángulo. Sin embargo, si no hubiéramos conocido $\|\vec{V}_y\|$, sólo hubiéramos podido hallar $\|\vec{V}_x\|$ usando coseno. Lo importante es saber identificar en qué funciones trigonométricas aparecen las variables que queremos hallar. Por ejemplo, en este problema nos dimos cuenta de que en la función coseno y en la función tangente aparecía $\|\vec{V}_x\|$. Una vez identificamos las funciones, usamos aquella en la que aparezcan otras variables que conocemos. En el presente problema tanto la tangente como el coseno nos servían porque conocíamos el ángulo, la hipotenusa y el cateto opuesto.

Nota 1.11. Hallar componentes o ángulos

Si queremos hallar alguna de las variables del triángulo rectángulo formado por las componentes y el vector, debemos seguir dos pasos: (1) Identificar las funciones trigonométricas en las que aparece la variable que necesitamos. (2) De las funciones encontradas en (1), utilizar aquella en la que aparezcan el mayor número de variables conocidas (puede suceder que nos sirvan varias funciones).

Otra forma de hacerlo: notemos de la segunda figura de la página 42 que también podíamos haber formado el triángulo rectángulo moviendo la componente X hacia arriba, como se indica en la figura de la página siguiente:



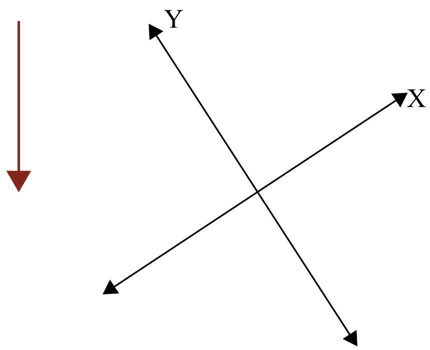
Si movemos la componente X en vez de la Y también se forma un triángulo rectángulo.

Sin embargo, en este triángulo no aparece el ángulo de 30° que nos daban inicialmente (el ángulo quedó por fuera del triángulo), y aunque es fácil hallar el ángulo que está dentro del triángulo (es 60 grados en este caso), el problema se extiende un poco más. Por lo tanto, *es más conveniente formar el triángulo rectángulo de forma que el ángulo que nos indican quede dentro del triángulo y no afuera*.

Problema 1.15.

Palabras clave: descomponer un vector en un plano inclinado.

Trazar las componentes del vector en rojo teniendo en cuenta el sistema de coordenadas indicado.

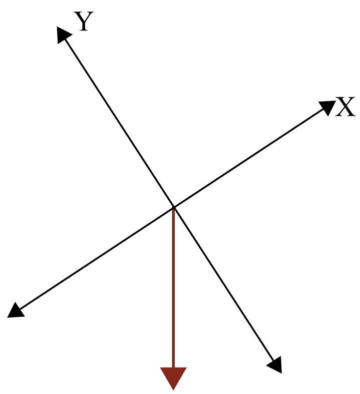


Solución

A pesar de que el sistema de coordenadas está inclinado, esto no nos debe confundir, y sólo debemos seguir los tres pasos de la nota 1.8. A veces vamos a utilizar sistemas de coordenadas inclinados porque pueden ser más convenientes para trabajar ciertos problemas.

Paso 1

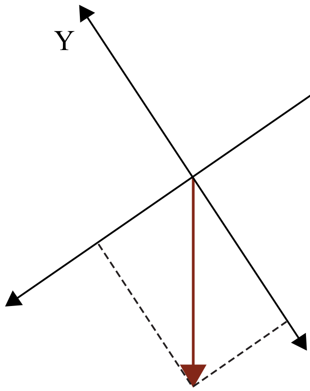
Ponemos el vector en el origen del sistema de coordenadas:



Ubicamos el vector en el origen del sistema de coordenadas.

Paso 2

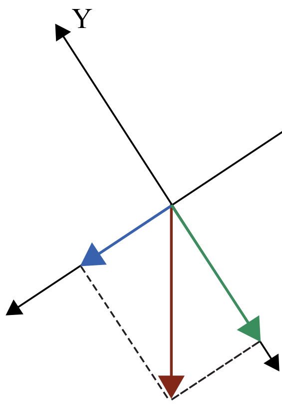
Trazamos las líneas punteadas desde la punta del vector, una paralela al eje X y que corta el eje Y, y otra paralela al eje Y que corta al eje X:



Trazamos las líneas punteadas que cortan el eje X y el eje Y.

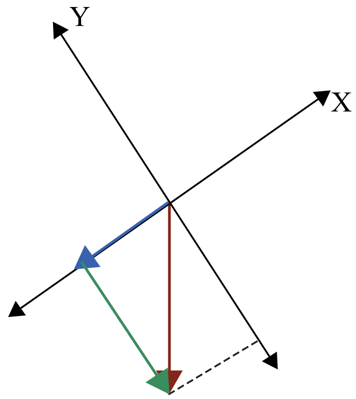
Paso 3

Dibujamos las componentes sobre los ejes; la componente X va desde el origen hasta el punto en que la línea punteada corta el X y la componente Y va desde el origen hasta el punto en que la línea punteada corta al eje Y:



Dibujamos las componentes sobre los ejes. En azul está la componente X y en verde la Y.

Como todo vector se puede escribir como la suma vectorial de sus componentes (nota 1.9), si sumamos el vector azul con el verde deberíamos obtener el vector rojo. Realicemos la suma saltando el paso 2:

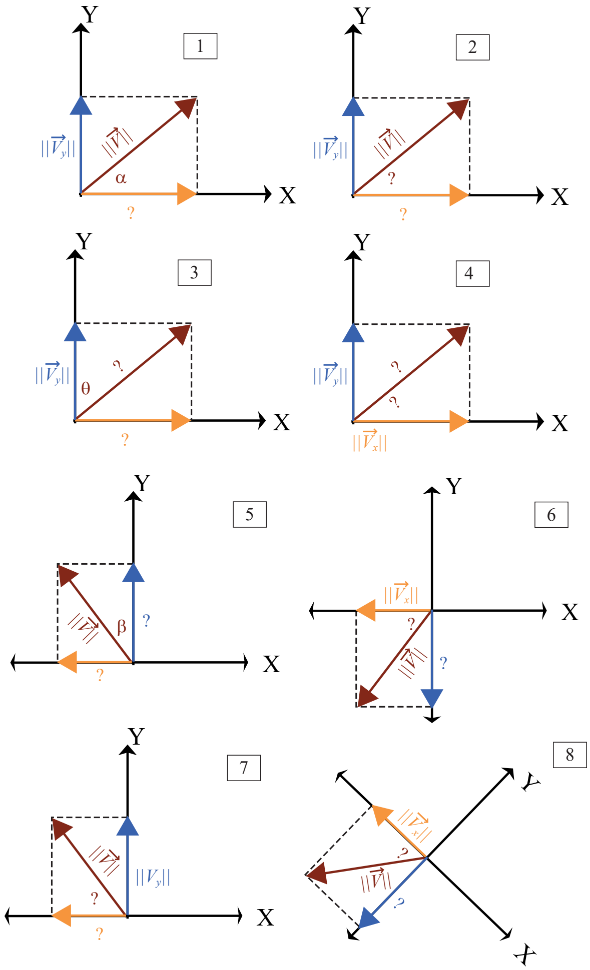


Si sumamos ambas componentes se forma el vector rojo, como es de esperar.

Problema 1.16.

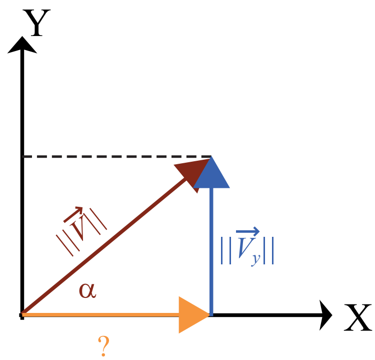
Palabras clave: descomposición de un vector, hallar componentes, hallar ángulos, funciones trigonométricas.

A continuación va a encontrar varios vectores con sus respectivas descomposiciones y usted debe hallar, de acuerdo a la información indicada en cada caso, las incógnitas (las incógnitas se indican con el signo ?). En cada caso, explique cuáles son las variables conocidas y cuáles son las incógnitas y después dibuje el triángulo rectángulo más conveniente.



Solución

1. Conocemos el ángulo α, $\|\vec{V}\|$ (la hipotenusa) y $\|\vec{V}_y\|$ (el cateto opuesto). La incógnita es $\|\vec{V}_x\|$, la magnitud de la componente X. El triángulo más conveniente es aquel en el cual el ángulo α queda dentro (como dice la nota 1.11), es decir:



Ahora, como la incógnita es $\|\vec{V}_x\|$, necesitamos buscar alguna función trigonométrica en la que aparezca $\|\vec{V}_x\|$ (como dice la nota 1.11). Como $\|\vec{V}_x\|$ es el cateto adyacente, podemos usar cualquier función en la que aparezca el cateto adyacente. Por ejemplo, la tangente (cateto opuesto sobre adyacente) y el coseno (cateto adyacente sobre hipotenusa) podrían servir. Notemos además que ambas funciones sirven porque conocemos tanto el cateto opuesto (que es $\|\vec{V}_y\|$) que se necesita en la tangente, como la hipotenusa $\left(\|\vec{V}\|\right)$ que se usa en el coseno. Así que podemos escoger cualquiera de estas dos funciones. Usemos coseno:

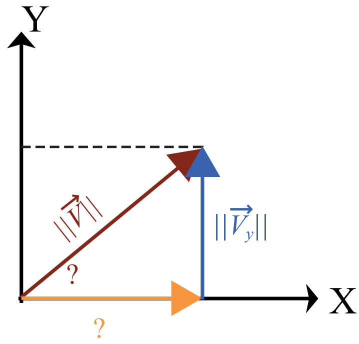
$$\cos\alpha = \frac{\|\vec{V}_x\|}{\|\vec{V}\|}. \tag{1}$$

Si multiplicamos por $\|\vec{V}\|$, obtenemos

$$\|\vec{V}\|\cos\alpha = \|\vec{V}_x\|. \tag{2}$$

Así, la anterior ecuación nos permite hallar la incógnita $\|\vec{V}_x\|$.

2. Conocemos $\|\vec{V}_y\|$ y $\|\vec{V}\|$ pero desconocemos el ángulo entre el vector $\|\vec{V}\|$ y el eje X, y también desconocemos $\|\vec{V}_x\|$. El triángulo más adecuado es, como siempre, aquel en el cual el ángulo (en este caso un ángulo que debemos hallar) aparece dentro del triángulo:



Dado que tenemos dos incógnitas, primero vamos a hallar una y después la otra.

Para hallar el ángulo debemos buscar funciones trigonométricas en las que aparezca el ángulo; en todas las funciones trigonométricas aparece el ángulo así que de una vez debemos buscar una función en la que, además del ángulo, aparezcan las otras variables que conocemos. La función que buscamos es el seno, ya que conocemos el cateto opuesto $\left(\|\vec{V}_y\|\right)$ y la hipotenusa $\left(\|\vec{V}\|\right)$:

$$\sin x = \frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}\|}. \tag{3}$$

Notemos que hemos llamado x al ángulo que queremos hallar. Si aplicamos arcoseno a la anterior ecuación, obtenemos el ángulo

$$x = \arcsin\left(\frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}\|}\right). \tag{4}$$

Una vez conocemos el ángulo, y dado que conocemos la hipotenusa y el cateto opuesto, es muy sencillo hallar el cateto adyacente $\left(\|\vec{V}_x\|\right)$ Sólo necesitamos una función trigonométrica en la que aparezca $\|\vec{V}_x\|$ y aparezcan las otras variables conocidas. Podemos usar coseno o también tangente. Usemos tangente:

$$\tan x = \frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}_x\|}. \tag{5}$$

Si ahora multiplicamos por $\|\vec{V}_x\|$, obtenemos

$$\|\vec{V}_x\| \tan x = \|\vec{V}_y\|. \tag{6}$$

Si dividimos por $\tan x$ hallamos finalmente a $\|\vec{V}_x\|$:

$$\|\vec{V}_x\| = \frac{\|\vec{V}_y\|}{\tan x}. \tag{7}$$

Si usamos finalmente el resultado dado por la ecuación (4) en la ecuación (7), obtenemos

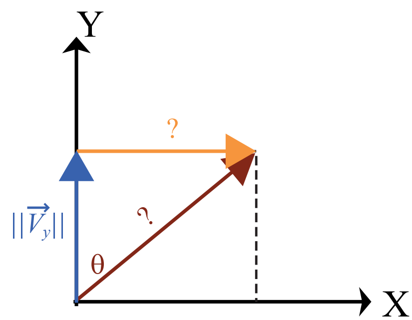
$$\|\vec{V}_x\| = \frac{\|\vec{V}_y\|}{\tan\Bigg(\underbrace{\arcsin\left(\frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}\|}\right)}_{x}\Bigg)}. \tag{8}$$

Ahora, si nosotros no hubiéramos hallado el ángulo, entonces no habríamos podido hallar $\|\vec{V}_x\|$ usando las funciones trigonométricas. Sin embargo, hubiéramos podido hallar $\|\vec{V}_x\|$ usando el teorema de Pitágoras; como $\|\vec{V}_x\|$ es uno de los catetos y $\|\vec{V}\|$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo, entonces

$$\sqrt{\|\vec{V}\|^2 - \|\vec{V}_y\|^2} = \|\vec{V}_x\| \tag{9}$$

(este resultado es equivalente al dado por la ecuación (8), el lector lo puede comprobar inventando algunos valores para las diversas variables[3]). Vemos una vez más que hay diferentes caminos para despejar los valores de las variables que deseamos hallar.

3. Conocemos $\|\vec{V}_y\|$ y el ángulo θ que se forma entre $\|\vec{V}\|$ y $\|\vec{V}_y\|$. Debemos hallar $\|\vec{V}_x\|$ y $\|\vec{V}\|$. Notemos que esta vez el triángulo rectángulo más favorable se obtiene moviendo $\vec{V}_x$ hacia arriba, de modo que el ángulo θ quede adentro:



Empecemos por hallar $\|\vec{V}_x\|$. Como $\|\vec{V}_x\|$ es el cateto opuesto al ángulo θ, podemos usar la función seno, que relaciona $\|\vec{V}_x\|$ con θ y con $\|\vec{V}\|$. El problema es que no conocemos tampoco $\|\vec{V}\|$. La otra función trigonométrica en la que aparece $\|\vec{V}_x\|$ es la tangente. Además, en la tangente aparece el cateto adyacente $\left(\|\vec{V}_y\|\right)$, que sí conocemos (el lector debe tener cuidado aquí porque no

[3] Al inventar estos valores el lector debe tener en cuenta que el ángulo debe ir entre cero y noventa grados.

siempre el cateto opuesto al ángulo es la componente Y, $\vec{V}_y$, y el adyacente la componente X, $\vec{V}_x$). Por lo tanto, tenemos

$$\tan\theta = \frac{\|\vec{V}_x\|}{\|\vec{V}_y\|} \tag{10}$$

Si multiplicamos por $\|\vec{V}_y\|$ podemos despejar $\|\vec{V}_x\|$:

$$\|\vec{V}_y\|\tan\theta = \|\vec{V}_x\|. \tag{11}$$

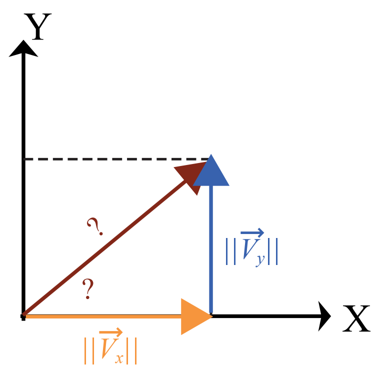
Ahora que conocemos ambos catetos, podemos despejar $\|\vec{V}\|$ usando cualquiera de las funciones trigonométricas en las que aparece (como el coseno y el seno). Pero también podemos usar el teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{\|\vec{V}_x\|^2 + \|\vec{V}_y\|^2} = \|\vec{V}\|. \tag{12}$$

Si usamos el resultado de la ecuación (11) en la ecuación (12), obtenemos

$$\sqrt{\underbrace{\left(\|\vec{V}_y\|\tan\theta\right)^2}_{\|\vec{V}_x\|} + \|\vec{V}_y\|^2} = \|\vec{V}\|. \tag{13}$$

4. En este caso conocemos la magnitud de ambas componentes y debemos hallar el ángulo y $\|\vec{V}\|$. El triángulo más conveniente es el siguiente:



Notemos que al usar este triángulo el ángulo que debemos hallar queda dentro del triángulo rectángulo.

Como vimos en el caso anterior, podemos hallar $\|\vec{V}\|$ usando el teorema de Pitágoras directamente:

$$\sqrt{\|\vec{V}_x\|^2 + \|\vec{V}_y\|^2} = \|\vec{V}\|. \tag{14}$$

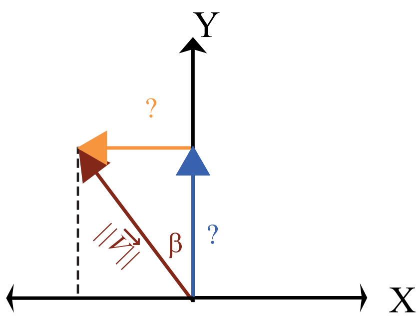
También hubiéramos podido hallar el ángulo primero, y luego usar alguna función trigonométrica para despejar $\|\vec{V}\|$. Ahora que conocemos ambos catetos y ya hallamos la hipotenusa podemos hallar el ángulo usando cualquier función trigonométrica. Usemos por ejemplo la tangente:

$$\tan x = \frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}_x\|}, \tag{15}$$

donde hemos llamado x al ángulo que buscamos (no confundir esta x del ángulo con la x que indica la componente X). Si aplicamos la función arcotangente, tenemos finalmente

$$x = \arctan\left(\frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}_x\|}\right). \tag{16}$$

5. Conocemos $\|\vec{V}\|$ y el ángulo β que se forma entre $\|\vec{V}\|$ y $\|\vec{V}_y\|$. Debemos hallar ambas componentes. El triángulo rectángulo más favorable se obtiene moviendo a $\|\vec{V}_x\|$ hacia arriba, de modo que el ángulo β quede adentro:



Hallemos primero la componente $\|\vec{V}_x\|$. Como $\|\vec{V}_x\|$ es el cateto opuesto al ángulo, podemos usar la función seno que relaciona el cateto opuesto con el ángulo y la hipotenusa (la función tangente no sirve porque desconocemos el otro cateto):

$$\sin\beta = \frac{\|\vec{V}_x\|}{\|\vec{V}\|}. \tag{17}$$

Si multiplicamos por $\|\vec{V}\|$ obtenemos

$$\|\vec{V}\|\sin\beta = \|\vec{V}_x\|. \tag{18}$$

Para hallar $\|\vec{V}_y\|$ podemos usar tanto la función tangente (pues acabamos de hallar el cateto opuesto) o la función coseno. Usemos coseno:

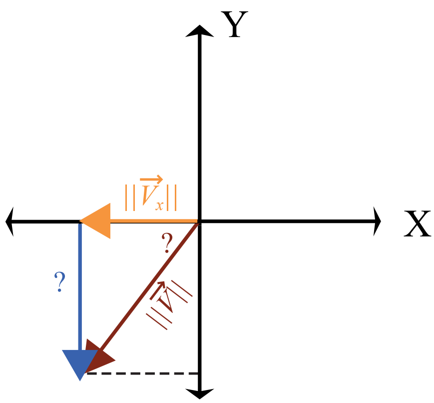
$$\cos\beta = \frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}\|}. \tag{19}$$

Si multiplicamos por $\|\vec{V}\|$ podemos despejar $\|\vec{V}_y\|$:

$$\|\vec{V}\|\cos\beta = \|\vec{V}_y\|. \tag{20}$$

Es bueno anotar que no importa si el vector que descomponemos está en el primer, segundo o cualquier otro cuadrante del plano (en este caso estaba en el segundo); el triángulo analizado es un triángulo formado por la magnitud de las distintas componentes (nos olvidamos de las direcciones).

6. Esta vez tenemos una situación similar a la del caso 2, en la que conocemos la hipotenusa $\|\vec{V}\|$ y un cateto $\|\vec{V}_x\|$. Debemos hallar el ángulo y la componente $\|\vec{V}_y\|$. Empecemos por encerrar el ángulo desconocido moviendo la componente $\|\vec{V}_y\|$.



Hallemos primero el ángulo. Para hacerlo debemos usar una función trigonométrica en la que aparezca la hipotenusa y $\|\vec{V}_x\|$, que son las variables conocidas. Como $\|\vec{V}_x\|$ es el cateto adyacente, debemos usar la función coseno que relaciona este cateto con la hipotenusa:

$$\cos x = \frac{\|\vec{V}_x\|}{\|\vec{V}\|}. \tag{21}$$

Aplicando arcocoseno, tenemos:

$$x = \arccos\left(\frac{\|\vec{V}_x\|}{\|\vec{V}\|}\right) \tag{22}$$

Una vez conocido el ángulo, podemos encontrar $\|\vec{V}_y\|$ usando una función trigonométrica en la que aparezca ella con otras variables conocidas. Por ejemplo, podemos usar la tangente que relaciona $\|\vec{V}_y\|$ (cateto opuesto) con $\|\vec{V}_x\|$ (cateto adyacente):

$$\tan x = \frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}_x\|}. \tag{23}$$

Si multiplicamos por $\|\vec{V}_x\|$ obtenemos

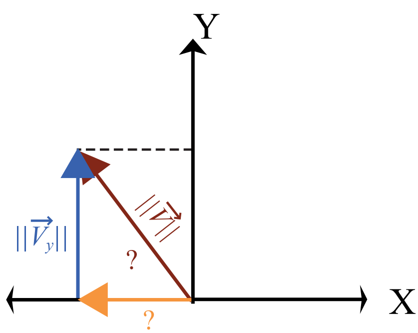
$$\|\vec{V}_x\| \tan x = \|\vec{V}_y\|. \tag{24}$$

Finalmente, usamos el resultado de la ecuación (22) para remplazar el ángulo:

$$\|\vec{V}_x\| \tan \underbrace{\left(\arccos\left(\frac{\|\vec{V}_x\|}{\|\vec{V}\|}\right)\right)}_{x} = \|\vec{V}_y\| \tag{25}$$

(También podíamos haber hallado $\|\vec{V}_y\|$ usando el teorema de Pitágoras).

7. Esta vez conocemos $\|\vec{V}\|$ y $\|\vec{V}_y\|$ y debemos hallar $\|\vec{V}_x\|$ y el ángulo. El triángulo más conveniente es el siguiente:



Como $\|\vec{V}_y\|$ es el cateto opuesto y $\|\vec{V}\|$ la hipotenusa, podemos usar la función seno que relaciona estas dos variables conocidas con el ángulo que desconocemos:

$$\sin x = \frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}\|} \tag{26}$$

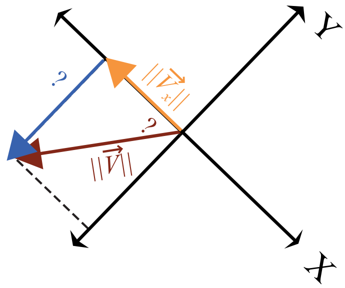
Si aplicamos arcoseno, obtenemos

$$x = \arcsin\left(\frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}\|}\right) \tag{27}$$

Podemos hallar $\|\vec{V}_x\|$ usando el ángulo y funciones trigonométricas como coseno o tangente. O también podemos usar el teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{\|\vec{V}\|^2 - \|\vec{V}_y\|^2} = \|\vec{V}_x\|. \tag{28}$$

8. Conocemos $\|\vec{V}\|$ y $\|\vec{V}_x\|$ y debemos hallar el ángulo y $\|\vec{V}_y\|$ que es la magnitud de la componente Y. Empecemos por formar un triángulo en el cual el ángulo que queremos hallar quede encerrado:



Podemos hallar $\|\vec{V}_y\|$ usando el teorema de Pitágoras o hallando primero el ángulo y después usando una función trigonométrica. Usemos el teorema de Pitágoras, teniendo en cuenta que $\|\vec{V}\|$ es la hipotenusa y $\|\vec{V}_x\|$ y $\|\vec{V}_y\|$ los catetos:

$$\sqrt{\|\vec{V}\|^2 - \|\vec{V}_x\|^2} = \|\vec{V}_y\|. \tag{29}$$

Podemos hallar el ángulo a partir de cualquier función trigonométrica, pues ya conocemos la hipotenusa y ambos catetos. Usemos, por ejemplo, el seno:

$$\sin x = \frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}\|}. \tag{30}$$

Por lo tanto,

$$x = \arcsin \frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}\|}. \tag{31}$$

Finalmente, debemos usar el resultado de la ecuación (29) para remplazar $\|\vec{V}_y\|$:

$$x = \arcsin\left(\frac{\overbrace{\sqrt{\|\vec{V}\|^2 - \|\vec{V}_x\|^2}}^{\|\vec{V}_y\|}}{\|\vec{V}\|}\right). \tag{32}$$

Problema (teórico) 1.17.

Palabras clave: vectores unitarios.

(a) Explique qué es un vector unitario y para qué sirve.

(b) Dibuje en un sistema cartesiano los vectores unitarios que apuntan en la dirección positiva de X y en la positiva de Y.

(c) Dibuje los vectores unitarios que apuntan en la dirección negativa de X y en la dirección negativa de Y.

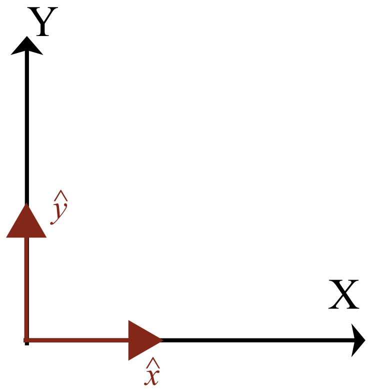
Solución

(a) Un vector unitario es un vector que tiene *magnitud 1* y puede tener cualquier dirección. Usualmente los vectores unitarios se simbolizan con un gorrito en vez de una flecha. Por ejemplo, $\hat{r}$ simboliza un vector unitario mientras que $\vec{r}$ no. Los vectores unitarios sirven para indicar de forma sencilla la dirección de un vector. Por ejemplo, si un vector $\vec{V}$ tiene magnitud 8 y apunta en la dirección norte, podemos escribir $\vec{V}$ usando un vector unitario cuya dirección sea el norte (llamemos $\hat{n}$ a ese vector). Si usamos ese vector unitario, podemos escribir $\vec{V}$ como $\vec{V} = 8\hat{n}$, donde 8 es la magnitud de $\vec{V}$ y $\hat{n}$ nos indica la dirección[4]. Notemos que es mucho menos práctico escribir $\vec{V}$ que escribir $8\hat{n}$, pues si escribimos $\vec{V}$ no estamos indicando la magnitud ni la dirección mientras que si escribimos $8\hat{n}$ indicamos ambas cosas a la vez. Esa es la gran utilidad de estos vectores.

(b) El vector unitario que apunta en la dirección positiva de X se puede escribir como $\hat{x}$ mientras que el vector unitario que apunta en la dirección positiva de Y se puede escribir como $\hat{y}$ (en otros libros se usa $\hat{i}$ para referirse a $\hat{x}$ y $\hat{j}$ para referirse a $\hat{y}$, pero en este libro usaremos la primera notación). No sobra recordar que como todos los vectores unitarios, la magnitud de $\hat{x}$ y $\hat{y}$ es 1: $\|\hat{x}\| = 1$ y $\|\hat{y}\| = 1$.

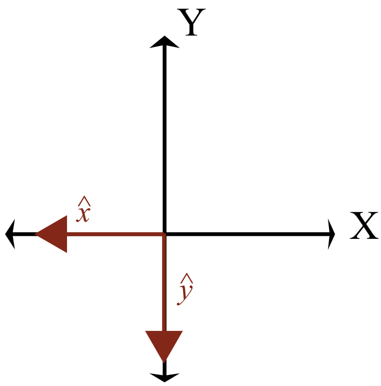
Dibujar estos vectores en un sistema cartesiano es muy fácil, pues sólo necesitamos dibujar a $\hat{x}$ apuntando en la dirección positiva de X, y a $\hat{y}$ apuntando en la dirección positiva de Y:

[4] En la nota 1.1 vimos que un vector puede escribirse como $A\hat{r}$, donde A indica la magnitud del vector y $\hat{r}$ la dirección. Ahora entendemos por qué la notación $A\hat{r}$ usa el vector unitario $\hat{r}$.



El vector unitario $\hat{x}$ apunta en la dirección positiva de X mientras que $\hat{y}$ apunta en la dirección positiva de Y.

(c) El vector unitario que apunta en la dirección negativa de X es $-\hat{x}$ y el vector unitario que apunta en la dirección negativa de Y es $-\hat{y}$. Como se ve, sólo debemos ponerle un signo menos a $\hat{x}$ y a $\hat{y}$ para indicar que apuntan en las direcciones negativas de X y Y, lo cual era de esperarse ya que el negativo de un vector es el mismo vector cambiando la cola por la punta (nota 1.6). Dibujar estos vectores es igual de fácil que antes, sólo que ahora apuntan en direcciones contrarias:



El vector unitario $-\hat{x}$ apunta en la dirección positiva de X mientras que $-\hat{y}$ apunta en la dirección positiva de Y.

Nota 1.12. Vectores unitarios

(a) Un vector unitario es un vector que tiene magnitud igual a 1.

(b) Todo vector se puede escribir como la magnitud del vector seguida de un vector unitario que indica la dirección. Por ejemplo, $A\hat{r}$ se lee así: A es la magnitud del vector y $\hat{r}$ es un vector unitario que indica la dirección.

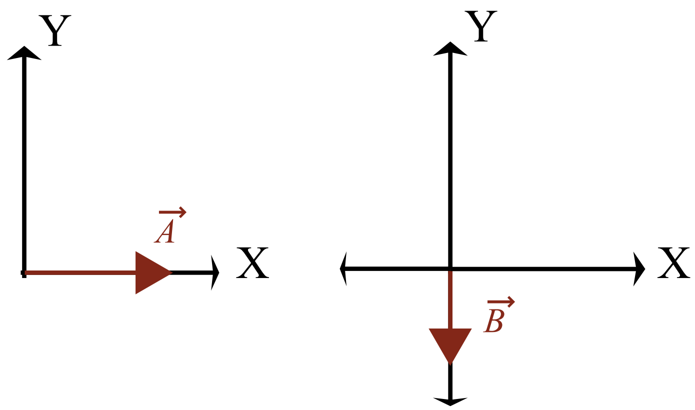
(c) $\hat{x}$ es un vector unitario que apunta en la dirección positiva de X mientras que $-\hat{x}$ es un vector unitario que apunta en la dirección negativa de X; $\hat{y}$ es un vector unitario que apunta en la dirección positiva de Y y $-\hat{y}$ es un vector unitario que apunta en la dirección negativa de Y.

Problema 1.18.

Palabras clave: vectores unitarios, escribir un vector usando vectores unitarios.

(a) Indique la dirección de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ usando vectores unitarios.

(b) Si $\vec{A}$ tiene magnitud 5 (no interesan las unidades) y $\vec{B}$ magnitud 2, escriba ambos vectores usando la notación de vectores unitarios.



Solución

(a) Determinar la dirección es determinar hacia dónde apunta el vector. En este caso es claro que el vector $\vec{A}$ apunta en la dirección positiva del eje X. Usando vectores unitarios, podemos decir que la dirección de $\vec{A}$ es $\hat{x}$. Por su parte, $\vec{B}$ apunta en la dirección negativa de Y. Usando vectores unitarios, podemos decir que la dirección de $\vec{B}$ es $-\hat{y}$.

(b) Como ya sabemos, todo vector se puede escribir como una magnitud junto a una dirección. Si la magnitud de $\vec{A}$ es 5 y la dirección es $\hat{x}$, entonces podemos escribir $\vec{A}$ como $\vec{A} = 5\hat{x}$. Podemos escribir $\vec{B}$ como $\vec{B} = 2(-\hat{y})$ (los paréntesis son para que no confundamos el signo menos con una resta). Sin embargo, lo más común es evitar usar los paréntesis y escribir $\vec{B}$ como $\vec{B} = -2\hat{y}$. Al hacer esto es importante entender que el signo menos proviene de la dirección del vector y no tiene nada que ver con la magnitud; recordemos que la magnitud siempre es positiva.

Problema 1.19.

Palabras clave: vectores unitarios, escribir vectores usando vectores unitarios.

(a) Suponga que la magnitud del vector $\vec{D}$ es D y el vector apunta en la dirección negativa de Y. Escriba el vector usando vectores unitarios.

(b) ¿Cual de los siguientes es un vector que tiene dirección positiva de X y además tiene magnitud 5: $6\hat{x}$, $-5\hat{y}$, 5, $-5\hat{x}$, $5x$, $(10/2)\hat{x}$ o $5\hat{x}$?

Solución

(a) La magnitud de $\vec{D}$ es D y el vector apunta en la dirección negativa de Y así que debemos usar el vector unitario $-\hat{y}$. Por lo tanto, $\vec{D}$ se puede escribir como $-\vec{D}\hat{y}$ (esto es exactamente lo mismo que $\vec{D}(-\hat{y})$ pero es más simple).

(b) $6\hat{x}$ es un vector con dirección positiva de X pero es de magnitud 6, entonces no cumple lo que nos piden. $-5\hat{y}$ es un vector de magnitud 5 con dirección negativa en Y pero necesitamos uno con dirección positiva en Y. 5 es un escalar y no un vector (no tiene dirección). $-5\hat{x}$ tiene magnitud 5 pero tiene dirección negativa en X. $5x$ no es un vector (la x no es un vector, sino una variable escalar). $(10/2)\hat{x}$ es un vector que apunta en la dirección positiva de X y, además, su magnitud es 10/2, que es igual a 5, así que este vector cumple lo que nos piden. $5\hat{x}$ también funciona, pues es un vector de magnitud 5 y con dirección positiva en X.

Problema (teórico) 1.20.

Palabras clave: escribir vectores usando vectores unitarios, sumar vectores componente a componente.

(a) Si $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$ y $\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y$, muestre que $\vec{A} + \vec{B}$ se puede entender como un vector cuya componente en X es $\vec{A}_x + \vec{B}_x$ y su componente Y es $\vec{A}_y + \vec{B}_y$.

(b) Si las componentes del vector $\vec{A}$ son $\vec{A}_x = 3\hat{x}$ y $\vec{A}_y = -4\hat{y}$ y las componentes del vector $\vec{B}$ son $\vec{B}_x = 5\hat{x}$ y $\vec{B}_y = 2\hat{y}$, ¿cuáles son las componentes del vector que resulta de sumar $\vec{A}$ con $\vec{B}$?

(c) Muestre que $\vec{B} - \vec{A}$ es un vector cuya componente X es $\left(\vec{B}_x - \vec{A}_x\right)$ y su componente Y es $\left(\vec{B}_y - \vec{A}_y\right)$.

(d) Halle las componentes de $\vec{B} - \vec{A}$.

Solución

(a) Recordemos que todo vector se puede escribir como una suma de sus componentes, así que al vector $\vec{A}$ lo podemos escribir como

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y. \tag{1}$$

Supongamos que queremos sumar el vector $\vec{B}$ con $\vec{A}$. También podemos escribir $\vec{B}$ con sus respectivas componentes:

$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y. \tag{2}$$

Por las ecuaciones (1) y (2) es claro que $\vec{A} + \vec{B}$ es igual a

$$\vec{A} + \vec{B} = \underbrace{\vec{A}_x + \vec{A}_y}_{\vec{A}} + \underbrace{\vec{B}_x + \vec{B}_y}_{\vec{B}}. \tag{3}$$

Ahora, recordemos que la suma de vectores es conmutativa (nota 1.7), así que podemos escribir la anterior ecuación así:

$$\vec{A} + \vec{B} = \left(\vec{A}_x + \vec{B}_x\right) + \left(\vec{A}_y + \vec{B}_y\right), \tag{4}$$

donde hemos agrupado las componentes en X de los vectores y las componentes en Y (los paréntesis sirven para ayudarnos a ver con más claridad). Finalmente, recordemos que cuando tenemos vectores que están sobre el mismo eje, la suma nos da un vector que también está sobre el mismo eje. Por lo tanto $\left(\vec{A}_x+\vec{B}_x\right)$ nos da un vector que está sobre el eje X y $\left(\vec{A}_y+\vec{B}_y\right)$, uno que está sobre el eje Y. El vector que resulta de $\left(\vec{A}_x+\vec{B}_x\right)$ es la componente X del vector que resulta de $\vec{A}+\vec{B}$, mientras que el vector que resulta de $\left(\vec{A}_y+\vec{B}_y\right)$ es la componente Y del vector que resulta de $\vec{A}+\vec{B}$. Por lo tanto, hemos mostrado lo que nos pedían en el enunciado.

(b) Como acabamos de mostrar, la componente X del vector que resulta de $\vec{A}+\vec{B}$ está dada por la suma de las componentes en X de $\vec{A}$ y de $\vec{B}$, es decir, está dada por $\left(\vec{A}_x+\vec{B}_x\right)$. Nos dicen que $\vec{A}_x=3\hat{x}$ y $\vec{B}_x=5\hat{x}$ así que $\left(\vec{A}_x+\vec{B}_x\right)$ es igual a

$$\vec{A}_x+\vec{B}_x=3\hat{x}+5\hat{x}=8\hat{x}. \tag{5}$$

Además, $\vec{A}_y=-4\hat{y}$ y $\vec{B}_y=2\hat{y}$ por lo que $\left(\vec{A}_y+\vec{B}_y\right)$ es igual a

$$\vec{A}_y+\vec{B}_y=-4\hat{y}+2\hat{y}=-2\hat{y}. \tag{6}$$

Notemos que no importa si una de las componentes es negativa, sumamos como si fueran números y al final el signo indica la dirección. En este caso hemos visto que el signo final es negativo, así que esta componente apunta hacia el sentido negativo del eje Y. En resumen, la componente X del vector que resulta de $\vec{A}+\vec{B}$ es $8\hat{x}$ y la componente Y es $-2\hat{y}$.

(c) Para interpretar $\vec{B}-\vec{A}$ podemos realizar un razonamiento similar al de la suma. Primero notemos que $\vec{B}-\vec{A}$ se puede escribir como

$$\vec{B}-\vec{A}=\left(\vec{B}_x+\vec{B}_y\right)-\left(\vec{A}_x+\vec{A}_y\right). \tag{7}$$

Además, usando la conmutatividad de la suma de vectores, lo anterior se puede escribir como

$$\vec{B}-\vec{A}=\left(\vec{B}_x-\vec{A}_x\right)+\left(\vec{B}_y-\vec{A}_y\right). \tag{8}$$

De forma similar a lo que sucedía con la suma, $\left(\vec{B}_x-\vec{A}_x\right)$ nos da la componente X de $\vec{B}-\vec{A}$ mientras que $\left(\vec{B}_y-\vec{A}_y\right)$ nos da la componente Y.

(d) Por el numeral anterior, como $\vec{B}_x=5\hat{x}$ y $\vec{A}_x=3\hat{x}$, tenemos que

$$\vec{B}_x-\vec{A}_x=5\hat{x}-3\hat{x}=2\hat{x}. \tag{9}$$

Además, como $\vec{B}_y=2\hat{y}$ y $\vec{A}_y=-4\hat{y}$, entonces $\left(\vec{B}_y-\vec{A}_y\right)$ es igual a

$$\vec{B}_y-\vec{A}_y=2\hat{y}-(-4\hat{y})=6\hat{y}. \tag{10}$$

Nota 1.13. Componentes de $\vec{A}+\vec{B}$ y de $\vec{A}-\vec{B}$

La componente X de una suma de vectores es igual a la suma de las componentes en X de cada vector. Por ejemplo, $\left(\vec{A}_x+\vec{B}_x\right)$.

La componente Y de una suma de vectores es la suma de las componentes en Y de cada vector. Por ejemplo, $\left(\vec{A}_y+\vec{B}_y\right)$.

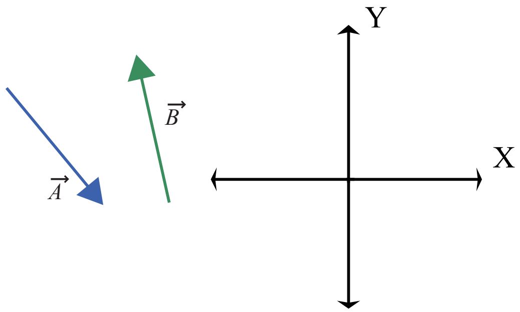
La componente X de una resta de vectores es la resta de las componentes en X. Por ejemplo, $\left(\vec{A}_x-\vec{B}_x\right)$.

La componente Y de una resta de vectores es la resta de las componentes en Y. Por ejemplo, $\left(\vec{A}_y-\vec{B}_y\right)$.

Problema (teórico) 1.21.

Palabras clave: suma gráfica de vectores, suma gráfica de vectores componente a componente.

(a) Descomponga los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en el plano cartesiano indicado.



(b) Sume la componente X de $\vec{A}$ con la componente X de $\vec{B}$ y haga lo mismo para las componentes Y.

(c) Sume los dos vectores obtenidos en el punto anterior.

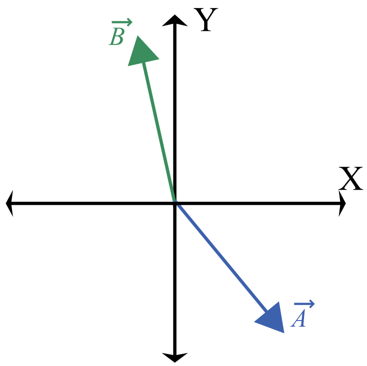
(d) Sobre el mismo dibujo obtenido en el numeral anterior, sume gráficamente los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Solución

(a) Primero debemos buscar las componentes X y Y de cada vector. Para hacerlo repetimos los tres pasos explicados en la nota 1.8.

Paso 1

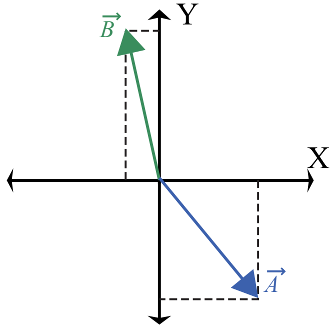
Ubicamos los vectores en el origen:



Ubicamos cada vector en el origen del sistema de coordenadas.

Paso 2

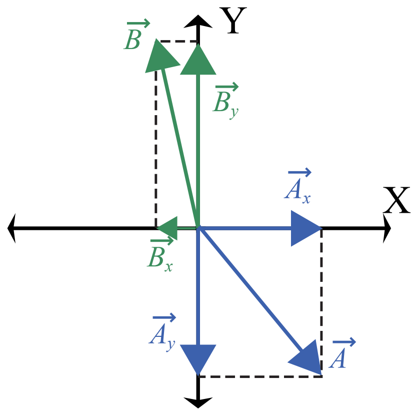
Trazamos nuestras líneas guía (una paralela a X que corta el eje Y y otra paralela a Y que corta el eje X).



Trazamos las líneas punteadas correspondientes.

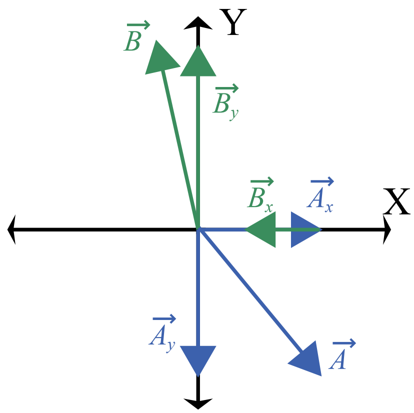
Paso 3

Ahora trazamos las componentes de cada vector recordando que deben empezar en el origen del plano de coordenadas y llegar hasta el punto en que cada línea punteada corta los ejes:



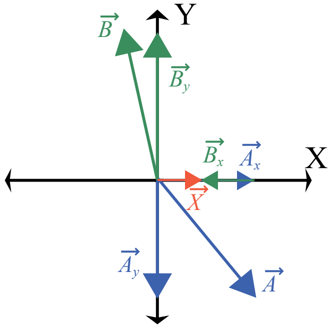
Trazamos las componentes X y Y de cada vector.

(b) Ahora sumamos las componentes X entre sí y las Y entre sí. Empecemos con las X:



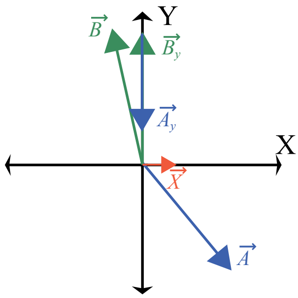
Movemos la cola de $\vec{B}_x$ hasta la punta de $\vec{A}_x$.

Trazamos un vector que va desde la cola del vector $\vec{A}_x$ que fue el que no movimos, hasta la punta de $\vec{B}_x$ (que fue el que movimos):



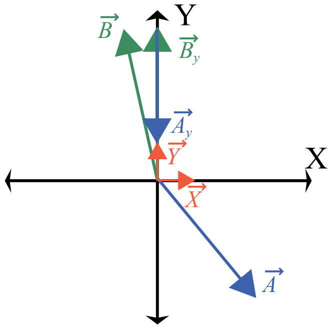
El vector rojo, que hemos llamado $\vec{X}$, es el resultado de sumar $\vec{A}_x$ con $\vec{B}_x$.

Ahora sumamos las componentes Y. Movemos la cola de $\vec{A}_y$ hasta la punta de $\vec{B}_y$ (hemos quitado los vectores $\vec{A}_x$ y $\vec{B}_x$ para darle claridad al dibujo).



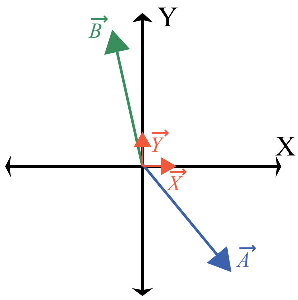
Movemos la cola de $\vec{A}_y$ hasta la punta de $\vec{B}_y$.

Ahora trazamos un vector desde la cola de $\vec{B}_y$ hasta la punta de $\vec{A}_y$:

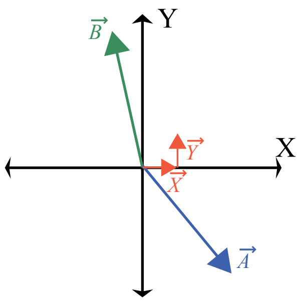


El vector en rojo $\vec{Y}$ es el resultado de la suma de $\vec{B}_y$ con $\vec{A}_y$.

Para ver el dibujo con más claridad, podemos dejar sólo los vectores iniciales y a $\vec{Y}$ y $\vec{X}$:

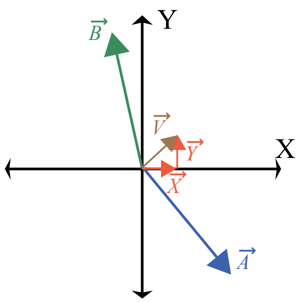


(c) Ahora sumemos $\vec{Y}$ y $\vec{X}$. Movamos la cola de $\vec{Y}$ hasta la punta de $\vec{X}$:



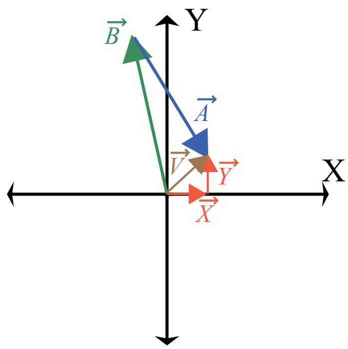
Movemos la cola de $\vec{Y}$ hasta la punta de $\vec{X}$.

Ahora trazamos un vector desde la cola de $\vec{X}$ hasta la punta de $\vec{Y}$:



El vector en café llamado $\vec{V}$ es el resultado de la suma de $\vec{X}$ con $\vec{Y}$.

(d) Nos piden que sumemos los vectores originales en el mismo dibujo anterior. Para hacerlo, podemos mover la cola de $\vec{A}$ hasta la punta de $\vec{B}$:



Movemos la cola de $\vec{A}$ hasta la punta de $\vec{B}$.

Ya no es necesario trazar un vector desde la cola de $\vec{B}$ hasta la punta de $\vec{A}$, pues ese vector es el vector $\vec{V}$ que habíamos hallado en el numeral anterior. Es decir, el resultado de la suma de $\vec{A}$ con $\vec{B}$ es el vector $\vec{V}$. Pero también es el resultado de sumar $\vec{X}$ con $\vec{Y}$. Conclusión: da lo mismo si sumamos directamente los vectores o si sumamos las componentes de los vectores. Esto era de esperarse ya que, como vimos en el problema anterior, $\vec{A}+\vec{B}$ es igual a $\left(\vec{A}_x+\vec{B}_x\right)+\left(\vec{A}_y+\vec{B}_y\right)$ (véase nota 1.13).

Si nos piden sumar dos vectores y nos dan las componentes podemos sumar las componentes en X de los vectores y las componentes en Y, y después sumamos los vectores obtenidos. Pero si no nos dan las componentes sino que nos dan directamente los vectores sin descomponer, puede ser más rápido sumar directamente los vectores siguiendo los tres pasos de la suma que conocemos.

Nota 1.14. Suma gráfica de vectores por componentes

Para sumar gráficamente dos vectores usando componentes podemos seguir los siguientes pasos:

(1) Descomponemos cada uno de los vectores.

(2) Sumamos las componentes X entre sí y las componentes Y entre sí (estos vectores los podemos sumar rápidamente porque están en el mismo eje).

(3) Sumamos los dos vectores obtenidos en (2), siguiendo los tres pasos conocidos de la suma gráfica de vectores (nota 1.4).

Problema 1.22.

Palabras clave: vector como suma de componentes, suma gráfica de vectores componente a componente.

El vector $\vec{A}$ tiene componentes de 6 (sin unidades) en la dirección positiva de X y 3 en la dirección positiva de Y. Por su parte, el vector $\vec{B}$ tiene componentes de 4 en la dirección negativa de X y de 2 en la dirección positiva de Y.

(a) Escriba cada vector como una suma de sus componentes.

(b) Calcule la componente X de la suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

(c) Calcule la componente Y de la suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Solución

(a) Nos piden que escribamos cada vector como la suma de sus componentes, es decir, debemos escribirlos de la forma

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y. \tag{1}$$

En este problema conocemos la magnitud y dirección de las componentes de los vectores; sabemos que la componente X de $\vec{A}$ tiene magnitud de 6 y apunta en la dirección positiva de X, así que $\vec{A}_x$ se puede escribir como

$$\vec{A}_x = 6\hat{x}. \tag{2}$$

Haciendo lo mismo para $\vec{A}_y$, que tiene magnitud de 3 en la dirección positiva de Y, obtenemos

$$\vec{A}_y = 3\hat{y}. \tag{3}$$

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación (1) así:

$$\vec{A} = \underbrace{6\hat{x}}_{\vec{A}_x} + \underbrace{3\hat{y}}_{\vec{A}_y}. \tag{4}$$

Para las componentes de $\vec{B}$ hacemos lo mismo. La componente X mide 4 en la dirección negativa, así que la podemos escribir así:

$$\vec{B}_x = -4\hat{x}, \tag{5}$$

(el signo menos indica la dirección negativa de X). La componente Y mide 2 y apunta en la dirección positiva de Y:

$$\vec{B}_y = 2\hat{y}. \tag{6}$$

Por lo tanto, el vector $\vec{B}$ se puede escribir así:

$$\vec{B} = \underbrace{-4\hat{x}}_{\vec{B}_x} + \underbrace{2\hat{y}}_{\vec{B}_y}. \tag{7}$$

(b) La componente en X de la suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es la suma de las componentes en X de ambos vectores (nota 1.13). Como la componente X de $\vec{A}$ es $6\hat{x}$ y la componente X de $\vec{B}$ es $-4\hat{x}$, entonces la suma de ambas es

$$\vec{A}_x + \vec{B}_x = 6\hat{x} - 4\hat{x} = 2\hat{x}. \tag{8}$$

En palabras, la suma de las componentes en X nos da un vector cuya magnitud es 2 y tiene dirección positiva en X.

(c) La suma de las componentes en Y de ambos vectores nos da la componente Y de $\vec{A} + \vec{B}$. Como la componente Y de $\vec{A}$ es $3\hat{y}$ y la componente Y de $\vec{B}$ es $2\hat{y}$, entonces la suma nos da

$$\vec{A}_y + \vec{B}_y = 3\hat{y} + 2\hat{y} = 5\hat{y}, \tag{9}$$

que es un vector de magnitud 5 y dirección positiva en el eje Y.

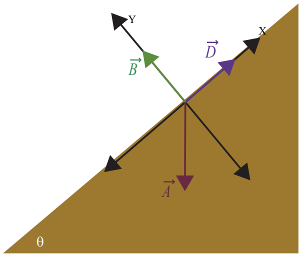
Nota 1.15. A veces sólo queremos la suma de componentes

Muchas veces vamos a encontrar casos como este en los que no nos interesa la suma total de dos vectores sino sólo la suma de las componentes de los vectores. Por ejemplo, cuando veamos problemas de fuerzas, vamos a dividir el análisis en fuerzas en la dirección X y fuerzas en la dirección Y.

Problema (teórico) 1.23.

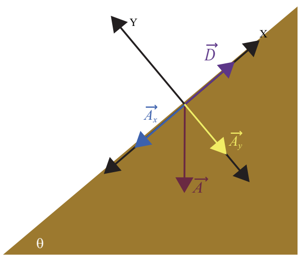
Palabras clave: introducción a planos inclinados, descomposición de vectores en plano inclinado, suma de vectores en plano inclinado.

Teniendo en cuenta la siguiente figura, y sabiendo que la magnitud de $\vec{A}$ es 5 cm y el vector apunta en dirección vertical hacia abajo, la de $\vec{B}$ es 3 cm, la de $\vec{D}$ es 4 cm y el ángulo θ es 30°, calcule la dirección y la magnitud de la componente en X que resulta de $\vec{A}+\vec{B}+\vec{D}$ (preste atención al sistema de coordenadas usado).



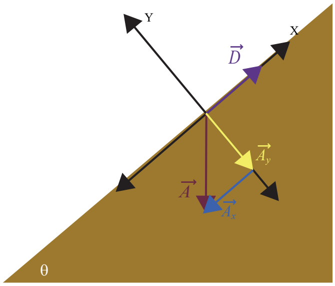
Solución

Debemos sumar las componentes en X de los tres vectores. En el dibujo es claro que el vector $\vec{B}$ no tiene componentes en X. También es claro que el vector $\vec{D}$ está alineado con el eje X, por lo que él mismo ya es la componente en X. Por lo tanto, sólo debemos descomponer el vector $\vec{A}$ (sólo necesitamos su componente X). De ahora en adelante, por claridad, vamos a ignorar en los dibujos al vector $\vec{B}$.



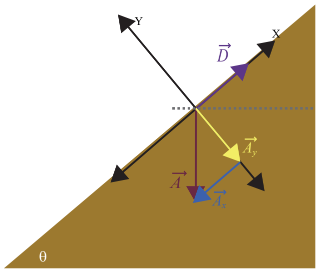
En un solo paso vamos a trazar las componentes del vector $\vec{A}$. El lector puede comprobar, siguiendo los tres pasos conocidos (véase nota 1.8, o véase problema 1.15), que estas son las componentes. En azul está la componente en X y en amarillo la componente Y.

Conocemos la magnitud de $\vec{A}$, que es 5 cm. Pero esa información no es suficiente para determinar la magnitud de su componente X. Para hallar la magnitud de $\vec{A}_x$ necesitamos formar un triángulo rectángulo con las componentes del vector, y determinar alguno de los otros ángulos además del ángulo recto (si es necesario el lector puede revisar el problema 1.16). Si trasladamos $\vec{A}_x$ sin cambiar su dirección, podemos formar el siguiente triángulo:



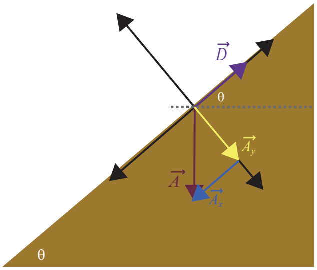
Trasladamos $\vec{A}_x$ para formar un triángulo rectángulo con $\vec{A}$ y $\vec{A}_y$.

Ahora debemos buscar alguno de los ángulos de este triángulo para determinar la magnitud de $\vec{A}_x$. Para hacer esto debemos aprovechar que nos dan el valor de θ. Una forma de encontrar los ángulos de este triángulo conociendo θ es usando una línea horizontal que pasa por el origen del sistema de coordenadas (en gris).



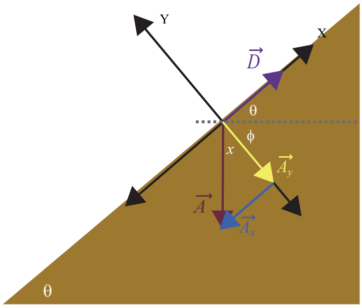
Trazamos una línea horizontal (en gris) que pasa por el origen.

Notemos que el ángulo que se forma entre la línea gris y el eje X es precisamente θ:



θ es el mismo ángulo que se forma entre la línea gris y el eje X.

Ahora llamemos ϕ al ángulo que se forma entre el vector amarillo y la línea gris, y x al ángulo que se forma entre el vector $\vec{A}$ y la componente $\vec{A}_y$, como se ilustra a continuación:



Primero, notemos que entre $\vec{A}_y$ y el eje X se forma un ángulo de noventa grados, pues $\vec{A}_y$ está sobre el eje Y y el eje Y es perpendicular al eje X. Como se aprecia en el dibujo, este ángulo de noventa grados se puede escribir como la suma de ϕ más θ. Es decir,

$$\phi + \theta = 90^\circ. \tag{1}$$

Además, entre el vector $\vec{A}$ y la línea gris también se forma un ángulo de noventa grados, y en el dibujo se ve que este ángulo de noventa grados se puede escribir como la suma de x más ϕ. Es decir,

$$x + \phi = 90^\circ. \tag{2}$$

A nosotros nos interesa determinar x, que es uno de los ángulos del triángulo rectángulo formado por $\vec{A}$ y sus componentes. De la ecuación (2) podemos despejar x:

$$x = 90^\circ - \phi. \tag{3}$$

Pero ahora necesitamos hallar ϕ para poder saber el valor de x. A partir de la ecuación (1) podemos despejar ϕ:

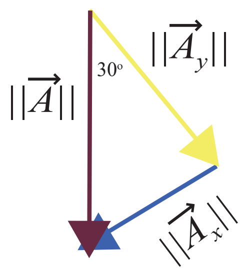
$$\phi = 90^\circ - \theta. \tag{4}$$

Finalmente, usamos el resultado de esta última ecuación en la ecuación (3):

$$x = 90^\circ - \underbrace{(90^\circ - \theta)}_{\phi} = \theta \tag{5}$$

Así, hemos demostrado que el ángulo que se forma entre $\vec{A}$ y su componente Y es el ángulo θ del plano inclinado. Este resultado será muy útil en el futuro.

En este ejercicio particular, θ es igual a 30°, así x es igual a 30°. Ahora que conocemos el ángulo x, podemos determinar la magnitud de $\vec{A}_x$ usando el triángulo rectángulo formado por $\vec{A}$ y sus distintas componentes:



En este dibujo se puede ver que la magnitud de $\vec{A}_x$ es el cateto opuesto a 30°, y la magnitud de $\vec{A}$ es la hipotenusa. Entonces,

$$\sin 30^\circ = \frac{\|\vec{A}_x\|}{\|\vec{A}\|}. \tag{6}$$

Por lo tanto,

$$\|\vec{A}\| \sin 30^\circ = \|\vec{A}_x\|. \tag{7}$$

Como la magnitud de $\vec{A}$ es 5 cm, el resultado de la ecuación (7) es

$$\underbrace{(5 \text{ cm})}_{\|\vec{A}\|} \sin 30^\circ = \|\vec{A}_x\| = 2.5 \text{ cm}. \tag{8}$$

En palabras, la magnitud de $\|\vec{A}_x\|$ es 2.5 cm.

De los dibujos anteriores podemos observar que $\vec{A}_x$ apunta en el sentido negativo del eje X. Así que podemos escribir el vector $\vec{A}_x$ como

$$\vec{A}_x = -(2.5\text{ cm})\hat{x} \tag{9}$$

(el signo menos indica la dirección negativa del eje X). Por su parte, el vector $\vec{D}$ se puede escribir como

$$\vec{D} = (4\text{ cm})\hat{x}, \tag{10}$$

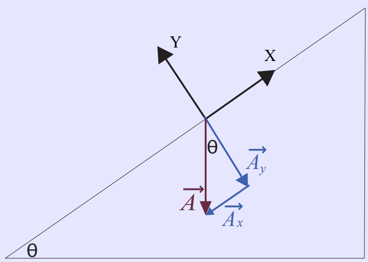
ya que su magnitud es 4 cm y su dirección es el eje X positivo. Como ambos vectores están sobre el mismo eje, podemos sumarlos directamente:

$$\vec{A}_x + \vec{D} = -(2.5\text{ cm})\hat{x} + (4\text{ cm})\hat{x} = (1.5\text{ cm})\hat{x}. \tag{11}$$

En palabras, el vector que resulta de sumar las componentes en X de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{D}$ tiene magnitud de 1.5 cm y apunta en la dirección positiva de X.

Nota 1.16. Ángulo entre la componente Y y el vector en un plano inclinado

Siempre que tengamos una situación como la ilustrada en la siguiente figura, podemos saber que el ángulo entre un vector y su componente Y es el ángulo del plano inclinado.



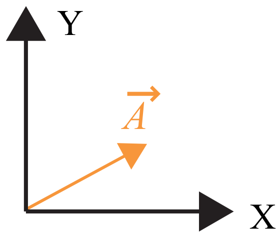
Problema (teórico) 1.24.

Palabras clave: multiplicación de un vector por un escalar.

(a) Explique qué significa multiplicar un vector por una cantidad escalar (es decir, por un número).

(b) Con base en lo anterior, multiplique el vector $\vec{A}$ dibujado en la figura, el cual tiene magnitud de 2 cm, por los siguientes números: 2, −1, −2, 0, 1/2. En cada caso dibuje el vector final.

(c) Demuestre que es lo mismo multiplicar la magnitud de un vector por un número que multiplicar cada componente del vector por un número.

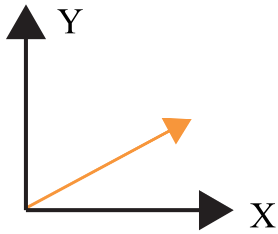


(a) Multiplicar un vector por una cantidad escalar, es decir, por un número, es multiplicar la magnitud del vector por dicho número. Por ejemplo, si el vector tiene magnitud de 3 cm, entonces ese vector multiplicado por el número 10 nos da un nuevo vector con magnitud de 3×10 cm, es decir, nos da un vector con magnitud de 30 cm. O si, por ejemplo, multiplicamos el vector por 0.5 cm, entonces obtenemos un vector de magnitud 0.5×3 cm = 1.5 cm.

Pero, ¿qué pasa si multiplicamos un vector por un número negativo? En un caso así, multiplicamos la magnitud del vector por el valor absoluto del número negativo, y el signo negativo indica que al vector final debemos invertirle su dirección (es decir, cambiar su punta por su cola). Antes decíamos que $-\vec{A}$ es un vector con la misma magnitud de $\vec{A}$ pero con dirección contraria (nota 1.6). En realidad, $-\vec{A}$ es el resultado de multiplicar $\vec{A}$ por −1. El valor absoluto de −1 es 1, así que la magnitud de $\vec{A}$ multiplicada por 1 da como resultado la magnitud inicial. Y el signo negativo que tiene −1 invierte la dirección del vector. En resumen, si multiplicamos un vector por un número positivo, la magnitud debe multiplicarse por el número y la dirección del vector no cambia. Pero si el número es negativo, la dirección del vector se debe invertir y la magnitud del vector se multiplica por el valor absoluto del número negativo.

Por último, para indicar que multiplicamos el vector $\vec{A}$ por un escalar k usamos esta notación: $k\vec{A}$. Es decir, escribimos el escalar seguido del vector. Por ejemplo, $-2\vec{A}$ significa que el vector $\vec{A}$ está siendo multiplicado por -2.

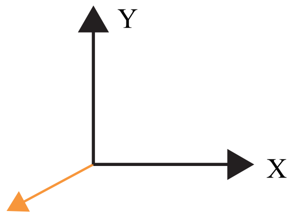
(b) Si multiplicamos el vector de la figura inicial por 2, la magnitud de $\vec{A}$ se debe multiplicar por 2. Como la magnitud inicial de $\vec{A}$ es 2 cm, entonces su nueva magnitud es 4 cm. El dibujo de este nuevo vector es el siguiente:



Si multiplicamos $\vec{A}$ por 2, obtenemos un vector de magnitud de 4 cm y con la misma dirección.

Podemos escribir este nuevo vector como $2\vec{A}$.

Si multiplicamos $\vec{A}$ por -1 obtenemos un vector con la misma magnitud inicial (pues el valor absoluto de -1 es 1), pero con dirección contraria:

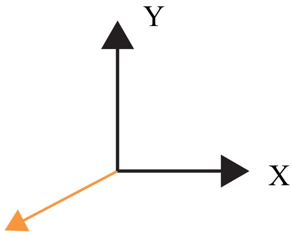


Al multiplicar por -1 obtenemos un vector con la misma magnitud pero dirección contraria.

Al multiplicar por -2, debemos multiplicar la magnitud del vector por el valor absoluto de -2, y luego invertir la dirección del vector. El valor absoluto de -2 es 2, y la magnitud de $\vec{A}$ es 2, así que la nueva magnitud es $2 \times (2\text{ cm}) = 4\text{ cm}$.

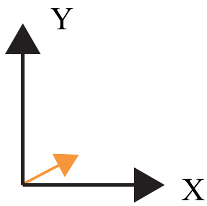
Podemos escribir el anterior vector como $-2\vec{A}$.

Multiplicar un vector por el número cero hace que la magnitud del vector se vuelva cero. El vector con magnitud cero se conoce como vector nulo y por supuesto no se puede dibujar (sería como dibujar un punto en el origen). Así como cero por cualquier número da cero, cero por cualquier vector nos da cero, el vector nulo.



Al multiplicar por -2 obtenemos un vector con magnitud de 4 cm y dirección contraria a $\vec{A}$.

Finalmente, debemos multiplicar $\vec{A}$ por $1/2$. Al multiplicar la magnitud de $\vec{A}$ que es 2 cm por $1/2$, obtenemos: $(2\text{ cm}) \times (1/2) = 1$ cm. Es decir, obtenemos un vector de magnitud 1 cm y con la misma dirección inicial:



Al multiplicar el vector $\vec{A}$ por $1/2$ obtenemos un nuevo vector con magnitud de 1 cm.

(c) Para demostrar lo que nos piden, escribamos un vector cualquiera en término de sus componentes:

$$\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y}. \tag{1}$$

La magnitud del vector en términos de sus componentes, como nos dice la nota 1.9, es

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{\|\vec{B}_x\|^2 + \|\vec{B}_y\|^2}. \tag{2}$$

Multipliquemos el resultado anterior por un escalar z:

$$z\|\vec{B}\| = z\sqrt{\|\vec{B}_x\|^2 + \|\vec{B}_y\|^2}. \tag{3}$$

Además, cuando un número multiplica una raíz cuadrada, podemos meter el número dentro de la raíz si lo elevamos al cuadrado. Por ejemplo, $2\sqrt{9} = 2\times 3 = 6$, que es lo mismo que $\sqrt{(2^2)9} = \sqrt{36} = 6$. En nuestro caso, obtenemos

$$z\|\vec{B}\| = \sqrt{z^2\left(\|\vec{B}_x\|^2 + \|\vec{B}_y\|^2\right)}. \tag{4}$$

Si distribuimos los paréntesis internos, esto es lo mismo que

$$z\|\vec{B}\| = \sqrt{z^2\|\vec{B}_x\|^2 + z^2\|\vec{B}_y\|^2}. \tag{5}$$

Y finalmente, si usamos que $a^2 \times b^2 = (a \times b)^2$, lo anterior nos da

$$z\|\vec{B}\| = \sqrt{\left(z\|\vec{B}_x\|\right)^2 + \left(z\|\vec{B}_y\|\right)^2}. \tag{6}$$

Notemos que en el lado derecho de la igualdad tenemos la magnitud de cada componente del vector multiplicada por z, y al lado izquierdo tenemos la magnitud del vector multiplicada por z. Esto quiere decir que multiplicar un vector por un escalar es lo mismo que multiplicar la magnitud del vector por el escalar (como en el lado izquierdo de la ecuación), o multiplicar la magnitud de cada componente del vector por el escalar (como en el lado derecho). Por ejemplo, $2\vec{A}$ es lo mismo que $2A_x\hat{x} + 2A_y\hat{y}$.

Nota 1.17. Multiplicación de un vector por un escalar

Multiplicar un vector por un escalar es multiplicar la magnitud del vector por el valor absoluto del escalar. En caso de que el escalar sea negativo, debemos, además de multiplicar la magnitud del vector por el valor absoluto del escalar, invertir la dirección del vector.

Multiplicar un vector por un escalar es equivalente a multiplicar cada componente del vector por dicho escalar.

Problema de repaso 1.25. Responda falso o verdadero y justifique la respuesta.

(a) Un vector se puede sumar con un número.

(b) $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$ es lo mismo que $\left(-\vec{C} + \vec{A}\right) + \vec{B}$.

(c) Si sólo conocemos la magnitud de las componentes, no podemos hallar la magnitud del vector.

(d) Multiplicar un vector por 3 es lo mismo que multiplicar cada componente por 3.

(e) Podemos hallar la componente X de la suma de dos vectores sumando la componente en X de uno de los vectores con la componente Y del otro.

Solución

(a) Falso. Las cantidades vectoriales sólo se pueden sumar con cantidades vectoriales, y las cantidades escalares sólo se pueden sumar con otras cantidades escalares.

(b) Verdadero. La suma de vectores es conmutativa, así que no importa el orden en el que sumemos (nota 1.7).

(c) Falso. Con la magnitud de las componentes podemos hallar la magnitud del vector, usando el teorema de Pitágoras (nota 1.9): $\|\vec{A}\| = \sqrt{\|\vec{A}_x\|^2 + \|\vec{B}_y\|^2}$.

(d) Verdadero. Esto fue demostrado en el problema 1.24.

(e) Falso. Para encontrar la componente X de una suma de vectores debemos sumar la componente X de un vector con la componente X del otro (pero no con la componente Y).

Problema (teórico) 1.26.

Palabras clave: ecuaciones vectoriales.

Suponga que $\vec{A} = 4\hat{x} - 2\hat{y}$, $\vec{B} = 3\hat{x} + 9\hat{y}$ y $\vec{D} = a\hat{x} + b\hat{y}$, donde a y b pueden ser números positivos o negativos. Suponga además que $\vec{D}$ es igual a $2\vec{A} - \vec{B}$. ¿Cuánto valen a y b?

Solución

Podemos empezar por escribir la siguiente ecuación:

$$\vec{D} = 2\vec{A} - \vec{B}. \tag{1}$$

Ahora, como también conocemos las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, podemos escribir la ecuación (1) como

$$\vec{D} = 2\underbrace{(4\hat{x} - 2\hat{y})}_{\vec{A}} - \underbrace{(3\hat{x} + 9\hat{y})}_{\vec{B}}. \tag{2}$$

Notemos que el vector $\vec{A}$ está multiplicado por el número 2. Como vimos en el problema anterior, cuando un vector está multiplicado por un número podemos multiplicar cada componente del vector por dicho número (nota 1.17). Si hacemos estas multiplicaciones obtenemos

$$\vec{D} = 8\hat{x} - 4\hat{y} - 3\hat{x} - 9\hat{y} = 5\hat{x} - 13\hat{y}. \tag{3}$$

Finalmente, para hallar a y b escribamos $\vec{D}$ como $\vec{D} = a\hat{x} + b\hat{y}$ y usemos la ecuación (3):

$$\underbrace{a\hat{x} + b\hat{y}}_{\vec{D}} = 5\hat{x} - 13\hat{y}. \tag{4}$$

La anterior es una ecuación entre vectores que nos dice que el lado izquierdo, que es una suma de vectores desconocidos, es igual al lado derecho, que es una suma de vectores conocidos. Podemos referirnos a este tipo de ecuación como *ecuación vectorial*.

Ahora, si un vector es igual a otro, *entonces la magnitud y la dirección de ambos vectores deben ser iguales*. Además (esto se sigue de lo anterior), si un vector es igual a otro sus componentes deben ser iguales[5]. La ecuación (3) es una

[5] Los ángulos del triángulo rectángulo que formamos entre el vector y las componentes dependen de la dirección de las componentes (véase, entre otros, el problema 1.16). La magnitud del vector también depende de la magnitud de las componentes, pues la magnitud del vector se obtiene a partir del teorema de Pitágoras usando la magnitud de las componentes. Así, dos vectores son iguales si y sólo si sus componentes tienen la misma dirección y la misma magnitud.

igualdad entre vectores en la que los vectores están escritos en términos de sus componentes; el vector del lado derecho tiene componentes $5\hat{x}$ y $-13\hat{y}$, y el vector del lado izquierdo tiene componentes desconocidas $a\hat{x}$ y $b\hat{y}$. Como ambos vectores son iguales, sus componentes deben ser iguales:

$$a\hat{x} = 5\hat{x}. \tag{5}$$

$$b\hat{y} = -13\hat{y}. \tag{6}$$

Es claro las ecuaciones (5) y (6) que $a = 5$ y que $b = -13$. En palabras, el vector $\vec{D}$ tiene una componente X de magnitud 5 que apunta en la dirección positiva de X, y tiene una componente Y de magnitud 13 que apunta en la dirección negativa de Y.

Nota 1.18. Igualdad de vectores

(1) Dos vectores son iguales si y sólo si tienen la misma magnitud y dirección. De esto se sigue que sus componentes son iguales.

(2) Cuando tenemos una igualdad entre vectores, siempre podemos igualar entre sí las distintas componentes.

Problema (teórico) 1.27.

Palabras clave: ecuaciones vectoriales, despejar variables en términos de otras variables, la regla de oro.

Considere las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$c\hat{x} = a\hat{x} - 2b\hat{x} + 3c\hat{x} + f\hat{y}. \tag{1}$$

$$0\hat{x} = 4a\hat{x} - b\hat{x}. \tag{2}$$

Con base en estas ecuaciones, escriba c en términos de a, y también escríbalo en términos de b.

Solución

Como nos dan ecuaciones vectoriales, podemos igualar las componentes de cada lado de la ecuación. Notemos que la ecuación (2) ya está escrita en términos de las componentes X de los vectores mientras que la primera ecuación tiene X y Y, así que es más simple empezar con la ecuación (2). Si sumamos el vector $b\hat{x}$ en ambos lados de esta ecuación, obtenemos

$$b\hat{x} = 4a\hat{x}, \tag{3}$$

donde usamos a la izquierda el hecho de que $0\hat{x} + b\hat{x}$ es simplemente $b\hat{x}$ y a la derecha desapareció $-b\hat{x}$ porque lo sumamos con $b\hat{x}$. Así, hemos despejado el vector $b\hat{x}$ en términos del vector $4a\hat{x}$. En la ecuación (3) se ve claramente que

$$b = 4a. \tag{4}$$

Hemos obtenido una ecuación que relaciona b con a, pero necesitamos una ecuación que nos dé c en términos de a y b. Usemos entonces la ecuación (1).

Hay que empezar por igualar directamente las componentes del lado derecho con las del lado izquierdo. Primero notemos que al lado derecho tenemos la componente Y, $f\hat{y}$, pero al lado izquierdo no sale ninguna componente Y. Esto quiere decir que el vector del lado izquierdo no tiene componentes en Y. Como las componentes de este vector deben ser iguales a las del vector derecho, y como este vector no tiene componente en Y (su componente Y es cero), entonces el vector del lado derecho no puede tener componente Y. Por lo tanto, f tiene que ser cero para que $f\hat{y}$ nos dé cero.

Ahora podemos igualar las componentes X:

$$c\hat{x} = a\hat{x} - 2b\hat{x} + 3c\hat{x}. \tag{5}$$

Antes de continuar notemos que podemos pasar $3c\hat{x}$ al lado izquierdo para sumarlo con $c\hat{x}$ (al pasar $3c\hat{x}$ al lado izquierdo, nos queda con signo menos):

$$-3c\hat{x} + c\hat{x} = a\hat{x} - 2b\hat{x}. \tag{6}$$

Y ahora sumamos el lado izquierdo:

$$-2c\hat{x} = a\hat{x} - 2b\hat{x}. \tag{7}$$

Escribamos la ecuación (7) así:

$$(-2c)\hat{x} = (a - 2b)\hat{x}. \tag{8}$$

Notemos que al lado derecho hemos agrupado en un paréntesis los dos términos que tenían $\hat{x}$. Por ejemplo, es lo mismo escribir $(3-6)\hat{x}$ que escribir $3\hat{x} - 6\hat{x}$, o es equivalente escribir $5\hat{x} + 2\hat{x} - 1\hat{x}$ que escribir $(5+2-1)\hat{x}$. En el primer caso el resultado es $-3\hat{x}$ y en el segundo es $6\hat{x}$. Es recomendable insistir que esto sólo tiene sentido si tenemos una igualdad entre vectores que están *en un mismo eje*. Si tuviéramos $-2c\hat{x} = a\hat{x} - 2b\hat{y}$, entonces no podríamos escribir $(-2c)\hat{x} = (a-2b)\hat{x}$, pues estaríamos convirtiendo $-2b\hat{y}$ en $-2b\hat{x}$, algo que no podemos hacer porque estaríamos alterando la dirección de los vectores.

De la ecuación (8) se sigue que

$$(-2c) = (a - 2b). \tag{9}$$

Si usamos en la ecuación (9) que $b = 4a$, como dice la ecuación (4), tenemos

$$-2c = a - 2\underbrace{(4a)}_{b}. \tag{10}$$

Esto da

$$c = \frac{7}{2}a = 3.5a. \tag{11}$$

Esta ecuación nos dice que 3.5 veces a es igual a c.

Para escribir c en términos de b podemos usar de nuevo la ecuación 4. Si despejamos b de esa ecuación, obtenemos

$$\frac{b}{4} = a. \tag{12}$$

Finalmente, si usamos este resultado en la ecuación (11), encontramos

$$c = 3.5 \underbrace{\left(\frac{b}{4}\right)}_{a} = 0.875b. \tag{13}$$

Nota 1.19. Agrupando vectores

Siempre que tenemos una suma de vectores que están sobre el mismo eje, podemos agrupar los diferentes términos que acompañan los vectores unitarios dentro de unos paréntesis, y al final ponemos el vector unitario. Por ejemplo: $-a\hat{y} + 2b\hat{y} - c\hat{y}$ se puede escribir como $(-a + 2b - c)\,\hat{y}$ (como si factorizáramos a $\hat{y}$).

Comentarios muy importantes sobre este problema (y para lo que sigue del libro):

Es importante examinar el paso de

$$-2c\hat{x} = a\hat{x} - 2b\hat{x} \tag{14}$$

a

$$(-2c)\hat{x} = (a - 2b)\hat{x} \tag{15}$$

y después a

$$-2c = a - 2b. \tag{16}$$

En el paso de la ecuación (14) a la (15) hemos aplicado lo dicho en la nota 1.19. De la ecuación (15) a la (16) tenemos en cuenta que dada una igualdad entre vectores sus magnitudes tienen que ser iguales. Notemos que (14) es una ecuación vectorial mientras que (16) es una ecuación escalar (una ecuación entre números). Que podamos pasar de una ecuación vectorial a una escalar será muy importante en los demás capítulos de este libro. Notemos además que (16) se parece mucho a (14): los signos de cada término son iguales y los coeficientes también. La única diferencia es que en (14) cada término tiene $\hat{x}$ y en (16) ninguno.

Alguien podría pensar que estamos simplificando el término $\hat{x}$ de este modo:

$$-2c\cancel{\hat{x}} = a\cancel{\hat{x}} - 2b\cancel{\hat{x}}, \tag{7}$$

para así llegar a la ecuación (16). Pero esto sería un error grave porque no podemos dividir entre vectores, así que no podemos dividir cada término por

$\hat{x}$. La ecuación (16) no resulta de simplificar o dividir entre vectores, resulta de aplicar lo dicho en la nota 1.19 y luego aplicar el siguiente principio: si dos vectores son iguales, sus magnitudes son iguales.

Una vez que hemos entendido cómo (16) se deriva de la ecuación (14), podemos derivar ecuaciones escalares a partir de ecuaciones vectoriales sin necesidad de hacer pasos intermedios (sin pasar por la nota 1.19). Mecánicamente, el procedimiento es muy sencillo: partimos de la ecuación vectorial y la volvemos a escribir pero sin escribir los vectores unitarios. Este resultado es tan útil que lo vamos a llamar *la regla de oro*:

Nota 1.20. Regla de oro

Si tenemos una ecuación entre vectores que están en el mismo eje, podemos escribir una ecuación escalar que relaciona las magnitudes de los vectores. Para hacer eso, rescribimos la ecuación vectorial sin volver a escribir los vectores unitarios. Por ejemplo, supongamos que tenemos la siguiente ecuación vectorial: $a\hat{x} - 2.5c\hat{x} = b\hat{x} + 10h\hat{x} + 3d\hat{x}$.

Si volvemos a escribir la ecuación sin poner los vectores unitarios, obtenemos $a - 2.5c = b + 10h + 3d$.

Al aplicar esta regla es muy importante respetar los signos. Por ejemplo, el término $-2.5c\hat{x}$ tiene un signo negativo, así que al escribir la ecuación escalar debemos escribir $-2.5c$.

¿Qué beneficios tiene que podamos derivar ecuaciones escalares de ecuaciones vectoriales? En física muchas veces queremos operar con ecuaciones escalares porque las podemos manipular más fácilmente. Por ejemplo, cuando tenemos ecuaciones escalares, podemos simplificar un término con otro, pero en ecuaciones vectoriales no podemos simplificar términos porque no podemos dividir entre vectores. En muchos problemas de física empezamos por plantear ecuaciones vectoriales, pero luego debemos hallar la magnitud de los diferentes vectores y para hacer eso es muy práctico usar la regla de oro. Estos beneficios serán evidentes más adelante.

Por otro lado, notemos que la ecuación escalar que resulta de aplicar la regla de oro nos da toda la información que necesitamos acerca los vectores originales. Como la ecuación escalar tiene los mismos signos que la ecuación vectorial, podemos inferir la dirección de los vectores sólo con mirar la ecuación escalar. Por ejemplo, la ecuación $a - 2.5c = b + 10h + 3d$ nos dice que hay un vector cuya magnitud es $2.5c$ y cuya dirección es opuesta a la dirección de los demás vectores. Con esa información sabemos que podemos escribir el vector al que este término se refiere como $-2.5c\hat{x}$. O, por ejemplo, la misma ecuación escalar nos dice que hay un vector que podemos escribir como $b\hat{x}$. Así, la ecuación escalar tiene toda la información vectorial que necesitamos pero tiene la ventaja de que relaciona números y se puede manipular algebraicamente de modo sencillo.

Problema 1.28.

Palabras clave: despejar ecuaciones vectoriales, derivar ecuaciones escalares de ecuaciones vectoriales, aplicaciones de la regla de oro.

Use la regla de oro explicada en el problema anterior (nota 1.20) para escribir m en función de g, teniendo en cuenta las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$gm\hat{y} = t\hat{y} - 9\hat{y}, \tag{1}$$

$$3\hat{y} = g\hat{y} - w\hat{y}, \tag{2}$$

$$2w\hat{y} = 5t\hat{y}. \tag{3}$$

Solución

Si usamos la regla de oro en las tres ecuaciones, obtenemos las siguientes ecuaciones escalares:

$$gm = t - 9, \tag{4}$$

$$3 = g - w, \tag{5}$$

$$2w = 5t \tag{6}$$

respectivamente. En la primera ecuación podemos dividir por g para que nos quede m en función de g y de t:

$$m = \frac{t-9}{g}. \tag{7}$$

Esta ecuación todavía no nos sirve porque nos piden hallar m en función de g y aquí tenemos m en función de g y t. De alguna manera debemos despejar t en términos de g para que en la ecuación (7) todo quede en términos de g. Es decir, necesitamos una ecuación que relacione g con t. Pero ninguna de las ecuaciones que nos dan relaciona estas dos variables. La ecuación (5) relaciona w con g mientras que la ecuación (6) relaciona w con t. Para encontrar una relación entre g y t aprovechemos que ambas variables se relacionan con w. En particular, de la ecuación (5) podemos despejar w en función de g, y luego podemos usar ese resultado en la ecuación (6).

Despejando w en función de g de la ecuación (5), obtenemos

$$w = g - 3. \tag{8}$$

Ahora podemos usar este resultado en (6):

$$2\underbrace{(g-3)}_{w} = 5t. \tag{9}$$

Si despejamos t dividiendo por 5, obtenemos

$$0.4(g-3) = t. \tag{10}$$

Esta ecuación nos da t en función de g. Finalmente, podemos usar este resultado en la ecuación (7):

$$m = \frac{\overbrace{0.4(g-3)}^{t} - 9}{g}. \tag{11}$$

Esto es igual a

$$m = \frac{0.4g - 10.2}{g}. \tag{12}$$

Este resultado también se puede escribir como

$$m = 0.4 - \frac{0.2}{g}. \tag{13}$$

Hemos escrito m en función de g. Notemos que la regla de oro nos facilitó las cosas porque desde el principio nos permitió extraer ecuaciones entre escalares en las que pudimos dividir términos.

1.1 Notas del capítulo

Nota 1.1: Símbolos para representar un vector.

En este libro vamos a representar a los vectores como $\vec{B}$ o como $B\hat{r}$. Además, la magnitud de los vectores será representada como B (sin negrilla) o como $\|\vec{A}\|$.

Nota 1.2: Dirección de un vector.

Cuando vamos a dibujar varios vectores usando el mismo sistema de coordenadas, debemos medir los ángulos con respecto al mismo eje (puede ser X o Y) y en el mismo sentido (al contrario o en el sentido de las manecillas del reloj).

Nota 1.3: Traslación de un vector sobre el plano.

Si movemos un vector del origen del sistema de coordenadas a otro punto del sistema sin cambiar la dirección, el vector sigue siendo el mismo.

Muchas veces es más conveniente dibujar los vectores de modo que comiencen en puntos diferentes del origen. En general, si no cambiamos la dirección o la longitud, podemos mover el vector de cualquier punto del plano a cualquier otro punto sin alterarlo.

Nota 1.4: Suma de dos vectores (método gráfico).

Para sumar vectores de forma gráfica debemos seguir tres pasos:

(a) Situamos los vectores en el origen de un sistema de coordenadas.

(b) Movemos la cola de uno de los vectores (somos libres de escoger cuál) hasta la punta del vector que no movimos. Debemos tener cuidado de no cambiar la dirección del vector que movemos.

(c) Trazamos un vector desde la cola del vector que no movimos hasta la punta del vector que movimos. Este último vector es el resultado de la suma.

Nota 1.5: Suma de dos vectores paralelos (método gráfico).

Para sumar vectores que son paralelos simplemente sumamos la magnitud de cada uno de ellos. El resultado es la magnitud del vector final: $\|\vec{A}+\vec{B}\| = \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$.

Además, la dirección del vector final es la misma que la dirección de los vectores sumados.

Nota 1.6: Resta de vectores (método gráfico).

Para realizar $\vec{A} - \vec{B}$ debemos dibujar $-\vec{B}$ y luego sumamos $\vec{A}$ con $-\vec{B}$ siguiendo los tres pasos de la suma explicados en la nota 1.4. Para dibujar $-\vec{B}$ a partir de $\vec{B}$ simplemente cambiamos la cola por la punta de $\vec{B}$ teniendo en cuenta que la magnitud no cambia.

Nota 1.7: Conmutatividad de vectores.

La suma de vectores es conmutativa, es decir, no interesa en qué orden los sumemos.

Nota 1.8: Descomponer un vector.

Descomponer un vector es encontrar sus componentes. Por ejemplo, encontrar $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$. Para descomponer un vector debemos seguir tres pasos:

Paso 1: Situamos el vector en el origen de un sistema de coordenadas.

Paso 2: Trazamos una línea (mejor si es punteada para no confundirla con un vector) paralela al eje Y que va desde la punta del vector hasta que toca el eje X. Trazamos una línea paralela al eje X que va desde la punta del vector hasta que toca el eje Y.

Paso 3: Trazamos un vector en el eje X que comience en el origen y que llegue hasta el punto en que la línea que recién dibujamos toca el eje X. Esta es la componente X. Trazamos un vector que comienza en el origen y llega hasta el punto en que la línea punteada toca el eje Y. Esta es la componente Y.

Nota 1.9: Vector en términos de sus componentes.

Muchas veces, para hallar la dirección o magnitud de un vector, debemos formar un triángulo rectángulo de modo que las componentes del vector sean los catetos y el vector sea la hipotenusa. Para formar dicho triángulo, debemos mover una de las dos componentes desde su eje correspondiente hasta la línea punteada paralela a dicho eje.

Todo vector se puede escribir como una suma de sus componentes. Por ejemplo $\vec{A}$ se puede escribir como $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$.

La magnitud de un vector siempre se puede escribir como la raíz cuadrada de la suma de la magnitud de cada componente al cuadrado. Por ejemplo,

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\|\vec{A}_x\|^2 + \|\vec{A}_y\|^2}.$$

Nota 1.10: Vector sobre un eje.

Cuando un vector está alineado con uno de los ejes no hay que descomponer al vector; él mismo ya está descompuesto en el eje sobre el que está alienado y no tiene componente en el otro eje.

Nota 1.11: Hallar componentes o ángulos.

Si queremos hallar alguna de las variables del triángulo rectángulo formado por las componentes y el vector, debemos seguir dos pasos: (1) Identificar las funciones trigonométricas en las que aparece la variable que necesitamos. (2) De las funciones encontradas en (1), utilizar aquella en la que aparezcan el mayor número de variables conocidas (puede suceder que nos sirvan varias funciones).

Nota 1.12: Vectores unitarios.

(a) Un vector unitario es un vector que tiene magnitud igual a uno.

(b) Todo vector se puede escribir como la magnitud del vector seguida de un vector unitario que indica la dirección. Por ejemplo, $A\hat{r}$ se lee así: A es la magnitud del vector y $\hat{r}$ es un vector unitario que indica la dirección.

(c) $\hat{x}$ es un vector unitario que apunta en la dirección positiva de X mientras que $-\hat{x}$ es un vector unitario que apunta en la dirección negativa de X. $\hat{y}$ es un vector unitario que apunta en la dirección positiva de Y y $y-\hat{y}$ es un vector unitario que apunta en la dirección negativa de Y.

Nota 1.13: Componentes de $\vec{A}+\vec{B}$ y de $\vec{A}-\vec{B}$.

La componente X de una suma de vectores es igual a la suma de las componentes en X de cada vector. Por ejemplo, $\left(\vec{A}_x+\vec{B}_x\right)$.

La componente Y de una suma de vectores es la suma de las componentes en Y de cada vector. Por ejemplo, $\left(\vec{A}_y+\vec{B}_y\right)$.

La componente X de una resta de vectores es la resta de las componentes en X. Por ejemplo, $\left(\vec{A}_x-\vec{B}_x\right)$.

La componente Y de una resta de vectores es la resta de las componentes en Y. Por ejemplo, $\left(\vec{A}_y-\vec{B}_y\right)$.

Nota 1.14: Suma gráfica de vectores por componentes.

Para sumar gráficamente dos vectores usando componentes podemos seguir los siguientes pasos:

(1) Descomponemos cada uno de los vectores.

(2) Sumamos las componentes X entre sí y las componentes Y entre sí (estos vectores los podemos sumar rápidamente porque están en el mismo eje).

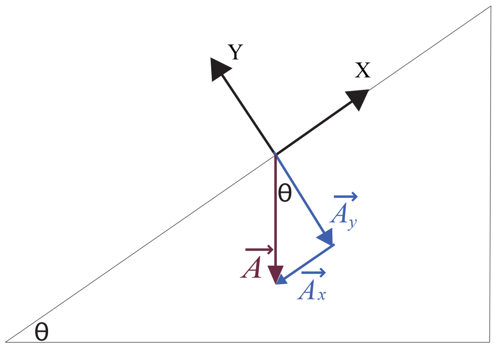
(3) Sumamos los dos vectores obtenidos en (2), siguiendo los tres pasos conocidos de la suma gráfica de vectores (nota 1.4).

Nota 1.15: A veces sólo queremos la suma de componentes.

Muchas veces vamos a encontrar casos en los que no nos interesa la suma total de dos vectores sino sólo la suma de las componentes de los vectores. Por ejemplo, cuando veamos problemas de fuerzas, vamos a dividir el análisis en fuerzas en la dirección X y fuerzas en la dirección Y.

Nota 1.16: Ángulo entre la componente Y y el vector en un plano inclinado.

Siempre que tengamos una situación como la ilustrada en la siguiente figura, podemos saber que el ángulo entre un vector y su componente Y es el ángulo del plano inclinado:



Nota 1.17: Multiplicación de un vector por un escalar.

Multiplicar un vector por un escalar es multiplicar la magnitud del vector por el valor absoluto del escalar. En caso de que el escalar sea negativo, debemos, además de multiplicar la magnitud del vector por el valor absoluto del escalar, invertir la dirección del vector. Multiplicar un vector por un escalar es equivalente a multiplicar cada componente del vector por dicho escalar.

Nota 1.18: Igualdad de vectores.

(1) Dos vectores son iguales si y sólo si tienen la misma magnitud y dirección. De esto se sigue que sus componentes son iguales.

(2) Cuando tenemos una igualdad entre vectores, siempre podemos igualar entre sí las distintas componentes.

Nota 1.19: Agrupando vectores.

Siempre que tenemos una suma de vectores que están sobre el mismo eje, podemos agrupar los diferentes términos que acompañan los vectores unitarios dentro de unos paréntesis, y al final ponemos el vector unitario. Por ejemplo: $-a\hat{y} + 2b\hat{y} - c\hat{y}$ se puede escribir como $(-a + 2b - c)\hat{y}$ (como si factorizáramos a $\hat{y}$).

Nota 1.20: Regla de oro.

Si tenemos una ecuación entre vectores que están en el mismo eje, podemos escribir una ecuación escalar que relaciona las magnitudes de los vectores. Para hacer eso, rescribimos la ecuación vectorial sin volver a escribir los vectores unitarios. Por ejemplo, supongamos que tenemos la siguiente ecuación vectorial: $a\hat{x} - 2.5c\hat{x} = b\hat{x} + 10h\hat{x} + 3d\hat{x}$.

Si volvemos a escribir la ecuación sin poner los vectores unitarios, obtenemos $a - 2.5c = b + 10h + 3d$.

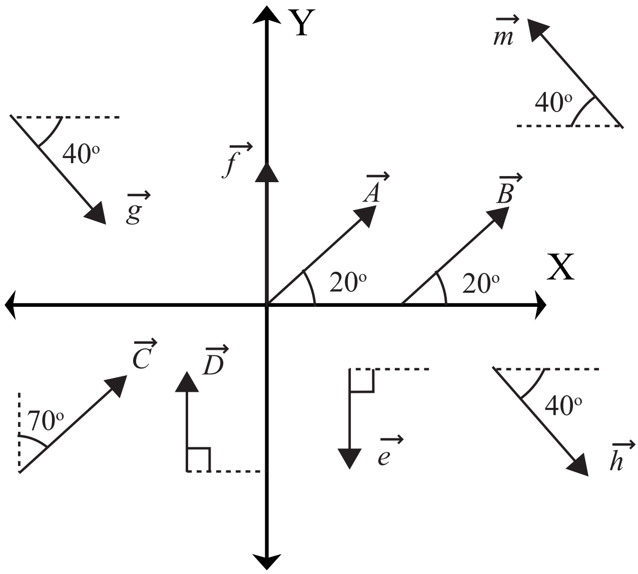
Al aplicar esta regla, es muy importante respetar los signos. Por ejemplo, el término $-2.5c\hat{x}$ tiene un signo negativo, así que al escribir la ecuación escalar debemos escribir $-2.5c$.

1.2 Problemas sin solucionar

1.

(a) Identifique cuáles de los siguientes vectores son el mismo vector, teniendo en cuenta el sistema de coordenadas usado y teniendo presente que todos tienen la misma magnitud.

(b) Diga con respecto a la respuesta de (a) cuáles vectores son translaciones y cuál es el vector "original" (el vector original es el que está en el origen).



Problema similar: 1.6.

2. Un vector $\vec{V}$ tiene una longitud de 8 cm y un vector $\vec{B}$ una de 2 cm. Ambos vectores apuntan en la dirección positiva del eje Y.

(a) Sume el vector $\vec{V}$ con el vector $\vec{B}$.

(b) Dibuje el vector $-\vec{V}$.

(c) Calcule $\vec{B}-\vec{V}$.

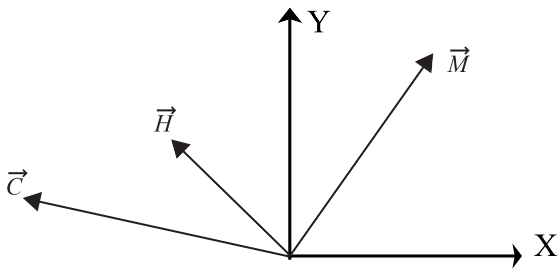
Problema similar: 1.10.

3. Con base en la figura, realice de forma gráfica las siguientes operaciones (respete el orden de los paréntesis):

(a) $(\vec{H}+\vec{M})-\vec{C}$.

(b) $\vec{M}-(\vec{C}-\vec{H})$.

(c) Compare el resultado de (a) con el de (b).

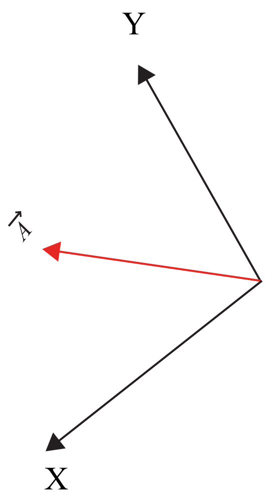


Problema similar: 1.11.

4. Si un vector $\vec{V}$ mide 12 cm y forma un ángulo de 60° con respecto al eje X (en el sentido positivo de las manecillas del reloj), ¿cuánto miden sus componentes?

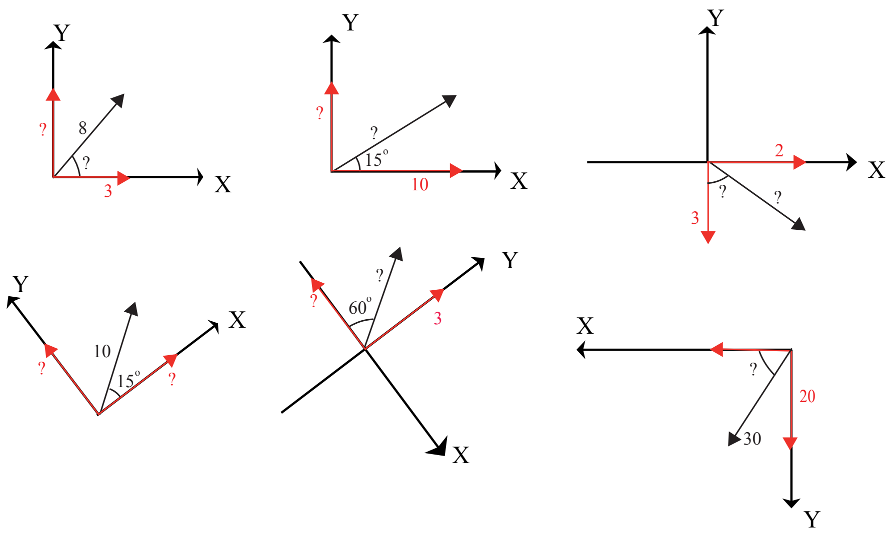
Problema similar: 1.14.

5. Trace las componentes del vector en rojo teniendo en cuenta el sistema de coordenadas indicado.



Problema similar: 1.15.

6. A continuación va a encontrar varios vectores con sus respectivas descomposiciones y usted debe hallar, de acuerdo a la información indicada en cada caso, las incógnitas (las incógnitas se indican con el signo ?). En cada caso, explique cuáles son las variables conocidas y cuáles son las incógnitas y después dibuje el triángulo rectángulo más conveniente. Todas las unidades son metros y grados.



Problema similar: 1.16.

7. ¿Cual de los siguientes es un vector que tiene dirección negativa de Y y además tiene magnitud 10: $6\hat{x}$, $-10\hat{y}$, -10, $-10\hat{x}$, $5\hat{x}$, $(20/2)\hat{y}$, $-(100/10)\hat{y}$ o $10\hat{y}$?

Problema similar: 1.19.

8. Si las componentes del vector $\vec{A}$ son $\vec{A}_x = -8\hat{x}$ y $\vec{A}_y = 9\hat{x}$ y las componentes del vector $\vec{B}$ son $\vec{B}_x = 2\hat{x}$ y $\vec{B}_y = -2\hat{y}$, ¿cuáles son las componentes del vector que resulta de restar $\vec{A}$ con $\vec{B}$?

Problema similar: 1.20.

9. El vector $\vec{A}$ tiene componentes de 20 m en la dirección negativa de X y 3 m en la dirección negativa de Y. Por su parte, el vector $\vec{B}$ tiene componentes de 1 m en la dirección positiva de X y de 2 m en la dirección negativa de Y.

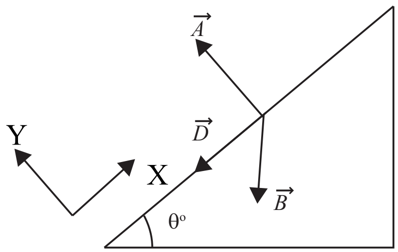
(a) Calcule la componente X de la suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

(b) Calcule la componente Y de la suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

(c) Calcule la componente X y Y de la resta $\vec{A} - \vec{B}$.

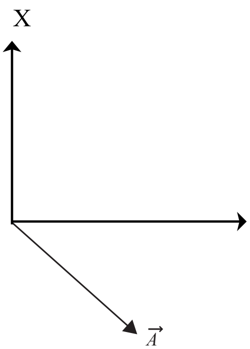
Problema similar: 1.22

10. Teniendo en cuenta la siguiente figura, y sabiendo que la magnitud de $\vec{A}$ es de 4 cm, la de $\vec{B}$ es de 3 cm, la de $\vec{D}$ es de 3 cm y el ángulo θ es de 60°, calcule la dirección y la magnitud de la componente en X que resulta de $\vec{A} + \vec{B} + \vec{D}$ (use el sistema de coordenadas indicado):



Problema similar: 1.23.

11. Multiplique el vector $\vec{A}$ dibujado en la figura, el cual tiene magnitud de 8 cm y marca un ángulo de 30 grados con respecto al eje X positivo, por los siguientes números: 4, −5, −2, 0, 0.25, 0.5. En cada caso dibuje el vector final.



Problema similar: 1.24.

12. Suponga que $\vec{A} = 8\hat{x} + 2\hat{y}$, $\vec{B} = -5\hat{x} - 3\hat{y}$ y $\vec{D} = a\hat{x} + b\hat{y}$, donde a y b pueden ser números positivos o negativos. Suponga además que $\vec{D}$ es igual a $5\vec{B} - 2\vec{A}$. ¿Cuánto valen a y b?

Problema similar: 1.25.

13. Use la regla de oro para escribir p en función de l, teniendo en cuenta las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$pl\hat{y} = t\hat{y} - 9\hat{y} \tag{1}$$

$$3\hat{y} = p\hat{y} - w\hat{y} \tag{2}$$

$$2w\hat{y} = -5t\hat{y} \tag{3}$$

Problema similar: 1.27.

Capítulo 2

Cinemática

Problema (teórico) 2.1.

Palabras clave: vector posición, desplazamiento, desplazamiento neto, distancia, distancia neta.

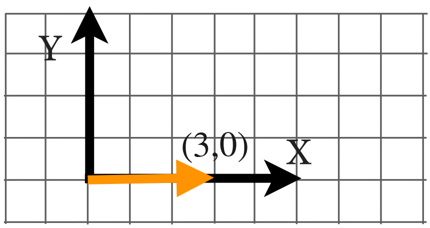
(a) Explique cómo se representa la posición de un objeto en un sistema de coordenadas. A partir de su respuesta, determine si la posición depende o no de la elección del sistema de coordenadas.

(b) Explique qué es el desplazamiento de un objeto y qué es el desplazamiento neto.

(c) Explique qué es la distancia y cómo se relaciona con el desplazamiento. Además, explique qué es la distancia total si un objeto recorre diferentes distancias parciales.

Solución

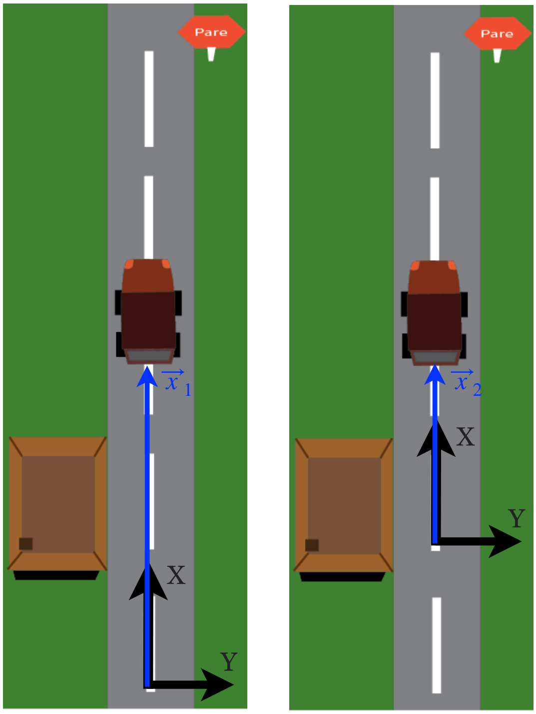
(a) Representamos la posición de un objeto con respecto al origen de un sistema de coordenadas con un vector que va desde el origen del sistema hasta el punto en el plano donde está ubicado el objeto. Como es una cantidad vectorial, a la posición de un objeto se le debe asignar una magnitud y una dirección. Por ejemplo, la posición se representa con un vector que va desde el origen del sistema $(0,0)$ hasta el punto $(3,0)$. Como podemos notar, ese es un vector que tiene la dirección positiva del eje X y que tiene magnitud 3:



El vector de la figura comienza en el origen y llega hasta el punto (3,0). Además, tiene magnitud 3 y su dirección es la dirección positiva de X.

Como la posición es un vector, la posición de un objeto depende de qué sistema de coordenadas escojamos. Por ejemplo, la posición del carro en la figura 2 se puede especificar usando un sistema de coordenadas cuyo origen esté en la parte inferior de la carretera, o usando un sistema cuyo origen esté al frente de la casa:

Figura 2.

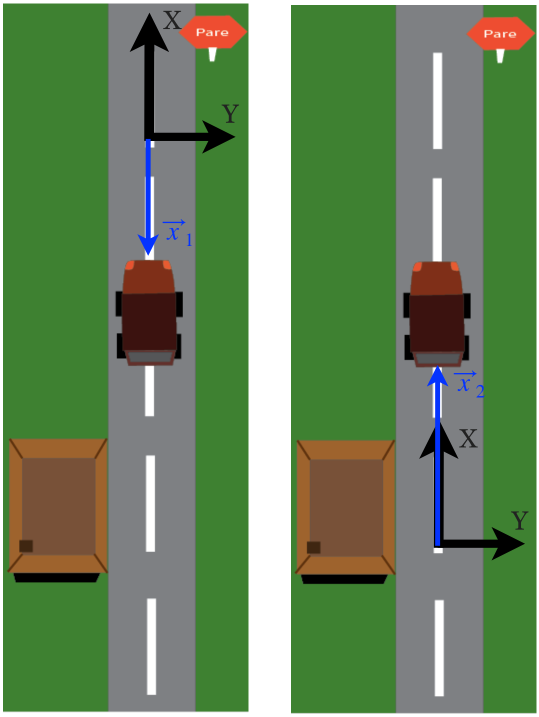


En el dibujo de la izquierda hemos usado un sistema de coordenadas cuyo origen está en la parte inferior de la carretera. Hemos llamado $\vec{x}_1$ a la posición del carro con respecto a este sistema. En el dibujo de la derecha hemos usado un sistema de coordenadas cuyo origen está a la altura de la casa. Hemos llamado a la posición del carro en este sistema $\vec{x}_2$. Notemos que $\vec{x}_2$ es claramente diferente a $\vec{x}_1$, pues la magnitud de $\vec{x}_1$ es mayor que la de $\vec{x}_2$.

Notemos que los vectores de posición $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ tienen la misma dirección (la dirección positiva del eje X), pero sus magnitudes son diferentes. Luego, es claro que la posición es diferente en cada caso.

La posición del objeto puede ser negativa si esta posición apunta en la dirección negativa de alguno de los ejes del sistema de coordenadas escogido, como se ilustra en la figura 3:

Figura 3.



En la figura izquierda hemos usado un sistema de coordenadas ubicado en la parte superior. La posición del carro con respecto a este sistema la hemos llamado $\vec{x}_1$. Notemos que la dirección de $\vec{x}_1$ es negativa porque apunta en el sentido negativo del eje X.

Por último, la posición puede ser un vector en dos dimensiones, como la posición de un objeto en un mapa, para la cual necesitamos una coordenada X y una Y; puede ser un vector en tres dimensiones, como en un mapa tridimensional, en el cual necesitamos una coordenada X y Y pero también una coordenada Z que nos indique la altura del objeto. En un mapa de dos dimensiones no podemos diferenciar un piso que está arriba de otro en un mismo edificio porque ambos tienen las mismas coordenadas X y Y, pero en un mapa de tres dimensiones podemos diferenciarlos porque uno de los pisos está más arriba o más abajo, y esto hace que las coordenadas en Z sean diferentes. Por último, la posición puede representarse con un vector de una dimensión si los objetos sólo se pueden mover sobre una línea recta. En este caso sólo necesitamos usar una coordenada para determinar la posición del objeto (el carro de las figuras anteriores se mueve en línea recta así que el vector de posición es unidimensional).

Nota 2.1. Posición de un objeto

La posición de un objeto se representa con un vector que va del origen al punto en el plano en el que está el objeto. Para diferentes sistemas de coordenadas la posición del mismo objeto (bien sea su dirección, magnitud o ambas) puede ser diferente.

En este capítulo nos vamos a concentrar en objetos que se mueven en línea recta así que las posiciones sólo van a ser vectores de una sola dimensión (por costumbre vamos a usar el eje X para indicar estas posiciones).

(b) El desplazamiento es una cantidad vectorial que nos permite representar el movimiento de un objeto. Si un objeto se mueve desde una posición $\vec{x}_i$ hasta una posición $\vec{x}_f$, su desplazamiento se define como la resta vectorial entre la posición $\vec{x}_f$ y $\vec{x}_i$:

$$\vec{D} = \vec{x}_f - \vec{x}_i. \tag{1}$$

Si el objeto se mueve desde el origen hasta una posición $\vec{x}_f$, el desplazamiento es simplemente $\vec{x}_f$ porque la posición inicial (el origen) es el vector nulo;

$$\vec{D} = \vec{x}_f - \vec{0} = \vec{x}_f. \tag{2}$$

Como la posición puede ser negativa o positiva, el desplazamiento puede ser negativo o positivo.

Por último, el *desplazamiento neto* se entiende como la suma vectorial de los diferentes desplazamientos del objeto. Por ejemplo, si un objeto primero tiene una posición $\vec{x}_1$, después una posición $\vec{x}_2$ y después una posición $\vec{x}_3$, el desplazamiento neto es la suma del desplazamiento entre $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$, más el desplazamiento entre $\vec{x}_2$ y $\vec{x}_3$:

El desplazamiento entre $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ es

$$\vec{D}_1 = \vec{x}_2 - \vec{x}_1, \tag{3}$$

mientras que el desplazamiento entre $\vec{x}_2$ y $\vec{x}_3$ es

$$\vec{D}_2 = \vec{x}_3 - \vec{x}_2. \tag{4}$$

Así, el desplazamiento neto es

$$\vec{D}_n = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = \underbrace{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}_{\vec{D}_1} + \underbrace{(\vec{x}_3 - \vec{x}_2)}_{\vec{D}_2}. \tag{5}$$

Notemos que lo anterior nos da

$$\vec{D}_n = \vec{x}_3 - \vec{x}_1 \tag{6}$$

porque $\vec{x}_2$ se cancela en la ecuación (5). Como $\vec{x}_3$ es la última posición del objeto y $\vec{x}_1$ la inicial, este ejemplo muestra que *el desplazamiento neto se calcula como la resta vectorial entre la posición final y la posición inicial del objeto*, sin importar cuáles sean los desplazamientos intermedios.

(c) Como podemos apreciar en la vida diaria, la distancia es una medida de cuánto recorrió un objeto. En términos un poco más técnicos, la distancia es una cantidad escalar (es un número) que nos indica la magnitud del desplazamiento de un objeto:

$$d = \|\vec{D}\|. \tag{7}$$

Como la distancia es una magnitud (la magnitud del desplazamiento), siempre es positiva. Si un objeto se mueve desde una posición $\vec{x}_1$ hasta una posición $\vec{x}_2$ y después hasta una posición $\vec{x}_3$, la *distancia total* recorrida es la suma de las distancias en cada trayecto[1]. La distancia desde $\vec{x}_1$ hasta $\vec{x}_2$ es

$$d_1 = \|\vec{D}_1\| = \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\| \tag{8}$$

y la distancia desde $\vec{x}_2$ hasta $\vec{x}_3$ es

$$d_2 = \|\vec{D}_2\| = \|\vec{x}_3 - \vec{x}_2\| \tag{9}$$

así que la distancia total es

$$d_1 + d_2 = \underbrace{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|}_{d_1} + \underbrace{\|\vec{x}_3 - \vec{x}_2\|}_{d_2} \tag{10}$$

($\vec{x}_2$ no se cancela al resolver esta suma porque está dentro de valores absolutos). Notemos que la distancia neta no es simplemente la magnitud de la resta entre la posición inicial y final, la cual sería $\|\vec{x}_3 - \vec{x}_1\|$, sino que debemos tener en cuenta posiciones intermedias como $\vec{x}_2$.

[1] Cuando el objeto sigue un *camino curvo*, la distancia entre dos puntos cualesquiera se debe calcular como la suma de las distancias infinitesimales entre todos los puntos intermedios, empezando en el punto inicial y terminando en el final. Sin embargo, en este libro vamos a centrarnos en el movimiento rectilíneo, así que podemos ignorar esta complicación.

Nota 2.2. Desplazamiento y distancia

- El desplazamiento de un objeto es la resta vectorial de la posición final con la posición inicial. Si la posición inicial es $\vec{x}_i$ y la final es $\vec{x}_f$, entonces el desplazamiento es $\vec{D} = \vec{x}_f - \vec{x}_i$.

- Si un objeto tiene diferentes desplazamientos, el desplazamiento neto es simplemente la resta de la posición final con la posición inicial, ignorando las diferentes posiciones intermedias.

- La distancia entre dos puntos es la magnitud del desplazamiento entre ambos puntos: $d = \|\vec{D}\|$.

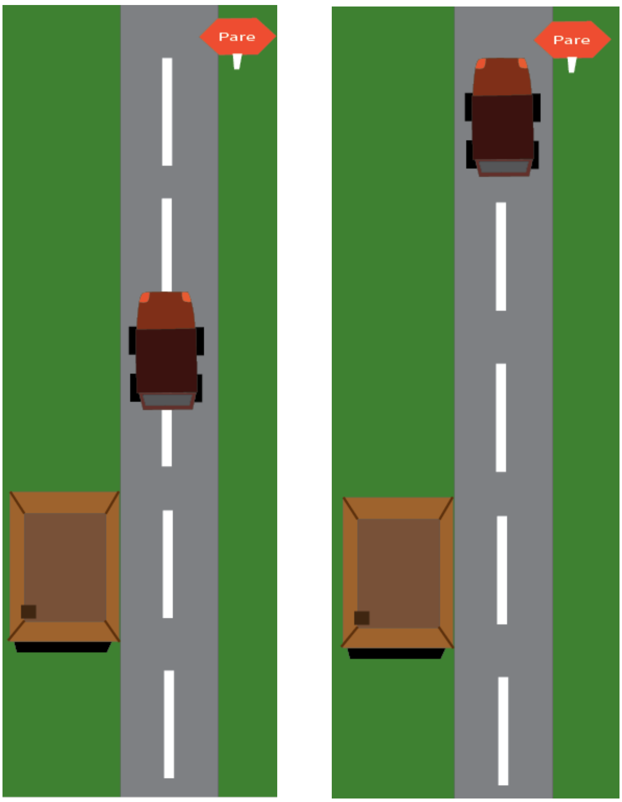
- La distancia neta es la suma de la magnitud de cada uno de los diferentes desplazamientos intermedios. Pero la distancia neta no es simplemente la magnitud de la resta vectorial entre la última posición y la posición inicial, es decir, la distancia neta no es la magnitud del desplazamiento neto.

Problema (teórico) 2.2.

Palabras clave: posición, desplazamiento y distancia en dos sistemas de coordenadas distintos, desplazamiento neto, distancia neta.

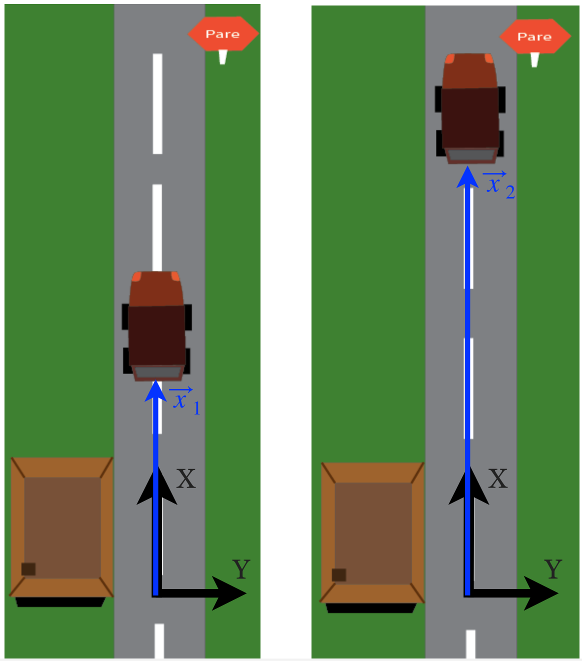
(a) Un carro se va moviendo sobre una carretera como se indica en la figura. Muestre que la magnitud del desplazamiento del carro entre el tiempo inicial y el tiempo final no depende del sistema de coordenadas escogido (ayuda: es suficiente con indicar el desplazamiento usando dos sistemas de coordenadas diferentes). Con base en lo anterior diga si la dirección del desplazamiento depende del sistema de coordenadas.

(b) Suponga que en el tiempo final el carro se detiene y luego da reversa hasta llegar a la posición en la que estaba en el tiempo inicial. Escriba una expresión para el desplazamiento neto del carro en tal caso y la distancia neta recorrida (desde el tiempo inicial hasta que regresa al punto de origen). Suponga que la posición del carro en el tiempo inicial es $\vec{x}_1$ y la posición en el tiempo final es $\vec{x}_2$.



Solución

(a) Para mostrar que el desplazamiento del carro no depende del sistema de coordenadas escogido, necesitamos calcular el desplazamiento para dos sistemas de coordenadas diferentes y al final deberíamos comprobar que la magnitud de ambos desplazamientos es igual. Empecemos por poner un sistema de coordenadas al frente de la casa:



A la posición en el tiempo inicial del carro con respecto a este sistema la hemos llamado $\vec{x}_1$ y a la posición en el tiempo final la hemos llamado $\vec{x}_2$. Ambas posiciones están alineadas con el eje X.

El desplazamiento entre el tiempo inicial y final es simplemente la resta vectorial de la posición final con la inicial:

$$\vec{D}_1 = \vec{x}_2 - \vec{x}_1. \tag{1}$$

Podemos hacer esta resta siguiendo los pasos de la resta de vectores explicados en el capítulo 1 (nota 1.6). Recordemos que una resta de vectores se puede ver como una suma. Es decir, $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ se puede entender como la suma de $\vec{x}_2$ más $-\vec{x}_1$: $\vec{x}_2 + (-\vec{x}_1)$. Y $-\vec{x}_1$ no es más que $\vec{x}_1$ invertido (cambiamos la cola por la punta). Así que $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ es

Figura 2.4.

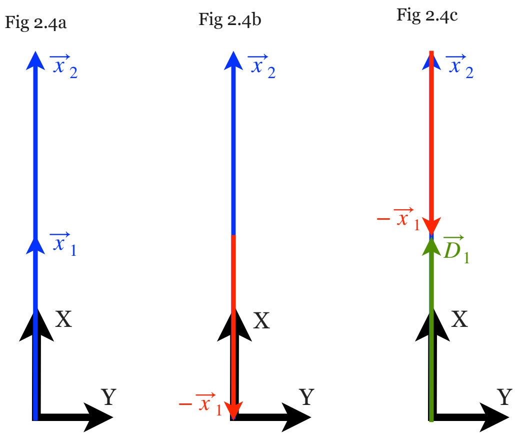
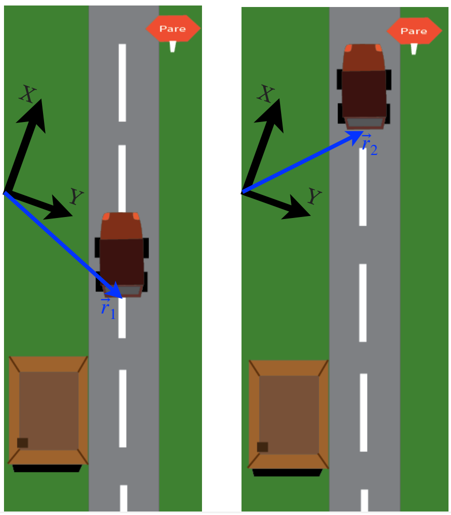


Fig. 2.4a: Situamos los vectores que vamos a restar sobre un sistema de coordenadas. Fig. 2.4b: Invertimos el vector $\vec{x}_1$ para obtener el vector $-\vec{x}_1$ (en rojo). Fig. 2.4c: Movemos la cola de $-\vec{x}_1$ hasta la punta de $\vec{x}_2$ y luego trazamos un vector desde la cola de $\vec{x}_2$ hasta la punta de $-\vec{x}_1$. Este último vector es $\vec{D}_1$, el desplazamiento del carro.

Ahora hallemos el desplazamiento para otro sistema de coordenadas con el fin de verificar que la magnitud de este vector es igual a la del primero en el otro sistema. Podemos escoger un sistema de coordenadas muy diferente, como el siguiente:



Esta vez usamos un sistema de coordenadas diferente para indicar las posiciones en el tiempo inicial y final. Notemos además que $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son vectores que tienen componentes X y Y (no están alineados con alguno de los ejes).

Para calcular el desplazamiento debemos realizar $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Repitiendo los pasos que seguimos para calcular $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$, tenemos

Figura 2.5.

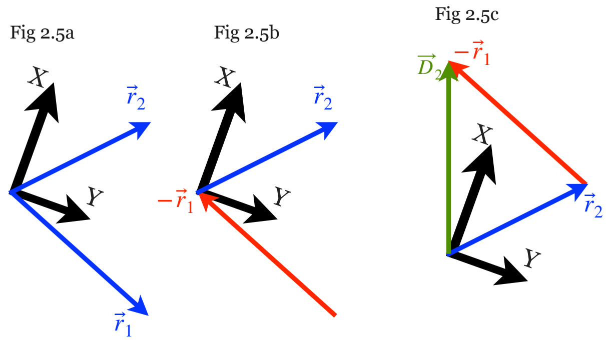
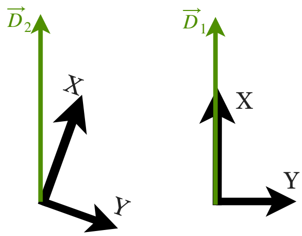


Fig. 2.5a: Situamos ambos vectores sobre un sistema de coordenadas. Fig. 2.5b: Invertimos el vector $\vec{r}_1$ para obtener el vector $-\vec{r}_1$ (rojo). Fig. 2.5c: Movemos la cola de $-\vec{r}_1$ hasta la punta de $\vec{r}_2$ y luego trazamos un vector desde la cola de $\vec{r}_2$ hasta la punta de $-\vec{r}_1$. Este último vector es $\vec{D}_2$, el desplazamiento del carro.

Finalmente, notemos que el desplazamiento $\vec{D}_2$ que obtuvimos mide exactamente lo mismo que el desplazamiento $\vec{D}_1$ de la fig. 2.4:



Por lo tanto, hemos mostrado que sin importar cuál sistema de coordenadas usemos, la magnitud del desplazamiento calculado será la misma. La magnitud del desplazamiento es la distancia, así que lo que acabamos de comprobar es que *la distancia recorrida por un objeto no depende de cuál sistema de coordenadas usemos*. Esto es interesante porque el desplazamiento depende de la posición inicial y final y estas posiciones sí dependen de la escogencia del sistema.

Ahora bien, el desplazamiento es un vector, y como todo vector tiene magnitud y dirección. Como vimos en el capítulo 1 (nota 1.2), la dirección de un vector se suele indicar midiendo el ángulo que hay entre el vector y alguno de los ejes del sistema de coordenadas. Si usamos diferentes sistemas, es natural que el ángulo medido sea diferente, y por lo tanto, es natural que la dirección del vector dependa del sistema usado. En la última figura los sistemas de coordenadas son diferentes, así que el ángulo que marcamos entre el vector y los ejes van a ser distintos (por ejemplo, en un caso el vector está alineado con el eje X y en el otro caso no). Esto no debería ser una sorpresa, pues en el problema 2.1 dijimos que el desplazamiento podía ser negativo o positivo dependiendo de qué sistema de coordenadas estemos usando. Así que en general, es apropiado decir que *la dirección del vector depende de o es relativa al sistema de referencia con respecto al cual medimos esa dirección. La dirección no es algo absoluto, algo que existe independientemente del sistema de referencia*[2].

En resumen, la dirección del desplazamiento o de cualquier vector depende del sistema de coordenadas usado, pero la magnitud del desplazamiento, es decir, la distancia, no depende del sistema. De hecho, no sólo la distancia no depende del sistema usado sino que *la magnitud de cualquier vector no depende del sistema de coordenadas*[3].

Nota 2.3. La magnitud de un vector no depende del sistema

La distancia recorrida (la magnitud del desplazamiento) por un objeto no depende del sistema de coordenadas escogido. En general, la magnitud de un vector no depende del sistema de coordenadas usado.

(b) Ahora debemos calcular el desplazamiento neto para el caso en el cual el carro, una vez está en la posición indicada en el tiempo final, da reversa y regresa hasta donde estaba en el tiempo inicial. Como se explicó en la nota 2.2, el desplazamiento neto es la resta vectorial entre la última posición del objeto y la posición inicial. En nuestro caso, la posición inicial y la final del objeto es la misma (el carro termina su movimiento donde lo empezó), así que la resta de esa posición consigo misma es cero:

---

[2] Por supuesto, alguien puede decir que ambos vectores en la figura anterior apuntan hacia “arriba de la página”, de modo que ambos tienen la misma dirección. Eso es cierto si usamos la página como nuestro sistema de referencia, pero no es cierto si usamos los sistemas de coordenadas indicados en la figura, donde no tiene sentido hablar de “arriba” o “abajo” sino de positivo en X, o negativo en X, etc. (Esto muestra, una vez más, que la dirección es relativa al sistema de coordenadas usado). Esto puede generar confusión, pues en algunos libros de texto se dice que el desplazamiento no depende del sistema, ya que la flecha dibujada “apunta hacia el mismo punto”, sin importar el sistema usado (véase, por ejemplo, la sección 1.5 de *An Introduction to Mechanics* por Kleppner y Kolenkow). Discutir a fondo esto nos llevaría a considerar preguntas filosóficas como: ¿si doblo la pagina sobre la que dibujo el vector, el vector tiene o no la misma dirección? Y si no, ¿por qué no? Al decir que ambos vectores son el mismo porque “sus flechas apuntan hacia la misma parte”, ¿estamos presuponiendo un espacio absoluto que nos dice cuál es la dirección absoluta de los vectores? Este no es el lugar para discutir estas preguntas. Lo importante es que cuando uno expresa la dirección de un vector, debe decir qué sistema está usando para indicarla.

[3] Cuidado: esto sólo funciona en casos en que los sistemas de coordenadas estén en reposo. Si comparamos dos sistemas de coordenadas que tienen cierta velocidad entre sí, el desplazamiento medido no será el mismo para los distintos sistemas. Ese tipo de sistemas que se están moviendo no nos interesarán en este libro.

$$\vec{D}_n = \vec{x}_1 - \vec{x}_1 = \vec{0}, \tag{2}$$

donde la posición final y la inicial es $\vec{x}_1$.

Por otro lado, la distancia neta recorrida es la suma de las diferentes distancias, y como cada distancia debe ser positiva, la distancia neta no será cero. La distancia entre la posición $\vec{x}_1$ y la posición $\vec{x}_2$ es la magnitud del desplazamiento entre ambos puntos, es decir:

$$d_1 = \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|. \tag{3}$$

La distancia entre $\vec{x}_2$ y $\vec{x}_1$ es la magnitud del desplazamiento entre $\vec{x}_2$ y $\vec{x}_1$, es decir:

$$d_2 = \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|. \tag{4}$$

La distancia recorrida total es la suma de las diferentes distancias:

$$d_n = d_1 + d_2 = \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\| + \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|. \tag{5}$$

Pero $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|$ se puede escribir como $\| - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\|$, y $\| - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\|$ es lo mismo que $\|(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\|$ pues el signo no interesa si estamos hallando la magnitud (*i.e.*, la magnitud de $3\hat{x}$ es la misma que la de $-3\hat{x}$). Así que la anterior ecuación se puede escribir así

$$d_n = 2(\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|). \tag{6}$$

Nota 2.4. Desplazamiento y distancia neta cuando la posición final y la inicial son la misma

Cuando un objeto realiza un movimiento y regresa hasta el punto del que partió, el desplazamiento neto es cero pero la distancia no lo es. La distancia depende de las diferentes posiciones intermedias del objeto.

Problema (teórico) 2.3.

Palabras clave: vector posición, desplazamiento, desplazamiento neto, distancia, distancia neta, movimiento por tramos.

Una persona camina desde su casa 32 metros en la dirección negativa del eje Y, hasta un edificio blanco (su casa está en el origen del sistema). En ese punto gira y comienza a caminar en la dirección negativa de X por 16 metros, hasta llegar a una tienda. Después, camina 200 metros con una dirección de 45 grados con respecto al eje X (medidos en el sentido contrario a las manecillas del reloj), hasta que se encuentra con un amigo. Finalmente, camina en línea recta una dirección desconocida, hasta que llega de nuevo a su casa.

(a) Realice un dibujo esquemático de la situación (no tiene que ser un dibujo a escala).

(b) Diga cuál es la dirección desconocida en la que caminó desde que se encuentra con su amigo hasta que retorna a su casa, y diga qué distancia caminó en esa dirección.

(c) Calcule la distancia total del recorrido.

(d) Calcule el vector del desplazamiento neto entre la casa y la tienda.

Solución

¿Qué información nos dan?

Una persona camina 32 metros en el sentido negativo de Y. Después camina 16 metros en el sentido negativo de X. Luego camina 200 metros con un ángulo de 45 grados sobre X, medido en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Finalmente, camina hasta regresar a su casa.

¿Qué nos piden?

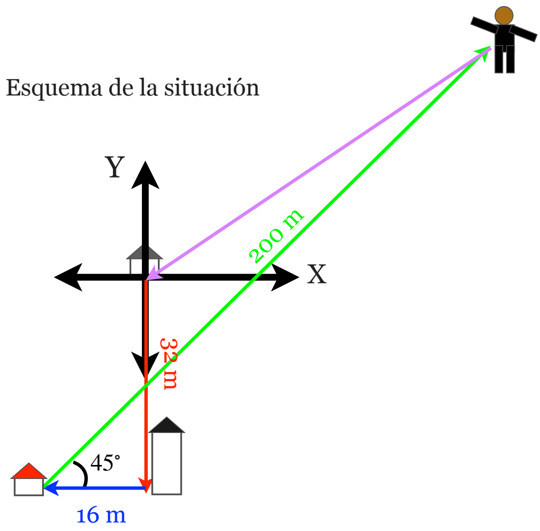
(a) Un esquema de la situación.

(b) La distancia recorrida desde que se encuentra con su amigo hasta que regresa a su casa. Además, debemos hallar la dirección en la que camina esa distancia.

(c) La distancia total recorrida.

(d) El desplazamiento neto entre la casa y la tienda.

(a) Empecemos por hacer un dibujo de la situación:



Primero la persona camina 32 m en la dirección negativa de Y (vector rojo) hasta un edificio blanco. Después camina 16 m en la dirección negativa de X (vector azul) hasta una tienda. Luego camina 200 metros, 45 grados por encima de X (vector verde) hasta que se encuentra un amigo. Finalmente, regresa al origen (vector morado), donde está su casa.

(b) Debemos encontrar la magnitud y dirección del vector morado. Como la persona regresó al punto de partida, sabemos que el desplazamiento total es cero (nota 2.4). Esto quiere decir que la suma de los cuatro vectores de desplazamiento debe darnos el vector nulo. Llamemos $\vec{v}_r$ al vector rojo, $\vec{v}_a$ al azul, $\vec{v}_v$ al verde y $\vec{v}_m$ al morado que queremos hallar. Como dijimos, como el desplazamiento total es cero, la suma de los cuatro debe ser cero:

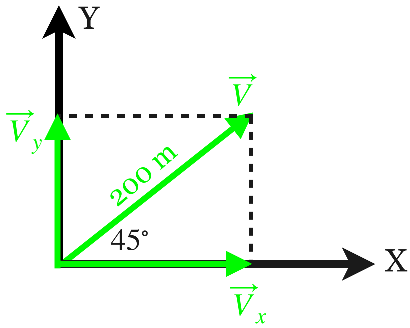
$$\vec{v}_r + \vec{v}_a + \vec{v}_v + \vec{v}_m = \vec{0}. \tag{1}$$

Nosotros queremos hallar el vector morado. De la anterior ecuación se sigue que

$$\vec{v}_m = -\vec{v}_r - \vec{v}_a - \vec{v}_v. \tag{2}$$

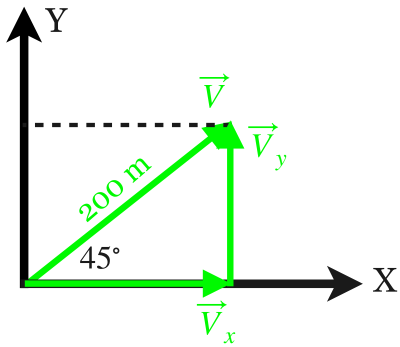
Como conocemos los vectores rojo, azul y verde, podemos hallar el vector morado usando la anterior ecuación. Primero, escribamos los tres vectores conocidos en términos de sus componentes.

Como el vector rojo tiene magnitud de 32 m y apunta en la dirección negativa de Y, lo podemos escribir como $\vec{v}_r = -(32\text{ m})\hat{y}$. El vector azul tiene dirección negativa en X y magnitud de 16 metros, así que lo podemos escribir como $\vec{v}_a = -(16\text{ m})\hat{x}$. Por último, el vector verde no lo podemos escribir en términos de sus componentes porque no lo hemos descompuesto. Así que el siguiente paso es descomponer el vector verde. Para hacerlo, situamos el vector en un sistema de coordenadas y proyectamos el vector en el eje X y Y (hacemos los tres pasos explicados en el capítulo 1, nota 1.8, en un solo paso):



Descomponemos el vector.

Ahora podemos mover la componente Y para formar un triángulo rectángulo entre las componentes:



Formamos un triangulo rectángulo moviendo la componente Y.

El anterior triángulo rectángulo muestra con claridad que la magnitud de la componente Y del vector sobre la magnitud del vector original es seno de 45 grados

$$\sin 45° = \frac{\|\vec{V}_y\|}{\|\vec{V}\|} = \frac{\|\vec{V}_y\|}{200 \text{ m}}. \tag{3}$$

Por lo tanto, la magnitud de la componente Y es

$$(200 \text{ m}) \sin 45° = \|\vec{V}_y\| = (100\sqrt{2}) \text{ m}, \tag{4}$$

donde usamos el hecho de que $\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$. La dirección de la componente Y apunta en la dirección positiva de Y, así que podemos escribir esta componente como

$$\vec{V}_y = (100\sqrt{2}\ \mathrm{m})\hat{y}. \tag{5}$$

En la figura también se ve que la componente X sobre la magnitud del vector original es igual al coseno de 45 grados:

$$\cos 45^\circ = \frac{\|\vec{V}_x\|}{\|\vec{V}\|} = \frac{\|\vec{V}_x\|}{200\ \mathrm{m}}. \tag{6}$$

Así, la magnitud de la componente X es

$$(200\ \mathrm{m})\cos 45^\circ = \|\vec{V}_x\| = (100\sqrt{2})\ \mathrm{m}, \tag{7}$$

donde usamos el hecho de que $\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$. La dirección de la componente X apunta en la dirección positiva de X, así que podemos escribir esta componente como

$$\vec{V}_x = (100\sqrt{2}\ \mathrm{m})\hat{x}. \tag{8}$$

Ahora que conocemos ambas componentes, podemos escribir el vector verde de la siguiente manera:

$$\vec{V}_v = (100\sqrt{2}\ \mathrm{m})\hat{x} + (100\sqrt{2}\ \mathrm{m})\hat{y}. \tag{9}$$

Como ya conocemos todos los vectores en términos de sus componentes, podemos escribir de nuevo la ecuación (2) así:

$$\vec{V}_m = -(-32\ \mathrm{m})\hat{y} - (-16\ \mathrm{m})\hat{x} - ((100\sqrt{2}\ \mathrm{m})\hat{x} + (100\sqrt{2}\ \mathrm{m})\hat{y}). \tag{10}$$

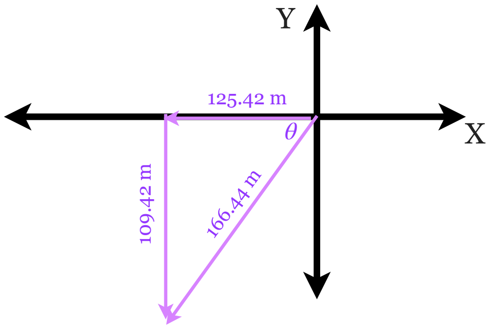
Si sumamos los términos en X y los términos en Y, y sólo tenemos en cuenta las primeras dos cifras decimales, obtenemos

$$\vec{V}_m \approx -(125.42\ \mathrm{m})\hat{x} - (109.42\ \mathrm{m})\hat{y}. \tag{11}$$

La anterior ecuación nos muestra directamente las componentes del vector morado. Usando esas componentes podemos calcular la magnitud del vector, pues recordemos que la magnitud de un vector es la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de la magnitud de cada componente (nota 1.9). Por lo tanto, la magnitud de $\vec{V}_m$ es

$$\|\vec{V}_m\| \approx \sqrt{(125.42\ \mathrm{m})^2 + (109.42\ \mathrm{m})^2} \approx 166.44\ \mathrm{m}. \tag{12}$$

También podemos obtener la dirección del vector a partir de las componentes. Para hacer eso, situamos el vector en el origen del sistema de coordenadas y formamos un triángulo con sus componentes:



Formamos un triángulo con el vector y sus componentes. La dirección la determina θ.

Determinar el ángulo θ es fácil porque conocemos las componentes. La tangente de θ es igual a la magnitud del cateto opuesto al ángulo θ sobre la magnitud del cateto adyacente a ese mismo ángulo. En este caso, tenemos

$$\tan\theta = \frac{109.42 \text{ m}}{125.42 \text{ m}} \approx 0.87. \tag{13}$$

Por lo tanto, θ es igual a

$$\arctan(0.87) = 41.02^\circ \approx \theta. \tag{14}$$

Así, la dirección del vector está dada por un ángulo de 41.02 grados con respecto al eje X, medido en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

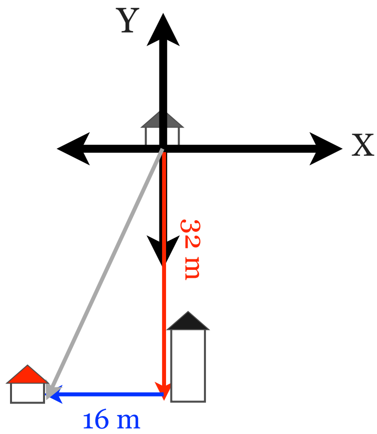
(c) La distancia total recorrida es la suma de la distancia recorrida en cada uno de los cuatro desplazamientos (recordemos que la distancia es la magnitud del desplazamiento). En el primer tramo la persona caminó 32 metros, en el segundo 16 metros, en el tercero 200 metros y en el último caminó 166,44 metros. Por lo tanto, la distancia total es

$$d_t = 32 \text{ m} + 16 \text{ m} + 200 \text{ m} + 166.44 \text{ m} = 414.44 \text{ m} \tag{15}$$

(d) La casa está en el origen del sistema, y la tienda está en el punto donde el vector azul termina. Llamemos a este punto $\vec{x}_T$. Así, el desplazamiento desde la casa hasta la tienda es la resta entre la posición de la tienda y la posición de la casa. Llamemos $\vec{x}_T$ a la posición de la tienda y $\vec{x}_c$ a la de la casa. Como la casa está en el origen, $\vec{x}_c$ es cero y este desplazamiento queda

$$\vec{D}_{tc} = \vec{x}_T - \vec{x}_c = \vec{x}_T. \tag{16}$$

Si lo dibujamos, este vector es simplemente el vector que va del origen a la tienda:

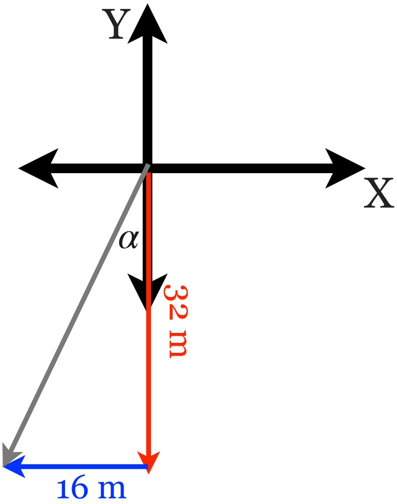


El vector del desplazamiento entre la casa y la tienda es el vector gris dibujado en el plano.

Es claro que las componentes Y y X de este vector gris son los vectores rojo y azul respectivamente. Como conocemos el vector rojo y azul, es muy sencillo hallar el vector gris. La magnitud del vector gris es

$$\|\vec{V}_m\| = \sqrt{(16\text{ m})^2 + (32\text{ m})^2} \approx 35.78\text{ m}. \tag{17}$$

Podemos determinar la dirección a partir del ángulo α que hay entre el vector rojo y el vector gris:



El ángulo α nos permite indicar la dirección del vector.

La tangente de α es igual a la magnitud del cateto opuesto a α sobre la magnitud del cateto adyacente a α. En este caso, tenemos

$$\tan\alpha = \frac{16 \text{ m}}{32 \text{ m}} = 0.5 \text{ m}. \tag{18}$$

Así, α es igual a

$$\arctan(0.5) = 26.56^\circ = \alpha. \tag{19}$$

Entonces, la dirección del vector gris es de 26.56 grados medidos con respecto al eje Y en el sentido de las manecillas del reloj.

Problema (teórico) 2.4.

Palabras clave: velocidad, velocidad constante, velocidad instantánea, rapidez, movimiento rectilíneo uniforme.

(a) Explique cómo se calcula la velocidad de un objeto si el objeto tiene velocidad constante. Además, explique el concepto de velocidad instantánea.

(b) Usando la notación de vectores $B\hat{r}$, donde B es la magnitud del vector y $\hat{r}$ es la dirección, muestre que la dirección de la velocidad es la misma que la dirección del desplazamiento. Además, muestre que la magnitud de la velocidad es igual a la distancia recorrida sobre el tiempo. Haga lo anterior sólo para el caso en el que la velocidad es constante.

(c) Responda: ¿Cambia la rapidez dependiendo del sistema de referencia usado? ¿Qué tipo de movimiento recorre un objeto si se mueve con velocidad constante? ¿Cómo se denomina este movimiento?

(d) Usando la expresión para la velocidad hallada en (a), dé una expresión para la posición final en términos de la velocidad, el tiempo y la posición inicial (para el caso de velocidad constante).

Solución

(a) Intuitivamente se puede decir que la velocidad es la medida de cuánta distancia recorre un objeto en cierta unidad de tiempo; si un carro A se mueve con más velocidad que un carro B, el carro A recorrerá más distancia que el carro B en un cierto intervalo de tiempo. Pero en física se usa una noción más técnica de velocidad: la velocidad es una *cantidad vectorial* que mide cuánto es el desplazamiento de un objeto por unidad de tiempo. Más precisamente, si un objeto se mueve de un punto $\vec{x}_i$ hasta un punto $\vec{x}_f$, y lo hace con *velocidad constante*, su velocidad se puede calcular usando la siguiente fórmula:

$$\vec{v} = \frac{\vec{D}}{t} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t}, \tag{1}$$

donde t es el tiempo que le toma al objeto ir desde $\vec{x}_i$ hasta $\vec{x}_f$. Notemos que la velocidad es un vector (el vector de desplazamiento multiplicado por la cantidad escalar $1/t$ da como resultado el vector de velocidad).

Cuando un objeto se mueve con velocidad constante, la fórmula (1) nos permite calcular cuál es su velocidad. Por ejemplo, si un carro se mueve desde la posición $\vec{x}_i = (10\text{ km})\hat{x}$ hasta la posición $\vec{x}_f = (100\text{ km})\hat{x}$ en dos horas, entonces su velocidad será

$$\vec{v} = \frac{(100\text{ km})\hat{x} - (10\text{ km})\hat{x}}{2\text{ h}} = (45\text{ km/h})\hat{x}. \tag{2}$$

Como es una velocidad constante, podemos usar dos puntos cualesquiera de la trayectoria del objeto para calcular la velocidad. Por ejemplo, si un carro se mueve entre Cali y Pereira con velocidad constante, su velocidad se encuentra primero calculando el desplazamiento entre Cali y Pereira, y después dividiendo ese desplazamiento entre el tiempo del viaje. Como el carro se mueve con velocidad constante, deberíamos obtener el mismo resultado si calculáramos su velocidad entre Cali y Tuluá (Tuluá queda entre Cali y Pereira). En ese caso, haríamos la resta entre la posición de Tuluá y la posición de Cali, y dividiríamos entre el tiempo que le toma al carro realizar ese recorrido.

Si el carro del ejemplo anterior no tuviera velocidad constante, podría suceder que al pasar por Buga el carro tuviera una velocidad de $(80\text{ km/h})\hat{x}$ pero al pasar por Tuluá tuviera una velocidad de $(60\text{ km/h})\hat{x}$. Si en ese caso alguien nos preguntara cuál es la velocidad del carro, nosotros tendríamos que responder: "Depende. ¿En qué punto específico de su trayectoria? En Tuluá su velocidad era $(60\text{ km/h})\hat{x}$, en Buga era $(80\text{ km/h})\hat{x}$". En tal caso tendríamos que hablar de la velocidad del objeto en un instante particular, que se conoce como velocidad instantánea. Matemáticamente, la velocidad instantánea se define como la tasa de cambio del desplazamiento en un intervalo de tiempo infinitesimal. Lo podemos escribir así:

$$\vec{v}_{inst} = \frac{\vec{D}}{t_{inst}} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_{inst}}, \tag{3}$$

donde t_{inst} denota un instante[4].

Notemos que la fórmula (3) es muy similar a la ecuación (1) de la velocidad constante. La diferencia reside en que el tiempo t en la ecuación (1) puede ser el tiempo transcurrido entre dos puntos cualesquiera de la trayectoria del carro, mientras que t_{inst} es un instante particular de la trayectoria. En el caso de (3), $\vec{x}_i$ y $\vec{x}_f$ son *los puntos entre los que se movió el objeto en un instante*, mientras que en (1), *estos son los puntos entre los que se movió el objeto en un intervalo de tiempo de cualquier duración*. Por supuesto, cuando un carro se mueve con velocidad constante, su velocidad instantánea en cada punto de su trayectoria es la misma[5].

[4] En libros de texto más avanzados, esta velocidad se define con la noción de derivada: $\vec{v}_{inst} = \frac{d\vec{D}}{dt}$.

[5] La ecuación (1) es más fácil de usar porque podemos tomar dos puntos cualesquiera de la trayectoria, en cambio la ecuación (3) requiere herramientas matemáticas más sofisticadas, como las aprendidas en cálculo.

Antes de continuar, notemos que no hemos dicho de forma precisa qué quiere decir que la velocidad sea constante. Como todo vector, la velocidad tiene magnitud y dirección. Así, para que la velocidad o cualquier vector sea constante, *no puede variar ni su magnitud ni su dirección*. Por ejemplo, si tenemos un vector que mide 5 cm y apunta hacia el norte, ese vector variaría si alguien hiciera que apuntara hacia el oeste, o si alguien lo acortara o estirara. En el primer caso el vector varía porque su dirección cambia, en el segundo varía porque su magnitud cambia. Exactamente lo mismo se aplica para el vector de velocidad.

Nota 2.5. ¿Cuándo cambia un vector?

Un vector cambia cuando su dirección o su magnitud cambia (en caso contrario decimos que el vector es constante). En el caso de la velocidad, esta cambia sólo si la rapidez o la dirección de movimiento cambia.

(b) Podemos escribir el vector desplazamiento $\vec{D}$ usando la notación $D\hat{r}$, en la que D es la magnitud del desplazamiento y $\hat{r}$ la dirección. Más aún, como la magnitud del desplazamiento es la distancia podemos escribir al desplazamiento como $d\hat{r}$ (donde d es la distancia). Si usamos esto en la ecuación (1), obtenemos

$$\vec{v} = \frac{d}{t}\hat{r}. \tag{4}$$

Ahora podemos escribir el vector velocidad como $v\hat{e}$, donde $\hat{e}$ es el vector unitario que nos indica la dirección (lo hemos llamado $\hat{e}$ para no confundirlo con $\hat{r}$ que es la dirección del desplazamiento) y v es la magnitud de la velocidad. Así, la ecuación (4) queda

$$v\hat{e} = \frac{d}{t}\hat{r}. \tag{5}$$

La anterior es una igualdad entre vectores, así que las magnitudes deben ser iguales y las direcciones deben ser iguales. Es decir,

$$v = \frac{d}{t} \tag{6}$$

y

$$\hat{e} = \hat{r}. \tag{7}$$

En palabras: (6) dice que la magnitud de la velocidad (cuando es constante) es igual a la distancia recorrida por el objeto en cierta unidad de tiempo, y (7) dice que la dirección de la velocidad es la dirección del desplazamiento. La magnitud de la velocidad tiene un nombre: *rapidez*. Como muestra (6), la rapidez de un objeto es la *distancia* que recorre el objeto por unidad de tiempo. No debemos confundir la rapidez con la velocidad: la velocidad es el *desplazamiento* realizado por un objeto en cierta unidad de tiempo y la rapidez es la distancia recorrida en cierta unidad de tiempo. Una es una cantidad vectorial y la otra es escalar.

Notemos que de (6) se sigue que $d = vt$, es decir, la distancia es la rapidez por el tiempo del recorrido.

(c) Como dice la nota 2.3, la magnitud de un vector no depende del sistema, así que la rapidez, que es la magnitud de la velocidad, no depende del sistema usado (recordemos que esto sólo es valido para sistemas de referencia que no se mueven entre sí). Otra forma de ver por qué la rapidez no depende del sistema es esta: la rapidez es distancia sobre tiempo, pero ya sabemos que la distancia no depende del sistema (nota 2.3) y el tiempo tampoco depende, así que la rapidez no lo hace. En contraste, la velocidad sí depende del sistema, pues su dirección depende del sistema usado. Por ejemplo, mientras que para alguien un carro se puede mover en la dirección positiva del eje Y, para otra persona con otro sistema de coordenadas ese mismo carro se está moviendo en la dirección negativa de su eje X.

Nota 2.6. Velocidad y rapidez

- La velocidad es una cantidad vectorial que relaciona el desplazamiento del objeto con el tiempo del desplazamiento. Cuando la velocidad es constante, la velocidad se calcula con

$$\vec{v} = \frac{\vec{D}}{t} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t},$$

  donde $\vec{D}$ es el desplazamiento del objeto entre los puntos $\vec{x}_i$ y $\vec{x}_f$, y t es el tiempo que le toma al objeto moverse entre esos puntos.

- La *velocidad instantánea* es la velocidad del objeto en cierto instante. Cuando el objeto tiene velocidad constante, su velocidad instantánea es la misma en cualquier punto de su trayectoria y esa velocidad se calcula con la fórmula anterior.

- El vector de velocidad tiene la misma dirección que el vector del desplazamiento.

- La magnitud de la velocidad se llama *rapidez* y está dada por $v = d/t$, donde d es la distancia recorrida. En palabras, la rapidez es la distancia recorrida sobre el tiempo del recorrido. De forma equivalente, podemos decir que distancia es rapidez por tiempo.

- La rapidez, como cualquier magnitud de un vector, no depende del sistema de coordenadas.

Como vimos en (b), la dirección y magnitud del desplazamiento determinan la dirección y magnitud de la velocidad. Por lo tanto, cuando un objeto tiene velocidad constante su rapidez permanece constante y la dirección de su desplazamiento también. Ahora, si la dirección es constante, el objeto se mueve *siempre* en la misma dirección, es decir, ¡el objeto sigue una línea recta! Esta idea nos lleva a un principio fundamental: *si un objeto se mueve con velocidad constante, la trayectoria de su movimiento sigue una línea recta y la rapidez del objeto no cambia*. El movimiento de los objetos que tienen velocidad constante se conoce como *movimiento rectilíneo uniforme*.

Nota 2.7. Movimiento rectilíneo uniforme

En un movimiento rectilíneo uniforme el objeto tiene velocidad constante. Es decir, el objeto preserva una rapidez constante y se mueve en línea recta, sin cambiar su dirección.

(d) Empecemos por escribir de nuevo la ecuación para un caso de velocidad constante:

$$\vec{v} = \frac{\vec{D}}{t}. \tag{8}$$

Ahora multipliquemos ambos lados de la ecuación por el tiempo t:

$$\vec{v}t = \vec{D}. \tag{9}$$

Si usamos que $\vec{D} = \vec{x}_f - \vec{x}_i$, la anterior ecuación queda

$$\vec{v}t = \vec{x}_f - \vec{x}_i. \tag{10}$$

Y finalmente, sumando en ambos lados el término $\vec{x}_i$ y reorganizando términos, tenemos

$$\vec{x}_f = \vec{v}t + \vec{x}_i. \tag{11}$$

Esta ecuación nos dice cuál es la posición final de un objeto en función del tiempo, de la velocidad del objeto y de la posición inicial. Una ecuación como la ecuación (11), que nos dice cómo cambia la posición de un objeto en el tiempo, se conoce como ecuación de movimiento. Hay muchos tipos de *ecuaciones de movimiento*; la ecuación (11) es un tipo de ecuación de movimiento que se refiere al movimiento de un objeto con velocidad constante (es decir, al movimiento rectilíneo uniforme).

Nota 2.8. Ecuación de movimiento para un objeto en un movimiento rectilíneo uniforme

Cuando un objeto se mueve con velocidad constante, la ecuación de movimiento del objeto es

$$\vec{x}_f = \vec{v}t + \vec{x}_i,$$

donde $\vec{x}_f$ es la posición final, $\vec{x}_i$ su posición inicial, $\vec{v}$ su velocidad y t el tiempo transcurrido entre la posición inicial y final.

Problema (teórico) 2.5.

Palabras clave: gráfica de posición contra tiempo en casos de movimiento rectilíneo uniforme.

(a) Teniendo en cuenta la ecuación de movimiento de un objeto con movimiento rectilíneo uniforme, muestre que x_f (que corresponde a la magnitud de la posición final) obedece la ecuación de una línea recta. Ayuda: use la regla de oro.

(b) Con base en lo anterior, explique cómo realizar una gráfica de posición contra tiempo.

Solución

(a) En un movimiento rectilíneo uniforme el objeto se mueve en una sola dirección. La ecuación de un movimiento rectilíneo uniforme es (nota 2.8)

$$\vec{v}t = \vec{x}_f - \vec{x}_i. \tag{1}$$

Si despejamos $\vec{x}_f$ de aquí, obtenemos

$$\vec{x}_f = \vec{v}t + \vec{x}_i. \tag{2}$$

Como el objeto se mueve en línea recta, podemos usar un sistema de coordenadas en el cual el objeto se mueve a lo largo de un solo eje. Supongamos que escogemos el eje X, que el objeto se mueve en la dirección positiva de X y que la posición inicial en X es positiva (esto es arbitrario, podíamos haber escogido cualquier otro eje). En tal caso, los diferentes vectores de la ecuación (2) se pueden escribir en términos de $\hat{x}$:

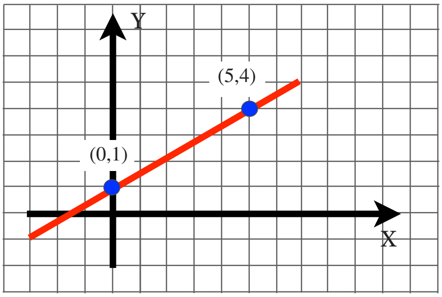
$$x_f\hat{x} = vt\hat{x} + x_i\hat{x}, \tag{3}$$

donde x_f es la magnitud de $\vec{x}_f$, x_i la magnitud de $\vec{x}_i$, v es la rapidez (la magnitud de la velocidad) y t es el tiempo. Usando la regla de oro (nota 1.20) podemos derivar la siguiente ecuación:

$$x_f = vt + x_i. \tag{4}$$

En palabras, la magnitud de la posición final del objeto depende linealmente de la rapidez del objeto y de la magnitud de su posición inicial. Aunque esta no es una ecuación entre vectores, los signos nos indican la dirección de los vectores de la ecuación (3); el signo del término vt nos dice cuál es la dirección de la velocidad, el signo de x_i nos dice cuál es la dirección de la posición inicial y el signo de x_f indica la dirección de la posición final.

Antes de continuar repasemos brevemente la ecuación de una línea recta. Una recta que corta el eje Y en el punto b y que tiene pendiente m se describe con la ecuación $y = mx + b$, donde x es la variable independiente y y la dependiente. Por ejemplo, veamos la recta de la siguiente figura:



El eje X corresponde a la variable independiente, y el eje Y a la variable dependiente.

La recta de la figura pasa por el punto (5,4) y corta el eje Y cuando Y es 1. Con esta información el lector puede comprobar fácilmente que la pendiente es $m = 3/5$. Por lo tanto, la ecuación de esta línea recta es: $y = 3/5x + 1$.

Con base en lo recién explicado, debe estar claro para el lector que la ecuación (4) se comporta exactamente como la ecuación de una línea recta; x_f es la variable dependiente, v la pendiente, t la variable independiente y x_i la posición inicial. El eje que llamamos X en la línea recta de la figura anterior marcaría el tiempo y el eje Y indicaría la posición final x_f.

$$\underbrace{x_f}_{\text{Variable depediente}} = \underbrace{v}_{\text{Pendiente}} \overbrace{t}^{\text{Variable independiente}} + \underbrace{x_i}_{\text{Punto corte de eje Y}} \tag{5}$$

(b) Para realizar una gráfica de posición contra tiempo sólo necesitamos aplicar la ecuación (5). Por supuesto, la ecuación (5) será diferente para cada problema. En algunos casos la velocidad será negativa así que la pendiente será negativa, en algunos casos la velocidad será cero así que la pendiente será cero (esto sería una línea horizontal paralela al eje X), en algunos casos la posición inicial será negativa y en otros no, etc. Lo más importante para graficar correctamente la posición del objeto es identificar la ecuación de movimiento del objeto, pues una vez tenemos la ecuación de movimiento podemos construir la ecuación (5) aplicando la regla de oro.

Nota 2.9. Gráfica de posición contra tiempo para un movimiento rectilíneo uniforme

(1) Escogemos un sistema de coordenadas cualquiera o usamos el que el problema nos indique.

(2) Con base en la información que tengamos y el sistema de coordenadas escogido, debemos escribir la ecuación de movimiento del objeto. En general, la ecuación de un movimiento con velocidad constante es: $\vec{x}_f = \vec{v}t + \vec{x}_i$.

(3) Aplicamos la regla de oro a la ecuación de movimiento. Graficamos esta última ecuación teniendo en cuenta que es la ecuación de una línea recta. La posición inicial es el punto de corte con el eje Y, la posición final es la variable dependiente, el tiempo es la variable independiente y la velocidad es la pendiente de la recta (el signo de la velocidad dice si la pendiente es positiva o negativa).

Problema (teórico) 2.6.

Palabras clave: distancia, desplazamiento, rapidez, gráfica de posición contra tiempo en movimiento rectilíneo uniforme.

Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(1) Si un objeto parte de un punto A y regresa al punto A, la distancia recorrida es cero porque el desplazamiento es cero.

(2) Si un objeto parte de un punto A y no regresa a A, entonces podemos estar seguros de que su desplazamiento neto no es cero.

(3) La rapidez es igual al desplazamiento sobre el tiempo.

(4) Un objeto con velocidad constante tiene la misma velocidad en todos los puntos de su recorrido.

(5) La gráfica de posición contra tiempo de un objeto que se mueve con velocidad constante siempre es igual a la gráfica de una línea recta.

Solución

(1) Falso. La distancia recorrida es la suma de las distancias intermedias, y las distancias intermedias son iguales a la magnitud de los desplazamientos intermedios. Estas magnitudes siempre serán positivas, así que no hay forma de que la suma sea cero (ver nota 2.4).

(2) Verdadero. El desplazamiento neto es la resta de la última posición con la primera, así que sólo nos dará cero si ambas son iguales. Y como el objeto no regresó a A, entonces su posición final no es igual a la inicial.

(3) Falso. La *velocidad* es igual al desplazamiento sobre el tiempo, en cambio la rapidez es igual a la magnitud de la velocidad, es decir, es igual a la *distancia* sobre el tiempo.

(4) Verdadero. Como su nombre lo indica, un objeto con velocidad constante tiene que mantener fija su velocidad en todos los puntos de la trayectoria, ¡de lo contrario no sería constante!

(5) Verdadero. Como se indicó en la nota 2.9, la gráfica de posición contra tiempo para un objeto que tiene velocidad constante es de la forma $x_f = vt + x_i$, que es la ecuación de una línea recta.

Problema 2.7.

Palabras clave: distancia, desplazamiento, gráfica de posición contra tiempo, movimiento rectilíneo uniforme, uso de distintos sistemas de coordenadas.

Suponga que Daniela caminó a 6 kilómetros por hora en línea recta.

(a) ¿Cuánta distancia recorrió Daniela en 5 horas?

(b) Ahora suponga que Daniela caminó en la dirección positiva del eje X y suponga que la posición inicial de Daniela es el origen. Según esta información, ¿cuál es el desplazamiento de Daniela después de 5 horas?

(c) Realice una gráfica de posición contra tiempo desde el tiempo inicial hasta que pasaron 5 horas y con ella calcule el desplazamiento y la distancia.

(d) Realice de nuevo la gráfica de posición contra tiempo pero para el caso en que Daniela parte desde la posición $-(5\text{ km})\hat{x}$ (es decir, 5 kilómetros en el sentido negativo del eje X). Compare el desplazamiento y la distancia según esta gráfica con el desplazamiento y la distancia hallados en (c).

Solución

¿Qué información nos dan?

(a) Daniela camina a 6 kilómetros por hora en línea recta.

(b) y (c) Daniela camina en la dirección positiva del eje X y parte desde el origen.

(d) Daniela parte desde la posición $-(5\text{ km})\hat{x}$.

¿Qué nos piden?

(a) La distancia que recorrió Daniela en 5 horas.

(b) El desplazamiento de Daniela después de 5 horas.

(c) Realizar una gráfica de posición contra tiempo desde el tiempo inicial hasta que pasan 5 horas, y con ella calcular el desplazamiento y la distancia.

(d) Realizar una gráfica de posición contra tiempo desde el tiempo inicial hasta que pasan 5 horas si la posición de Daniela es $-(5\text{ km})\hat{x}$. Comparar el desplazamiento y la distancia de esta gráfica con la de (c).

(a) Según el problema, la rapidez de Daniela es

$$v = 6\text{ km/h}. \tag{1}$$

Es muy importante tener claro que la anterior es la rapidez y no la velocidad, pues no sabemos hacia dónde camina Daniela. En la sección (b) nos dicen en qué dirección camina, pero no en la (a). Ahora bien, para hallar la distancia recorrida por Daniela podemos usar el hecho de que en un movimiento rectilíneo uniforme la distancia es rapidez por tiempo (nota 2.6):

$$d = vt. \tag{2}$$

Si usamos un tiempo de 5 horas y la rapidez dada por la ecuación (1), la distancia recorrida por Daniela es

$$d = \underbrace{(6\ \text{km/h})}_{v}\underbrace{(\ 5\ \text{h}\ )}_{t} = 30\ \text{km}. \tag{3}$$

Cuidado: por la misma razón que no conocemos la velocidad, no conocemos el desplazamiento; el desplazamiento de Daniela depende de la dirección en que ella se haya movido y esa dirección no la conocemos. Pero la distancia no depende del sistema (como comprobamos en el problema 2.2), así que no necesitamos saber en qué dirección caminó para calcularla.

(b) Ahora debemos calcular el desplazamiento de Daniela después de 5 horas. Recordemos que el desplazamiento es la resta vectorial entre la posición final y la posición inicial:

$$\vec{D} = \vec{x}_f - \vec{x}_i. \tag{4}$$

La posición inicial de Daniela según el sistema que nos dicen es el origen, así que para hallar el desplazamiento sólo debemos determinar cuál es la posición final de Daniela después de las cinco horas. Para hallar la posición final debemos usar la ecuación de movimiento de Daniela. Como Daniela se mueve con velocidad constante, su ecuación de movimiento es así (véase nota 2.8):

$$\vec{x}_f = \vec{v}t + \vec{x}_i. \tag{5}$$

Como conocemos su rapidez (que es de seis kilómetros por hora) y conocemos la dirección en la que camina, que es la dirección positiva de X, entonces conocemos su velocidad:

$$\vec{v} = (6\ \text{km/h})\hat{x}. \tag{6}$$

Si usamos esta velocidad en la ecuación (5), y como la posición inicial es cero, obtenemos

$$x_f\hat{x} = (6\ \text{km/h})t\hat{x}, \tag{7}$$

donde hemos escrito la posición final x_f como $x_f\hat{x}$. La ecuación (7) es la ecuación de movimiento de Daniela; con esa ecuación podemos hallar la posición de Daniela en cualquier tiempo (simplemente remplazamos el tiempo por el valor que deseemos). A nosotros nos interesa la posición de Daniela cuando han pasado 5 horas, así que ponemos 5 horas en la ecuación (7):

$$\vec{x}_f\,\hat{x} = (6\ \text{km/h})\underbrace{(5\ \text{h})}_{t}\hat{x} = (30\ \text{km})\hat{x}. \tag{8}$$

Como ahora conocemos la posición final, podemos hallar el desplazamiento usando la ecuación (4):

$$\vec{D} = \underbrace{(30\ \text{km})\,\hat{x}}_{\vec{x}_f} - \underbrace{0\hat{x}}_{\vec{x}_i} = (30\ \text{km})\hat{x}. \tag{9}$$

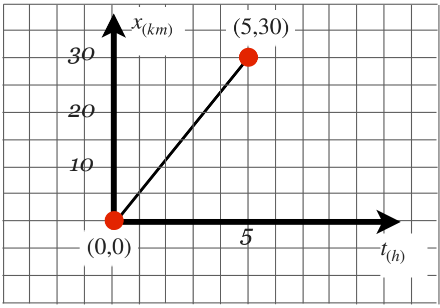
En palabras, el desplazamiento de Daniela es de 30 kilómetros en la dirección positiva de X. Como la distancia es la magnitud del desplazamiento, entonces la ecuación (9) nos dice que la distancia recorrida por Daniela en cinco horas es de 30 kilómetros. Obviamente, esto concuerda con lo hallado en la sección (a): ecuación (3).

Note que, como vimos en la sección (a), si queremos determinar la distancia recorrida por un objeto no tenemos que usar la ecuación de movimiento del objeto, sino que podemos usar el hecho de que distancia es rapidez por tiempo. Pero si queremos determinar el desplazamiento debemos usar la ecuación de movimiento.

(c) Para realizar una gráfica de posición contra tiempo seguimos los tres pasos indicados en la nota 2.9. Primero, como en el problema nos dicen que Daniela parte desde el origen, debemos usar un sistema de coordenadas en el cual la posición inicial de Daniela sea el origen. Segundo, escribimos la ecuación de movimiento de Daniela. La ecuación de movimiento la hallamos en la sección anterior (ecuación 7) así que no es necesario volver a escribirla. Tercero, aplicamos la regla de oro a la ecuación de movimiento de Daniela:

$$x_f = (6\ \text{km/h})t. \tag{10}$$

Con esta información podemos trazar la gráfica de posición contra tiempo. Recordemos que una gráfica de posición contra tiempo con velocidad constante es una línea recta donde la pendiente es la rapidez y el punto de corte con el eje Y es la posición inicial. En este caso, como muestra la ecuación (10), la pendiente es de 6 kilómetros por hora y la posición inicial es cero, así que debemos trazar una gráfica que comience en el origen y cuya pendiente sea de 6 km/h (que la pendiente sea de 6 km/h significa que por cada hora que pase Daniela recorre 6 kilómetros, así que por cada hora que avance la recta en el eje X la recta sube 6 kilómetros en Y):



Trazamos una línea con pendiente de 6 km/h que comienza en el origen. Cada línea vertical representa 1 hora, y cada línea horizontal representa 5 kilómetros. El punto (5,30) representa 5 horas y 30 kilómetros.

El desplazamiento es fácil de calcular con esta gráfica porque podemos ver la posición final e inicial. La gráfica muestra que cuando Daniela ha caminado 5 horas, su posición es de 30 kilómetros en la dirección positiva del eje X. Como su posición inicial es el origen, su desplazamiento en esas 5 horas es

$$(30\text{ km})\hat{x} - (0\text{ km})\hat{x} = (30\text{ km})\hat{x}. \tag{11}$$

La magnitud de este desplazamiento es 30 kilómetros, tal y como esperábamos según la ecuación (3) de la sección (a) y la ecuación (9) de la sección (b).

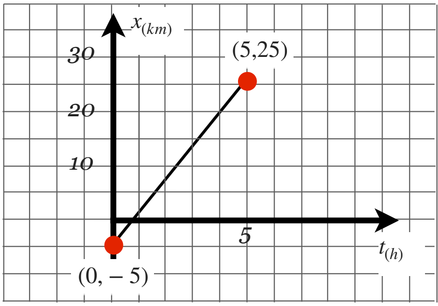
(d) Ahora debemos realizar una gráfica de posición contra tiempo pero para un sistema de coordenadas en el cual Daniela comienza en la posición $-(5\text{ km})\hat{x}$, y la velocidad sigue siendo la misma. Así que la nueva ecuación de movimiento es

$$x_f\hat{x} = (6\text{ km/h})t\hat{x} - \underbrace{(5\text{ km})\hat{x}}_{\vec{x}_i}. \tag{12}$$

Usando la regla de oro, esta ecuación queda así:

$$x_f = (6\text{ km/h})t - (5\text{ km}). \tag{13}$$

La anterior es la ecuación de una línea recta con pendiente de 6 km/h y con el punto de corte en 5 kilómetros negativos. Si graficamos esta recta obtenemos



Trazamos una línea con pendiente de 6 km/h y que corta el eje Y en $Y = -5$. Cada línea vertical representa una hora, y cada línea horizontal representa 5 kilómetros.

Para calcular el desplazamiento con base en esta gráfica, necesitamos identificar la posición final y la inicial. Según esta gráfica, cuando Daniela ha caminado 5 horas su posición es de 25 kilómetros en la dirección positiva de X y su posición inicial es de 5 kilómetros en la dirección negativa de X. Por lo tanto, el desplazamiento es

$$(25 \text{ km})\hat{x} - (-5 \text{ km})\hat{x} = (30 \text{ km})\hat{x}. \tag{14}$$

Notemos que este es el mismo desplazamiento hallado anteriormente; un desplazamiento de magnitud de 30 km en la dirección positiva de X. Esto no nos debería sorprender, pues el desplazamiento sólo depende de la velocidad y del tiempo, y la velocidad y el tiempo son los mismos según ambos sistemas. Si hubiéramos usado un sistema en el cual Daniela caminaba en la dirección negativa de X, entonces el desplazamiento hubiera sido diferente pues la velocidad hubiera sido diferente (hubiera sido negativa en vez de positiva).

Como hemos visto con este ejercicio, es muy importante para resolver problemas de cinemática escribir la ecuación de movimiento, pues con base en esta ecuación podemos hallar las diferentes cantidades que nos piden (la posición final, el desplazamiento, el tiempo, la posición inicial) y, además, con base en esta ecuación realizamos las gráficas de posición contra tiempo. Para escribir la ecuación de movimiento siempre necesitamos escoger un sistema de coordenadas (el sistema nos dirá hacia dónde es positiva la velocidad, y nos dirá cuáles son las posiciones inicial y final del objeto).

Nota 2.10. Claves para resolver problemas de cinemática

Para resolver problemas de cinemática es muy importante seguir los siguientes pasos:

(1) Escoger un sistema de coordenadas o usar el sistema que nos digan en el problema.

(2) Escribir la ecuación de movimiento de los diferentes objetos con base en el sistema elegido antes y con base en los datos conocidos. Si no conocemos ciertos datos (por ejemplo, si no conocemos la velocidad), escribimos la ecuación en términos de variables desconocidas.

(3) Una vez tenemos la ecuación de movimiento de cada objeto, podemos encontrar lo que nos piden usando esas ecuaciones.

Problema 2.8.

Palabras clave: tiempo de encuentro, movimiento rectilíneo uniforme, uso de distintos sistemas de coordenadas.

Dos carros andan en direcciones opuestas, como podemos apreciar en la figura.

(a) Si la distancia que los separa inicialmente es d, si el carro rojo va con rapidez v_a y el azul con rapidez v_r, escriba una expresión para el tiempo en el cual los carros van a pasar uno al lado del otro en términos de la rapidez de cada carro y la distancia que los separa inicialmente.

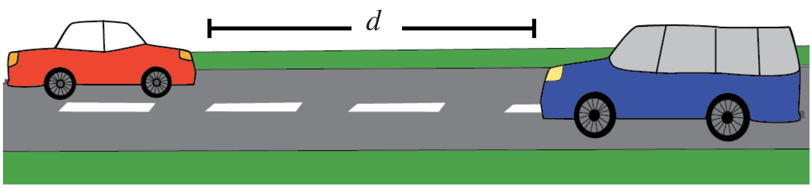
(b) Con base en lo hecho en (a), escriba una expresión para la distancia que ha recorrido cada uno de los carros cuando se encuentran.

(c) Realice (a) y (b) otra vez pero usando un sistema en el cual la dirección de movimiento de los carros sea opuesta a la del sistema escogido en (a).

(d) Suponga ahora que la rapidez del carro rojo es de 40 km/h, la del carro azul 60 km/h y la distancia que los separa inicialmente es de 1 km. Halle el tiempo de encuentro y la distancia recorrida por los carros cuando se encuentran.

(e) En un mismo plano cartesiano, realice una gráfica de posición contra tiempo para ambos carros teniendo en cuenta la información de la sección (d). Realice la gráfica desde el tiempo inicial hasta que ha transcurrido un minuto y convierta las unidades de velocidad a metros por segundos. Comente acerca del punto en que ambas rectas se intersecan.

(f) Con base en la gráfica hecha en (e), explique dónde está el carro azul después de un minuto.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) y (b) La distancia d que separa a los carros inicialmente. La rapidez del carro rojo es v_r y la del azul es v_a. Además, los carros van en direcciones contrarias.

(c) La misma información que en (a) pero, además, nos dicen que la dirección de movimiento de los carros debe ser opuesta a la escogida en (a).

(d), (e) y (f) La rapidez del carro rojo es de 40 km/h, la del azul, 60 km/h, y la distancia inicial que los separa es de un kilómetro. Además, el intervalo de tiempo que debemos tener en cuenta es desde el tiempo cero hasta un minuto.

¿Qué nos piden?

(a) Hallar una expresión para el tiempo en que se encuentran los carros.

(b) Con base en lo hecho en (a), escribir una expresión para la distancia que ha recorrido cada uno de los carros cuando se encuentran.

(c) Realizar (a) y (b) otra vez pero usando un sistema en el cual la dirección de movimiento de los carros es opuesta a la del sistema escogido en (a).

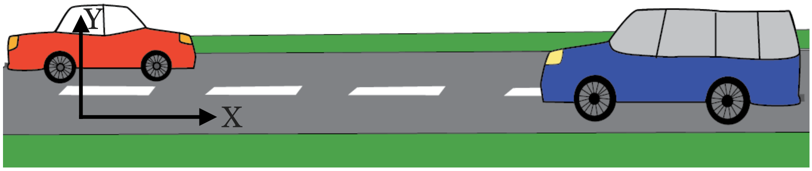
(d) Hallar el tiempo de encuentro y la distancia recorrida por los carros cuando se encuentran.

(e) En un mismo plano cartesiano, realizar una gráfica de posición contra tiempo para ambos carros. Realizar la gráfica desde el tiempo inicial hasta que ha transcurrido 1 minuto. Convertir la velocidad a metros por segundo. Comentar acerca del punto en que se intersecan las rectas de cada carro.

(f) Con base en la gráfica hecha en (e), explicar dónde está el carro azul después de un minuto.

(a) Nos están preguntando por una expresión para el tiempo en el cual se encuentran los carros, así que debemos buscar ecuaciones que relacionen el tiempo con la información que nos dan. Como se dice en la nota 2.10, la clave para resolver problemas de cinemática es escribir las ecuaciones de movimiento de los objetos. Y para plantear las ecuaciones de movimiento debemos comenzar por escoger un sistema de coordenadas. Como en este problema no nos dicen qué sistema usar, podemos escoger el que queramos.

Generalmente, lo más conveniente es usar un sistema de coordenadas en el cual la posición inicial de alguno de los objetos sea el origen (de este modo, la ecuación de movimiento de dicho objeto será más sencilla). En este problema podemos usar un sistema de coordenadas según el cual la posición inicial del carro rojo sea cero. Además, al escoger el sistema nosotros decidimos cuál es la dirección positiva de cada eje. Vamos a escoger un sistema en el cual el carro rojo se mueva en la dirección positiva de X y el carro azul se mueva en la dirección negativa de X:



Según este sistema, el origen está en la posición inicial del carro rojo y la dirección positiva del eje X es la dirección en la que se mueve el carro rojo. El carro azul se mueve en la dirección negativa de X.

Hemos dibujado el eje Y sólo porque así es más fácil indicar el origen, pero los objetos sólo se mueven en X. De hecho, en este capítulo todos los objetos se mueven en una sola dimensión.

Una vez hemos definido el sistema de coordenadas, podemos plantear las ecuaciones de movimiento de los objetos. Según nuestro sistema de coordenadas, la velocidad del carro rojo apunta en el sentido positivo del eje X. Como, según nuestro sistema, la posición inicial es el origen, la ecuación de movimiento del carro rojo será

$$\underbrace{x_r\hat{x}}_{\text{Posición carro rojo}} = v_r t\hat{x} \tag{1}$$

donde $v_r\hat{x}$ hace referencia a la velocidad del carro rojo (su rapidez es v_r) y donde hemos usado $x_r\hat{x}$ para denotar la posición del carro en el tiempo t.

Según nuestro sistema, la posición inicial del carro azul apunta en la dirección positiva de X y su magnitud es d porque inicialmente hay una distancia de d entre ambos carros (como el carro rojo está en el origen, desde el origen hasta el carro azul hay una distancia inicial d). Además, la velocidad del carro azul apunta en el sentido negativo del eje X. Por lo tanto, la ecuación de movimiento del carro azul es

$$\underbrace{x_a\hat{x}}_{\text{Posición carro azul}} = -v_a t\hat{x} + \underbrace{d\hat{x}}_{\text{Posición inicial del carro azul}} \tag{2}$$

donde $-v_a\hat{x}$ es la velocidad del carro azul (el signo menos indica que la dirección en la que se mueve el carro es la dirección negativa de X según el sistema elegido), $x_a\hat{x}$ es la posición en el tiempo t de dicho carro y $d\hat{x}$ la posición inicial.

Una vez tenemos las ecuaciones de movimiento podemos hallar lo que nos piden. El tiempo de encuentro, como su nombre lo indica, *es el tiempo que transcurre desde el momento inicial hasta el momento en que los carros se encuentran*. En el tiempo de encuentro, las posiciones de ambos carros son la misma:

$$x_r\hat{x} = x_a\hat{x}. \tag{3}$$

Si llamamos t_e al tiempo de encuentro e igualamos las posiciones finales dadas por la ecuación de movimiento de ambos objetos, tenemos

$$\underbrace{v_r t_e \hat{x}}_{x_r \hat{x}} = \underbrace{-v_a t_e \hat{x} + d\hat{x}}_{x_a \hat{x}}. \tag{4}$$

(Notemos que hemos escrito las ecuaciones de movimiento usando el tiempo de encuentro t_e). Lo que nos interesa es despejar el tiempo de encuentro t_e. Primero, pasemos el término $-v_a t\hat{x}$ al otro lado de la igualdad:

$$v_r t_e \hat{x} + v_a t_e \hat{x} = d\hat{x}. \tag{5}$$

Ahora apliquemos la regla de oro para manipular más fácilmente la ecuación:

$$v_r t_e + v_a t_e = d. \tag{6}$$

Al sacar factor común de t_e en el término de la izquierda obtenemos

$$t_e(v_r + v_a) = d. \tag{7}$$

Finalmente, dividiendo todo por $(v_r + v_a)$, llegamos a

$$t_e = \frac{d}{(v_r + v_a)}. \tag{8}$$

Según la ecuación (8), cuanto mayor sea la rapidez de los carros menor será el tiempo de encuentro (más rápido se encontrarán), lo que concuerda con el sentido común. Además, cuanto mayor sea la distancia entre ambos, mayor será el tiempo de encuentro, lo que también es evidente.

Nota 2.11. Tiempo de encuentro

El tiempo de encuentro de dos objetos se halla igualando las posiciones finales de los objetos (estas posiciones finales están dadas por la ecuación de movimiento).

(b) Ahora debemos hallar una expresión para la distancia recorrida por ambos carros desde el tiempo inicial hasta que se encuentran. En un movimiento con rapidez constante la distancia recorrida es igual a la rapidez por el tiempo. Por lo tanto, la distancia recorrida para el carro rojo en función del tiempo es

$$d_r = v_r t, \tag{9}$$

donde hemos llamado d_r a la distancia recorrida por el carro rojo. Como nos piden la distancia recorrida por este carro cuando se encuentra con el carro azul, en la ecuación (9) debemos usar el tiempo de encuentro, que ya hallamos con la ecuación (8):

$$d_r = v_r \underbrace{\left(\frac{d}{v_r + v_a}\right)}_{t_e}. \tag{10}$$

La anterior es la distancia recorrida por el carro rojo cuando se encuentra con el carro azul. Es interesante notar que si el carro azul está en reposo (si su velocidad es cero), la ecuación (10) nos dice que $d_r = d$ (pues la rapidez del carro rojo se cancela). Esto tiene sentido, pues si el carro azul está quieto, para que se encuentren ambos carros el carro rojo tiene que recorrer la distancia d que inicialmente lo separaba del carro azul.

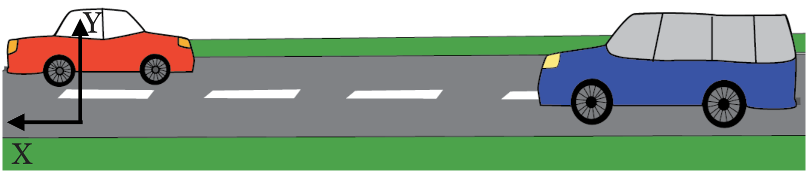
Al hacer el mismo análisis que hicimos para el carro rojo hallamos que la distancia recorrida por el carro azul en el momento en que se encuentra con el carro rojo es igual a

$$d_a = v_a \left(\frac{d}{v_r + v_a}\right), \tag{11}$$

donde hemos usado el hecho de que la distancia recorrida por el carro azul es $d_a = v_a t$.

Claramente las ecuaciones (11) y (10) *no* son iguales. Las distancias recorridas por cada carro dependen de la velocidad de cada uno. El único caso en el que las distancias recorridas son iguales es cuando la rapidez de ambos carros es la misma. El lector puede comprobar esto si usa el hecho de que $v_a = v_r$ en (10) y en (11).

(c) Debemos realizar lo mismo que en (a) y (b) pero usando un sistema de coordenadas en el que invertimos la dirección del eje X. Podemos usar el siguiente sistema:



Según este sistema, el origen está en la posición inicial del carro rojo y la dirección positiva del eje X es la dirección en la que se mueve el carro azul. El carro rojo se mueve en la dirección negativa de X.

La ecuación de movimiento del carro rojo ahora será

$$x_r\hat{x} = -v_r t\hat{x}, \tag{12}$$

donde el signo menos de la velocidad indica que este carro se mueve en el sentido negativo de X.

Según este sistema, el carro azul se mueve en la dirección positiva de X así que su velocidad es positiva. Además, la posición inicial del carro azul es negativa (está en la parte negativa del eje X) y, como antes, la magnitud de esta posición inicial es d (la distancia inicial entre ambos carros no depende del sistema). Según lo anterior, la ecuación de movimiento del carro azul es

$$x_a\hat{x} = v_a t\hat{x} - d\hat{x}. \tag{13}$$

Como buscamos el tiempo de encuentro, igualamos la ecuación de movimiento de ambos carros y de nuevo llamamos t_e al tiempo de encuentro:

$$\underbrace{-v_r t_e\hat{x}}_{x_r\hat{x}} = \underbrace{v_a t_e\hat{x} - d\hat{x}}_{x_a\hat{x}}. \tag{14}$$

Si movemos el término $v_a t\hat{x}$ al otro lado de la igualdad, obtenemos

$$-v_r t_e\hat{x} - v_a t_e\hat{x} = -d\hat{x}. \tag{15}$$

Notemos que la ecuación (15) es igual a la ecuación (5), pues si multiplicamos todos los términos de la ecuación (15) por -1 obtenemos la ecuación (5):

$$v_r t_e\hat{x} + v_a t_e\hat{x} = d\hat{x}. \tag{16}$$

Como ambas ecuaciones son iguales, los cálculos siguientes van a dar exactamente lo mismo —repetimos todo desde la ecuación (5) hasta la ecuación (8)—, así que el resultado para el tiempo de encuentro será el mismo que antes:

$$t_e = \frac{d}{(v_r + v_a)}. \tag{17}$$

Como el tiempo de encuentro es el mismo que el hallado en (a), y como la rapidez de ambos carros es la misma que en (a) (la rapidez no depende del sistema de coordenadas), entonces *la distancia recorrida por ambos carros en el momento de encuentro será la misma que en (a)*. Por eso, no es necesario calcular de nuevo la distancia recorrida por ambos carros, pues será la misma hallada antes: ecuaciones (10) y (11).

Este es un ejemplo más de que si nos preguntan alguna magnitud escalar, como el tiempo, la distancia o la rapidez, no importa qué sistema usemos, el resultado será igual (nota 2.3)[6].

[6] Como se explicó antes (nota 2.3), esto sólo es cierto si consideramos sistemas de referencia que no se mueven entre sí, pues si se movieran la rapidez medida con respecto a un sistema sería diferente de la rapidez medida en el otro.

(d) Ahora debemos hallar el tiempo de encuentro y la distancia recorrida para cada carro si el carro rojo tiene una rapidez de 40 km/h, el azul de 60 km/h, y la distancia inicial entre ambos es de 1 kilómetro. Lo único que debemos hacer es aplicar los resultados de (a) y (b). Si usamos la ecuación (17) con esta información, nos damos cuenta de que el tiempo de encuentro será

$$t_e = \frac{1 \text{ km}}{(40 \text{ km/h} + 60 \text{ km/h})} = \frac{1}{100} \text{ h} = 0.01 \text{ h}. \tag{18}$$

Es decir, los carros se encuentran cuando han transcurrido 0.01 horas. Como una hora son 3600 segundos, entonces el tiempo de encuentro es de 0.01 h × 3600 s/h = 36 s. Cuando han pasado 36 segundos, los carros se encuentran.

La distancia recorrida por el carro rojo en el momento de encuentro se puede calcular usando la ecuación (10):

$$d_r = 40 \text{ km/h} \left(\frac{1 \text{ km}}{40 \text{ km/h} + 60 \text{ km/h}} \right) = 0.4 \text{ km}. \tag{19}$$

El carro rojo se encuentra con el carro azul después de haber recorrido 0.4 km, o 400 metros. Para el carro azul tenemos

$$d_a = 60 \text{ km/h} \left(\frac{1 \text{ km}}{60 \text{ km/h} + 40 \text{ km/h}} \right) = 0.6 \text{ km}. \tag{20}$$

El carro azul alcanza a recorrer 0.6 km (o 600 metros) antes de encontrarse con el carro rojo.

(e) Para hacer la gráfica de posición contra tiempo de ambos carros, debemos seguir los pasos indicados en la nota 2.9. Primero escojamos el sistema de coordenadas usado en (a), según el cual el carro rojo comienza en el origen y se mueve en la dirección positiva del eje X. En segundo lugar debemos escribir su ecuación de movimiento. Según la ecuación (1), su ecuación de movimiento es

$$x_r \hat{x} = v_r t \hat{x}. \tag{21}$$

Además, nos dicen que la rapidez del carro rojo es de 40 km/h así que esta ecuación queda

$$x_r \hat{x} = (40 \text{ km/h}) t \hat{x}. \tag{22}$$

Nos dicen que convirtamos esta velocidad a metros por segundo. Es claro que 40 km/h es lo mismo que 40 000 m/h (el carro recorre 40 000 metros por hora).

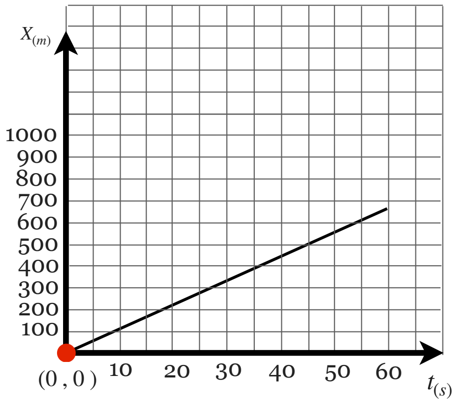
Además, si en una hora recorre 40 000 m, entonces en un segundo recorre 40 000/3600 m. Por lo tanto, 40 km/h es igual a

$$(40\ \text{km/h}) = (40000/3600)\ \text{m/s} = (400/36)\ \text{m/s} = (11.11)\ \text{m/s}. \qquad (23)$$

En palabras, el carro rojo recorre 400 metros cada 36 segundos. Si aplicamos la regla de oro a la ecuación (22) obtenemos

$$x_r = (11.11\,\text{m/s})\,t. \qquad (24)$$

Por lo tanto, la gráfica de posición contra tiempo para el carro rojo es una línea recta con pendiente de (11.11) m/s que comienza en el origen (su punto de corte con el eje Y es cero).



Gráfica de posición contra tiempo para el carro rojo. Comienza en el origen y su pendiente es de 11,11 m/s.

Sobre esta misma gráfica debemos trazar la gráfica del carro azul. Según el sistema de coordenadas escogido, la posición inicial del carro azul apunta en la dirección positiva de X y su magnitud es 1 km (pues nos dicen que entre él y el carro rojo hay un 1 kilómetro inicialmente). Además, su rapidez es de 60 km/h y se mueve en la dirección negativa de X. Por lo tanto, su ecuación de movimiento, ecuación (4), es

$$x_a\hat{x} = -(60\ \text{km/h})\,t\hat{x} + (1\ \text{km})\hat{x}. \qquad (25)$$

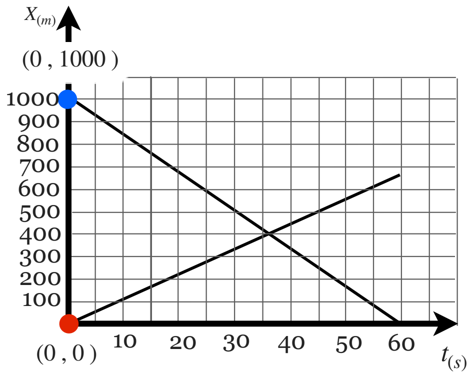
Debemos convertir su velocidad a metros por segundo. 60 km/h es lo mismo que 60 000 m/h, y es lo mismo que (60 000/3600) m/s:

$$(60\ \text{km/h}) = (60000/3600)\ \text{m/s} = (600/36)\ \text{m/s} = (16.66)\ \text{m/s} \qquad (26)$$

Es decir, el carro azul recorre 600 metros cada 36 segundos. Con estas unidades la ecuación de movimiento del carro azul queda

$$x_a\hat{x} = -(16.66\ \text{m/s})\,t\hat{x} + (1000\ \text{m})\hat{x} \qquad (27)$$

Esta es la ecuación de una línea recta con pendiente negativa de 16.66 m/s y que corta al eje Y cuando $Y = 1000$ m. Si trazamos esta gráfica sobre la gráfica del carro rojo, obtenemos



La gráfica del carro azul tiene pendiente negativa de 16.66 m/s y corta al eje Y en el punto (0,1000).

En la gráfica podemos ver que hay un punto en el cual ambas rectas se interceptan. Este punto de intersección corresponde al momento en el que los carros se encuentran. En la gráfica podemos corroborar que el tiempo de encuentro corresponde a 36 segundos (aunque en la gráfica no se puede ver de forma muy exacta por el tamaño de la escala), tal como habíamos calculado con la ecuación (18). Además, según la gráfica, la posición en la que se encuentran los carros es 400 metros en la dirección positiva de X. Esto coincide con el hecho de que el carro rojo que comienza en el origen había recorrido 400 metros hasta el tiempo en que se encuentra con el carro azul: ecuación (19).

Por otra parte, en la gráfica se puede ver que el carro azul comienza 1000 metros en la dirección positiva de X y se encuentra con el otro carro 400 metros en la dirección positiva de X, así que ha recorrido 600 metros. Esto coincide con la ecuación (20).

(f) Según la gráfica hecha en (e), cuando ha pasado un minuto (60 segundos), el carro azul llega al origen (a la posición $0\hat{x}$). Esto era de esperarse a partir de su ecuación de movimiento: ecuación (25); si el carro anda a 60 km/h, en una hora recorre 60 km, así que en un minuto recorre 1 km. Como estaba 1 km alejado del origen y se mueve hacia el origen, entonces al cabo de un minuto habrá llegado allí. Si en la ecuación (25) usamos un tiempo de 1/60 h (que equivale a un minuto), obtenemos

$$x_a\hat{x} = -(60\text{ km/h})\left(\frac{1}{60}\text{ h}\right)\hat{x} + (1\text{ km})\hat{x} = (0\text{ km})\hat{x}. \qquad (28)$$

Nota 2.12. Punto de intersección en una gráfica de posición contra tiempo

Si realizamos una gráfica de posición contra tiempo para varios objetos en un mismo sistema de coordenadas, el punto donde se intersecan las gráficas va a corresponder al punto en el que se encuentran los objetos. Este punto nos da la información de la ubicación y el tiempo en que se encuentran los objetos.

Problema 2.9.

Palabras clave: razón entre la rapidez de dos objetos, tiempo de encuentro, gráfica de posición contra tiempo, gráfica de velocidad contra tiempo, área encerrada en gráfica de velocidad contra tiempo.

María camina en línea recta por la acera con rapidez constante. Carolina camina detrás de María, también con rapidez constante. María pasa por un café a las 3:20 p. m. y Carolina pasa por ese mismo café a las 3:24 p. m. Si a las 3:30 p. m. Carolina alcanza a María:

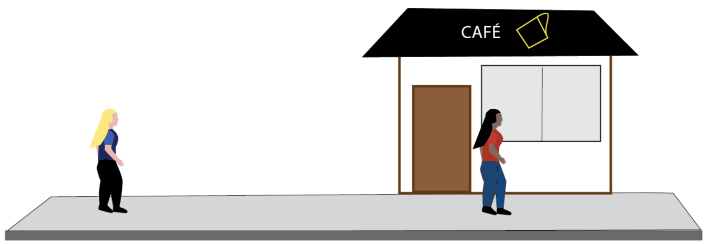
(a) ¿Cuál es la razón entre la rapidez de María y la de Carolina?

(b) Con base en el resultado de (a), y suponiendo que María estaba caminando a 0.5 m/s, diga cuál es el desplazamiento de Carolina hasta que alcanza a María (puede usar el sistema que desee). Cuando obtenga fracciones no las aproxime a decimales, déjelas en su forma original hasta el resultado final (por ejemplo, use 2/3 en vez de 0.666).

(c) Realice una gráfica de posición contra tiempo para ambas personas en un mismo plano cartesiano desde las 3:20 p. m. hasta las 3:30 p. m. teniendo en cuenta lo hallado en (b).

(d) Explique cómo realizar una gráfica de velocidad contra tiempo.

(e) Con base en lo anterior, realice una gráfica de velocidad contra tiempo para María y Carolina, desde las 3:20 p. m. hasta las 3:30 p. m. Calcule el área que hay entre la línea de la velocidad y el eje del tiempo para cada gráfica.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) María y Carolina caminan en línea recta y con rapidez constante. María pasa por un café a las 3:20 p. m. y Carolina pasa por el mismo café a las 3:24 p. m. A las 3:30 p. m. Carolina alcanza a María. Nos piden dejar las fracciones en su forma original, sin escribirlas en su expansión decimal.

(b) y (c) María camina a 0.5 m/s, y podemos usar lo hallado en (a).

(d) Es una pregunta teórica (no necesita información).

(e) Podemos usar la información de las secciones anteriores.

¿Qué nos piden?

(a) La razón entre la rapidez de María y Carolina.

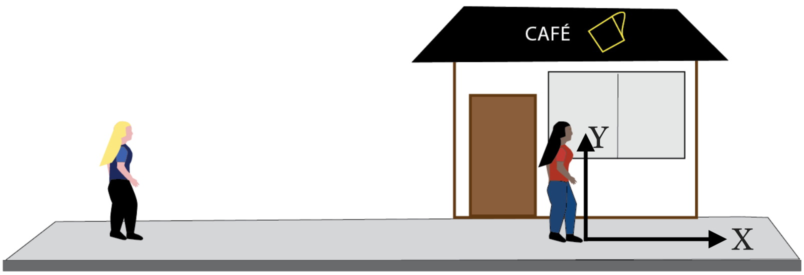
(b) El desplazamiento de Carolina hasta que alcanza a María.

(c) Realizar una gráfica de posición contra tiempo para María y Carolina desde las 3:20 p. m. hasta las 3:30 p. m. (en un mismo plano cartesiano).

(d) Explicar cómo realizar una gráfica de velocidad contra tiempo si la velocidad es constante.

(e) Realizar una gráfica de velocidad contra tiempo para María y Carolina, desde las 3:20 p. m. hasta las 3:30 p. m. Calcular el área que hay entre la línea de la velocidad de cada gráfica y el eje del tiempo.

(a) Empecemos por escoger un sistema de coordenadas. Como no nos sugieren ningún sistema podemos escoger el que deseemos. Un sistema conveniente sería uno en el cual la posición inicial de María o de Carolina fuera el origen del sistema. Por ejemplo, escojamos uno en el cual el origen esté en el lugar del café y en el cual ambas personas caminan en la dirección positiva del eje X:



Usamos un sistema cuyo origen está en el café, y cuya dirección positiva del eje X es la dirección en que caminan María y Carolina.

Queremos hallar la razón entre la rapidez de ambas mujeres, así que necesitamos hallar la velocidad de cada una (recuerde que la rapidez es la magnitud de la velocidad). Para hallar la velocidad de cada una, empecemos por plantear las ecuaciones de movimiento. Como ambas caminan en línea recta y con rapidez constante, sus ecuaciones de movimiento son de la forma

$$\vec{x}_f = \vec{v}t + \vec{x}_i. \tag{1}$$

En el caso de Carolina, su posición inicial según nuestro sistema apunta en la dirección negativa del eje X. Llamemos d a la distancia a la que se encuentra Carolina del origen cuando María pasa por el café, y v_c su rapidez (la distancia d y la rapidez v_c son variables desconocidas). Entonces, su ecuación de movimiento se puede escribir como

$$x_c\hat{x} = v_c t\hat{x} - d\hat{x}, \tag{2}$$

donde se puede apreciar que la velocidad es positiva según el sistema que elegimos.

Como María comienza en el origen según nuestro sistema, su posición inicial es $0\hat{x}$. Podemos llamar v_m a su rapidez (no la conocemos). Teniendo en cuenta esto, la ecuación de movimiento de María será

$$x_m\hat{x} = v_m t\hat{x}. \tag{3}$$

Cuidado: cuando decimos que según el sistema la posición inicial de María es el café (que está en $0\hat{x}$), no queremos decir que María comenzó a caminar en el café, pues María estaba caminando desde antes. Lo que esto quiere decir es que vamos a analizar el movimiento de María desde el momento en que pasa por el café. Otra persona puede analizar el problema desde un tiempo anterior, por ejemplo, alguien puede decir que quiere analizar el problema desde el momento en que María está a 5 minutos de llegar al café. Para esa persona, cuando María pasa por el café ya habrán pasado 5 minutos y la posición inicial de María no será el café. Las ecuaciones de movimiento serán diferentes (la posición inicial y el tiempo) pero los resultados al final serán los mismos, pues ni la rapidez ni el tiempo transcurrido dependen del sistema escogido.

Nota 2.13. : ¿Qué es escoger un sistema de coordenadas?

Escoger un sistema de coordenadas es escoger cuál es el origen del sistema, cuál es la dirección positiva de los ejes y cuál es el tiempo inicial.

Ya tenemos las ecuaciones de movimiento de María y de Carolina en términos de variables desconocidas. No conocemos ni la velocidad ni la distancia que hay entre Carolina y el origen en el tiempo inicial. Sin embargo, todavía no hemos usado toda la información que nos dan. Nos dicen que María pasa por el café a las 3:20 p. m. y después Carolina pasa por el café a las 3:24 p. m. Esto quiere decir que en cuatro minutos Carolina recorrió la distancia d que la separaba del café. Como distancia es igual a rapidez por tiempo, podemos escribir

$$d = v_c t. \tag{4}$$

Si usamos el hecho de que el tiempo son 4 minutos, obtenemos

$$d = v_c(4\ \text{min}). \tag{5}$$

Podemos usar este resultado en la ecuación (2) para escribir de nuevo la ecuación de movimiento de Carolina con la nueva información:

$$x_c\hat{x} = \vec{v}_c t\hat{x} - \underbrace{(v_c(4\ \text{min}))}_{d}\hat{x}. \tag{6}$$

Ahora usemos el hecho de que a las 3:30 p. m. Carolina alcanza a María. Como vimos en el problema 2.7 (nota 2.11), cuando dos objetos se encuentran podemos igualar la posición final de ambos (lo cual equivale a igualar sus ecuaciones de movimiento):

$$\underbrace{v_m t\hat{x}}_{x_m\hat{x}} = \underbrace{v_c t\hat{x} - (v_c(4\ \text{min}))\hat{x}}_{x_c\hat{x}}. \tag{7}$$

Además, desde que María pasa por el café a las 3:20 hasta que se encuentra con Carolina a las 3:30 transcurren 10 minutos (recordemos que el tiempo inicial que escogimos es el momento en el cual María pasa por el café). Si usamos un tiempo de 10 minutos en la ecuación (7), obtenemos

$$v_m(10\ \text{min})\hat{x} = v_c(10\ \text{min})\hat{x} - (v_c(4\ \text{min}))\hat{x}. \tag{8}$$

Si sumamos los términos a la derecha obtenemos

$$v_m(10\ \text{min})\hat{x} = v_c(6\ \text{min})\hat{x}. \tag{9}$$

Recordemos que necesitamos obtener la razón entre la rapidez de María y la de Carolina. Es decir, necesitamos encontrar

$$\frac{v_m}{v_c}. \tag{10}$$

Esto lo podemos encontrar con la ecuación (9). Primero apliquemos la regla de oro a la ecuación (9):

$$v_m(10\ \text{min}) = v_c(6\ \text{min}). \tag{11}$$

Ahora dividamos por 10 minutos a ambos lados:

$$v_m = \frac{v_c(6\text{ min})}{(10\text{ min})}. \tag{12}$$

Finalmente, dividamos por v_c:

$$\frac{v_m}{v_c} = \frac{(6\text{ min})}{(10\text{ min})} = 0.6. \tag{13}$$

Es decir, la rapidez de María es 0.6 veces la rapidez de Carolina (casi la mitad), lo cual tiene sentido porque Carolina la alcanza.

(b) Nos dicen que María está caminando a 0.5 m/s, y con base en eso y a lo hallado en (a) debemos encontrar el desplazamiento de Carolina desde las 3:20 hasta las 3:30. Para hallar el desplazamiento, debemos encontrar la posición final y restarle la posición inicial. Y para hallar la posición final, necesitamos usar la ecuación de movimiento de Carolina.

No nos dicen cuál es la rapidez de Carolina, pero en (a) encontramos la razón entre la rapidez de María y Carolina (ecuación 13). Por lo tanto, usando esa razón y usando el hecho de que la rapidez de María es de 0.5 m/s, podemos encontrar la rapidez de Carolina:

$$\frac{\overbrace{0.5\text{ m/s}}^{v_m}}{v_c} = 0.6. \tag{14}$$

Si multiplicamos por v_c y dividimos por 0.6 a ambos lados, obtenemos

$$(0.5/0.6)\text{ m/s} = (5/6\text{ m/s}) = v_c. \tag{15}$$

Nótese que hemos dejado el resultado en fracciones como nos piden en el enunciado. Como era de esperarse, esta rapidez es mayor que la de María (5/6 es aproximadamente 0.83 m/s). Ahora usemos esto en la ecuación de movimiento de Carolina (ecuación 6):

$$x_c\hat{x} = (5/6\text{ m/s})\,t\hat{x} - (5/6\text{ m/s})(4\text{ min})\hat{x}. \tag{16}$$

Debemos tener cuidado con las unidades. Como la velocidad está en metros sobre segundo, debemos convertir 4 minutos a segundos. 4 minutos son 60×4 segundos, es decir, 240 segundos:

$$x_c\hat{x} = (5/6\text{ m/s})t\hat{x} - (5/6\text{ m/s})(240\text{ s})\hat{x}. \tag{17}$$

Al operar al lado derecho obtenemos

$$x_c\hat{x} = (5/6\ \mathrm{m/s})t\hat{x} - (200\ \mathrm{m})\hat{x}, \tag{18}$$

de donde queda claro que la posición inicial de Carolina es $-(200\ \mathrm{m})\hat{x}$. Entre las 3:20 y las 3:30 han pasado 10 minutos, o sea, 600 segundos. Si usamos esto en la ecuación anterior, podemos saber cuál es la posición de Carolina a las 3:30, cuando encuentra a María:

$$x_c\hat{x} = (5/6\ \mathrm{m/s})(600\ \mathrm{s})\hat{x} - (200\ \mathrm{m})\hat{x} = (300\ \mathrm{m})\hat{x}. \tag{19}$$

Así, la posición de Carolina cuando encuentra a María es $(300\ \mathrm{m})\hat{x}$. Si restamos la posición final, que es $(300\ \mathrm{m})\hat{x}$, a la inicial, que es $-(200\ \mathrm{m})\hat{x}$, obtenemos el desplazamiento de Carolina:

$$\underbrace{(300\ \mathrm{m})\hat{x}}_{\vec{x}_f} - \underbrace{(-200\ \mathrm{m})\hat{x}}_{\vec{x}_i} = (500\ \mathrm{m})\hat{x}. \tag{20}$$

Otro método: otra forma de calcular el desplazamiento sin necesidad de buscar la posición final e inicial es usando la definición de velocidad:

$$\vec{v} = \frac{\vec{D}}{t}. \tag{21}$$

De esto obtenemos

$$t\vec{v} = \vec{D}. \tag{22}$$

Si usamos el hecho de que la velocidad de Carolina es de 5/6 m/s en dirección positiva de X, y el tiempo es de 600 segundos, obtenemos

$$(600\ \mathrm{s})(5/6\ \mathrm{m/s})\hat{x} = (500\ \mathrm{m})\hat{x} = \vec{D}. \tag{23}$$

De aquí se deduce que la distancia recorrida (la magnitud del desplazamiento) por Carolina es 500 metros.

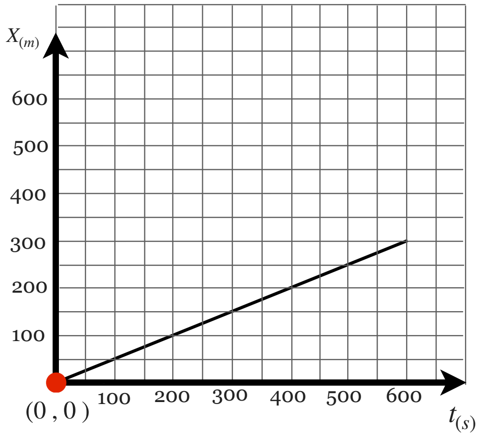
(c) Ahora debemos hacer una gráfica de posición contra tiempo para María y Carolina. Como ya tenemos un sistema de coordenadas, podemos escribir directamente las ecuaciones de movimiento. Si usamos el hecho de que la rapidez de María es de 0.5 m/s en su ecuación de movimiento (ecuación 3), tenemos

$$x_m\hat{x} = \underbrace{(0.5\ \text{m/s})}_{v_m}\, t\hat{x}. \tag{24}$$

Aplicando la regla de oro, obtenemos

$$x_m = (0.5\ \text{m/s})\, t. \tag{25}$$

Esta es la ecuación de una línea recta, con pendiente de 0.5 m/s, y que pasa por el origen:

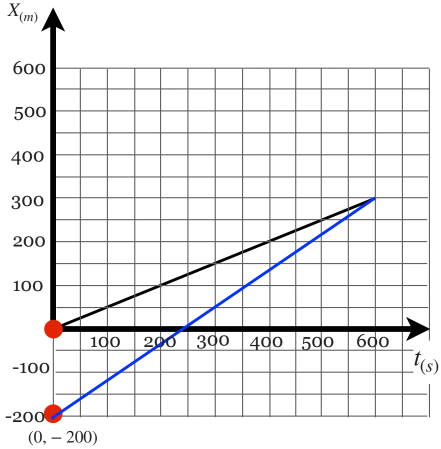


Gráfica de posición contra tiempo para María. Comienza en el origen y su pendiente es de 0.5 m/s.

La ecuación (18) nos da la ecuación de movimiento de Carolina (no usamos la ecuación (19) porque queremos la ecuación para cualquier tiempo t, no para un tiempo particular). Si le aplicamos la regla de oro a esa ecuación, obtenemos

$$x_c = (5/6\ \text{m/s})\, t - (200\ \text{m}). \tag{26}$$

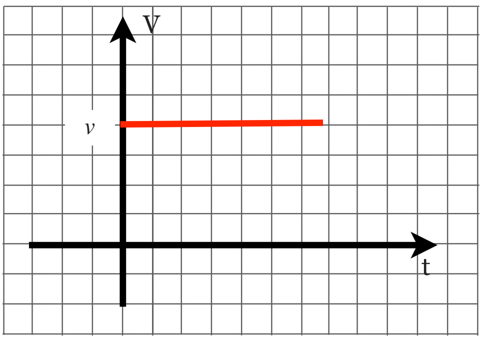
Esta es la ecuación de una línea recta con pendiente de 5/6 m/s, y que corta el eje Y en −200 m. Hacer una línea con pendiente de 5/6 a mano no es tan fácil, pero podemos aprovechar que sabemos en qué punto Carolina se encuentra con María. Eso sucede cuando han pasado 10 minutos, es decir, 600 segundos. En ese momento, las dos líneas rectas se deben intersecar (ver nota 2.12). Por lo tanto, es muy fácil trazar la línea de Carolina, pues sólo debemos unir el punto (0,−200) (la posición inicial) con el punto (600, 300) que es cuando se encuentran ambas rectas (María está en la posición $300\hat{x}$ cuando han pasado 600 segundos, como muestra la figura anterior):



La gráfica de posición contra tiempo para Carolina está en azul. Corta el eje Y en −200 metros, y su pendiente es de 5/6 m/s.

Notemos que la recta azul tiene una pendiente más inclinada que la recta negra, lo que indica que la rapidez de Carolina es mayor que la de María. Además, notemos que el desplazamiento total de María desde el café hasta que se encuentra con Carolina es de 300 metros en la dirección positiva de X. Por otro lado, se ve que el desplazamiento de María es de 500 metros en la dirección positiva de X (desde −200 hasta 300). Esto concuerda con lo hallado en la sección (b).

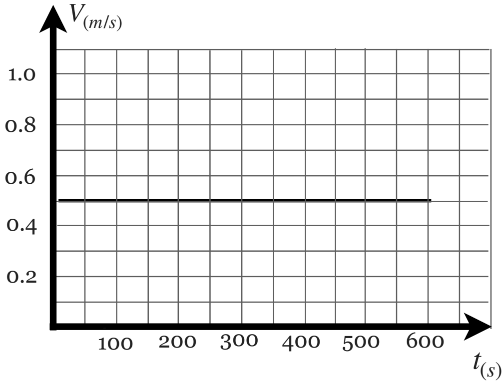
(d) Hacer una gráfica de velocidad contra tiempo con velocidad constante es muy sencillo. Como la velocidad es constante, la velocidad en cierto instante es igual a la velocidad 10 minutos después, o 100 minutos o 5 horas después. Si la velocidad no cambia en función del tiempo, entonces la gráfica de la velocidad es una línea horizontal:



En un movimiento de velocidad constante, una gráfica de velocidad contra tiempo es una línea horizontal.

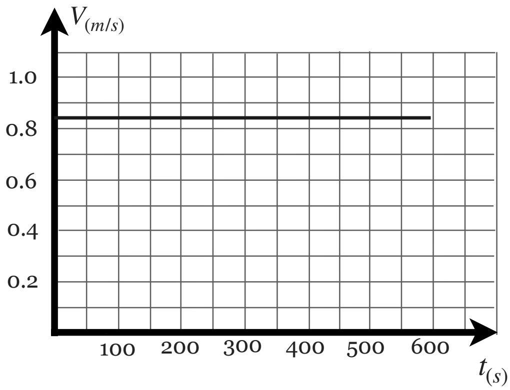
¿Dónde debemos poner la línea? Eso depende de la velocidad. Si la velocidad es, por ejemplo, $(5\ \text{m/s})\hat{x}$ entonces la línea corta el eje Y en 5 m/s en la dirección positiva. Si la velocidad es de $-(5\ \text{m/s})\hat{x}$, entonces la línea corta el eje Y en −5.

(e) Para hacer la gráfica de María y Carolina sólo necesitamos conocer sus velocidades. La velocidad de María es de 0.5 m/s en el sentido positivo de X y la de Carolina es 5/6 m/s (0.83 m/s aproximadamente) también en el sentido positivo de X. Por lo tanto, la gráfica de María es



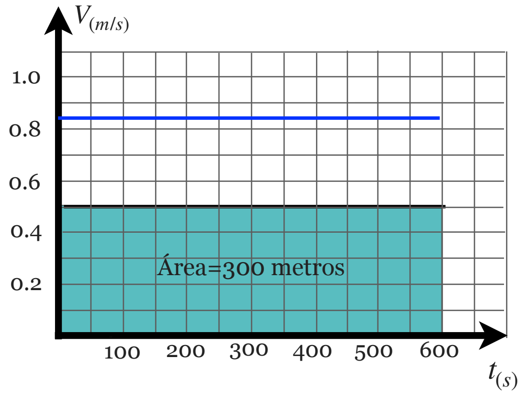
Gráfica de velocidad contra tiempo para María. Corta el eje Y en 0.5 m/s.

La gráfica de velocidad contra tiempo de Carolina sería



Gráfica de velocidad contra tiempo para Carolina. Corta el eje Y en 5/6 m/s.

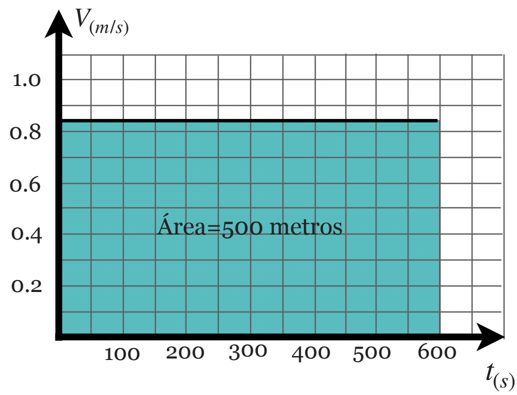
El área entre la línea de la velocidad de María y el eje X es el área de un rectángulo:



El área entre la línea de la velocidad y el eje X es el área de un rectángulo de largo 600 segundos y ancho 0.5 m/s. Es decir, su área es 0.5 m/s por 600 segundos, que es igual a 300 metros.

Como se muestra en la figura, la anterior es un área de 300 metros. ¡Esa es la distancia recorrida por María desde el café hasta que se encuentra con Carolina! Esto no es una simple coincidencia. Notemos que la base del rectángulo es el tiempo y la altura es la rapidez. Por lo tanto, al sacar el área estamos multiplicando la rapidez por el tiempo, y eso es igual a la distancia: $vt = d$.

Si calculamos el área entre la línea de la velocidad y el eje X para Carolina, obtenemos

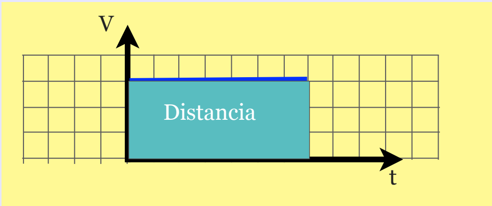


El área entre la línea de la velocidad y el eje X es el área de un rectángulo de largo 600 segundos y ancho 5/6 m/s. Es decir, su área es 500 metros.

El área nos dio 500 metros, que es precisamente la distancia que recorre Carolina desde las 3:20 p. m. hasta las 3:30 p. m. (tal como hallamos con la ecuación 23). De nuevo, esto no es coincidencia, pues, como ya dijimos, para calcular el área del rectángulo estamos multiplicando la base, que es el tiempo, por la altura, que es la rapidez. Y rapidez por tiempo es distancia.

Nota 2.14. : Área encerrada entre el eje X y la línea de velocidad

El área encerrada entre el eje X y la línea de la velocidad en una gráfica de velocidad contra tiempo es igual a la distancia recorrida por el objeto. Como veremos más adelante, esto funciona también para casos en los cuales la velocidad no es constante y para casos de velocidades negativas.



Problema de repaso 2.10.

Palabras clave: rapidez, intersección de líneas de posición contra tiempo, velocidad constante, área encerrada en una gráfica de velocidad contra tiempo.

Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

1. Puede darse un caso en el que para una persona un carro tiene rapidez negativa y para otra el carro tiene rapidez positiva.
2. Si las líneas de posición contra tiempo de dos objetos se intersecan, entonces los objetos se encuentran.
3. Si un objeto no se mueve en línea recta, su velocidad no es constante.
4. Cuanto mayor sea el área encerrada entre la línea de la velocidad y el eje X en una gráfica de velocidad contra tiempo, mayor es el desplazamiento del objeto.
5. Si un carro no tiene velocidad constante, la recta de velocidad en una gráfica de velocidad contra tiempo será paralela al eje del tiempo.

Solución

1. Falso. La rapidez siempre es positiva. Lo que sí puede suceder es que para una persona la velocidad sea negativa y para otra persona sea positiva.

2. Verdadero. El punto en el que ambas líneas se encuentran es precisamente el punto en el que ambos objetos se encuentran (nota 2.12).

3. Verdadero. Si un objeto no se mueve en línea recta, entonces la dirección de la velocidad está cambiando; y si la dirección de un vector cambia, el vector cambia (nota 2.5).

4. Falso. Cuanto mayor sea el área mayor será la distancia, pero no el desplazamiento, pues el desplazamiento puede ser negativo y encerrar un área muy grande. Por ejemplo, si la velocidad es muy negativa, el desplazamiento será muy negativo pero el área encerrada entre la línea de la velocidad y el eje del tiempo (eje X) será muy grande.

5. Falso. La recta de velocidad en una gráfica de velocidad contra tiempo será una línea paralela al eje del tiempo solamente si la velocidad es constante.

Problema 2.11.

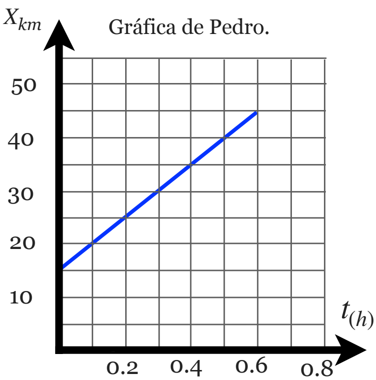
Palabras clave: gráfica de posición contra tiempo, uso de diferentes sistemas de coordenadas, escribir ecuación de movimiento, gráfica de velocidad contra tiempo.

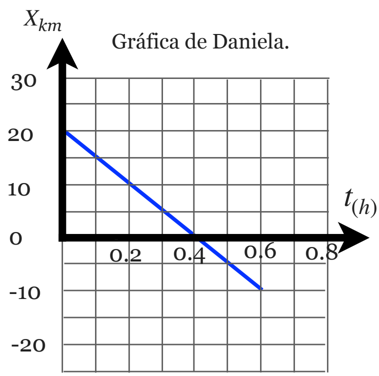
Pedro realizó una gráfica de posición contra tiempo para un bus que se mueve con velocidad constante. Daniela realizó una gráfica de posición contra tiempo para el mismo bus.

(a) Según las gráficas, explique qué sistema de coordenadas usó Pedro y qué sistema usó Daniela y escriba la ecuación de movimiento del bus según Pedro y Daniela.

(b) Según lo anterior, ¿cómo sería la gráfica de velocidad para Pedro y para Daniela?

(c) Usando la gráficas de velocidad del punto anterior, diga cuánta distancia recorrió el bus en 24 minutos según Pedro y Daniela.





Solución

¿Qué información nos dan?

Para todos los numerales nos dan gráficas de posición contra tiempo hechas por Pedro y Daniela.

¿Qué nos piden?

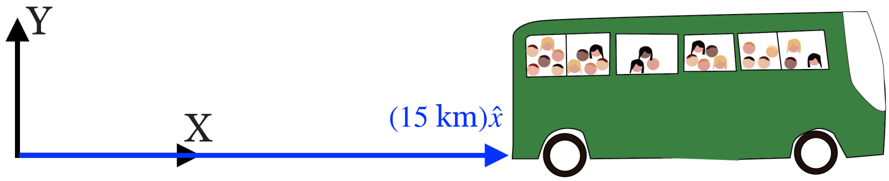
(a) Explicar qué sistema de coordenadas usaron Daniela y Pedro, y escribir las ecuaciones de movimiento del bus según esos sistemas.

(b) Realizar la gráfica de velocidad del bus según Pedro y Daniela.

(c) De acuerdo al numeral (b), decir cuánta distancia recorrió el bus en 24 minutos.

a) Necesitamos inferir qué sistema de coordenadas usaron Pedro y Daniela. Empecemos por analizar la gráfica de Pedro.

Según la gráfica de Pedro, la posición inicial del bus es $x_i\hat{x} = (15\text{ km})\hat{x}$. Por lo tanto, Pedro usó un sistema de coordenadas según el cual el bus inicialmente estaba a una distancia de 15 km en el sentido positivo del eje X. Además, la pendiente de la línea es positiva, lo que indica que la velocidad del bus según Pedro es positiva. Esto quiere decir que el bus se mueve en la dirección positiva del eje X. Sólo con esta información, ya sabemos que Pedro usó el siguiente sistema de coordenadas:



Para escribir la ecuación de movimiento del bus según el sistema de Pedro, necesitamos saber la velocidad del bus. Esta velocidad se puede inferir a partir de la pendiente de la gráfica de posición contra tiempo. La magnitud de la pendiente nos indica la rapidez, y el signo de la pendiente nos indica la dirección de la velocidad.

Recordemos que la pendiente se calcula tomando dos puntos cualesquiera por los que pasa la línea, y calculando la razón entre la diferencia en Y de ambos puntos, y la diferencia en X de ambos puntos. Por ejemplo, si escogemos los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{1}$$

Si la ecuación (1) nos da positiva, la pendiente es positiva, si nos da negativa, la pendiente es negativa. Si realizamos esta operación para la gráfica de posición contra tiempo de Pedro, tomando los puntos inicial y final (podemos tomar otros puntos si queremos), obtenemos

$$v = \frac{45\text{ km} - 15\text{ km}}{0.6\text{ h} - 0\text{ h}} = \frac{30\text{ km}}{0.6\text{ h}} = 50\text{ km/h}. \tag{2}$$

Como el resultado nos dio positivo, la velocidad es positiva:

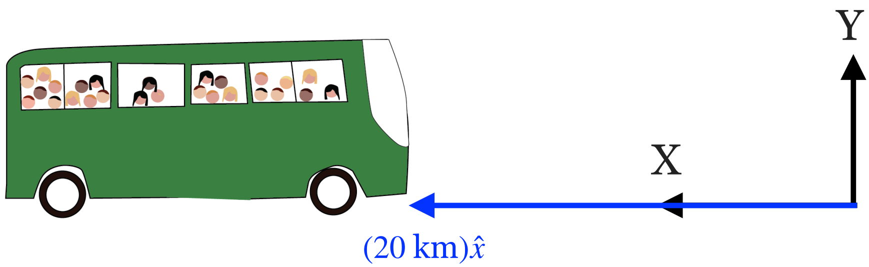
$$\vec{v} = (50\text{ km/h})\hat{x}. \tag{3}$$

Una vez tenemos la velocidad y la posición inicial del bus, podemos escribir la ecuación de movimiento para el bus según el sistema de Pedro:

$$x_p\hat{x} = \underbrace{(50\ \text{km/h})}_{v}\, t\hat{x} + \underbrace{(15\ \text{km})\hat{x}}_{\vec{x}_i}, \tag{4}$$

donde x_p tiene el subíndice p para recordarnos que esta es la ecuación según Pedro.

En el caso de Daniela, de su gráfica podemos inferir que la posición inicial del bus es $x_i\vec{x} = (20\ \text{km})\hat{x}$. Además, la pendiente de la gráfica es negativa, lo que significa que el bus se está moviendo en la dirección negativa del eje X. Por lo tanto, debemos construir un sistema de coordenadas según el cual la posición inicial sea de 20 km en el sentido positivo de X, y según el cual el bus se esté moviendo en la dirección negativa de X. Ese sistema sería el siguiente:



Ahora debemos calcular la velocidad del bus según Daniela. La pendiente de la gráfica de Daniela es

$$v = \frac{-10\ \text{km} - 20\ \text{km}}{0.6\ \text{h} - 0\ \text{h}} = \frac{-30\ \text{km}}{0.6\ \text{h}} = -50\ \text{km/h}. \tag{5}$$

Como el resultado es negativo, la velocidad del bus es negativa según el sistema de Daniela:

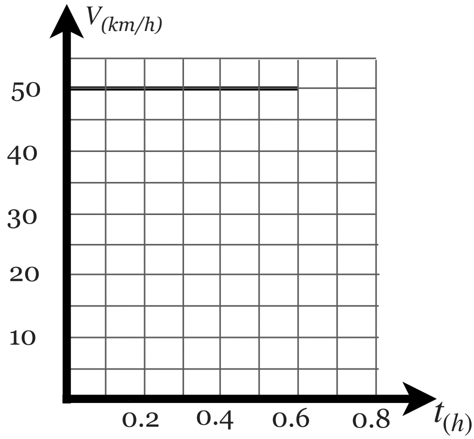
$$\vec{v} = -(50\ \text{km/h})\hat{x}. \tag{6}$$

Dada esta velocidad y la posición inicial del bus según Daniela, la ecuación de movimiento es

$$x_d\hat{x} = \underbrace{-(50\ \text{km/h})}_{v}\, t\hat{x} + \underbrace{(20\ \text{km})\hat{x}}_{\vec{x}_i}, \tag{7}$$

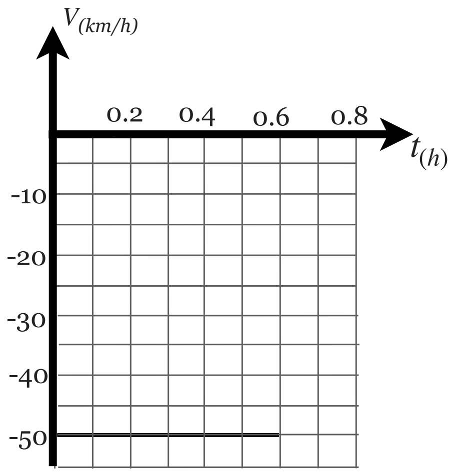
donde el subíndice d en el término x_d nos recuerda que esta es la ecuación de movimiento según Daniela. Es claro que las ecuaciones (7) y (4) son diferentes. Sin embargo, como ya vimos en problemas anteriores, la escogencia del sistema no es relevante para cantidades escalares como la rapidez, el tiempo o la distancia.

(b) Como es un movimiento con velocidad constante, la gráfica de velocidad contra tiempo debe ser una línea horizontal que corta el eje Y en la velocidad que tenga el objeto (si la velocidad es negativa, corta el eje Y en la parte negativa). Según la ecuación (3), la velocidad es $\vec{v} = (50\ \text{km/h})\hat{x}$. Así, la gráfica de velocidad para Pedro es



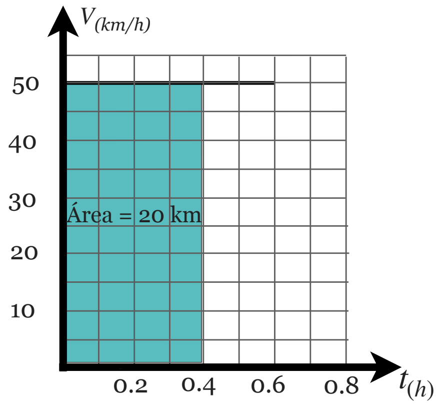
Gráfica de velocidad contra tiempo según Pedro.

Según la ecuación (6), para Daniela la velocidad es $\vec{v} = -(50\ \text{km/h})\hat{x}$. Por lo tanto, la gráfica de velocidad debe cortar el eje Y en la parte negativa:



Gráfica de velocidad contra tiempo según Daniela.

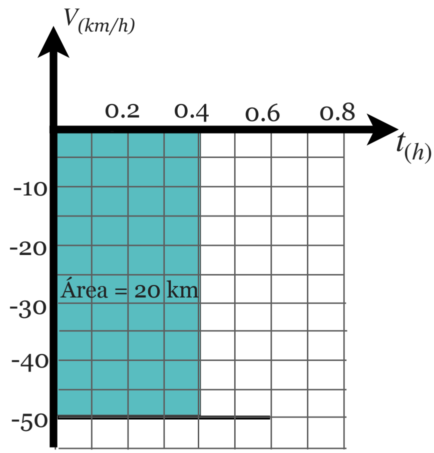
(c) Ahora debemos calcular cuánta distancia recorrió el bus en 24 minutos a partir de las gráficas de velocidad. Como dice la nota 2.14, el área encerrada entre la línea de la velocidad y el eje X nos da la distancia recorrida. Pero no queremos la distancia total, sino sólo la distancia entre 0 y 24 minutos. Por lo tanto, debemos buscar el área encerrada entre el tiempo cero y 24 minutos. Como la gráfica está en horas, debemos pasar minutos a horas. Si dividimos una hora entre cinco, obtenemos intervalos de 12 minutos. Por lo tanto, 0.2 horas son 12 minutos, 0.4 son 24 minutos y así sucesivamente. Así, queremos buscar el área entre 0 y 0.4 horas. Empecemos con la gráfica de Pedro:



El área del rectángulo es 50 km/h por 0.4 h, es decir, 20 km.

En 24 minutos (0.4 horas), el bus recorrió 20 kilómetros.

Como el lector puede imaginar, el mismo resultado se obtiene para Daniela:



Aquí también el área del rectángulo es de 50 km/h por 0.4 h, es decir, 20 km.

Notemos que en la gráfica de Daniela la velocidad es negativa, pero eso no importa. Como dice la nota 2.14, el área encerrada sigue siendo la distancia recorrida.

Por supuesto, si conocemos la rapidez y el tiempo podemos calcular la distancia directamente, usando $d = vt$. Por ejemplo, en este caso $v = 50$ km/h y $t = 0.4$ h, así que $(50 \text{ km/h}) \times (0.4 \text{ h}) = 20$ km.

Cuidado: cuando hacemos la operación para sacar el área, nos olvidamos del signo de la velocidad, y sólo estamos teniendo en cuenta la rapidez. Si tuviéramos en cuenta el signo, entonces el signo negativo indicaría que el *desplazamiento* fue negativo, pero la distancia, que es la magnitud del desplazamiento, es siempre positiva. Por otro lado, es claro que las unidades de área son de longitud al cuadrado (metro cuadrado, kilometro cuadrado, etc.). El "área" de las figuras anteriores no tiene estas unidades de área sino sólo unidades de longitud o distancia (20 km, por ejemplo). Cuando decimos que el área es la distancia, lo que queremos decir es que si multiplicamos la base por la altura, sin importar qué unidades tienen la base y la altura, el *número* que da corresponde a la distancia.

Problema 2.12.

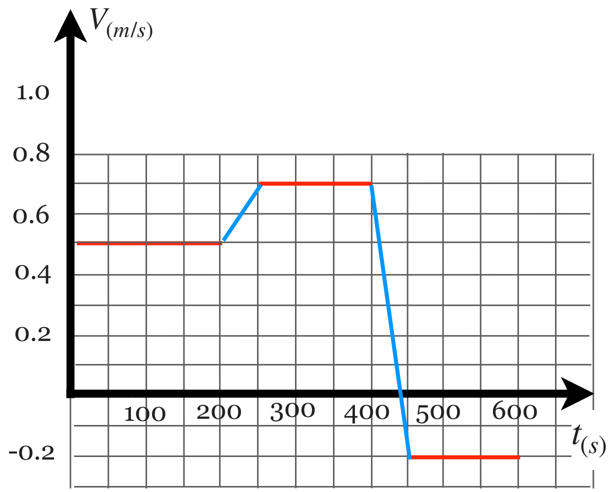
Palabras clave: gráfica de velocidad contra tiempo, área bajo la curva, velocidad no constante.

Con base en la gráfica de velocidad contra tiempo de un objeto:

(a) Prestando atención solamente a las líneas rojas, explique qué movimiento siguió el objeto y escriba la ecuación o las ecuaciones de movimiento correspondientes para las líneas rojas.

(b) Calcule la distancia total recorrida en los tramos rojos.

(c) Explique cómo podemos interpretar los tramos azules.



Solución

¿Qué información nos dan?

Para todos los numerales nos dan una gráfica de velocidad contra tiempo.

¿Qué nos piden?

(a) Explicar el tipo de movimiento del objeto según las líneas rojas. Escribir la(s) ecuación(es) de movimiento del objeto.

(b) Calcular la distancia recorrida en los tramos rojos.

(c) Explicar los tramos azules.

(a) Las líneas rojas son horizontales, lo que significa que el objeto se movió con velocidad constante en cada tramo rojo. En la gráfica se ve que en el primer tramo la velocidad fue

$$\vec{v}_1 = (0.5 \text{ m/s})\hat{x}. \tag{1}$$

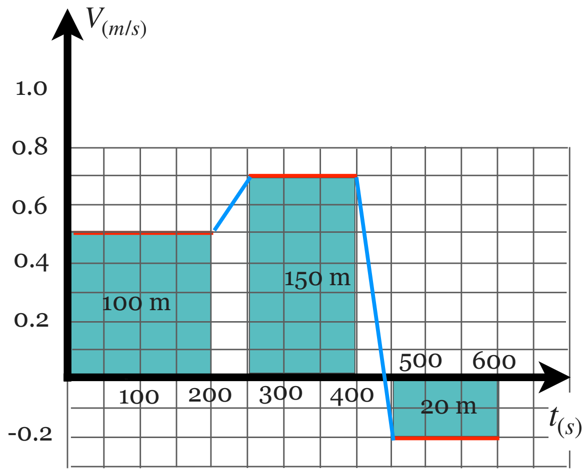
En el segundo tramo rojo la velocidad fue

$$\vec{v}_2 = (0.7 \text{ m/s})\hat{x}. \tag{2}$$

En el último tramo rojo, la velocidad fue

$$\vec{v}_3 = -(0.2 \text{ m/s})\hat{x}. \tag{3}$$

(b) Para calcular la distancia total recorrida en los tramos rojos, debemos calcular el área encerrada por cada tramo, y después sumar.



Como se aprecia en la gráfica, en el primer tramo tenemos (200 s)*(0.5 m/s), lo que da 100 m. En el segundo (150 s)*(0.7 m/s), lo que da 105 m. En el tercero (0.2 s)*(150 m/s), lo que es igual a 30 m.

La distancia total recorrida es la suma de la distancia en cada tramo:

$$d = 100 \text{ m} + 105 \text{ m} + 30 \text{ m} = 235 \text{ m}. \tag{4}$$

(c) Notemos que en los tramos azules la línea de la velocidad no es horizontal sino que tiene cierta pendiente (positiva en el primer caso, negativa en el segundo). Esto quiere decir que la velocidad no permanece constante. En el primer tramo azul la velocidad está aumentando, mientras que en el segundo está disminuyendo. Como veremos en el próximo problema, cuando la velocidad aumenta, el objeto tiene una aceleración positiva y cuando la velocidad disminuye, el objeto tiene aceleración negativa.

Por otro lado, recordemos que cuando un objeto no tiene velocidad constante, no tiene sentido hablar de la velocidad del objeto en general sino que debemos hablar de la *velocidad instantánea* del objeto (nota 2.6). En cada uno de los tramos rojos la velocidad permanece constante. Sin embargo, *en los tramos azules la velocidad no permanece constante*. Por ejemplo, en el primer tramo azul, en cada instante sucesivo la velocidad es cada vez mayor. Así, en los tramos azules sólo podemos hablar de la *velocidad instantánea*.

Problema (teórico) 2.13.

Palabras clave: aceleración, aceleración instantánea, aceleración cero, velocidad en función de la aceleración, grafica de velocidad contra tiempo en casos de aceleración constante, ecuación de movimiento para un movimiento uniformemente acelerado, distancia en un movimiento uniformemente acelerado.

(a) Explique cómo se calcula la aceleración de un objeto si el objeto tiene aceleración constante. Además, explique el concepto de aceleración instantánea.

(b) Con base en la fórmula de la aceleración explicada en (a), diga qué condiciones se deben cumplir para que la aceleración de un objeto sea cero.

(c) Escriba la velocidad final en términos de la aceleración, la velocidad inicial y el tiempo, y explique cómo realizar una gráfica de velocidad contra tiempo cuando hay aceleración constante.

(d) Escriba la ecuación de movimiento para un objeto que tiene aceleración constante.

(e) Explique cómo calcular la distancia recorrida por un objeto, si el objeto tiene aceleración constante.

Solución

(a) La aceleración es una cantidad vectorial que representa la tasa de cambio de la velocidad en el tiempo. Si la velocidad de un objeto cambia en el tiempo, entonces el objeto tiene aceleración. Más precisamente, si en cierto tiempo un objeto tiene velocidad $\vec{v}_i$ y un tiempo t después el objeto tiene velocidad $\vec{v}_f$, y si la aceleración es constante, entonces la podemos calcular usando

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t}. \tag{1}$$

Por ejemplo, si en cierto instante el objeto tiene velocidad $\vec{v} = (40\ \text{km/h})\hat{x}$ y media hora después tiene velocidad $\vec{v} = (100\ \text{km/h})\hat{x}$, y si el objeto aceleró de modo constante, entonces su aceleración es

$$\vec{a} = \frac{(100\ \text{km/h})\hat{x} - (40\ \text{km/h})\hat{x}}{0.5\ \text{h}} = (120\ \text{km/h}^2)\hat{x}. \tag{2}$$

Cuando decimos que el objeto tiene aceleración de $(120\ \text{km/h}^2)\hat{x}$ estamos diciendo que el objeto aumenta su velocidad en 120 kilómetros por hora, cada hora: si en cierto momento la velocidad es de 120 kilómetros, una hora después será de 240 kilómetros, dos horas después será 360 kilómetros, etc. Notemos que las unidades de la aceleración son de velocidad sobre tiempo. Como el lector puede verificar fácilmente, velocidad sobre tiempo es igual a distancia sobre tiempo al cuadrado. Por ejemplo, kilómetros sobre hora al cuadrado o metros sobre segundo al cuadrado son unidades de aceleración.

Si un objeto tiene aceleración constante, entonces en todos los puntos de su trayectoria su aceleración está dada por la ecuación (1). Sin embargo, un objeto puede tener aceleración variable. En tal caso, su aceleración en cada instante puede ser diferente. Por ejemplo, un carro puede tener cierta aceleración en cierto segundo, y después el conductor aplica el freno, lo que genera una aceleración diferente. Así como la velocidad instantánea es la velocidad en sólo un instante, la aceleración instantánea es la aceleración en un instante.

Matemáticamente, la aceleración instantánea se define como la tasa de cambio de la velocidad en un intervalo de tiempo infinitesimal. La podemos escribir así:

$$\vec{a}_{inst} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_{inst}}, \tag{3}$$

donde t_{inst} denota un instante[7]. Por supuesto esta ecuación es muy similar a la ecuación (1). Lo que es diferente entre ambas es que en la ecuación (1) el tiempo t puede ser de cualquier duración mientras que en la ecuación (3) t sólo dura un instante. Si la aceleración del objeto es constante, entonces su aceleración en cada instante es la misma, así que para hallarla podemos usar la ecuación (1).

Es importante anotar que *un objeto puede tener aceleración constante y no moverse en línea recta*. En este problema y en este capítulo vamos a enfocarnos en casos de movimiento en línea recta (movimientos en una dimensión). El movimiento de los objetos que tienen aceleración constante y que se mueven en línea recta se conoce como *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado*.

(b) Si la aceleración es cero podemos igualar la ecuación (1) a cero:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t} = 0. \tag{4}$$

La anterior ecuación es cero solamente si la resta de $\vec{v}_f$ con $\vec{v}_i$ es cero, es decir, si

$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = 0. \tag{5}$$

Y esto es cero sólo si $\vec{v}_f$ es igual a $\vec{v}_i$. Notemos que si la velocidad final e inicial son iguales, *sus magnitudes y sus direcciones tienen que ser iguales*.

---

[7] En libros de texto más avanzados, esta aceleración se define usando la noción de derivada: $\vec{a}_{inst} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Nota 2.15. Aceleración cero

La aceleración de un objeto es cero solamente si la magnitud y la dirección de la velocidad final es igual a la magnitud y dirección de la velocidad inicial. En otras palabras, si la rapidez del objeto cambia, o si la dirección en que se mueve cambia, el objeto tendrá aceleración distinta de cero.

La nota anterior es muy importante porque uno podría llegar a pensar que si un carro preserva una rapidez constante, eso ya es suficiente para que el carro no tenga aceleración. Pero como dice la nota, la dirección de la velocidad no puede cambiar o de lo contrario habrá aceleración. Por ejemplo, si el velocímetro de un carro marca 50 km/h mientras realiza una curva, el carro tendrá aceleración porque está cambiando la dirección de su velocidad (a pesar de que la rapidez es constante).

(c) Si multiplicamos la ecuación (1) por el tiempo t, obtenemos

$$\vec{a}t = \vec{v}_f - \vec{v}_i. \tag{6}$$

Ahora pasamos la velocidad inicial al lado izquierdo

$$\vec{a}t + \vec{v}_i = \vec{v}_f. \tag{7}$$

La ecuación (7) nos dice cuál es la velocidad final de un objeto si el objeto tiene cierta velocidad inicial y comienza a acelerar durante un tiempo t. En particular, esta ecuación muestra que la velocidad final depende linealmente de la aceleración. De hecho, notemos que la ecuación (7) tiene la misma forma que la ecuación de la posición de un movimiento con velocidad constante: $\vec{x}_f = \vec{v}t + \vec{x}_i$. En el caso de la posición final con velocidad constante, la posición depende linealmente de la velocidad, y se le suma el término de la posición inicial. En el caso de aceleración constante, la velocidad final depende linealmente de la aceleración, y se le suma la velocidad inicial. Como la forma de la ecuación es la misma, podemos inferir que la gráfica de la velocidad contra tiempo en un movimiento con aceleración constante es el mismo tipo de gráfica que la gráfica de la posición en función del tiempo en un movimiento con velocidad constante. ¡Ambas gráficas deben ser líneas rectas! Esto se puede ver más claramente si aplicamos la regla de oro. Para hacerlo, supongamos que el objeto se mueve en línea recta sobre el eje X. En tal caso, podemos escribir la ecuación (7) como

$$v_f\hat{x} = at\hat{x} + v_i\hat{x}. \tag{8}$$

Ahora aplicamos la regla de oro:

$$v_f = at + v_i. \tag{9}$$

El lector debe reconocer que esta ecuación es la ecuación de una línea recta, que corta el eje Y en el punto v_i, y cuya pendiente es a:

$$\underbrace{v_f}_{\substack{\text{Variable}\\\text{depediente}}} = \underbrace{a}_{\text{Pendiente}} \overbrace{t}^{\substack{\text{Variable}\\\text{independiente}}} + \underbrace{v_i}_{\substack{\text{Punto}\\\text{de corte}}} \tag{10}$$

El signo de la aceleración determina si la pendiente es positiva o negativa. Los pasos para realizar gráficas de velocidad contra tiempo para un movimiento con aceleración constante son los mismos que los seguidos para realizar gráficas de posición contra tiempo en un movimiento con velocidad constante.

Nota 2.16. Gráfica de velocidad contra tiempo para un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Para realizar una gráfica de velocidad contra tiempo necesitamos seguir tres pasos:

(a) Escogemos un sistema de coordenadas cualquiera o usamos el que el problema nos indique.

(b) Con base en la información que tengamos y el sistema de coordenadas escogido, debemos escribir la ecuación de la velocidad del objeto. En general, la ecuación de velocidad del objeto en un movimiento con aceleración constante es: $\vec{v}_f = \vec{a}t + \vec{v}_i$.

(c) Aplicamos la regla de oro a la ecuación de la velocidad. Graficamos esta última ecuación teniendo en cuenta que es la ecuación de una línea recta. La velocidad inicial es el punto de corte con el eje Y, la velocidad final es la variable dependiente, el tiempo es la variable independiente y la aceleración es la pendiente de la recta (el signo de la aceleración indica si la pendiente es positiva o negativa).

(d) Suponga que en cierto instante un objeto tiene velocidad $\vec{v}_i$ y su posición en ese momento es $\vec{x}_i$. En ese momento el objeto empieza a acelerar de manera constante, con aceleración $\vec{a}$. Si el objeto acelera durante un tiempo t, su posición $\vec{x}_f$ después de ese tiempo será

$$\vec{x}_f = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_i t + \vec{x}_i. \tag{11}$$

Esta ecuación de movimiento es muy similar a la ecuación de la posición final en un movimiento con velocidad constante, sólo que tiene un término más (el término con aceleración).

Podemos entender esta ecuación con un ejemplo. Supongamos que según nuestro sistema de coordenadas, un ciclista tiene una velocidad de 10 km/h en la dirección positiva de X. En ese momento el ciclista está en la posición (40 km/h)$\hat{x}$. A partir de ese momento el ciclista acelera de modo constante, con aceleración de magnitud 30 km/h^2 en el sentido positivo de X. El ciclista acelera durante un cuarto de hora. Queremos averiguar la posición del ciclista después del cuarto de hora. Para eso aplicamos la ecuación (11):

$$\begin{aligned}\vec{x}_f &= \frac{1}{2}(30\text{ km/h}^2)(0.25\text{ h})^2\hat{x} + (10\text{ km})(0.25\text{ h})\hat{x} + (40\text{ km})\hat{x}\\ &= (43.43\text{ km})\hat{x}.\end{aligned} \tag{12}$$

Nota 2.17. Ecuación de movimiento para un objeto en un movimiento con aceleración constante

Cuando un objeto se mueve con aceleración constante, la ecuación de movimiento del objeto es

$$\vec{x}_f = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_i t + \vec{x}_i,$$

donde $\vec{x}_f$ es la posición final, $\vec{x}_i$ su posición inicial, $\vec{v}_i$ su velocidad cuando está en la posición inicial y t el tiempo transcurrido entre la posición inicial y final.

(e) Recordemos que la distancia es la magnitud del desplazamiento y el desplazamiento de un objeto es la resta vectorial de su posición final con su posición inicial. Si escribimos la ecuación de movimiento de un objeto con aceleración constante, tenemos

$$\vec{x}_f = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_i t + \vec{x}_i. \tag{13}$$

Si pasamos la posición inicial al lado izquierdo, obtenemos

$$\vec{x}_f - \vec{x}_i = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_i t. \tag{14}$$

Pero el lado izquierdo es precisamente el desplazamiento

$$\vec{D} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_i t. \tag{15}$$

Si el objeto se moviera en línea recta, podríamos escribir esta ecuación como

$$d\hat{x} = \frac{1}{2}at^2\hat{x} + \vec{v}_i t\hat{x}, \tag{16}$$

donde hemos usado el hecho de que la magnitud del desplazamiento es la distancia. Finalmente, sabemos que la distancia es la magnitud del desplazamiento, es decir,

$$d = \Bigg\| \underbrace{\frac{1}{2}at^2 + v_i t}_{\vec{D}} \Bigg\|. \tag{17}$$

El valor absoluto es importante porque lo que está en el lado derecho de la ecuación podría dar negativo y la distancia, como toda magnitud, debe ser positiva.

Nota 2.18. Distancia recorrida por un objeto en un movimiento con aceleración constante

La distancia recorrida por un objeto con aceleración constante y que se mueve en línea recta está dada por

$$d = \left\| \frac{1}{2}at^2 + v_i t \right\|,$$

donde a es la magnitud de la aceleración, t es el tiempo y v_i es la magnitud de la velocidad inicial.

Problema 2.14.

Palabras clave: velocidad en función de la aceleración, gráfica de velocidad contra tiempo en casos de aceleración constante, distancia entre dos objetos en diferentes tiempos.

Juan y Valentina están jugando con sus carros de control remoto. Después de un rato, deciden intentar chocar los carros de frente. Juan hace que su carro (azul) acelere de forma constante contra el carro de Valentina (verde), y Valentina mantiene su carro con velocidad constante en dirección del carro de Juan, como se ve en el dibujo. Si la velocidad inicial del carro de Juan es cero y la magnitud de su aceleración es a_j, la rapidez del carro de Valentina es v_v y los carros se chocan en el tiempo t_c (contado desde que Juan acelera su carro).

(a) Escriba una expresión para la distancia a la que se encontraban los carros *inicialmente*.

(b) Escriba una expresión para la distancia a la que se encuentran los carros cuando había transcurrido la mitad del tiempo del choque.

(c) Haga una gráfica cualitativa (sin valores numéricos) de velocidad contra tiempo para ambos carros (una sola gráfica para ambos).

Solución

¿Qué información nos dan?

a), (b), (c). Los carros se mueven en direcciones opuestas. El carro de Juan tiene velocidad inicial cero, y aceleración constante de magnitud a_j. El carro de Valentina se mueve con velocidad constante de magnitud v_v. Los carros se chocan en el tiempo t_c.

¿Qué nos piden?

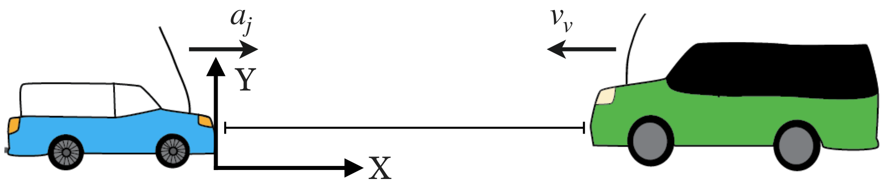
(a) Una expresión para la distancia inicial a la que se encontraban los carros.

(b) Una expresión para la distancia entre los carros cuando ha pasado la mitad del tiempo en que se chocan.

(c) Una gráfica cualitativa de velocidad contra tiempo para ambos carros.

(a) Debemos encontrar una expresión para la distancia inicial entre los carros. La distancia entre dos posiciones cualesquiera es la magnitud de la resta vectorial entre esas dos posiciones.

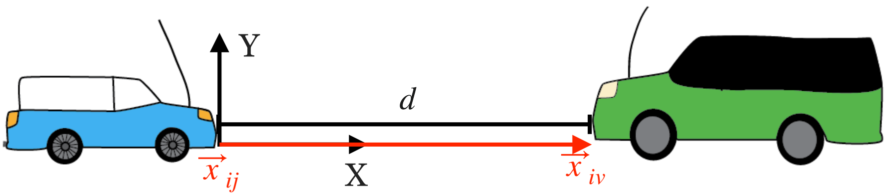
Como en casi todos los problemas de cinemática, primero debemos escoger un sistema de coordenadas. Escojamos uno en el cual la dirección positiva del eje X apunte en la dirección en que se mueve el carro de Juan, y la dirección negativa sea la dirección en que se mueve el carro de Valentina. Además, pongamos el origen del sistema en la posición inicial del carro de Juan (esto simplifica un poco las cosas porque hace que el carro de Juan tenga posición cero). Si hacemos esto, el carro de Valentina estará a una distancia d (desconocida) en el sentido positivo de X en el momento inicial. Nuestro sistema queda así:



En este caso queremos averiguar la *distancia inicial* entre los carros, así que necesitamos determinar la posición inicial de los carros y calcular la resta vectorial entre la posición de ambos carros. Si llamamos $\vec{x}_{iv}$ a la posición inicial del carro de Valentina y $\vec{x}_{ij}$ a la posición inicial del carro de Juan, entonces la distancia inicial entre ambos carros será la magnitud de dicha resta:

$$d = \left\| \vec{x}_{iv} - \vec{x}_{ij} \right\|, \tag{1}$$

donde la resta podría haber sido al revés (el valor absoluto da igual). Esto se ilustra con el siguiente dibujo.



En el dibujo se ve que la diferencia entre la posición inicial de ambos carros es simplemente la magnitud de $\vec{x}_{iv}$, pues la posición inicial del carro de Juan, según nuestro sistema, es el origen. Así, para usar la ecuación (1) necesitamos solamente hallar la posición inicial del carro de Valentina. Y para hallar la posición inicial del carro de Valentina necesitamos usar su ecuación de movimiento.

El carro de Valentina se mueve con velocidad constante de magnitud v_v en la dirección negativa de X, y su posición inicial según nuestro sistema es $d\hat{x}$, donde d es la distancia inicial de separación entre los carros, que debemos hallar. La ecuación de movimiento del carro de Valentina es la ecuación de movimiento de un objeto con velocidad constante: $\vec{x}_f = \vec{v}t + \vec{x}_i$. Podemos escribir la ecuación del carro de Valentina así:

$$x_{fv}\hat{x} = -v_v t\hat{x} + d\hat{x}, \tag{2}$$

donde hemos llamado "x_{fv}" a la posición final del carro de Valentina. Por supuesto, sólo con esta ecuación no podemos determinar $d\hat{x}$ que es la posición inicial del carro de Valentina, pues no tenemos ni el tiempo ni la posición final.

Nos dicen que cuando se chocan ambos carros el tiempo es t_c. Para usar esa información, debemos tener en cuenta que cuando se chocan los carros estos tienen la misma posición final. Por lo tanto, necesitamos escribir la ecuación de movimiento del carro de Juan para encontrar su posición final, y luego podemos igualar ambas posiciones finales. El carro de Juan tiene un movimiento con aceleración constante, así que su ecuación de movimiento es de la forma $\vec{x}_f = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}t + \vec{x}_i$. Ahora, según nuestro sistema, el carro de Juan tiene aceleración constante de magnitud a_j en la dirección positiva de X, velocidad inicial cero, y posición inicial cero. Por lo tanto, su ecuación de movimiento será

$$x_{fj}\hat{x} = \frac{1}{2}a_j t^2\hat{x}, \tag{3}$$

donde hemos llamado "x_{fj}" a la posición final del carro de Juan. En el tiempo t_c los carros se chocan, así que en ese tiempo podemos igualar sus posiciones finales:

$$\underbrace{\frac{1}{2}a_j t_c^2\hat{x}}_{x_{fj}} = \underbrace{-v_v t_c\hat{x} + d\hat{x}}_{x_{fv}}. \tag{4}$$

De esto podemos inferir la posición inicial del carro de Valentina. Pasemos el término con la velocidad del carro de Valentina a la izquierda de la igualdad:

$$\frac{1}{2}a_j t_c^2\hat{x} + v_v t_c\hat{x} = d\hat{x}. \tag{5}$$

Esta ecuación nos da $d\hat{x}$ (la posición inicial del carro de Valentina) en términos de las otras variables conocidas[8]. Con esta posición, y como sabemos que la

[8] Podemos terminar el ejercicio aquí, pero conceptualmente es más claro si ahora usamos la ecuación (1).

posición inicial del carro de Juan es cero (según nuestro sistema), podemos usar la ecuación (1):

$$d = \Big\| \underbrace{\frac{1}{2} a_j t_c^2 \hat{x} + v_v t_c \hat{x}}_{\vec{x}_{iv}} - \underbrace{0\hat{x}}_{\vec{x}_{ij}} \Big\|. \tag{6}$$

Esta ecuación nos dice la distancia de separación entre los carros en términos de la aceleración del carro de Juan, la velocidad del carro de Valentina y el tiempo de choque. Notemos que si el tiempo de choque t_c aumenta y dejamos las demás variables fijas, entonces la distancia d aumenta, lo cual tiene sentido, pues si se demoran mucho en chocarse es porque los carros estaban muy separados.

Nota 2.19. Distancia entre dos posiciones

La distancia entre dos posiciones $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ es la magnitud de la resta vectorial entre ambas: $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|$ (el orden de la resta no importa por el valor absoluto).

(b) Ahora debemos hallar una expresión para la distancia entre los carros cuando ha pasado la mitad del tiempo de choque, es decir, cuando los carros han estado andando un tiempo $t_c/2$. El razonamiento para hallar la distancia es igual que antes: necesitamos conocer la posición de cada carro en el tiempo que nos dicen (que es $t_c/2$) y luego sacamos la magnitud de la resta vectorial entre dichas posiciones.

Podemos hallar la posición del carro de Juan en el tiempo que nos interesa reemplazando $t_c/2$ en la ecuación de movimiento del carro, ecuación (3):

$$x_{fj}\hat{x} = \frac{1}{2} a_j \underbrace{(t_c/2)}_{t}{}^2 \hat{x}. \tag{7}$$

Podemos hallar la posición del carro de Valentina reemplazando el tiempo $t_c/2$ en la ecuación de movimiento del carro de Valentina, ecuación (2):

$$x_{fv}\hat{x} = -v_v \underbrace{(t_c/2)}_{t} \hat{x} + d\hat{x}. \tag{8}$$

Esta ecuación nos dice la posición del carro de Valentina en términos de la posición inicial $d\hat{x}$. Esta posición la hallamos en el numeral anterior, ecuación (5), así que si la usamos en la ecuación (8), obtenemos

$$x_{fv}\hat{x} = -v_v(t_c/2)\hat{x} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} a_j t_c^2 + v_v t_c\right)\hat{x}}_{d\hat{x}}. \tag{9}$$

Una vez tenemos la posición de cada carro en el tiempo $t_c/2$ en función de variables conocidas, podemos realizar la resta de la posición del carro de Valentina y la de Juan:

$$x_{fv}\hat{x} - x_{fj}\hat{x} = \underbrace{-v_v(t_c/2)\hat{x} + \left(\frac{1}{2}a_j t_c^2 + v_v t_c\right)\hat{x}}_{x_{fv}} - \underbrace{\frac{1}{2}a_j(t_c/2)^2\hat{x}}_{x_{fj}}. \tag{10}$$

Simplifiquemos un poco esta expresión sumando los términos que podemos sumar:

$$x_{fv}\hat{x} - x_{fj}\hat{x} = \frac{1}{2}v_v t_c\hat{x} + \frac{3}{8}a_j t_c^2\hat{x}. \tag{11}$$

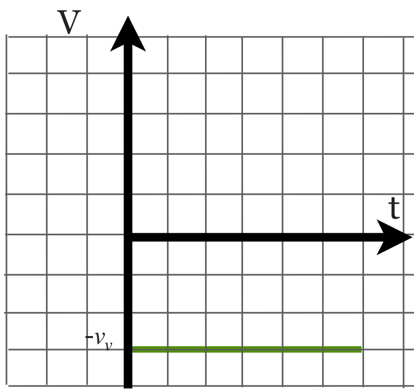
Esto es lo mismo que escribir (nota 1.19)

$$(x_{fv} - x_{fj})\hat{x} = \left(\frac{1}{2}v_v t_c + \frac{3}{8}a_j t_c^2\right)\hat{x}. \tag{12}$$

La distancia de separación será la magnitud de la anterior ecuación:

$$d_s = \left\|\left(\frac{1}{2}v_v t_c + \frac{3}{8}a_j t_c^2\right)\hat{x}\right\|. \tag{13}$$

(c) Debemos realizar una gráfica cualitativa de velocidad contra tiempo para el carro de Juan y el de Valentina. El carro de Valentina se mueve con velocidad constante, así que su gráfica de velocidad contra tiempo debe ser una línea horizontal. Además, según nuestro sistema, la velocidad del carro de Valentina apunta en la dirección negativa del eje X, así que su gráfica de velocidad contra tiempo debe ser una línea horizontal en la parte negativa del eje Y:



El carro de Valentina se mueve con velocidad constante negativa de magnitud v_v.

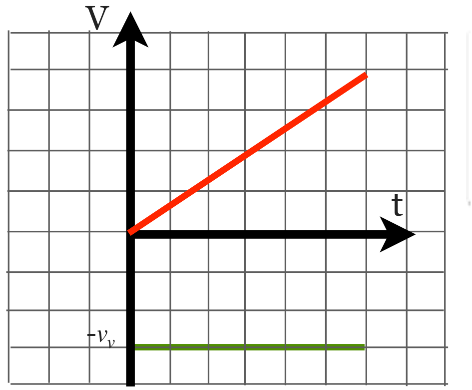
El carro de Juan tiene aceleración constante positiva, así que su gráfica de velocidad contra tiempo es una línea recta con pendiente positiva. Esto se ve más claramente en la ecuación que relaciona la velocidad final con la aceleración (en este caso no hay velocidad inicial):

$$v_{fj}\hat{x} = a_j t\hat{x}. \tag{14}$$

Al aplicar la regla de oro, obtenemos

$$v_{fj} = a_j t. \tag{15}$$

Esta es la ecuación de una línea recta con pendiente positiva a_j, que corta el eje Y en cero. Si trazamos esta gráfica sobre la misma gráfica de velocidad del carro de Valentina, obtenemos



El carro de Juan se mueve con aceleración constante positiva de magnitud a_j. La línea (en rojo) pasa por el origen porque la velocidad inicial es cero.

Problema (teórico) 2.15.

Palabras clave: ecuación de una parábola, graficar parábolas, graficar posición contra tiempo para un movimiento uniformemente acelerado, interpretación de gráficas de posición contra tiempo.

(a) Escriba la ecuación de una parábola, explique los diferentes términos y diga qué se puede inferir de la parábola de acuerdo al signo de los términos.

(b) Grafique las ecuaciones $y = 5x^2 - 2x + 1$, $y = 5x^2 + 2x + 1$ y $y = -5x^2 + 10x + 1$ (puede usar calculadora o un computador).

(c) Con base en lo anterior, explique cómo realizar una gráfica de posición contra tiempo para un objeto que se mueve con aceleración constante en línea recta, a lo largo del eje X.

(d) En el tiempo inicial un objeto está a un metro en el sentido positivo de X y tiene una velocidad de dos metros por segundo en el sentido positivo de X. En ese instante comienza a acelerar con aceleración de 10 m/s^2 en dirección negativa de X. Realice la gráfica de posición contra tiempo de ese objeto.

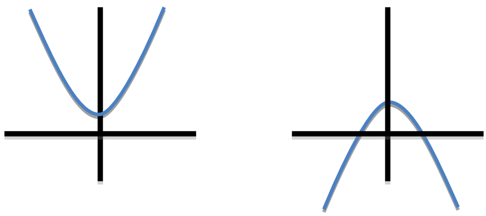
(e) Dada una gráfica de posición contra tiempo para un movimiento acelerado, ¿puede inferir en qué instantes la velocidad es cero?

Solución

(a) En general, la ecuación de una parábola es de la forma

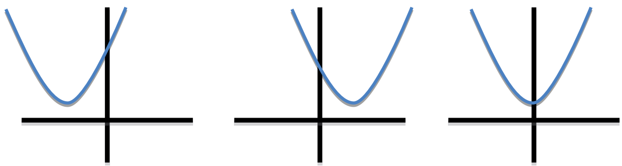
$$y = ax^2 + bx + c. \tag{1}$$

El primer término es el término cuadrático, que determina si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo. Por ejemplo, si a es negativo la parábola se abre hacia abajo, y si es positivo la parábola se abre hacia arriba.



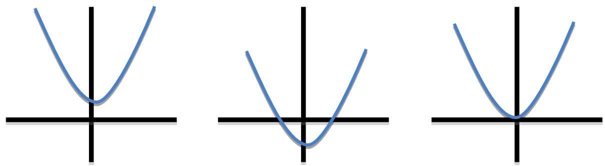
La parábola izquierda tiene a positivo así que se abre hacia arriba. La parábola derecha tiene a negativo así que se abre hacia abajo.

El segundo término es un término lineal. Dependiendo del signo de este término y del signo del término cuadrático, podemos saber si la parábola está centrada en el eje Y, o está corrida a la derecha o a la izquierda de dicho eje. La regla para saber hacia qué lado está corrida la parábola es así: si b y a tienen el mismo signo (ambos son negativos o ambos son positivos), la parábola queda corrida en el sentido negativo de X (queda a la izquierda del eje Y). Si no tienen el mismo signo, la parábola queda corrida en el sentido positivo de X. Finalmente, si b es cero, la parábola queda perfectamente centrada en el eje Y.



Izquierda: a y b tienen el mismo signo. Centro: a y b tienen signos opuestos. Derecha: b es cero.

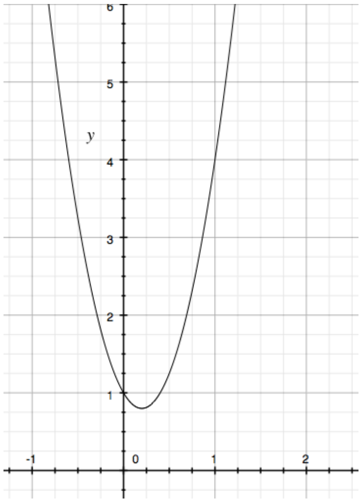
El tercer término es una constante, que nos dice el punto de corte con el eje Y. Si es positivo el punto de corte es positivo, si es cero el punto de corte es cero y si es negativo el punto de corte es negativo:



Izquierda: c es positivo. Centro: c es negativo. Derecha: c es cero.

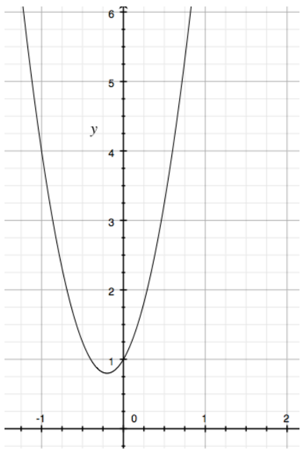
(b) Graficar una parábola es laborioso porque debemos hacerlo punto por punto (en cambio, para graficar una recta sólo necesitamos tener dos puntos y conectarlos). Pero como vimos en la sección anterior, hay cosas de la gráfica que podemos saber sin necesidad de hacerlo para cada punto. Por ejemplo, podemos saber si la gráfica se abre hacia abajo o hacia arriba dependiendo del signo del término cuadrático. Podemos saber el punto de corte con el eje Y, y podemos saber si está centrada o no en el eje Y.

Primero debemos graficar $y = 5x^2 - 2x + 1$. Antes de hacerlo, digamos todo lo que podemos saber sobre esa parábola. Como la constante es 1, dicha parábola corta el eje Y en 1. Además, se abre hacia arriba porque el término cuadrático es positivo. Finalmente, como el término lineal no tiene el mismo signo que el término cuadrático, entonces sabemos que la parábola está corrida en el sentido positivo de X. Al hacer la gráfica obtenemos la siguiente parábola:

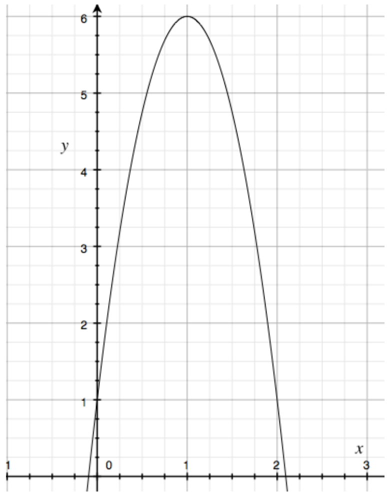


Como esperábamos, esta es una parábola que se abre hacia arriba, que está un poco corrida a la derecha y que corta el eje Y en 1.

Ahora debemos graficar $y = 5x^2 + 2x + 1$. La única diferencia con la ecuación anterior es que ahora el término lineal es positivo, así que tiene el mismo signo que el término cuadrático. Por lo tanto, la parábola se debe correr hacia la izquierda. Al graficarla, verificamos que eso es lo que sucede:



Por último, debemos graficar $y = -5x^2 + 10x + 1$. Esta es una parábola que se abre hacia abajo porque el término cuadrático es negativo. Además, como el término cuadrático es negativo y el lineal es positivo (no tienen el mismo signo), la parábola se mueve hacia la derecha del eje Y. Finalmente, la parábola corta el eje Y en 1.



(c) Si un objeto se mueve en línea recta con aceleración constante a lo largo de X, podemos escribir su posición final como

$$x_f \hat{x} = \frac{1}{2} a t^2 \hat{x} + v_i t \hat{x} + x_i \hat{x}. \tag{2}$$

Ahora apliquemos la regla de oro:

$$x_f = \frac{1}{2} a t^2 + v_i t + x_i. \tag{3}$$

La ecuación (3) nos dice cómo cambia x_f en función del tiempo. El lector debe notar por lo visto en los numerales anteriores que esta es la ecuación de una parábola, donde la variable dependiente es x_f y la independiente es el tiempo t. El primer término es el término cuadrático, el segundo es el término lineal y el tercero es una constante.

$$\underbrace{x_f}_{\substack{\text{Variable} \\ \text{dependiente}}} = \underbrace{\frac{1}{2} a t^2}_{\substack{\text{Término} \\ \text{cuadrático}}} + \overbrace{v_i t}^{\substack{\text{Término} \\ \text{lineal}}} + \underbrace{x_i}_{\substack{\text{Constante} \\ \text{(punto} \\ \text{de corte} \\ \text{eje Y)}}}. \tag{4}$$

Como queda claro por la ecuación (4), el término cuadrático contiene la aceleración. El signo de dicho término (que es el signo que tenga la aceleración) determina si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo. El término que tiene la velocidad inicial es el término lineal. El signo de este término y el signo del término cuadrático determinan si la parábola se corre hacia la derecha o izquierda en el eje Y. El último término, que corresponde a la posición inicial, dice dónde la parábola corta el eje Y.

Más allá de las similitudes, hay una diferencia importante entre la parábola descrita por (4) y una parábola común de matemáticas. Generalmente, en física sólo consideramos tiempos positivos. Como el tiempo está en el eje X, esto quiere decir que en física no nos interesa lo que sucede en la parte negativa del eje X (es decir, cuando el tiempo es negativo). Por lo tanto, *no trazamos una parábola completa sino sólo la parte de la parábola que corresponda a tiempos positivos*.

Nota 2.20. Gráfica de posición contra tiempo para un movimiento rectilíneo con aceleración constante

(1) Escogemos un sistema de coordenadas cualquiera o usamos el que el problema nos indique.

(2) Con base en la información que tengamos y el sistema de coordenadas escogido, debemos escribir la ecuación de movimiento del objeto. En general, la ecuación de posición del objeto en un movimiento con aceleración constante es $\vec{x}_f = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_i t + \vec{x}_i$.

(3) Aplicamos la regla de oro. Graficamos esta última ecuación teniendo en cuenta que es la ecuación de una parábola y sólo tomamos en cuenta la parte positiva del eje X que corresponde a tiempos positivos. El signo del término con la aceleración (el término cuadrático) determina si se abre hacia arriba o hacia abajo. El punto de corte con el eje Y es la posición inicial. Si el término con la velocidad inicial tiene el mismo signo que el término con la aceleración, la parábola está corrida en el sentido negativo de X. Si tienen signos diferentes, la parábola está corrida en el sentido positivo de X.

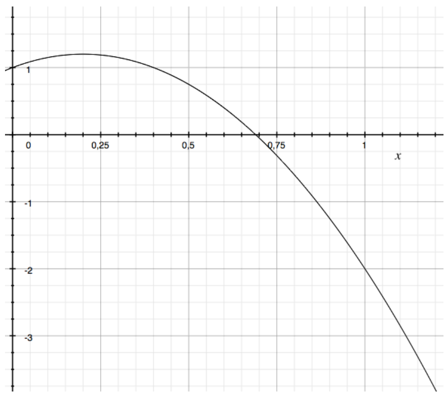
(d) Nos dicen que un objeto está a un metro en el sentido positivo de X, y en ese momento el objeto tiene una velocidad de dos metros por segundo en el sentido positivo de X. En ese instante comienza a acelerar con aceleración de 10 m/s^2 en dirección negativa de X. Con esta información podemos escribir la ecuación de movimiento del objeto:

$$x\hat{x} = -\frac{1}{2}(10\ \mathrm{m/s^2})t^2\hat{x} + (2\ \mathrm{m/s})t\hat{x} + (1\ \mathrm{m})\hat{x}. \tag{5}$$

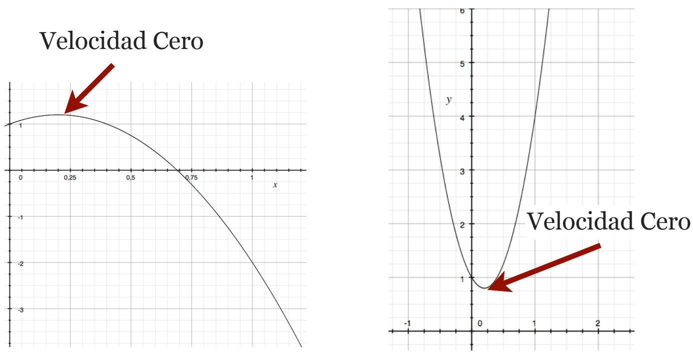
Aplicando la regla de oro, obtenemos

$$x = -\frac{1}{2}(10\ \mathrm{m/s^2})t^2 + (2\ \mathrm{m/s})t + (1\ \mathrm{m}). \tag{6}$$

Notemos que la anterior es una parábola que se abre hacia abajo (el signo de la aceleración es negativo), que corta el eje Y en un metro y que está corrida en el sentido positivo de X porque el término lineal no tiene el mismo signo que el término cuadrático. Si realizamos la gráfica sólo para la parte positiva del eje del tiempo, obtenemos



(e) Uno puede saber cuándo la velocidad del objeto es cero mirando la parábola de posición contra tiempo. En particular, si la parábola se abre hacia abajo, la velocidad es cero en el punto más alto de la parábola. Si la parábola se abre hacia arriba, la velocidad es cero en el punto más bajo de la parábola. Pronto entenderemos mejor por qué estas partes de la parábola indican velocidad cero.



Nota 2.21. Velocidad cero según la gráfica de posición contra tiempo

En el punto más alto de la parábola y en el punto más bajo la velocidad del objeto es cero.

Problema de repaso 2.16.

Palabras clave: gráfica de posición contra tiempo para un movimiento uniformemente acelerado, ecuación de una parábola, aceleración negativa, gráfica de velocidad contra tiempo para un movimiento uniformemente acelerado.

Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(1) Si un objeto tiene aceleración constante, la gráfica de velocidad contra tiempo es la de una parábola.

(2) Si la gráfica de posición contra tiempo de un objeto es una parábola que se abre hacia abajo, entonces la aceleración del objeto es negativa.

(3) Un objeto puede tener aceleración negativa y velocidad final positiva.

(4) La grafica de velocidad de un objeto que tiene aceleración constante negativa es una línea recta con pendiente negativa.

(5) Si la gráfica de posición contra tiempo de un objeto es una parábola corrida hacia la derecha, entonces podemos inferir que la aceleración tiene el mismo signo que la velocidad inicial.

Solución

(1) Falso. Si un objeto tiene aceleración constante, la gráfica de velocidad contra tiempo es una línea recta (pero la gráfica de posición contra tiempo sí es la de una parábola).

(2) Verdadero. Si la aceleración es negativa la parábola se abre hacia abajo, y si es positiva se abre hacia arriba.

(3) Verdadero. El signo de la aceleración sólo indica si la velocidad aumenta o disminuye, pero no indica si la velocidad final es negativa o positiva (por ejemplo, un objeto que pasa de tener una rapidez de 100 km/h positiva en X a 50 km/h positiva en X va a tener aceleración negativa, pero su velocidad final sigue siendo positiva).

(4) Verdadero. Como muestra la ecuación $\vec{v}_f = \vec{a}t + \vec{v}_i$, la pendiente en una gráfica de velocidad contra tiempo está determinada por la aceleración, y si la aceleración es constante negativa la pendiente será negativa.

(5) Falso. Si la parábola se corre a la derecha, entonces el signo del término cuadrático es diferente al signo del término lineal. En este caso, el signo de la aceleración tiene que ser diferente al signo de la rapidez inicial (nota 2.20).

Problema 2.17.

Palabras clave: aceleración, gráfica de velocidad contra tiempo para un movimiento acelerado, distancia recorrida en un movimiento uniformemente acelerado, gráfica de posición contra tiempo para un movimiento uniformemente acelerado, aceleración negativa, desaceleración, aumento y disminución de rapidez, movimiento por tramos.

Un misil aéreo lleva una rapidez de 600 m/s cuando está a punto de entrar en un cúmulo de nubes. El misil cruza el cúmulo en 10 segundos. Al salir, el misil tiene una velocidad de 500 m/s. El misil se mantiene con esa velocidad durante 20 segundos hasta que choca contra una montaña y se entierra. El misil no explota, sólo se detiene al enterrarse 2 segundos después de hacer contacto con la montaña. Suponga que el misil perdió rapidez de forma constante al entrar a la nube y al enterrarse en la montaña, pero nunca perdió altura. Escoja un sistema en el cual el misil se mueve en la dirección positiva de X.

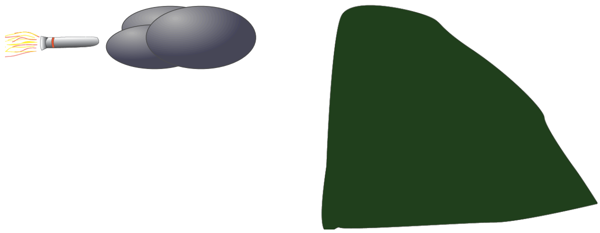
(a) ¿Cuál es la aceleración del misil en el tiempo que estuvo en la nube y en el tiempo que estuvo en la montaña?

(b) ¿Cuánta distancia recorre el misil desde que entra a la nube hasta que se detiene en la montaña?

(c) Realice una gráfica de velocidad contra tiempo para el recorrido del misil desde que está a punto de entrar a la nube hasta que se detiene. Compruebe con esta gráfica la respuesta hallada en (b).

(d) Haga una gráfica cualitativa (sin números, sólo importa la forma) de posición contra tiempo, desde que el misil entra a la nube hasta que se detiene por completo.

(e) Vuelva a responder los numerales (a) y (c), pero ahora con un sistema en el cual el misil se mueve en la dirección negativa de X. Compare las gráficas de la velocidad de (c) con estas nuevas, y analice el comportamiento de la rapidez del misil a partir de ambas gráficas de velocidad.



Solución

¿Qué información nos dan?

La rapidez del misil antes de entrar a la nube es de 600 m/s, y al salir es de 500 m/s. El misil se demora 10 segundos cruzando el cúmulo de nubes. El misil vuela a 500 m/s durante 20 segundos hasta que se choca con una montaña. El misil se demora 2 segundos en enterrarse en la montaña. En el cúmulo de nubes y en la montaña el misil pierde rapidez de forma constante. El misil nunca perdió altura. El misil se mueve en la dirección positiva de X.

¿Qué nos piden?

(a) Aceleración del misil en la nube y en la montaña.

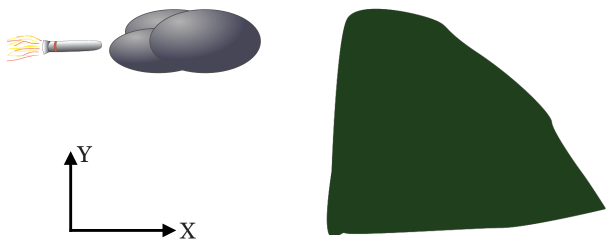
(b) Distancia recorrida por el misil desde que entra a la nube hasta que se detiene en la montaña.

(c) Realizar una gráfica de velocidad contra tiempo y usar esta gráfica para corroborar la distancia hallada en (b).

(d) Realizar una gráfica cualitativa de posición contra tiempo desde el momento en que el misil entra a la nube hasta que se detiene por completo.

(e) Responder (a) y (c) usando un sistema en el cual el misil se mueva en el sentido negativo de X. Comparar la gráficas de (c) con la nueva gráfica de velocidad, y analizar la rapidez del misil a partir de ambas gráficas.

(a) Primero, como en todos los problemas de cinemática, escogemos un sistema de coordenadas. Nos dicen que debemos escoger un sistema en el cual el misil se mueva en el sentido positivo de X. Además, como no pierde altura, el misil no se mueve en la dirección de Y:



Como la rapidez del misil cambia al entrar en la nube, el misil tiene aceleración mientras pasa por la nube. Y como nos dicen que el misil pierde rapidez de forma constante, entonces su aceleración es constante. Recordemos que la aceleración de un objeto está dada por

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t}. \tag{1}$$

La velocidad del misil justo antes de entrar en la nube es de 600 m/s, y según el sistema, apunta en la dirección positiva de X. Cuando sale de la nube, la velocidad del misil es de 500 m/s y también apunta en la dirección positiva de X. Además, el tiempo que pasa en la nube es de 10 segundos. Por lo tanto, la aceleración del misil será de

$$\vec{a} = \frac{(500 \text{ m/s})\hat{x} - (600 \text{ m/s})\hat{x}}{10 \text{ s}} = -(10 \text{ m/s}^2)\hat{x}. \tag{2}$$

Notemos el signo menos, que indica que la aceleración apunta en la dirección negativa de X. Es decir, la aceleración tiene dirección opuesta al movimiento del misil. *Cuando la aceleración tiene dirección contraria al movimiento del objeto, decimos que el objeto tiene desaceleración*. Pero como veremos pronto, el término "desacelerar" puede ser confuso. Es menos problemático si simplemente decimos que *el misil tiene aceleración en la dirección negativa de X*.

Cuando el misil está a punto de entrar en la montaña, su velocidad es de 500 m/s en la dirección positiva de X. Dos segundos después de entrar, se detiene completamente, así que su velocidad en X es simplemente cero. Por lo tanto, su aceleración al entrar en la montaña es

$$\vec{a} = \frac{(0 \text{ m/s})\hat{x} - (500 \text{ m/s})\hat{x}}{2 \text{ s}} = -(250 \text{ m/s}^2)\hat{x}. \tag{3}$$

De nuevo obtenemos una aceleración que apunta en el sentido negativo de X. Según nuestro sistema, esto quiere decir que el misil está perdiendo velocidad, lo cual es obvio, pues el misil se detiene por completo al enterrarse.

(b) La distancia recorrida por el misil desde que entra a la nube hasta que se entierra en la montaña se puede calcular como la suma de las diferentes distancias recorridas por este. Primero necesitamos hallar la distancia que recorre en la nube hasta que sale de ella, después, la distancia desde que sale de la nube hasta que choca con la montaña, y finalmente la distancia dentro de la montaña hasta detenerse.

Cuando está en la nube el misil tiene aceleración, así que la distancia recorrida en ese tramo está dada por (ver nota 2.18)

$$d = \left\| \frac{1}{2}at^2 + v_i t \right\|. \tag{4}$$

Como la velocidad del misil justo antes de entrar a la nube es de 600 m/s en la dirección positiva de X, el tiempo que pasa en la nube es de 10 segundos, y la aceleración es de 10 m/s^2 en la dirección negativa de x, como hallamos con la ecuación (2), entonces la distancia recorrida en la nube es

$$d_1 = \left\| -\frac{1}{2} \underbrace{(10 \text{ m/s}^2)}_{a} \underbrace{(10 \text{ s})}_{t}^2 + \underbrace{(600 \text{ m/s})}_{v_i} \underbrace{(10 \text{ s})}_{t} \right\| = (5500 \text{ m}), \tag{5}$$

donde hemos llamado d_1 a la distancia en este tramo. Desde que el misil sale de la nube hasta que choca con la montaña, el misil mantiene velocidad constante de 500 m/s en dirección positiva de X. Por lo tanto, la distancia recorrida en este trayecto se calcula usando que distancia es rapidez por tiempo:

$$d = vt. \tag{6}$$

Como la rapidez es de 500 m/s y el tiempo de este trayecto es de 20 segundos, entonces tenemos

$$d_2 = \underbrace{(500 \text{ m/s})}_{v} \underbrace{(20 \text{ s})}_{t} = (10000 \text{ m}), \tag{7}$$

donde hemos llamado d_2 a la distancia en este tramo.

Finalmente, al entrar en la montaña el misil vuelve a tener un movimiento con aceleración constante. En ese tramo su aceleración es de 250 m/s^2 en la dirección negativa de X, el tiempo es de 2 segundos, y la velocidad inicial al entrar en la montaña es de 500 m/s en la dirección positiva de X. Por lo tanto, la distancia recorrida es

$$d_3 = \left\| -\frac{1}{2} \underbrace{(250 \text{ m/s}^2)}_{a} \underbrace{(2 \text{ s})}_{t}^2 + \underbrace{(500 \text{ m/s})}_{v_i} \underbrace{(2 \text{ s})}_{t} \right\| = (500 \text{ m}), \tag{8}$$

donde hemos llamado d_3 a la distancia en este tramo. Por lo tanto, la distancia total recorrida será

$$d_{total} = d_1 + d_2 + d_3 = 5500 \text{ m} + 10000 \text{ m} + 500 \text{ m} = 16000 \text{ m}. \tag{9}$$

(c) Para realizar una gráfica de velocidad contra tiempo debemos tener en cuenta que el misil sigue tres movimientos diferentes. Primero es un movimiento con aceleración mientras pasa por la nube. Después es un movimiento con velocidad constante mientras vuela desde que sale de la nube hasta que llega a la montaña. Finalmente es un movimiento con aceleración al entrar en la montaña, pero una aceleración diferente a la de la nube. Así que para construir esta gráfica debemos construir tres gráficas y unirlas.

Al pasar por la nube el misil tiene aceleración. La velocidad cuando un objeto tiene aceleración está dada por

$$\vec{v}_f = \vec{a}t + \vec{v}_i. \tag{10}$$

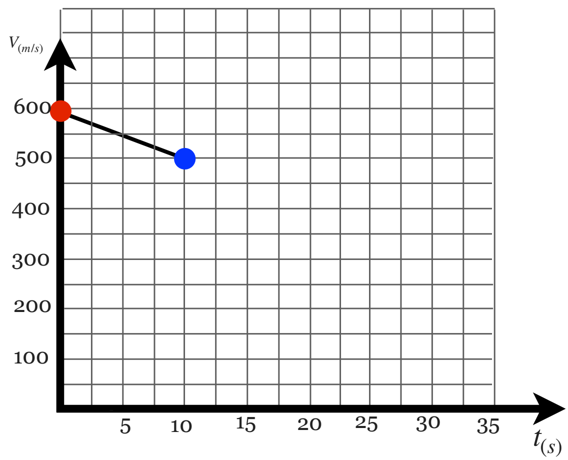
Usando la aceleración al pasar por la nube, que es de 10 m/s^2 en sentido negativo de X, y que la velocidad inicial es de 600 m/s en el sentido positivo de X, tenemos

$$v_f\hat{x} = -(10\ \mathrm{m/s^2})t\hat{x} + (600\ \mathrm{m/s})\hat{x}. \tag{11}$$

(No ponemos el tiempo porque queremos la ecuación en función del tiempo). Aplicando la regla de oro, esta ecuación se convierte en

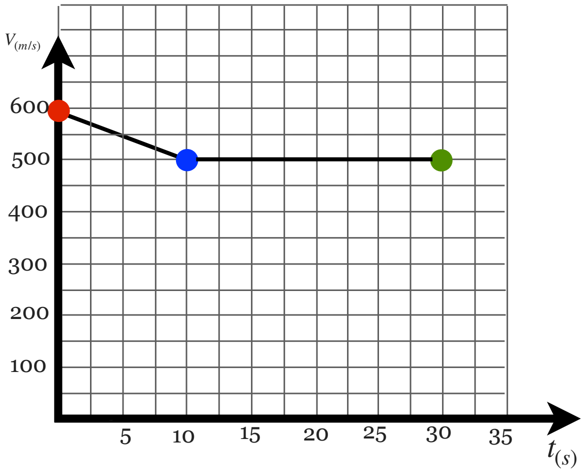
$$\vec{v}_f = -(10\ \mathrm{m/s^2})t + (600\ \mathrm{m/s}). \tag{12}$$

Esta es la ecuación de una línea recta, con pendiente negativa de 10 m/s^2, y que corta el eje Y en 600 m/s:



Gráfica de velocidad contra tiempo cuando el misil pasa por la nube. Comienza en 600 m/s y su pendiente es de −10 m/s^2. En 10 segundos el misil disminuye la velocidad hasta 500 m/s (punto azul).

Desde que el misil sale de la nube hasta que choca con la montaña, el misil viaja a velocidad constante de 500 m/s, en sentido positivo de X. Por lo tanto, en este trayecto, que dura 20 segundos, su velocidad en función del tiempo es una línea horizontal:



Cuando el misil sale de la nube, mantiene durante 20 segundos una velocidad de 500 m/s en el sentido positivo de X (hasta el punto verde).

Finalmente el misil choca con la montaña y vuelve a tener aceleración negativa. Esta parte de la gráfica la podemos realizar escribiendo la ecuación de movimiento en ese tramo, que es

$$v_f \hat{x} = -(250\ \mathrm{m/s^2})t\hat{x} + (500\ \mathrm{m/s})\hat{x}. \tag{13}$$

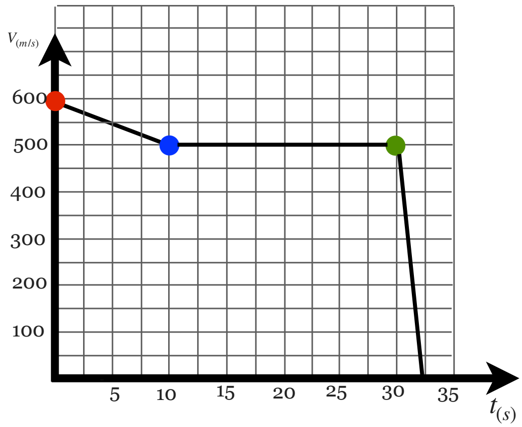
Al aplicar la regla de oro, obtenemos

$$v_f = -(250\ \mathrm{m/s^2})t + (500\ \mathrm{m/s}). \tag{14}$$

Esta es una recta con pendiente negativa de 250 m/s^2 que corta el eje Y en 500 m/s. Pero cuidado, la recta dada por la ecuación (14) no corta el eje Y de la gráfica que estamos construyendo, porque la gráfica que estamos construyendo tiene en cuenta otros tiempos. De hecho, para ser rigurosos, la ecuación (14) debería escribirse como

$$v_f = -(250\ \mathrm{m/s^2})(t + 30\ \mathrm{s}) + (500\ \mathrm{m/s}), \tag{15}$$

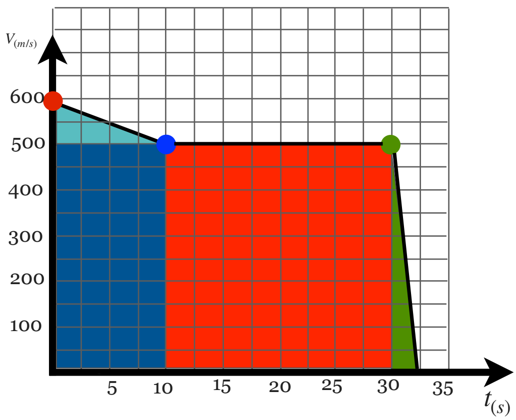
porque *ya han pasado 30 segundos según nuestra última gráfica*. Aunque podemos trazar esta línea recta con facilidad, es aun más fácil si nos olvidamos de la ecuación 15 y tenemos en cuenta que desde que el misil entra a la montaña hasta que se detiene, pasan 2 segundos. Cuando se detiene la velocidad es cero. Por lo tanto, la línea recta de este tramo es muy fácil de construir:



Cuando el misil entra a la montaña, pasa de tener velocidad de 500 m/s en dirección positiva de X a cero, en dos segundos.

Notemos lo pendiente que es la última recta. Esto indica que el misil tiene una gran aceleración negativa al entrar a la montaña, lo cual se intuye con facilidad.

Usando esta última gráfica, debemos corroborar la distancia total recorrida hallada en el numeral anterior. Recordemos que la distancia recorrida es igual al área encerrada en una gráfica de velocidad contra tiempo. Haciendo geometría simple, podemos calcular esta distancia:



El área encerrada es igual a la distancia total recorrida. Notemos que este área total es la suma del área de dos triángulos y de dos rectángulos.

El área del triángulo de color azul claro es igual a 10 segundos (que es la base) por 100 m/s (que es la altura), sobre dos. Esto da 500 m. El área del rectángulo azul oscuro es 10 segundos, que es la base, por 500 m/s, que es la altura, es decir, 5000 m. El área del rectángulo rojo es de 20 segundos, que es la base, por 500 m/s, que es la altura, es decir, 10000 m. Finalmente, el área del triángulo verde es de 2 segundos, que es la base, por 500 m/s, que es la altura, dividido 2, es decir, 500 m. Así, el área total es

$$A_{total} = 500\text{ m} + 5000\text{ m} + 10000\text{ m} + 500\text{ m} = 16000\text{ m}. \tag{16}$$

Esto concuerda con lo hallado en el numeral (b), ecuación (9).

(d) Ahora debemos realizar una gráfica cualitativa de posición contra tiempo para todo el recorrido del misil. Esta gráfica es fácil de hacer porque sólo es cualitativa (sólo importa la forma).

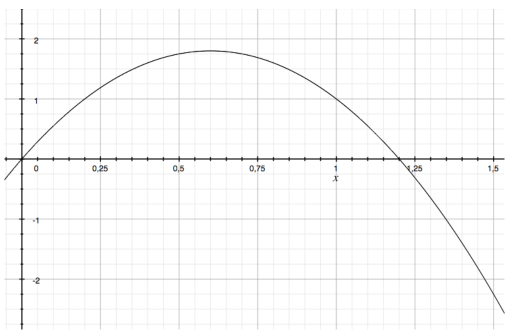
Primero escribamos la ecuación de movimiento del misil en la nube según el sistema escogido. La aceleración en la nube es negativa y es de 10 m/s^2 como hallamos en la sección (a). La posición inicial es cero. Además, la velocidad inicial al entrar a la nube es de 600 m/s positiva en X. Por lo tanto, la ecuación de movimiento es

$$x_f\hat{x} = -\frac{1}{2}(10\text{ m/s}^2)t^2\hat{x} + (600\text{ m/s})t\hat{x}. \tag{17}$$

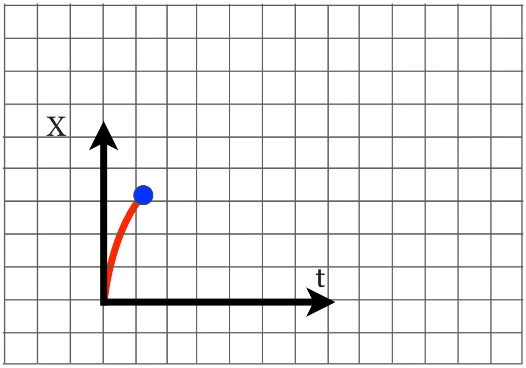
Si aplicamos la regla de oro, esta ecuación queda

$$x_f = -\frac{1}{2}(10\text{ m/s}^2)t^2 + (600\text{ m/s})t. \tag{18}$$

Esta es la ecuación de una parábola (para repasar cómo graficar parábolas véase el problema 2.15). Como el término cuadrático es negativo, esta parábola se abre hacia abajo. Además, como el término lineal y el cuadrático tienen signos diferentes, la parábola está corrida en el sentido positivo de X. Además, la parábola corta el eje Y en el origen porque la posición inicial es cero. El lector podría dibujar una parábola así:

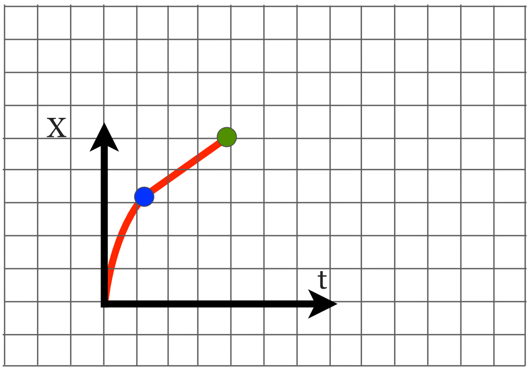


Sin embargo, hacer esa gráfica sería un error. Cuando el misil sale de la nube, el misil tiene velocidad de 500 m/s. Esto quiere decir que, aunque la rapidez ha disminuido desde 600 m/s hasta 500 m/s, el misil todavía está lejos de tener velocidad cero. Y como la velocidad es cero en el punto más alto de la parábola (nota 2.21), entonces podemos inferir que *al salir de la nube la parábola de la posición no ha llegado al punto más alto*. Por lo tanto, deberíamos dibujar un pedazo de parábola que todavía está creciendo (que no alcanza a llegar al punto más alto):



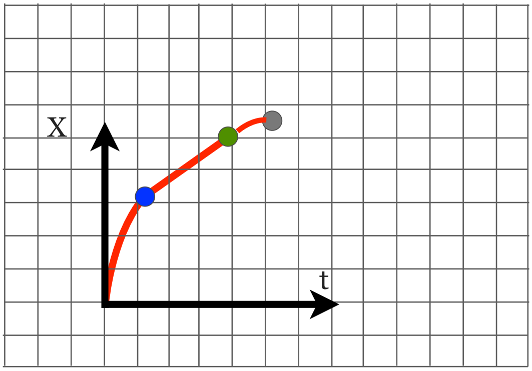
El misil tiene aceleración negativa mientras pasa por la nube. Además, al salir de la nube, el misil sigue con velocidad positiva así que la parábola no alcanza a llegar a su punto más alto.

Después de que sale de la nube, el misil vuela con velocidad constante positiva, así que la gráfica de posición contra tiempo en este tramo es una línea recta.



Entre la nube y la montaña el misil se mueve con velocidad positiva, así que en ese tramo su gráfica de posición contra tiempo es una línea recta.

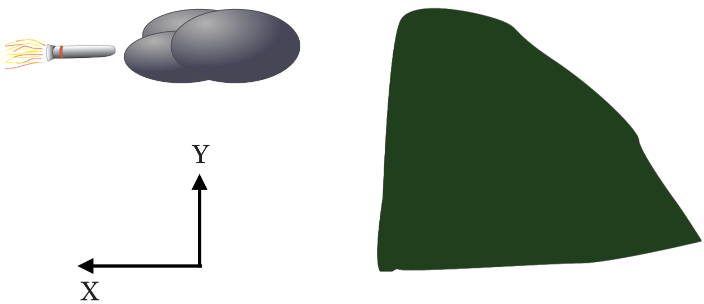
Finalmente, al enterrarse en la montaña el misil tiene aceleración negativa, o sea que su gráfica es la de una parábola que se abre hacia abajo. Además, el misil llega a velocidad cero, lo que quiere decir que la parábola alcanza a llegar al punto más alto. Esta vez tenemos que tratar de que la pendiente de la primera línea recta de la nueva parábola concuerde con la pendiente de la línea recta anterior, pues la velocidad justo al entrar a la montaña es de 500 m/s (para entender por qué las pendientes deben ser iguales, se recomienda leer los comentarios adicionales al final del ejercicio):



Al enterrarse en la montaña el misil alcanza velocidad cero, así que la parábola en ese tramo llega a su punto más alto.

La anterior es una gráfica esquemática de posición contra tiempo para todo el trayecto del misil.

(e) Ahora debemos elegir un sistema en el cual el misil se mueve en la dirección negativa de X:



Según este sistema, la velocidad del misil al entrar a la nube es de 600 m/s en la dirección negativa, y la velocidad al salir de la nube es de 500 m/s en la misma dirección. Por lo tanto, la aceleración del misil en este tramo es

$$\vec{a} = \frac{(-500\ \mathrm{m/s})\hat{x} - (-600\ \mathrm{m/s})\hat{x}}{10\ \mathrm{s}} = (10\ \mathrm{m/s^2})\hat{x}. \qquad (19)$$

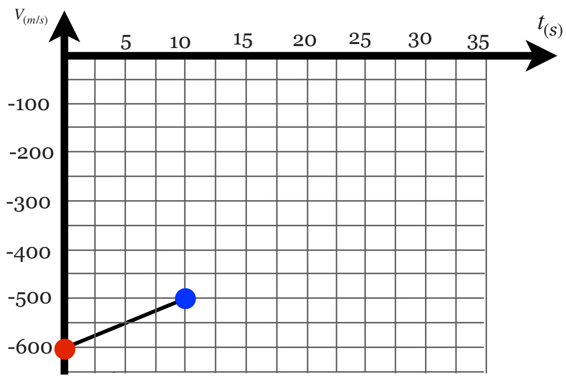
Notemos que la magnitud de esta aceleración es igual a la magnitud de la aceleración hallada con el sistema anterior en la ecuación (2), pero el signo es positivo (antes era negativo).

Cuando el misil entra a la montaña, su velocidad es de 500 m/s en el sentido negativo de X, y al final su velocidad es cero. Por lo tanto, la aceleración en este tramo es

$$\vec{a} = \frac{(500\ \mathrm{m/s})\hat{x} - (0\ \mathrm{m/s})\hat{x}}{2\ \mathrm{s}} = (250\ \mathrm{m/s^2})\hat{x}. \tag{20}$$

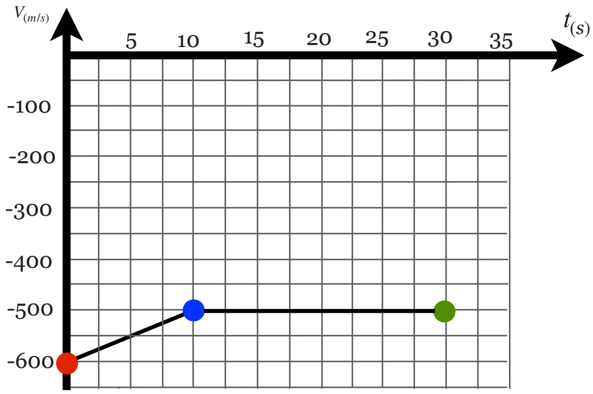
De nuevo, la aceleración es de la misma magnitud que la hallada antes, pero con signo positivo esta vez.

Ahora debemos realizar una gráfica de velocidad contra tiempo para todo el recorrido del misil, teniendo en cuenta el nuevo sistema de coordenadas. Desde el tiempo inicial hasta cuando sale de la nube (a los 10 segundos), el misil tiene aceleración positiva de magnitud 10 m/s^2 como dice la ecuación (19). Esto quiere decir que en este tramo la velocidad del misil es una recta con pendiente positiva. Además, la línea comienza en la parte negativa del eje Y, que corresponde a la rapidez de −600 m/s, que es la rapidez del misil justo antes de entrar a la nube, y termina en −500 m/s, que es la rapidez del misil al salir de la nube:



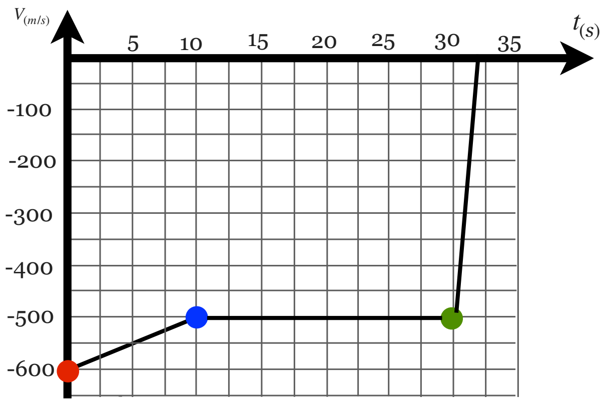
Gráfica de velocidad contra tiempo cuando el misil pasa por la nube. Comienza en −600 m/s y su pendiente es de 10 m/s^2. En 10 segundos el misil aumenta la velocidad hasta −500 m/s (punto azul).

Desde el segundo 10, y durante 20 segundos, el misil se mantiene volando con velocidad constante, hasta que choca con la montaña. Su rapidez en ese tramo es de −500 m/s, que es la rapidez con la que sale de la nube. Por lo tanto, entre el segundo 10 y el 30 la gráfica de velocidad contra tiempo es la gráfica de una línea horizontal:



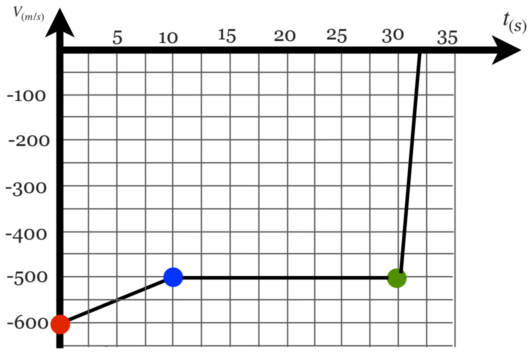
Desde que sale de la nube hasta el segundo 30, el misil vuela con velocidad constante de -500 m/s.

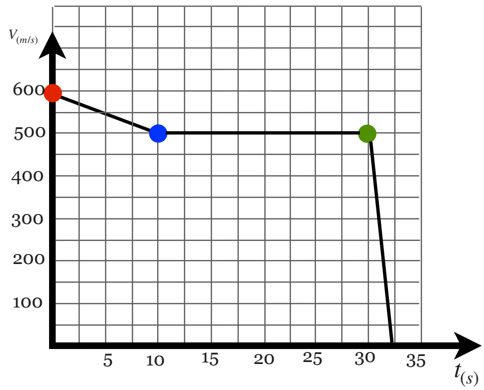
Finalmente, el misil se entierra en la montaña. En ese tramo, según el sistema elegido, el misil tiene aceleración positiva de magnitud 250 m/s^2, así que su gráfica de velocidad corresponde a una línea con pendiente positiva. El misil alcanza la rapidez cero en 2 segundos:



El misil choca con la montaña y durante dos segundos tiene aceleración positiva de magnitud 250 m/s^2, hasta que su velocidad es cero.

Ahora debemos comparar esta gráfica de velocidad contra tiempo con la gráfica realizada en (c), con el otro sistema. Para hacerlo, podemos poner una debajo de la otra:





Las gráficas son muy parecidas, sólo que una es una inversión de la otra. En la gráfica inferior la aceleración es negativa entre 0 y 10 segundos, pero en la gráfica superior la aceleración es positiva entre 0 y 10 segundos. En ambas la velocidad se mantiene constante entre el segundo 10 y el segundo 20, pero en la gráfica superior la velocidad que se mantiene constante es de $-(500\ \mathrm{m/s})\hat{x}$, mientras que en la gráfica inferior la velocidad que se mantiene constante es de $(500\ \mathrm{m/s})\hat{x}$. Finalmente, entre el segundo 30 y 32, la aceleración del misil es positiva en la gráfica superior, y negativa en la gráfica inferior. En la gráfica superior el misil aumenta su velocidad desde $-(500\ \mathrm{m/s})\hat{x}$ hasta $(0\ \mathrm{m/s})\hat{x}$, mientras que en la otra gráfica el misil disminuye su velocidad desde $(500\ \mathrm{m/s})\hat{x}$ hasta $(0\ \mathrm{m/s})\hat{x}$.

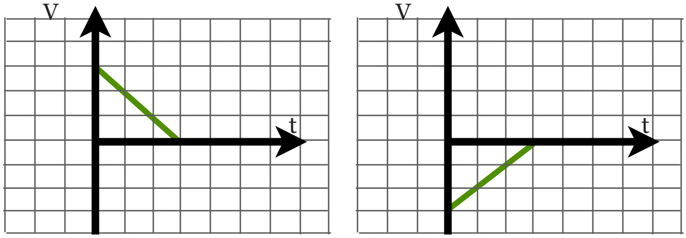
Ahora debemos analizar el comportamiento de la rapidez del misil según las dos gráficas. En la gráfica superior la rapidez inicial es de 600 m/s, pues la magnitud de la velocidad es la rapidez, y la velocidad inicial es $-(600\ \mathrm{m/s})\hat{x}$. En el segundo 10 la rapidez según la gráfica superior es de 500 m/s, que correspondería a la magnitud de $-(500\ \mathrm{m/s})\hat{x}$. O sea que en la gráfica superior la rapidez pasó desde 600 m/s hasta 500 m/s, es decir, disminuyó en 100 m/s. Después la rapidez se mantiene constante, con un valor de 500 m/s que corresponde a la magnitud de $-(500\ \text{m/s})\hat{x}$. Finalmente la rapidez pasa de 500 m/s, hasta cero, que es la magnitud de la velocidad cero. Esto es muy importante, porque se puede llegar a pensar que si la aceleración es positiva entonces la rapidez aumenta. Como vemos en la gráfica superior, entre el segundo 30 y 32 la aceleración es positiva, pues la velocidad pasa de ser $-(500\ \text{m/s})\hat{x}$ a $(0\ \text{m/s})\hat{x}$. Sin embargo, la rapidez no está aumentando sino disminuyendo pues pasa de ser 500 m/s a ser 0 m/s.

Notemos que el *comportamiento de la rapidez es exactamente igual según la gráfica inferior*: la rapidez inicial también es 600 m/s, pues la magnitud de $(600\ \text{m/s})\hat{x}$, que es la velocidad inicial, es 600 m/s. En el segundo 10, en la gráfica inferior, la rapidez también es 500 m/s, pues la magnitud de $(500\ \text{m/s})\hat{x}$ es 500 m/s. La rapidez se mantiene constante durante 20 segundos, y después disminuye desde 500 m/s hasta cero, en el segundo 32. Esto muestra de nuevo que aunque la velocidad y la aceleración dependen del sistema de coordenadas, la rapidez, que es la magnitud de la velocidad, no.

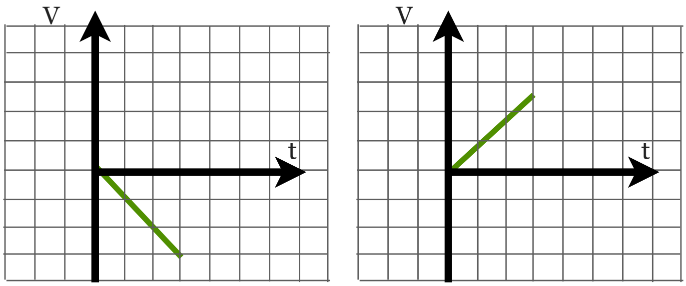
Por otro lado, este problema sirve para aclarar una confusión. Según la gráfica superior, entre el segundo 30 y 32 la aceleración es positiva, es decir, la velocidad aumenta. ¿Pero no es muy raro decir que la velocidad del misil está aumentando entre el segundo 30 y 32, si en ese momento el misil se está enterrando en la montaña? ¿No se supone que el misil está frenando y disminuyendo su velocidad al entrar a la montaña? Esta es una confusión muy común. La confusión viene de que nos olvidamos de la diferencia entre velocidad y rapidez. Según ambas gráficas la rapidez del misil está disminuyendo al enterrarse en la montaña, y esto es precisamente lo que nos dicen nuestras intuiciones. Pero que la velocidad esté aumentando mientras el misil se entierra en la montaña según uno de los sistemas no es raro, porque el aumento de la velocidad resulta del sistema elegido; hemos elegido un sistema en el cual el misil se mueve en dirección negativa.

En algunos libros suele decirse que una aceleración negativa es una desaceleración. Sin embargo, el término *desaceleración* puede ser confuso. La desaceleración parece ser un concepto de la vida diaria que en realidad tiene que ver con la disminución de rapidez, no con la disminución de velocidad. Por ejemplo, parece que estamos de acuerdo en que el misil está desacelerando al entrar en la montaña, y también parece que si alguien aplica los frenos de la bicicleta, la bicicleta desacelera sin importar cuál es el sistema. Si usamos el concepto así, entonces estamos relacionando la desaceleración con la disminución de la rapidez y no con la disminución de la velocidad. Otros pueden usar el concepto de desaceleración sólo para referirse a la disminución de velocidad y no de rapidez. Pero para evitar esta posible ambigüedad, es mejor no usar el concepto de desaceleración y decir simplemente "aceleración negativa según nuestro sistema".

Ahora bien, el aumento o disminución de la rapidez se puede observar en una gráfica de velocidad contra tiempo. Si a medida que pasa el tiempo la línea de la velocidad se está acercando al eje del tiempo, ya sea por arriba o por abajo, la rapidez está disminuyendo (pues la magnitud de la velocidad está disminuyendo). Si a medida que pasa el tiempo la línea de la velocidad se está alejando de la línea del tiempo, por arriba o por abajo, la rapidez está aumentando. Estas ideas se ilustran en las siguientes figuras:



En la gráfica izquierda, la línea de la velocidad se acerca al eje del tiempo a medida que pasa el tiempo, desde arriba. En la gráfica derecha la línea de la velocidad se acerca al eje del tiempo, a medida que pasa el tiempo, desde abajo. Por lo tanto, como ambas líneas de velocidad se acercan al eje del tiempo, en ambos casos la rapidez está disminuyendo. Sin embargo, en la gráfica izquierda la velocidad disminuye mientras que en la derecha aumenta.

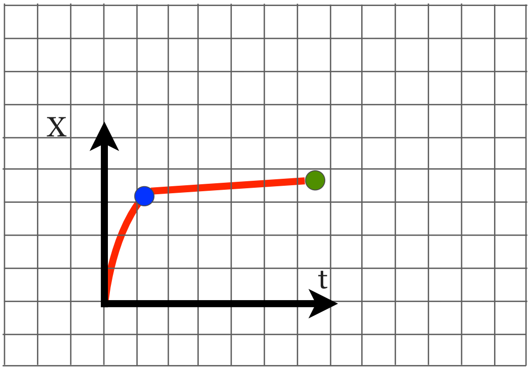


En la gráfica izquierda, la línea de la velocidad se aleja hacia abajo del eje del tiempo a medida que pasa el tiempo. En la gráfica derecha la línea de la velocidad se aleja del eje del tiempo hacia arriba, a medida que pasa el tiempo. Por lo tanto, como ambas líneas de velocidad se alejan del eje del tiempo, en ambos casos la rapidez está aumentando. Sin embargo, en la gráfica izquierda la velocidad está disminuyendo, mientras que en la derecha la velocidad está aumentando.

Nota 2.22. Disminución y aumento de rapidez en una gráfica de velocidad contra tiempo

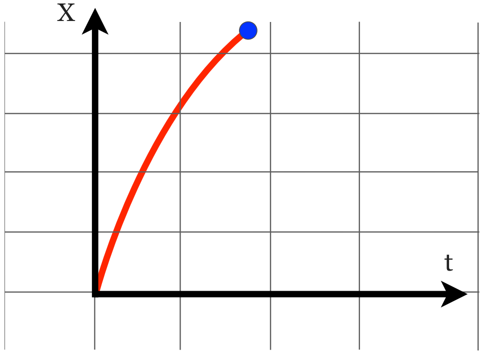
Si la aceleración es positiva la velocidad está aumentando, pero no se sigue de esto que la rapidez está aumentando. Si la aceleración es negativa la velocidad está disminuyendo, pero no necesariamente la rapidez está disminuyendo. La rapidez aumenta sólo si la magnitud de la velocidad aumenta, es decir, si en la gráfica de la velocidad contra tiempo la línea de la velocidad se aleja del eje del tiempo. La rapidez disminuye sólo si la magnitud de la velocidad disminuye, es decir, si en la gráfica de velocidad contra tiempo la línea de la velocidad se acerca al eje del tiempo.

Comentarios adicionales para la sección (d): El lector podría preguntar por qué le pusimos a la recta de la figura esa pendiente y no otra, si sólo nos importa la forma de la gráfica. Por ejemplo, ¿por qué no usamos la siguiente recta?:



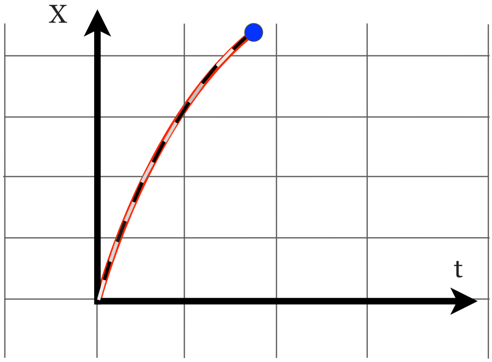
¿Por qué no podíamos dibujar otra recta con pendiente positiva como esta?

Para entender bien por qué la gráfica anterior es una mala gráfica, necesitamos algunos conceptos de cálculo. Esos conceptos los podemos introducir de forma sencilla gráficamente. Así como la pendiente de una recta de posición contra tiempo nos indica la velocidad, también una parábola de posición contra tiempo tiene información sobre la velocidad del objeto. Claramente, una parábola no tiene una pendiente, pero podemos imaginar que si nos acercamos mucho a la gráfica (si hacemos mucho *zoom*), podemos usar pequeños segmentos rectos para describir la parábola (esto es una aproximación, pero en el límite, cuando nos acercamos a distancias de longitud cero, es una excelente aproximación). Por ejemplo, si hacemos mucho *zoom* a la parábola de posición contra tiempo del misil en la nube, obtenemos



Hacemos mucho *zoom* a la gráfica.

Ahora podemos imaginar que este trozo de parábola se puede aproximar usando una unión de muchas líneas rectas:



Podemos aproximar la parábola con una sucesión de líneas rectas muy cortas (líneas negras y blancas).

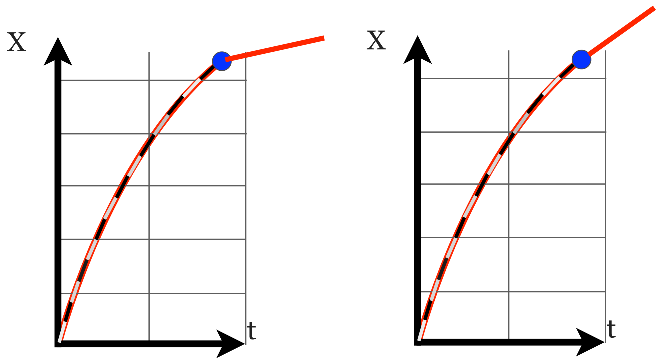
Recordemos que la pendiente de una línea recta en una gráfica de posición contra tiempo representa la velocidad de un objeto y que la velocidad instantánea es la velocidad de un objeto en cada instante. Estas líneas rectas son una forma gráfica de representar la velocidad instantánea del objeto; cada línea corresponde a una velocidad instantánea.

Notemos que la primeras líneas rectas son muy inclinadas y las últimas son cada vez menos inclinadas. Como las líneas representan la velocidad, esto quiere decir que al principio las velocidades instantáneas del misil son mayores que al final. Y esto tiene sentido porque el misil está perdiendo velocidad al pasar por la nube.

Además, recordemos que en la parte más alta o más baja de la parábola de posición contra tiempo la velocidad es cero. Eso se puede entender con las líneas que hemos trazado: si trazamos la parábola con líneas rectas pequeñas, entonces en el punto más alto o más bajo de la parábola vamos a tener líneas rectas horizontales, es decir, líneas de pendiente cero. Y una línea de pendiente cero representa velocidad cero.

La última línea recta (la que llega al punto azul) corresponde a la velocidad del objeto justo cuando sale de la nube. La primera línea recta (que parte del origen) corresponde a la velocidad del misil cuando entra a la nube. En el problema nos dicen que la velocidad al entrar a la nube es de 600 m/s en el sentido positivo de X, y la velocidad al salir de la nube es de 500 m/s en el sentido positivo. Esto quiere decir que la pendiente de la primera línea recta de la gráfica anterior corresponde a una velocidad de 600 m/s positiva, y la pendiente de la última línea recta corresponde a una velocidad de 500 m/s positiva. Dado que al salir de la nube el misil se mantiene con velocidad de 500 m/s hasta que llega a la montaña, en nuestra gráfica la línea recta de ese tramo (desde que sale de la nube hasta que llega a la montaña) tiene que tener la misma pendiente que la última línea recta (la que llega al punto azul) de nuestra parábola.

Si le ponemos una pendiente a la línea de la posición contra tiempo del misil desde que sale de la nube hasta que llega a la montaña diferente a la pendiente de la última línea de la parábola, entonces no estamos siendo consecuentes, pues ambas velocidades son la misma (500 m/s):



La línea recta después de salir de la nube tiene que tener la misma pendiente que la última línea recta de la parábola, pues la pendiente de la última línea recta de la parábola representa la velocidad del misil justo al salir de la nube (esa velocidad se mantiene). En la figura izquierda la pendiente de la línea roja final no concuerda con la línea negra que está al final de la parábola, pero en la figura derecha sí lo hacen. Así, la figura derecha es la correcta.

Una explicación similar se da para las pendientes de la gráfica 4 del apartado (d).

Problema 2.18.

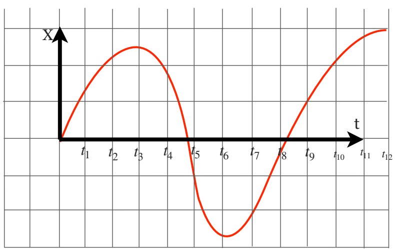
Palabras clave: gráfica de posición contra tiempo para un movimiento uniformemente acelerado, aumento y disminución de rapidez, aumento y disminución de velocidad, máxima rapidez, máxima velocidad, rapidez mínima, velocidad mínima.

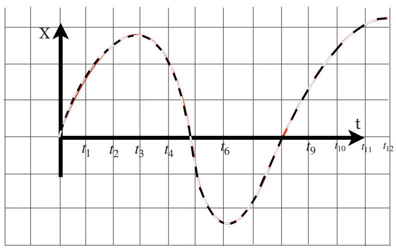
A continuación el lector puede encontrar dos gráficas de posición contra tiempo para un objeto. Las dos gráficas son exactamente la misma, sólo que la gráfica derecha fue construida poniendo segmentos pequeños de líneas rectas sobre la gráfica roja. Teniendo en cuenta que los segmentos de línea recta indican la velocidad del objeto en cada instante (véanse los comentarios adicionales del problema 2.17):

(a) Diga más o menos en qué instantes el objeto se mueve con mayor velocidad y con mayor rapidez.

(b) En qué instantes el objeto se mueve con menor velocidad y con menor rapidez.

(c) En qué intervalos de tiempo el objeto tiene aceleración positiva y en cuáles tiene aceleración negativa.





Solución

¿Qué información nos dan?

Nos dan dos gráficas de posición contra tiempo. La gráfica derecha es exactamente igual, sólo que construida con pequeñas líneas rectas, cada una representando la velocidad en cierto instante.

¿Qué nos piden?

(a) Decir en qué instantes el objeto se mueve con mayor velocidad y mayor rapidez.

(b) Decir en qué instantes el objeto se mueve con menor rapidez y menor velocidad.

(c) Decir en qué intervalos de tiempo el objeto tiene aceleración positiva y en cuáles tiene aceleración negativa.

(a) Recordemos que la pendiente de una recta en una gráfica de posición contra tiempo indica la velocidad. En este caso no tenemos una recta sino muchos segmentos de recta, uno en cada instante. La pendiente de estos segmentos también indica la velocidad, pero no la velocidad total, sino la velocidad en cada instante. Debemos buscar las mayores velocidades, así que debemos buscar los segmentos de recta que tengan la mayor pendiente positiva.

A partir de la figura derecha podemos inferir que entre el tiempo inicial y el tiempo t_3 todos los segmentos tienen pendiente positiva. Lo mismo sucede entre el tiempo t_6 y t_{12}. A simple vista se ve que los segmentos más inclinados son los primeros, entre el tiempo inicial y t_1 (a medida que subimos en la parábola, los segmentos comienzan a ser cada vez menos inclinados, hasta que llegamos a un segmento horizontal que indica velocidad cero).

Como la rapidez es la magnitud de la velocidad, las rapideces más grandes corresponden a las mayores velocidades. Antes encontramos las velocidades más grandes, pero notemos que las velocidades muy negativas también tienen gran magnitud, así que no debemos ignorarlas. Más o menos en el tiempo t_5 encontramos los segmentos más inclinados, así que en ese tiempo el objeto se mueve con la mayor rapidez.

(b) Las velocidades más negativas son aquellas que tienen las pendientes más inclinadas y negativas. Esos segmentos son precisamente los mismos de la rapidez más grande, en el tiempo t_5 (en ninguna otra parte encontramos rectas tan inclinadas y negativas).

Las rapideces más pequeñas son aquellas en las que la velocidad tiene la menor magnitud posible. La menor magnitud posible corresponde a velocidad cero (la magnitud de cero es, obviamente, cero). Por lo tanto, las menores rapideces ocurren en aquellos instantes en los cuales la velocidad es cero. Como ya sabemos, la velocidad es cero en el punto más alto y más bajo de la parábola (nota 2.21) (esto tiene sentido dado que en esos puntos los segmentos de recta tienen pendiente cero). Es decir, la rapidez es menor en los instantes t_3 y t_6.

(c) La aceleración es positiva cuando la parábola se abre hacia arriba. La primera parábola se abre hacia abajo así que entre el tiempo inicial y el tiempo t_5 tenemos aceleración negativa. La segunda parábola se abre hacia arriba, así que entre el tiempo t_5 y el tiempo t_8 tenemos aceleración positiva. La tercera parábola, desde t_8 hasta t_{12} no se ve completa pero se alcanza a notar que se abre hacia abajo también, así que la aceleración es negativa.

Nota 2.23. : Interpretando una gráfica de posición contra tiempo

- La gráfica de posición contra tiempo puede ser muy complicada, puede ser una curva extraña y, sin embargo, si ponemos pequeñas líneas rectas sobre la curva, podemos analizar el movimiento del objeto.

- La velocidad es positiva en los tiempos en los cuales las pendientes de los segmentos rectos es positiva.

- La velocidad es negativa en los tiempos en los cuales las pendientes de los segmentos rectos son negativas.

- La velocidad es cero cuando la pendiente de los segmentos es cero, y esto ocurre en la parte más alta y más baja de la parábola.

- La rapidez es máxima cuando los segmentos están lo más inclinados que sea posible (sin importar si son negativos o positivos) y la rapidez es mínima cuando la velocidad es cero.

- Por último, la aceleración es positiva si la velocidad es cada vez más positiva (si los segmentos están cada vez más inclinados de forma positiva, o cada vez menos inclinados si son negativos).

Problema 2.19.

Palabras clave: gráfica de posición contra tiempo para un movimiento uniformemente acelerado, gráfica de velocidad contra tiempo para movimiento uniformemente acelerado, uso de distintos sistemas de coordenadas.

María Paula hizo una gráfica de velocidad contra tiempo para un camión que inicialmente se mueve en línea recta hacia el norte. Iván hizo una gráfica de posición contra tiempo para ese mismo camión. Usted no sabe qué sistema de coordenadas usó cada uno.

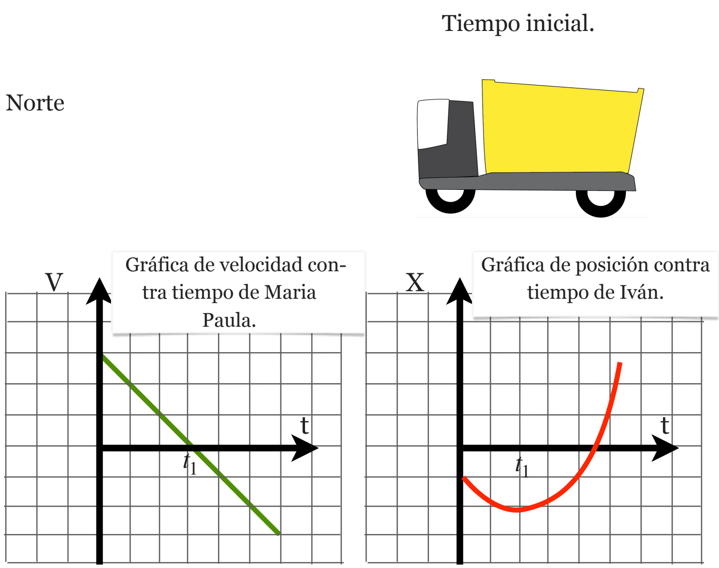
(a) Explique cómo se está moviendo el camión según la gráfica de Iván, y qué sistema de coordenadas está usando Iván.

(b) Realice una gráfica de velocidad contra tiempo según el sistema usado por Iván.

(c) Explique el movimiento del camión según la gráfica de María Paula y diga cuál sistema de coordenadas está usando ella.

(d) Realice una gráfica de posición contra tiempo para María Paula, y puede completar la información que haga falta como desee.

(e) Compare el comportamiento del camión según Iván y según María Paula.



Solución

¿Qué información nos dan?

Conocemos la gráficas de velocidad contra tiempo del camión según María Paula, y la gráfica de posición contra tiempo del mismo camión según Iván. Nos dicen que, inicialmente, el camión se mueve hacia el norte.

¿Qué nos piden?

(a) Explicar cómo se está moviendo el camión según la gráfica de Iván, y decir qué sistema de coordenadas está usando Iván.

(b) Realizar una gráfica de velocidad contra tiempo según el sistema de Iván.

(c) Explicar cómo se está moviendo el camión según la gráfica de María Paula, y decir qué sistema de coordenadas está usando ella.

(d) Realizar la gráfica de posición contra tiempo para María Paula (y podemos completar la información que haga falta como deseemos).

(e) Comparar el comportamiento del camión según Iván y según María Paula.

(a) Según Iván, la gráfica de posición contra tiempo del camión es una parábola que se abre hacia arriba. Esto quiere decir que según el sistema de Iván, el camión tiene aceleración positiva. Además, desde el tiempo inicial hasta el tiempo t_1 la velocidad es negativa, pues la pendiente de las velocidades instantáneas en cada punto desde el inicio hasta t_1 es negativa (imaginemos de nuevo muchos segmentos rectos describiendo la forma de la parábola, como en el problema 2.18). Esto implica que Iván escogió un sistema según el cual la dirección inicial en la que se mueve el camión es negativa. Como el camión se mueve inicialmente hacia el norte, entonces podemos inferir que para Iván el sentido positivo del eje X (o el eje que sea que haya usado) apunta hacia el sur y el sentido negativo hacia el norte.

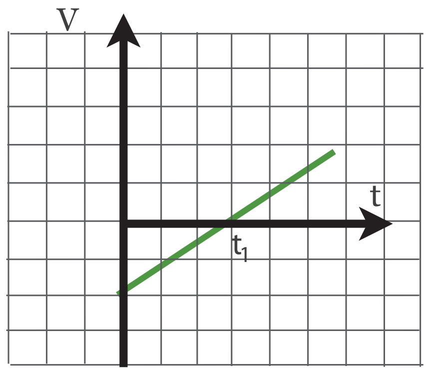
Además, entre el tiempo inicial y el tiempo t_1 la rapidez del camión disminuye; al principio los segmentos de recta que podemos imaginar sobre la parábola son muy inclinados, lo que indica una velocidad muy negativa, pero a medida que nos acercamos al tiempo t_1 esos segmentos de recta son cada vez menos inclinados hasta que, en t_1, tenemos un segmento que no está inclinado, que corresponde a rapidez cero (en ese punto llegamos a la parte más baja de la parábola). Es decir, desde el tiempo inicial hasta t_1 podemos inferir que el camión está frenando.

A partir de t_1 la velocidad comienza a ser positiva, pues es claro que los segmentos de recta que imaginamos sobre la parábola tienen pendiente positiva. Esto quiere decir que a partir de t_1 el camión se mueve en la dirección contraria a la que se estaba moviendo inicialmente, es decir, ahora el camión se debe de estar moviendo hacia el sur. Además, la velocidad positiva es cada vez mayor, lo que indica que la velocidad y la rapidez están aumentando, así que *el camión se mueve cada vez más rápido hacia el sur*.

Finamente, de la gráfica de Iván podemos inferir que la posición inicial del camión es algún punto en la parte negativa del eje X que él está usando, pues la parábola corta el eje Y en un punto negativo. Con todos estos elementos, podemos saber que el sistema de Iván es el siguiente:

El sistema de Iván es uno en el cual la posición inicial del camión está en la parte negativa del eje X. Además, es uno en el cual, en el tiempo inicial, el camión se está moviendo en la dirección negativa del eje X (es decir, el sentido positivo del eje X apunta hacia el sur, y el negativo hacia el norte).

(b) Como ya dijimos, según el sistema de Iván, el camión tiene aceleración positiva, así que la velocidad está aumentando. El camión comienza con velocidad negativa, y después empieza a aumentar su velocidad de forma constante hasta que pasa por velocidad cero en t_1 y luego alcanza velocidades positivas. Por lo tanto, la gráfica de velocidad contra tiempo según Iván es la siguiente:



Gráfica de velocidad contra tiempo de Iván. Primero el camión tiene velocidad negativa, en t_1 tiene velocidad cero y después positiva.

Cuidado: aunque la velocidad está siempre aumentando según el sistema de Iván, no podemos inferir que la rapidez siempre está aumentando. De hecho, entre el tiempo inicial y el tiempo t_1 sabemos que la rapidez está disminuyendo porque la línea de la velocidad se está acercando a cero (nota 2.22).

(c) Según la gráfica de María Paula el camión tiene aceleración negativa. Además, según la gráfica de María Paula, en el tiempo cero la velocidad del camión es positiva. En el enunciado nos dicen que inicialmente el camión se está moviendo hacia el norte. Por lo tanto, María Paula escogió un sistema según el cual el eje del movimiento inicial del camión apunta hacia el norte. Si suponemos que este eje es X (puede ser cualquier eje), entonces esto quiere decir que la dirección positiva de X apunta hacia el norte.

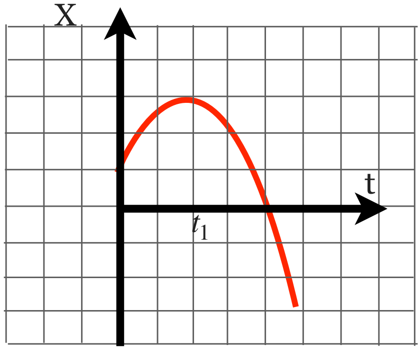
Según la gráfica de María Paula, el camión se mueve con velocidad positiva pero comienza a disminuir su velocidad de forma constante hasta que en el tiempo t_1 la velocidad es cero. En este tramo también está disminuyendo la rapidez, pues la línea de la velocidad se está acercando a cero (nota 2.22). O sea que en este tramo el camión debe de estar frenando hasta que se detiene por completo en t_1. Pero después de detenerse por completo, el camión sigue disminuyendo su velocidad. A partir de ese momento empieza a tener velocidad negativa, y su velocidad es cada vez más negativa. Esto quiere decir dos cosas: primero, que ahora el camión debe estar andando hacia el sur. Y segundo, como su velocidad es cada vez más negativa, el camión se está moviendo cada vez más rápido hacia el sur (la línea de la velocidad se está alejando de cero, así que la rapidez está aumentando).

A diferencia del caso de Iván, no sabemos cuál es el origen escogido por María Paula, pues *una gráfica de velocidad contra tiempo no nos dice nada acerca del origen*. Ignorando el origen, el sistema de coordenadas usado por María Paula debe ser el siguiente:

El sistema de María Paula sería uno en el cual, en el tiempo inicial, el camión se está moviendo en la dirección positiva del eje X (es decir, el sentido positivo del eje X apunta hacia el norte, y el negativo hacia el sur). Pero no tenemos información suficiente para inferir la posición inicial del camión.

(d) Con lo dicho en (c) podemos inferir la forma de la gráfica de posición contra tiempo para María Paula. Como dijimos, el camión tiene aceleración negativa, así que la gráfica de posición debe ser una parábola que se abre hacia abajo. Además, al principio la parábola crece porque la pendiente de las velocidades instantáneas es positiva, pero después la parábola debe comenzar a crecer más lentamente porque el camión se acerca a velocidad cero, hasta que en t_1 la parábola llega al punto más alto, donde la velocidad es cero. Después la parábola debe decrecer porque las pendientes de las velocidades instantáneas comienzan a ser negativas, y son cada vez más inclinadas. Lo único que no sabemos es cuál es el punto de corte con el eje Y, pues a partir de la gráfica de la velocidad no podemos saber cuál es el origen del sistema escogido por

María Paula. Como no tenemos más información, podemos suponer cualquier origen. Por ejemplo, supongamos que la posición en el tiempo cero es positiva. Teniendo en cuenta esto, la gráfica de posición contra tiempo sería:



Gráfica de posición contra tiempo de María Paula. Suponemos que el camión comienza en la posición positiva de X. Es una parábola que se abre hacia abajo porque la aceleración es negativa. En el tiempo t_1, en el punto más alto, la velocidad es cero. A partir de ahí, la velocidad es negativa.

Otro método: Hay otra forma de graficar la parábola que no requiere un análisis tan detenido de lo que pasa en cada tramo. Sabemos que es una parábola que se abre hacia abajo porque la aceleración es negativa. Además, la velocidad inicial es positiva, así que el signo del término lineal (el término con la velocidad inicial) es diferente del signo del término cuadrático (el que tiene la aceleración). Esto sugiere que la parábola está corrida en el sentido positivo del eje X (nota 2.20). Sólo con eso ya podemos dibujar la gráfica. Sin embargo, un análisis físico de lo que pasa en cada tramo es más enriquecedor que un análisis matemático de la gráfica.

(e) Notemos que el comportamiento del camión según lo dicho para María Paula es consistente con lo que habíamos dicho para Iván. Primero, el camión se mueve hacia el norte con cierta rapidez y comienza a disminuir su rapidez hasta que llega a cero en el tiempo t_1. Después de ese punto, el camión se empieza a mover hacia el sur cada vez más rápidamente. Así, aunque Iván y María Paula usen sistemas diferentes, *ambos sistemas describen la misma situación física*. Por supuesto, las cantidades vectoriales como la velocidad y la aceleración usadas para representar la situación son diferentes para Iván y María Paula, pero las cantidades escalares como la rapidez y el tiempo coinciden.

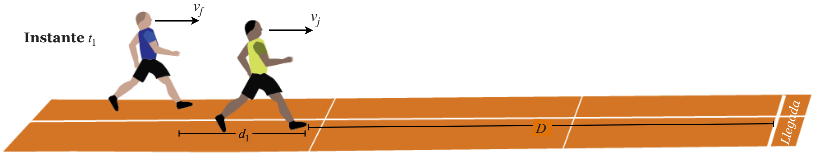
Problema 2.20.

Palabras clave: tiempo de encuentro, movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, movimiento con velocidad constante, velocidad en función del tiempo.

En cierto instante t_1 de la final de la carrera de los Juegos Olímpicos el atleta de Jamaica le lleva una distancia d_1 al corredor de Francia. En ese momento el atleta de Jamaica está a una distancia D de la meta y el francés lleva una rapidez v_f. Si a partir de ese instante el atleta francés comienza a acelerar de forma constante y el de Jamaica mantiene una velocidad constante de magnitud v_j:

(a) Halle una expresión para la aceleración del francés de modo que cruce la meta al mismo tiempo que el jamaiquino.

(b) Según lo anterior, ¿cuál es la velocidad del francés cuando llega a la meta?



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) La distancia d_1 entre los atletas, la velocidad del francés y la velocidad v_f del jamaiquino en el tiempo t_1. La distancia D entre el jamaiquino y la meta en ese mismo tiempo. Además, tenemos tres condiciones: el atleta francés acelera de forma constante, el jamaiquino permanece con su velocidad v_j y ambos deben llegar al tiempo a la meta.

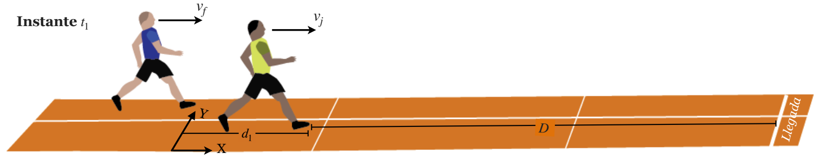
(b) La misma información que en (a), más lo que hallemos en (a).

¿Qué nos piden?

(a) Una expresión para la aceleración del francés.

(b) La velocidad del francés cuando llega a la meta.

(a) Empecemos por escoger un sistema de coordenadas. Usemos un sistema en el cual los atletas se mueven en la dirección positiva del eje X. Además, situemos el origen del sistema en los pies del corredor de Francia en el instante t_1. Al poner el sistema en los pies del corredor francés, logramos que la posición inicial del francés sea cero y que la posición inicial del jamaiquino sea $d_1\hat{x}$ (pues él está a una distancia d_1 en el sentido positivo de X):



Queremos determinar la aceleración del francés de forma que él llegue a la meta junto al atleta jamaiquino. Notemos que esto quiere decir que, en el tiempo en el cual llegan a la meta (que no conocemos), ambos atletas tienen la *misma posición*. Para usar esta información vamos a necesitar las ecuaciones de movimiento.

Nos dicen que la rapidez del atleta francés en t_1 es v_f (no confundir con la velocidad final) y, según nuestro sistema, se mueve en el sentido positivo de X. Además, nos dicen que empieza a acelerar de forma constante (con una aceleración que debemos hallar) y su posición inicial es cero según el sistema elegido. Por lo tanto, su ecuación de movimiento es

$$x_f\hat{x} = \frac{1}{2}a_f t^2\hat{x} + v_f t\hat{x}, \tag{1}$$

donde hemos llamado a_f a la aceleración del francés (el subíndice f en todas las variables indica *francés*, no *final*). Por su parte, el jamaiquino se mueve con velocidad constante de magnitud v_j en el sentido positivo de X, y su posición inicial es $d_1\hat{x}$. Así que su ecuación de movimiento es

$$x_j\hat{x} = v_j t\hat{x} + d_1\hat{x}. \tag{2}$$

Para hallar la aceleración del francés debemos usar el hecho de que ambos atletas llegan al tiempo a la meta. Podríamos igualar las ecuaciones (1) y (2) porque en la meta ambos tienen la misma posición, pero eso no sería suficiente porque no conocemos el tiempo que les toma llegar a la meta. Necesitamos más información.

Notemos que no hemos usado aún el hecho de que en el tiempo t_1 el jamaiquino está a una distancia D de la meta y el francés está a una distancia $d_1 + D$. Usando esa distancia podemos despejar el tiempo que le toma al jamaiquino llegar a la meta, que es el mismo tiempo que le toma al francés llegar a la meta. Como el jamaiquino se mueve con velocidad constante, para él podemos usar el hecho de que distancia es rapidez por tiempo:

$$D = v_j t. \tag{3}$$

Con esto podemos despejar el tiempo en el cual llega a la meta el atleta:

$$t = \frac{D}{v_j}. \tag{4}$$

Como ya dijimos, este es el mismo tiempo que le toma al francés llegar a la meta, pues los atletas deben llegar juntos. Según nuestro sistema, la meta está en la posición $(D+d_1)\hat{x}$. Por lo tanto, la ecuación del francés, cuando llega a la meta, y teniendo en cuenta el tiempo dado por (4), queda

$$\underbrace{(D+d_1)\,\hat{x}}_{x_f} = \frac{1}{2}a_f\underbrace{\left(\frac{D}{v_j}\right)}_{t}^{2}\hat{x} + v_f\underbrace{\left(\frac{D}{v_j}\right)}_{t}\hat{x}. \tag{5}$$

Ahora apliquemos la regla de oro:

$$(D+d_1) = \frac{1}{2}a_f\left(\frac{D}{v_j}\right)^2 + v_f\left(\frac{D}{v_j}\right). \tag{6}$$

Para dejar a la aceleración sola, pasemos el último término a la izquierda:

$$D + d_1 - v_f\left(\frac{D}{v_j}\right) = \frac{1}{2}a_f\left(\frac{D}{v_j}\right)^2. \tag{7}$$

Ahora multipliquemos todo por $\left(\frac{v_j}{D}\right)^2$ para llegar a

$$D\left(\frac{v_j}{D}\right)^2 + d_1\left(\frac{v_j}{D}\right)^2 - v_f\left(\frac{v_j}{D}\right) = \frac{1}{2}a_f. \tag{8}$$

Finalmente, si multiplicamos por dos obtenemos la magnitud de la aceleración del francés, queda

$$2D\left(\frac{v_j}{D}\right)^2 + 2d_1\left(\frac{v_j}{D}\right)^2 - 2v_f\left(\frac{v_j}{D}\right) = a_f. \tag{9}$$

Como la aceleración del francés apunta en el sentido positivo de X, podemos escribir la anterior ecuación como

$$\left(2D\left(\frac{v_j}{D}\right)^2 + 2d_1\left(\frac{v_j}{D}\right)^2 - 2v_f\left(\frac{v_j}{D}\right)\right)\hat{x} = \vec{a}. \tag{10}$$

Notemos aquí que si dejamos fijas todas las variables y aumentamos la rapidez del jamaiquino, entonces la aceleración del francés tiene que aumentar, lo cual tiene sentido porque el francés lo debe alcanzar.

(b) Ahora debemos hallar la velocidad del francés cuando llega a la meta. Recordemos que la velocidad final cuando hay aceleración está dada por

$$\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_i. \tag{11}$$

Conocemos la aceleración por el numeral anterior y conocemos la velocidad en el tiempo inicial, que es $v_f\hat{x}$. Además, conocemos el tiempo del recorrido, que está dado por la ecuación (4). Así, la velocidad del francés al cruzar la meta es

$$\vec{v} = \underbrace{\left(2D\left(\frac{v_j}{D}\right)^2 + 2d_1\left(\frac{v_j}{D}\right)^2 - 2v_f\left(\frac{v_j}{D}\right)\right)}_{a}\underbrace{\left(\frac{D}{v_j}\right)}_{t}\hat{x} + v_f\hat{x}. \tag{12}$$

Este resultado se puede simplificar si "abrimos" los paréntesis y multiplicamos cada término por $\left(\frac{D}{v_j}\right)$. Al hacer eso, obtenemos

$$\vec{v} = (2v_j + 2d_1\frac{v_j}{D} - 2v_f + v_f)\hat{x}. \tag{13}$$

Comentarios adicionales: hay otra forma en la que podemos hallar la velocidad final del francés. Hay una ecuación que estudiaremos en el siguiente problema (2.21) que relaciona la magnitud de la velocidad final de un objeto con la magnitud de la velocidad inicial, la magnitud de la aceleración y con la distancia recorrida. La ecuación es

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i). \tag{14}$$

La ventaja de esta ecuación es que no requiere el tiempo, como sí lo requiere la ecuación (11). Es un buen ejercicio para el lector que compruebe que usando esta ecuación se llega al mismo resultado dado por la ecuación (13) (note que $x_f - x_i$ en el caso del atleta francés es $(D + d_1) - 0 = D + d_1$).

Problema (teórico) 2.21.

Palabras clave: rapidez final sin conocer el tiempo pero conociendo el desplazamiento y la aceleración.

Un objeto se mueve con aceleración constante de magnitud a a lo largo de la dirección positiva del eje X. El objeto se mueve desde $x_i\hat{x}$, donde tiene velocidad $v_i\hat{x}$, hasta $x_f\hat{x}$, donde tiene velocidad $v_f\hat{x}$.

(a) Escriba la ecuación de la velocidad final del objeto, aplique la regla de oro y despeje el tiempo en función de la rapidez final, la inicial y la aceleración.

(b) Escriba la ecuación de movimiento del objeto, aplique la regla de oro y reemplace en ella el resultado encontrado en (a).

(c) A partir de la ecuación encontrada en (b), despeje la rapidez final al cuadrado.

Solución

(a) La ecuación de la velocidad final de un objeto con aceleración constante es

$$v_f\hat{x} = at\hat{x} + v_i\hat{x}. \tag{1}$$

Si aplicamos la regla de oro obtenemos

$$v_f = at + v_i. \tag{2}$$

Finalmente, para despejar el tiempo pasamos la rapidez inicial al otro lado y dividimos por la magnitud de la aceleración:

$$\frac{v_f - v_i}{a} = t. \tag{3}$$

(b) La ecuación de movimiento del objeto en este caso es

$$x_f\hat{x} = \frac{1}{2}at^2\hat{x} + v_it\hat{x} + x_i\hat{x}. \tag{4}$$

Si aplicamos la regla de oro obtenemos

$$x_f = \frac{1}{2}at^2 + v_it + x_i. \tag{5}$$

Ahora reemplazamos aquí el resultado de la ecuación (3):

$$x_f = \frac{1}{2}a\underbrace{\left(\frac{v_f - v_i}{a}\right)}_{t}^2 + v_i\underbrace{\left(\frac{v_f - v_i}{a}\right)}_{t} + x_i. \tag{6}$$

(c) Queremos despejar la rapidez final al cuadrado. Empecemos por abrir los paréntesis:

$$x_f = \frac{1}{2}\left(\frac{v_f^2 - 2v_f v_i + v_i^2}{a}\right) + \left(\frac{v_f v_i - v_i^2}{a}\right) + x_i. \tag{7}$$

Si ahora sumamos los términos que se pueden sumar, el término $v_f v_i$ se cancela y obtenemos

$$x_f = \frac{1}{2}\left(\frac{v_f^2 - v_i^2}{a}\right) + x_i. \tag{8}$$

Si ahora pasamos la posición inicial al otro lado y multiplicamos por $2a$, obtenemos:

$$2a\left(x_f - x_i\right) = v_f^2 - v_i^2. \tag{9}$$

Finalmente, pasamos la rapidez inicial al cuadrado al otro lado:

$$2a\left(x_f - x_i\right) + v_i^2 = v_f^2. \tag{10}$$

Esta ecuación dice que la rapidez final al cuadrado es igual a la rapidez inicial al cuadrado más dos veces la magnitud de la aceleración por la diferencia de las posiciones (de las magnitudes de las posiciones).

Nota 2.24. Rapidez final en un movimiento con aceleración constante si no conocemos el tiempo

Si no conocemos el tiempo podemos hallar la rapidez final usando

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\left(x_f - x_i\right),$$

donde a es la magnitud de la aceleración, v_i es la rapidez inicial y $x_f - x_i$ es la resta entre la posición final y la inicial. El signo de la aceleración y de las posiciones iniciales y finales se debe respetar.

Problema 2.22.

Palabras clave: rapidez final sin conocer el tiempo, encuentro de dos objetos que terminan con la misma velocidad.

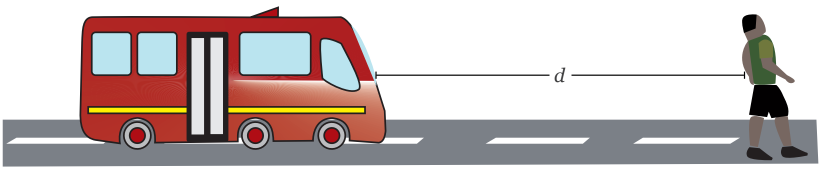
Un bus de Transmilenio lleva una rapidez v_t. Cuando el conductor del bus se da cuenta de que una persona está caminando por el carril de Transmilenio presiona los frenos. La persona está caminando con una rapidez v_p y en la misma dirección en la que anda el bus, como se ilustra en el dibujo. Suponga que el bus disminuyó su rapidez hasta v_p (hasta la rapidez de la persona) justo cuando se puso atrás de la persona, y suponga que la distancia que los separaba cuando el conductor comenzó a frenar era d.

(a) Escriba una expresión para la aceleración del bus que resultó al aplicar los frenos.

(b) Escriba una expresión para la distancia que alcanzó a recorrer el bus hasta que alcanzó a la persona.

(c) Realice una gráfica cualitativa de posición contra tiempo para el bus, y en la misma gráfica, para la persona. Realice esta gráfica desde el momento en que el bus comienza a frenar hasta que alcanza a la persona.

(d) Si el bus siguiera frenando de la misma forma, escriba una expresión para el tiempo en el cual se detendría completamente. Con base en su resultado, analice el caso en que v_p y v_t son iguales.



Solución

¿Qué información nos dan?

Para (a), (b) y (c): la velocidad inicial del bus tiene magnitud v_t. Cuando comienza a frenar, el bus está a una distancia d de una persona que camina con velocidad constante de magnitud v_p en la misma dirección que la velocidad del bus. El bus frena de forma tal que cuando alcanza a la persona, tiene la misma velocidad que ella.
(d) Desde que alcanza a la persona, suponga que el bus sigue frenando de la misma forma.

¿Qué nos piden?

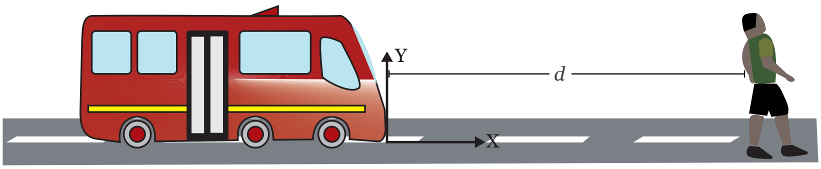
(a) Escribir una expresión para la aceleración del bus.

(b) Escribir una expresión para la distancia recorrida por el bus desde que comienza a frenar hasta que alcanza a la persona.

(c) Realizar una gráfica cualitativa de posición contra tiempo para el bus y para la persona (una para ambos), desde que el bus comienza a frenar hasta que alcanza a la persona.

(d) Escribir una expresión para el tiempo en el cual el bus se detiene completamente. Debemos analizar el caso en que v_p y v_t son iguales.

(a) Como ya sabemos, lo primero que hay que hacer en problemas de cinemática es escoger un sistema de coordenadas. Es natural (pero no es obligatorio) usar un sistema en el cual el bus y la persona se mueven en la dirección positiva de X. Además es conveniente usar un sistema según el cual el bus esté en el origen justo cuando empiece a frenar (según ese sistema, la persona está inicialmente a una distancia d en el sentido positivo de X):



Para hallar una expresión para la aceleración del bus necesitamos la velocidad inicial y final, y el tiempo que dura la aceleración. La velocidad final en este caso es de magnitud v_p en el sentido positivo de X según nuestro sistema, y la velocidad inicial es de magnitud v_t en el sentido positivo de X. Si escribimos la ecuación para la aceleración del bus, tenemos

$$\vec{a} = \frac{v_p\hat{x} - v_t\hat{x}}{t}. \tag{1}$$

Esto es lo mismo que

$$\vec{a} = \frac{v_p - v_t}{t}\hat{x}. \tag{2}$$

Notemos que la resta de v_p con v_t nos va a dar un número negativo, pues v_p es menor que v_t. Era de esperarse que esta resta nos diera un número negativo, pues la aceleración nos tiene que dar con signo negativo ya que, según nuestro sistema, el bus se está moviendo en la dirección positiva de X mientras aplica los frenos. Aunque conocemos v_p y v_t, todavía no conocemos el tiempo t. Para hallarlo necesitamos más información.

En el enunciado nos dicen que la persona camina con velocidad constante v_p. Además, nos dicen la distancia inicial entre el bus y la persona, y nos dicen que el bus alcanza rapidez v_p justo antes de alcanzar a la persona. Esto quiere decir que cuando el bus llega a la rapidez v_p, en ese instante su posición es la misma que la de la persona. Así, podemos igualar la posición final dada por la ecuación de movimiento del bus y de la persona, y de ahí podemos obtener el tiempo t en que se encuentran.

Como el bus se mueve con aceleración constante, esperamos que su ecuación de movimiento sea de la forma

$$\vec{x}_f = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}t + \vec{x}_i. \tag{3}$$

Ahora bien, según nuestro sistema, la velocidad inicial del bus es $v_t\hat{x}$ y la posición inicial es cero. Además, podemos escribir la aceleración $\vec{a}$ usando la ecuación (2). Por lo tanto, la ecuación de movimiento del bus es

$$x_{ft}\hat{x} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{v_p - v_t}{t}\right)}_{a}t^2\hat{x} + v_t t\hat{x}. \tag{4}$$

(Hemos llamado "$x_{ft}\hat{x}$" a la posición final del bus).

Alguien podría decir que el término con la aceleración debería tener un signo menos, pues el bus está frenando (así que la dirección de la aceleración debería ser $-\hat{x}$). Sin embargo, el signo menos ya está implícitamente en la ecuación (4) porque, como dijimos, v_p es menor que v_t así que la resta que aparece da negativa. Si pusiéramos el signo negativo al frente del factor de $1/2$ para indicar que la aceleración es negativa, cometeríamos un error porque la ecuación (2) ya nos da el signo, así que estaríamos repitiendo dos signos menos, lo que nos daría un signo más.

Ahora escribamos la ecuación de movimiento de la persona. La persona camina con velocidad constante en línea recta así que esperamos que su ecuación de movimiento sea de la forma

$$\vec{x}_f = \vec{v}t + \vec{x}_i. \tag{5}$$

Según el sistema elegido, la velocidad de la persona es $v_p\hat{x}$ y la posición inicial de la persona es $d\hat{x}$. Por lo tanto, la ecuación de movimiento de la persona es

$$x_{fp}\hat{x} = v_p t\hat{x} + d\hat{x}. \tag{6}$$

Para hallar el tiempo t en el cual se encuentran la persona y el Transmilenio, debemos igualar las posiciones finales de ambos:

$$\underbrace{v_p t\hat{x} + d\hat{x}}_{x_{fp}\hat{x}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{v_p - v_t}{t}\right)t^2\hat{x} + v_t t\hat{x}}_{x_{ft}\hat{x}}. \tag{7}$$

Ahora podemos aplicar la regla de oro:

$$v_p t + d = \frac{1}{2}\left(\frac{v_p - v_t}{t}\right)t^2 + v_t t. \tag{8}$$

En esta ecuación aparece una incógnita, el tiempo t. Notemos que t^2 se simplifica con el t que está en el denominador:

$$v_p t + d = \frac{1}{2}\left(v_p - v_t\right)t + v_t t. \tag{9}$$

Ahora pasemos el término $v_p t$ a la derecha para que todos los términos que tienen el tiempo queden a un solo lado:

$$d = \frac{1}{2}\left(v_p - v_t\right)t + v_t t - v_p t. \tag{10}$$

Si sacamos el factor común del tiempo t, obtenemos

$$d = \left(\frac{1}{2}\left(v_p - v_t\right) + v_t - v_p\right)t. \tag{11}$$

Si sumamos los términos que están dentro del paréntesis obtenemos

$$d = \left(0.5v_t - 0.5v_p\right)t. \tag{12}$$

Finalmente, dividimos por el término entre paréntesis para despejar el tiempo:

$$\frac{d}{0.5v_t - 0.5v_p} = \frac{2d}{v_t - v_p} = t, \tag{13}$$

donde usamos el hecho de que 0.5 es 1/2. Esta ecuación nos da el tiempo de encuentro en función de cantidades conocidas como la rapidez inicial del bus, la rapidez de la persona y la distancia que los separa inicialmente. Como v_t es mayor que v_p, esta ecuación nos da positiva, lo cual tiene sentido porque el tiempo tiene que ser positivo. Finalmente, podemos usar este tiempo en la ecuación (2), para escribir la aceleración del bus:

$$\vec{a} = \frac{v_p - v_t}{\underbrace{\left(\frac{2d}{v_t - v_p}\right)}_{t}}\hat{x}. \tag{14}$$

Esto es lo mismo que

$$\vec{a} = \frac{(v_p - v_t)(v_t - v_p)}{2d}\hat{x}. \tag{15}$$

Notemos que en el numerador tenemos la multiplicación de dos términos que son iguales, salvo por un signo menos. Podemos, por ejemplo, poner un signo menos delante del primer término y reescribirlo así:

$$\vec{a} = \frac{-(v_t - v_p)(v_t - v_p)}{2d}\hat{x} = \frac{-(v_t - v_p)^2}{2d}\hat{x}. \tag{16}$$

La ecuación (16) nos da la aceleración del bus. Notemos que el término al cuadrado, como todo término al cuadrado, es positivo. Por lo tanto, el signo menos que está al frente no se pierde nunca, lo que garantiza que la dirección de la aceleración sea negativa, como esperábamos. Además, notemos que como la distancia que separa al bus de la persona está en el denominador, entonces es claro que cuanto mayor sea la distancia, menor será la magnitud de la aceleración, lo cual tiene sentido (si el bus está muy lejos de la persona, no tiene que frenar bruscamente).

(b) Recordemos que la distancia recorrida por un objeto con aceleración constante está dada por

$$d = \left\| \frac{1}{2}at^2 + v_i t \right\|. \tag{17}$$

Teniendo en cuenta el tiempo que dura frenando el bus —ecuación (13)—, su velocidad inicial y su aceleración —ecuación (16)—, esta ecuación queda

$$d_t = \left\| -\frac{1}{2}\underbrace{\frac{(v_t - v_p)^2}{2d}}_{a}\underbrace{\left(\frac{2d}{v_t - v_p}\right)^2}_{t} + v_t\underbrace{\left(\frac{2d}{v_t - v_p}\right)}_{t} \right\|. \tag{18}$$

(Hemos llamado d_1 a la distancia recorrida por el bus). En el primer término se simplifican algunas cosas, hasta que llegamos a

$$d_t = \left\| -d + v_t\left(\frac{2d}{v_t - v_p}\right) \right\|. \tag{19}$$

Si sacamos el factor común de d, esta ecuación se puede escribir como

$$d_t = \left\| d\left(\left(\frac{2v_t}{v_t - v_p}\right) - 1\right) \right\|. \tag{20}$$

Al hacer la suma de fracciones esto queda

$$d_t = \left\| d\left(\frac{2v_t - v_t + v_p}{v_t - v_p}\right)\right\|. \tag{21}$$

Finalmente, obtenemos

$$d_t = \left\| d\left(\frac{v_t + v_p}{v_t - v_p}\right)\right\|. \tag{22}$$

Notemos que el término en el denominador es menor que el término en el numerador, así que la fracción da un número mayor que 1. Esto tiene sentido porque quiere decir que la distancia recorrida por el bus es mayor que la distancia inicial de separación.

Otro método: es claro que la distancia recorrida por el bus es igual a la distancia recorrida por la persona mientras aquel frena, más la distancia inicial que los separa. Y calcular la distancia recorrida por la persona es muy fácil, pues como la persona se mueve con velocidad constante, la distancia es sólo rapidez por tiempo. Si usamos el tiempo de encuentro hallado antes y la rapidez de la persona, la distancia recorrida por ella es

$$d_p = v_p \underbrace{\left(\frac{2d}{v_t - v_p}\right)}_{t}. \tag{23}$$

Esta ecuación nos da la distancia recorrida por la persona mientras el bus frena. Como ya dijimos, la distancia recorrida por el bus es la distancia recorrida por la persona más d, que es la distancia que lo separaba inicialmente de la persona:

$$d_t = \underbrace{v_p \left(\frac{2d}{v_t - v_p}\right)}_{d_p} + d. \tag{24}$$

Si sacamos factor común de d, obtenemos

$$d_t = d\left(\left(\frac{2v_p}{v_t - v_p}\right) + 1\right). \tag{25}$$

Y finalmente, sumamos las fracciones:

$$d_t = d\left(\frac{v_p + v_t}{v_t - v_p}\right). \tag{26}$$

Hemos llegado al mismo resultado de la ecuación (22) —notemos que $v_t - v_p$ es positivo, así que toda la expresión es positiva y podemos obviar el valor absoluto en la ecuación (22).

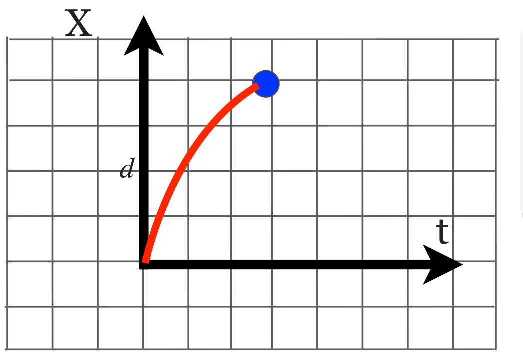
(c) Para hacer una gráfica cualitativa de posición contra tiempo para el bus, sólo necesitamos saber que este sigue un movimiento con aceleración constante negativa, que su posición inicial es cero y que su velocidad inicial es positiva. Según esto, la ecuación de movimiento del bus es de la forma

$$x_{ft}\hat{x} = -\frac{1}{2}at^2\hat{x} + v_t t\hat{x}. \tag{27}$$

Al aplicar la regla de oro, obtenemos

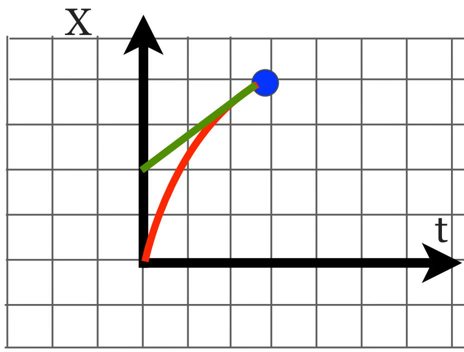
$$x_{ft} = -\frac{1}{2}at^2 + v_t t. \tag{28}$$

Notemos que esta es la ecuación de una parábola que se abre hacia abajo porque el término cuadrático es negativo. Además, la parábola corta el eje Y en cero porque el punto de corte es cero (la posición inicial es cero). Por otro lado, la parábola está corrida en el sentido positivo de X porque el término lineal y el cuadrático tienen signos contrarios. Además, la parábola no alcanza el punto más alto porque cuando el bus alcanza la persona *el bus no ha llegado a velocidad cero* (sólo ha llegado a la velocidad de la persona). Reuniendo estas características, podemos realizar la siguiente gráfica de posición contra tiempo para el bus:



El bus de Transmilenio tiene aceleración negativa. La parábola no alcanza a llegar hasta el punto más alto porque el bus no llega a rapidez cero.

Como la persona se mueve con velocidad constante positiva, la gráfica de posición contra tiempo para la persona es una línea recta con pendiente positiva. Además, la posición inicial de la persona es $d\hat{x}$. Y por otra parte, cuando el bus llega a rapidez v_p, la persona tiene la misma posición, así que la línea recta debe pasar por ese punto en el cual el bus alcanza dicha rapidez. Reuniendo estos requisitos, la gráfica de posición contra tiempo para la persona sería



La persona comienza a una distancia d en el sentido positivo de X, y camina con velocidad constante. Al final su posición se cruza con la del bus de Transmilenio.

Notemos que la inclinación de la línea de la persona coincide con la inclinación del final de la parábola, pues al final el bus alcanza la misma velocidad que tiene la persona (si es necesario, repase el problema 2.18 o el final del problema 2.17).

(d) Para determinar en qué tiempo el bus se detiene completamente, necesitamos usar una ecuación que nos diga cuándo la velocidad es cero. Podemos usar la ecuación

$$\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_i \tag{29}$$

y despejar el tiempo para el cual $\vec{v}$ es cero. En nuestro caso, la velocidad inicial del bus es $\vec{v}_t\hat{x}$ y la aceleración está determinada por la ecuación (16). Teniendo en cuenta esto, podemos escribir la ecuación (29) así:

$$\vec{v} = \underbrace{-\frac{(v_t - v_p)^2}{2d}}_{a} t\hat{x} + v_t\hat{x}. \tag{30}$$

Ahora, para determinar en qué tiempo la velocidad es cero, simplemente ponemos cero para la velocidad en la anterior ecuación:

$$0\hat{x} = -\frac{(v_t - v_p)^2}{2d} t\hat{x} + v_t\hat{x}. \tag{31}$$

Si pasamos el primer término de la parte derecha de la igualdad al otro lado, esto queda

$$\frac{(v_t - v_p)^2}{2d} t\hat{x} = v_t\hat{x}. \tag{32}$$

Si dividimos por el término que acompaña al tiempo t y aplicamos la regla de oro obtenemos

$$t = \frac{2d}{(v_t - v_p)^2} v_t. \tag{33}$$

Esta ecuación nos dice el tiempo en el cual el bus llega a su velocidad cero (es decir, el tiempo en el cual se detiene).

Notemos que si la rapidez v_t es igual a v_p la anterior ecuación no está definida y eso tiene sentido porque si ambas rapideces son iguales entonces el bus no tendría aceleración y su velocidad nunca llegaría a cero, lo cual contradice la suposición de que el bus se detiene. Además, si v_t es igual a v_p, la ecuación (22) tampoco estaría definida, lo que también tiene sentido porque la distancia recorrida por el bus sería infinita (sin aceleración nunca alcanzaría a la persona). Por ultimo, si v_t es igual a v_p, la gráfica de posición contra tiempo del bus será una línea recta paralela a la recta de la persona (pues tendrá la misma velocidad) y ambas rectas estarán separadas por la distancia inicial d.

Nota 2.25. ¿En qué tiempo la velocidad es cero?

Para hallar el tiempo en el cual un objeto que se mueve con aceleración constante alcanza velocidad cero, usamos la ecuación $\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_i$ y ponemos que la velocidad es cero: $0 = \vec{a}t + \vec{v}_i$.

Problema 2.23.

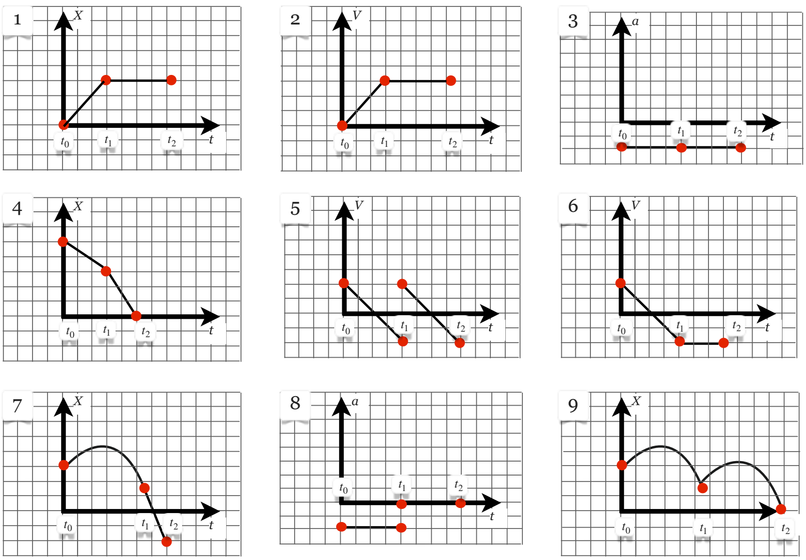
Palabras clave: interpretación de gráficas de posición contra tiempo, interpretación de gráficas de velocidad contra tiempo, interpretación de gráficas de aceleración contra tiempo.

A continuación el lector va a encontrar nueve gráficas.

(a) Dé una descripción de la situación que cada gráfica indica (por ejemplo, “el objeto acelera entre el tiempo inicial y t_1”).

(b) Señale qué gráficas se refieren a la misma situación y para esas gráficas escriba cómo podrían ser las ecuaciones de movimiento del objeto (no use números, simplemente escriba el tipo de ecuación que podría tener el objeto usando variables).

(c) Señale los tramos en cada gráfica de velocidad en los cuales la rapidez aumenta.



Solución

¿Qué información nos dan?

Nos dan nueve gráficas.

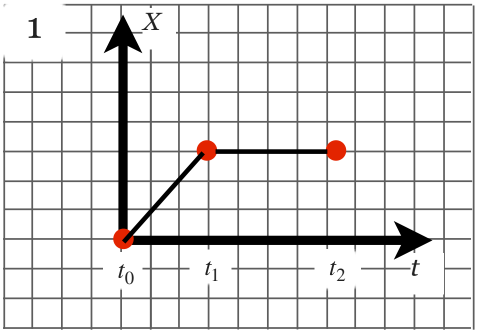
¿Qué nos piden?

(a) Dar una descripción de la situación que la gráfica indica.

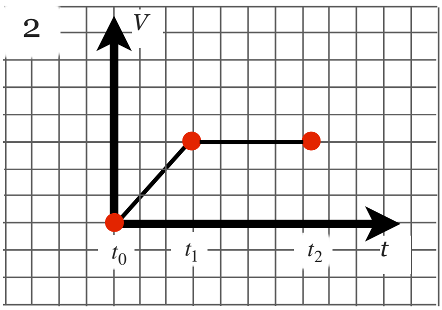
(b) Decir qué gráficas se pueden referir a la misma situación. Para esas gráficas, hay que escribir cómo podrían ser las ecuaciones de movimiento del objeto.

(c) Señalar los tramos en las gráficas de velocidad en los cuales la rapidez aumenta.

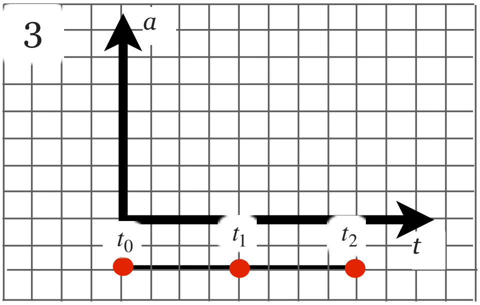
(a)



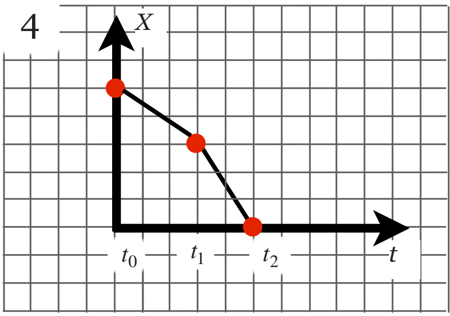
Esta es una gráfica de posición contra tiempo. En el tiempo inicial el objeto está en el origen, y desde ese momento hasta el tiempo t_1 el objeto se mueve con velocidad constante positiva. Entre el tiempo t_1 y t_2 el objeto permanece en reposo (la pendiente de la línea es cero, así que la velocidad es cero).



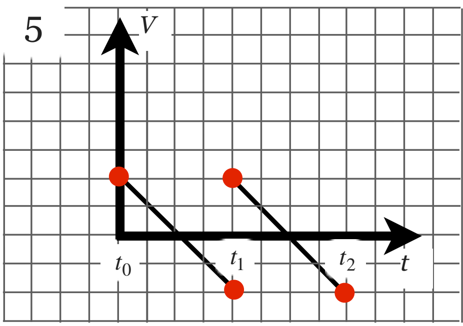
Esta es una gráfica de velocidad contra tiempo. El objeto comienza con velocidad cero. Entre el tiempo inicial y t_1 el objeto aumenta su velocidad, así que el objeto se mueve con aceleración constante positiva. Entre el tiempo t_1 y t_2 el objeto permanece con velocidad constante (la pendiente de la línea es cero, así que la aceleración es cero).



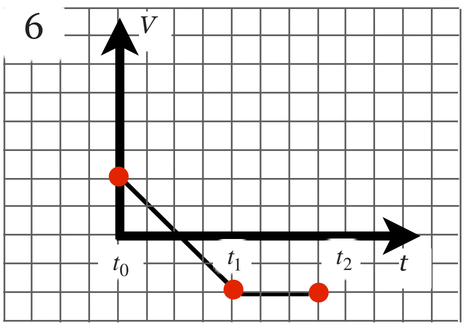
Esta es una gráfica de aceleración contra tiempo. No hemos estudiado gráficas de aceleración contra tiempo antes, pero lo que ya sabemos para las demás gráficas nos puede ayudar a interpretar estas gráficas. Notemos que según la gráfica, el objeto tiene una aceleración negativa que permanece constante (es una línea horizontal en la parte negativa del eje Y). Esto quiere decir que el valor de la aceleración es siempre el mismo, y es negativo. Si un objeto tiene aceleración negativa constante, su velocidad está disminuyendo de forma constante.



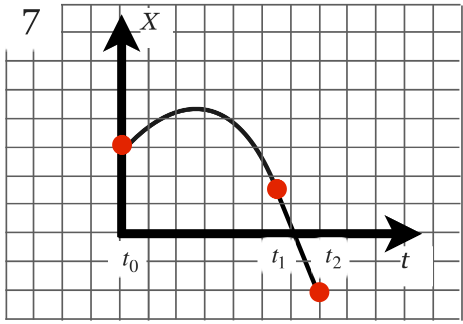
Esta es una gráfica de posición contra tiempo. La posición inicial del objeto es algún punto positivo en X. Entre el tiempo inicial y t_1 el objeto se mueve con velocidad constante negativa. Entre el tiempo t_1 y t_2 el objeto también se mueve con velocidad constante negativa, pero como la pendiente de esta recta es más inclinada que la pendiente de la recta entre el tiempo inicial y t_1, entonces inferimos que el objeto se mueve con velocidad más negativa que antes (es decir, su rapidez es mayor). Además, en el tiempo t_2 el objeto regresa al origen.



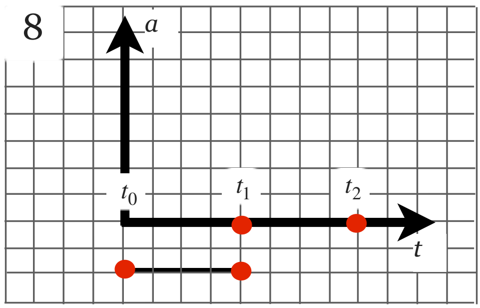
Esta es una gráfica de velocidad contra tiempo. En el tiempo inicial el objeto tiene cierta velocidad positiva. Entre el tiempo inicial y t_1 el objeto se mueve con aceleración constante negativa (su velocidad disminuye de forma constante). En algún momento la velocidad llega a cero, y después el objeto adquiere velocidad negativa, lo que quiere decir que ahora se está moviendo en la dirección contraria a la que se venía moviendo antes. El objeto sigue disminuyendo su velocidad (su velocidad es cada vez más negativa) hasta t_1. En ese instante sucede algo extraño, y el objeto pasa de tener velocidad negativa a tener la misma velocidad positiva con la cual empezó. Eso sugiere que el objeto cambió de repente la dirección en la que se estaba moviendo. Desde ahí el objeto repite el mismo tipo de movimiento de antes (con aceleración negativa).



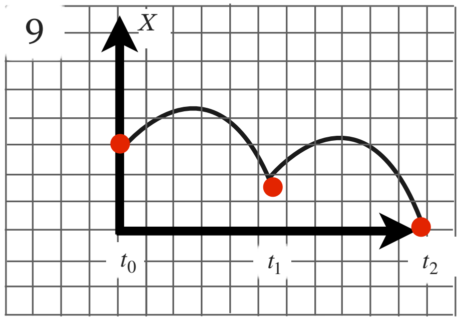
Esta es una gráfica de velocidad contra tiempo. La velocidad inicial del objeto es positiva y comienza a disminuir de forma constante, pasando por cero y luego volviéndose negativa hasta el tiempo t_1 (lo que indica que el objeto tiene aceleración constante negativa, y cambió la dirección de su movimiento desde que la velocidad se volvió negativa). Desde t_1 el objeto se mueve con velocidad constante negativa (aceleración cero) hasta el tiempo t_2.



Esta es una gráfica de posición contra tiempo. El objeto comienza en cierta posición positiva, y comienza a moverse con cierta velocidad positiva (imaginemos un segmento de recta justo al inicio de la curva, el cual tendría pendiente positiva). Además, es claro que entre el tiempo inicial y t_1 se forma una parábola que se abre hacia abajo. Esto sugiere que el objeto tiene aceleración negativa en ese intervalo de tiempo. El objeto comienza a moverse con cierta velocidad positiva y va disminuyendo su velocidad hasta que en el punto más alto la velocidad es cero. Después, su velocidad es negativa (los segmentos de recta que podemos imaginar empiezan a tener pendiente negativa) y cada vez más negativa hasta el tiempo t_1. Pero después de t_1 la parábola se acaba y sigue una línea recta con pendiente negativa. Esto indica que desde ese momento el objeto se mueve con velocidad constante negativa (su aceleración se vuelve cero). El objeto en algún momento pasa por el origen, y sigue moviéndose hacia posiciones negativas hasta el tiempo t_2.



Esta es una gráfica de aceleración contra tiempo. Entre el tiempo inicial y el tiempo t_1 el objeto se mueve con aceleración constante negativa, así que su velocidad debe de estar disminuyendo de forma constante. Entre el tiempo t_1 y t_2 el objeto permanece con aceleración cero, así que su velocidad permanece constante (cuidado: no sabemos si en este tramo el objeto se mantiene con velocidad negativa o positiva, sólo sabemos que el objeto ahora tiene menos velocidad que al comienzo porque tuvo aceleración negativa).



Esta es una gráfica de posición contra tiempo. El objeto comienza en cierta posición positiva y comienza a moverse con cierta velocidad positiva (las pendientes de los segmentos de recta que podríamos imaginar sobre la gráfica serían positivos). Además, es claro que entre el tiempo inicial y el tiempo t_1 se forma una parábola que se abre hacia abajo. Esto sugiere que el objeto tiene aceleración negativa en ese intervalo de tiempo. Como dijimos, el objeto comienza a moverse con cierta velocidad positiva, y va disminuyendo su velocidad hasta que en el punto más alto la velocidad es cero. Después su velocidad es negativa (así que ahora se debe de estar moviendo en dirección contraria) y es cada vez más negativa hasta el tiempo t_1. Pero después de t_1 algo extraño pasa y el objeto vuelve a tener cierta velocidad positiva (así que su dirección de movimiento debió de cambiar repentinamente), y vuelve a repetirse el tipo de movimiento de antes; el objeto tiene aceleración negativa, y su velocidad pasa de ser positiva a ser cero en el punto más alto de la segunda parábola, y luego pasa a ser otra vez negativa hasta que llega al origen.

(b) Debemos encontrar gráficas que se refieran a la misma situación. Una forma fácil de hacer esto es volver a *las gráficas de posición* y ver si hay gráficas de velocidad o de aceleración que correspondan con ellas.

La gráfica 1 indica que el objeto tiene velocidad inicial positiva constante. Como el lector puede observar, ninguna gráfica de velocidad comienza con una velocidad positiva que se mantiene constante. Tampoco hay gráficas de aceleración que comiencen con aceleración cero (velocidad constante es aceleración cero). Así que no hay otras gráficas que describan la misma situación que la gráfica 1.

La gráfica 4 comienza con velocidad constante negativa, y después el objeto tiene una velocidad constante más negativa. No hay ninguna gráfica de velocidad que comience con velocidad constante negativa. Y, como ya dijimos, tampoco hay gráficas de aceleración con aceleración inicial cero. Así que, de nuevo, no hay otras gráficas que representen la misma situación que la gráfica de posición examinada (la 4).

La gráfica 7 indica primero una aceleración negativa. Inicialmente la velocidad es positiva, pasa a cero y luego es negativa. Después la velocidad permanece constante y negativa. Notemos que la gráfica 6 tiene precisamente ese comportamiento. Así que la gráfica 7 y 6 corresponden a la misma situación. Además, la gráfica 8 también describe lo mismo: aceleración constante negativa inicialmente y después aceleración cero (velocidad constante). Por lo tanto, estas tres gráficas (6, 7 y 8) representan la misma situación.

Según estas gráficas la ecuación de movimiento del objeto entre el tiempo inicial y t_1 sería la ecuación de un movimiento con aceleración constante negativa. Además, el objeto comienza con cierta velocidad inicial positiva y comienza en alguna posición inicial positiva. Por lo tanto, en este intervalo de tiempo la ecuación de movimiento sería de la siguiente forma:

$$x_f\hat{x} = -\frac{1}{2}at^2\hat{x} + v_i t\hat{x} + x_i\hat{x}. \tag{1}$$

Después de t_1 el objeto se mueve con velocidad constante negativa, así que a partir de t_1 su ecuación es de la forma

$$x_{f2}\hat{x} = -vt\hat{x} + x_1\hat{x}. \tag{2}$$

Cuidado: la posición $x_1\hat{x}$ es la posición inicial del *nuevo movimiento*, y es claro que esta posición inicial es precisamente la posición final del movimiento anterior, es decir, $x_f\hat{x} = x_1\hat{x}$.

La gráfica 9 indica un movimiento con dos aceleraciones negativas (estas aceleraciones podrían ser las mismas). Más aún, primero la velocidad es positiva, pasa a cero y después se vuelve negativa. Pero en t_1 el objeto repentinamente pasa a tener velocidad positiva otra vez, y se repite el movimiento. Notemos que la gráfica 5 concuerda precisamente con eso: el objeto comienza con velocidad positiva y la velocidad disminuye pasando por cero hasta volverse negativa. Y después, de repente, el objeto tiene otra vez velocidad positiva y esta vuelve a comportarse igual. Además, la gráfica 3 representa ese mismo movimiento: el objeto siempre tiene aceleración negativa constante. Así, las gráficas 3, 5 y 9 describen la misma situación.

Entre el tiempo inicial y t_1 la ecuación de movimiento debe ser de un movimiento con aceleración negativa. Además, el objeto comienza con velocidad positiva y su posición inicial también es positiva. Por lo tanto, tenemos una ecuación de movimiento de esta forma:

$$x_f\hat{x} = -\frac{1}{2}at^2\hat{x} + v_i t\hat{x} + x_i\hat{x}. \tag{3}$$

Después, entre el tiempo t_1 y t_2, el objeto vuelve a tener un movimiento igual al de antes, sólo que ahora la posición inicial es otra (pero la aceleración y la rapidez inicial son la misma, como se infiere de las gráficas 3 y 5):

$$x_{f2}\hat{x} = -\frac{1}{2}at^2\hat{x} + v_i t\hat{x} + x_1\hat{x}. \tag{4}$$

(c) Ahora debemos indicar los segmentos de cada gráfica de velocidad en los cuales la rapidez aumenta. La rapidez aumenta cuando la magnitud de la velocidad aumenta. Esto se puede ver en las gráficas de velocidad siguiendo lo que dice la nota 2.22; cuando las líneas de velocidad se alejan del eje del tiempo, sea hacia arriba o hacia abajo, la rapidez aumenta. En la gráfica 2, entre el tiempo inicial y t_1, la línea se aleja del eje del tiempo, así que en ese intervalo la rapidez aumenta. Entre t_1 y t_2 la rapidez permanece constante.

En la gráfica 5, entre el tiempo inicial y t_1, pasan dos cosas; primero la línea de velocidad se acerca al eje del tiempo, así que la rapidez disminuye. Pero después la línea se empieza a alejar del eje del tiempo por la parte negativa, así que la rapidez aumenta en ese intervalo hasta t_1. Lo mismo se repite después; primero la rapidez disminuye, pero después comienza a aumentar hasta t_2.

Finalmente, en la gráfica 6 la rapidez empieza a disminuir mientras la línea de la velocidad se acerca al eje del tiempo, y después de ese momento la línea de velocidad se empieza a alejar por la parte negativa, así que en ese intervalo la rapidez aumenta hasta t_1. Luego la rapidez permanece constante hasta t_2.

Problema de repaso 2.24.

Palabras clave: aumento y disminución de rapidez, aumento y disminución de velocidad, velocidad cero, gráfica de posición contra tiempo.

Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(1) Si la velocidad aumenta, entonces podemos inferir que la rapidez aumenta.

(2) Si un objeto tiene una velocidad muy grande, entonces también tiene una aceleración muy grande.

(3) Si un objeto disminuye su velocidad podría aumentar su rapidez.

(4) Cuanto más inclinado sea un fragmento de la gráfica de posición contra tiempo, mayor es la rapidez en ese fragmento.

(5) Si en t_1 un objeto se mueve hacia el este y en t_2 se mueve hacia el oeste, hay algún tiempo entre t_1 y t_2 en el cual el objeto tiene velocidad cero.

Solución

(1) Falso. La rapidez aumenta si la magnitud de la velocidad aumenta, pero eso no siempre sucede cuando la velocidad aumenta (nota 2.22). Por ejemplo, si un objeto pasa de tener velocidad negativa a cero, la velocidad aumenta pero la rapidez disminuye.

(2) Falso. La aceleración no indica qué tan grande o pequeña es la velocidad, sólo indica qué tan grande es la diferencia entre la velocidad final y la inicial.

(3) Verdadero. Por ejemplo, un objeto podría disminuir su velocidad al pasar de tener velocidad cero a velocidad negativa. En ese caso su rapidez aumenta porque la magnitud de la velocidad pasa de cero a un número mayor que cero (nota 2.22).

(4) Verdadero. Cada fragmento de la gráfica de posición contra tiempo indica la velocidad en ese punto, y cuanto más inclinado, mayor es la rapidez (sin importar si es negativo o positivo).

(5) Verdadero. Si un objeto invierte la dirección en que se mueve, tiene que pasar de tener velocidad positiva a velocidad negativa, o pasar de velocidad negativa a positiva. En cualquier caso, tiene que pasar por velocidad cero justo en el momento de la inversión.

Problema 2.25.

Palabras clave: objetos que no comienzan su movimiento al mismo tiempo, razón entre la magnitud de aceleración de dos objetos, distancia entre dos objetos, gráfica de posición contra tiempo.

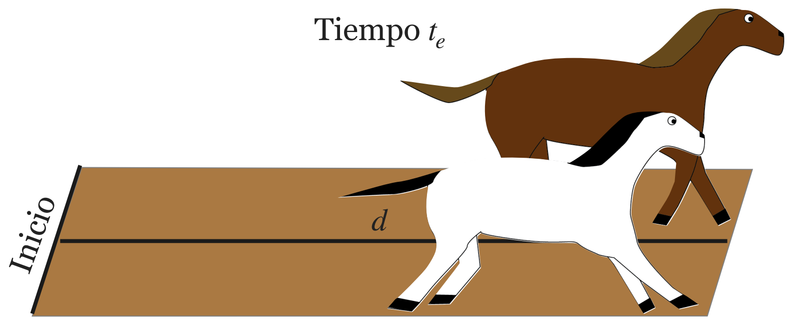
En una carrera entre dos caballos, Tormenta (el caballo blanco) está distraído y arranca un segundo después del disparo que indica el inicio de la carrera. Por el contrario, Estrella (el caballo café) arranca justo en el momento del disparo. Ambos caballos se mueven en línea recta con aceleración constante. Cuando Estrella y Tormenta han recorrido una distancia de 100 metros, 15 segundos después de que suena el disparo, ambos están empatados.

(a) ¿Cuál es la razón entre la magnitud de la aceleración de Tormenta y la de Estrella?

(b) ¿A qué distancia se encuentran ambos caballos cuando Estrella ha recorrido una distancia de 50 metros? Suponga que Tormenta ya ha comenzado a correr en ese momento.

(c) ¿Cuál es la velocidad de ambos caballos cuando Estrella ha recorrido 50 metros?

(d) Realice una gráfica cualitativa de posición contra tiempo para ambos caballos (en una misma gráfica).



Un tiempo t_e después del disparo los caballos han recorrido una distancia d y van empatados.

Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b), (c), (d). Tormenta arranca 1 segundo después de que suena el disparo, mientras que Estrella arranca justo en el momento del disparo. Los caballos se mueven en línea recta con aceleración constante. Quince segundos después de que suena el disparo, Estrella y Tormenta van empatados, y en ese momento han recorrido una distancia de 100 metros. Suponga que cuando Estrella ha recorrido 50 metros, Tormenta ya ha comenzado a correr.

¿Qué nos piden?

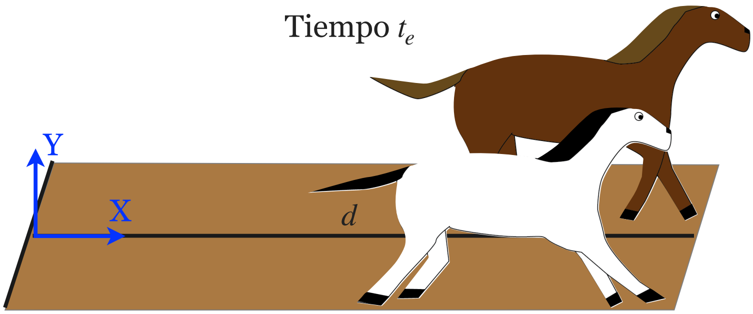
(a) Hallar la razón entre la magnitud de la aceleración de Tormenta y Estrella.

(b) Decir a qué distancia se encuentran los caballos cuando Estrella ha recorrido 50 metros.

(c) Hallar la velocidad de ambos caballos cuando Estrella ha recorrido 50 metros.

(d) Realizar una gráfica cualitativa de posición contra tiempo (una sola para ambos caballos).

(a) Empecemos por escoger un sistema de coordenadas. Pongamos el origen de nuestro sistema en el punto de partida de la carrera y digamos que los caballos se mueven en la dirección positiva de X:



Usamos un sistema de coordenadas ubicado en el origen y cuyo eje X apunta en la dirección en la que se mueven los caballos.

Para hallar la razón de las magnitudes de las aceleraciones debemos encontrar la aceleración de ambos caballos. Podríamos escribir las ecuaciones de movimiento de ambos caballos y usarlas para despejar la aceleración. Sin embargo, una forma más sencilla de hallar la magnitud de la aceleración en este problema es usar la fórmula de la distancia recorrida en un movimiento con aceleración constante, pues en el enunciado nos dicen directamente la distancia recorrida por los caballos (nota 2.18). La ecuación de la distancia en un movimiento con aceleración constante es

$$d = \frac{1}{2}at^2 + v_i t. \tag{1}$$

(No hemos puesto las barras que indican valor absoluto porque es claro que en este problema todos los términos a la derecha son positivos, así que no es necesario indicar el valor absoluto). Empecemos por hallar la magnitud de la aceleración de Estrella (el caballo café). Su rapidez inicial es cero. Su aceleración es positiva dado el sistema escogido. Llamemos t_e al tiempo de encuentro y d a la distancia en que se encuentran (sabemos que t_e es 15 segundos y d es 100 metros, pero vamos a reemplazar los valores al final). Por lo tanto, obtenemos

$$d = \frac{1}{2}a_e t_e^2, \tag{2}$$

donde a_e es la magnitud de la aceleración de Estrella. Así, la magnitud de la aceleración de Estrella es

$$\frac{2d}{t_e^2} = a_e. \tag{3}$$

Ahora hallemos la magnitud de la aceleración de Tormenta (el caballo blanco). Por supuesto, podemos volver a usar la ecuación (1) porque Tormenta también se mueve con aceleración constante. Sin embargo, debemos tener cuidado porque Tormenta no alcanza la distancia d (los 100 metros) en el mismo tiempo que Estrella lo hace. Recordemos que Tormenta estaba distraído inicialmente, y se demoró 1 segundo en comenzar a correr. Esto quiere decir que Tormenta recorrió la distancia d en menos tiempo que Estrella. Llamemos t_d al tiempo de demora (que es un segundo). Así, Tormenta recorrió la distancia d en un tiempo de $t_e - t_d$ (es decir, en un tiempo de 15 s − 1 s = 14 s). Así, la ecuación (1) para Tormenta es la siguiente:

$$d = \frac{1}{2}a_t(t_e - t_d)^2, \tag{4}$$

donde a_t es la magnitud de la aceleración de Tormenta, y donde usamos el hecho de que la rapidez inicial de Tormenta es cero. Si despejamos la magnitud de la aceleración de esta ecuación, obtenemos

$$\frac{2d}{(t_e - t_d)^2} = a_t. \tag{5}$$

Ahora que sabemos la magnitud de la aceleración de ambos caballos, podemos encontrar la razón entre las mismas. La razón entre la magnitud de la aceleración de Tormenta y Estrella será

$$\frac{\left(\dfrac{2d}{(t_e - t_d)^2}\right)}{\left(\dfrac{2d}{t_e^2}\right)} = \frac{a_t}{a_e}. \tag{6}$$

Esto es igual a

$$\frac{t_e^2}{(t_e - t_d)^2} = \frac{a_t}{a_e}. \tag{7}$$

Antes de reemplazar los valores conocidos, notemos que esta razón da un número mayor que 1, pues t_e^2, que es el numerador, es mayor que $(t_e - t_d)^2$, que es el denominador. Esto tiene sentido porque la aceleración de Tormenta tiene que ser mayor que la de Estrella, pues Tormenta alcanza a Estrella a pesar de que arranca después. Además, notemos que la ecuación no está definida cuando t_e es igual a t_d. Esto es de esperarse porque si Tormenta se demora en arrancar el mismo tiempo que le toma a Estrella llegar a 100 metros, ¡entonces sería imposible que Tormenta alcanzara a Estrella a los 100 metros!

Si reemplazamos los valores conocidos, obtenemos

$$\frac{(\overbrace{15\ \text{s}}^{t_e})^2}{(\underbrace{15\ \text{s}}_{t_e} - \underbrace{1\ \text{s}}_{t_d})^2} = 1.15 = \frac{a_t}{a_e}. \tag{8}$$

Como dijimos, era de esperarse que Tormenta tuviera una aceleración mayor que la de Tormenta.

(b) Para hallar a qué distancia se encuentran ambos caballos cuando Estrella ha recorrido una distancia de 50 metros, debemos encontrar la posición de ambos caballos en ese momento y después hallar la magnitud de la resta de las posiciones (nota 2.19). Pero no conocemos la posición de Tormenta en ese momento.

Empecemos por escribir la ecuación de movimiento de Tormenta. Como Tormenta comienza en el origen, con rapidez cero y con aceleración positiva, la ecuación de movimiento de Tormenta es

$$x_t\hat{x} = \frac{1}{2}a_t t^2\hat{x}. \tag{9}$$

Además, la magnitud de la aceleración de Tormenta está dada por la ecuación (5):

$$x_t\hat{x} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{2d}{(t_e - t_d)^2}\right)}_{a_t}t^2\hat{x}. \tag{10}$$

Aún no conocemos el tiempo t que debemos poner en esta ecuación. Podemos hallar este tiempo si primero hallamos el tiempo que le toma a Estrella recorrer los 50 metros. Para hacer esto, llamemos d_1 a esta distancia de 50 metros y usemos la ecuación (1) que nos da la distancia recorrida en términos de la magnitud de la aceleración y el tiempo. La magnitud de la aceleración de Estrella está dada por (3), así que tenemos lo siguiente:

$$d_1 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{2d}{t_e^2}\right)}_{a_e}t^2. \tag{11}$$

Al despejar t^2 obtenemos

$$\left(\frac{t_e^2 d_1}{d}\right) = t^2. \tag{12}$$

Finalmente, al aplicar raíz cuadrada, llegamos a

$$t_e\sqrt{\frac{d_1}{d}} = t. \tag{13}$$

Podríamos estar tentados a usar ese tiempo en la ecuación (10), pero debemos tener cuidado porque este el tiempo de Estrella, y recordemos que Tormenta arranca un tiempo t_d después del disparo. Así que, como hicimos antes, el tiempo durante el cual Tormenta corre es el tiempo de Estrella menos el tiempo de demora: $t - t_d$. Como la ecuación (13) nos da el tiempo de Estrella, el tiempo de Tormenta será

$$\underbrace{t_e\sqrt{\frac{d_1}{d}}}_{t} - t_d = t_t, \tag{14}$$

donde hemos llamado t_t al tiempo de Tormenta.

Si usamos el tiempo dado por la ecuación (14) en la ecuación (10), obtenemos

$$x_t\hat{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{2d}{(t_e - t_d)^2}\right)\underbrace{\left(t_e\sqrt{\frac{d_1}{d}} - t_d\right)^2}_{t_t}\hat{x}. \tag{15}$$

Esta es la posición de Tormenta cuando Estrella ha recorrido una distancia de 50 metros. La distancia entre ambos caballos es la magnitud de la resta vectorial entre la posición de Estrella, que es $d_1\hat{x}$ y la posición de Tormenta, que está dada por la ecuación (15):

$$D = \|\vec{x}_e - \vec{x}_t\| = \left\|\underbrace{d_1\hat{x}}_{\vec{x}_e} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2d}{(t_e - t_d)^2}\right)\left(t_e\sqrt{\frac{d_1}{d}} - t_d\right)^2\right)\hat{x}}_{\vec{x}_t}\right\|. \tag{16}$$

Al reemplazar los valores conocidos, esto nos da

$$D = \left\| \underbrace{50\text{ m}}_{d_1}\hat{x} - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{2\overbrace{(100\text{ m})}^{d}}{(\underbrace{15\text{ s}}_{t_e} - \underbrace{1\text{ s}}_{t_d})^2}\right)\left(\overbrace{15\text{ s}}^{t_e}\sqrt{\frac{\overbrace{50\text{ m}}^{d_1}}{\underbrace{100\text{ m}}_{d}}} - \overbrace{1\text{ s}}^{t_d}\right)^2\right)\hat{x}\right\| = 2.91\text{ m}. \quad (17)$$

(c) Para hallar la velocidad de ambos caballos cuando Estrella ha recorrido 50 metros podemos usar la siguiente ecuación que nos da la rapidez final (nota 2.24):

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i). \quad (18)$$

Por supuesto, también podemos usar $\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_i$ porque conocemos el tiempo y la aceleración. Notemos que en este caso $x_f - x_i$ es $d_1 - 0 = d_1$. Como la rapidez inicial de Estrella es cero y la magnitud de la aceleración de Estrella está dada por la ecuación (13), la ecuación (18) queda

$$v_f^2 = 2\underbrace{\left(\frac{2d}{t_e^2}\right)}_{a_e}d_1. \quad (19)$$

Al simplificar un poco y sacar raíz cuadrada, obtenemos

$$v_f = \frac{2}{t_e}\sqrt{dd_1}. \quad (20)$$

Esta no es la velocidad sino la rapidez (la velocidad tiene dirección). Como Estrella se mueve en la dirección positiva de X, la velocidad es

$$\vec{v}_e = \frac{2}{t_e}\sqrt{dd_1}\hat{x}. \quad (21)$$

Si reemplazamos los valores, esto nos da

$$\vec{v}_e = \frac{2}{15\text{ s}}\sqrt{(100\text{ m})(50\text{ m})}\hat{x} = 9.43\text{ m/s }\hat{x}. \quad (22)$$

La velocidad de Tormenta se puede hallar de la misma forma. Para aplicar la ecuación (18) debemos usar el hecho de que la aceleración de Tormenta está dada por la ecuación (5) y debemos tener en cuenta que para Tormenta,

$x_f - x_i$ es la magnitud de la ecuación (15) (la posición inicial es cero y x_f es la magnitud de la posición final). Primero escribamos x_f usando la ecuación (15):

$$x_t\hat{x} = \left\| \frac{1}{2}\left(\frac{2d}{(t_e - t_d)^2}\right)\left(t_e\sqrt{\frac{d_1}{d}} - t_d\right)^2 \hat{x} \right\|. \tag{23}$$

Si usamos este resultado en la ecuación (18), tenemos en cuenta que la aceleración de Tormenta está dada por la ecuación (5), y usamos el hecho de que la rapidez inicial es cero, obtenemos

$$v_f^2 = 2\underbrace{\left(\frac{2d}{(t_e - t_d)^2}\right)}_{a_t}\underbrace{\left(\left\| \frac{1}{2}\left(\frac{2d}{(t_e - t_d)^2}\right)\left(t_e\sqrt{\frac{d_1}{d}} - t_d\right)^2 \hat{x} \right\|\right)}_{x_f}^2. \tag{24}$$

Podemos quitar las barras de valor absoluto porque ese término está al cuadrado (así que nos dará positivo de todas maneras). Si hacemos esto y simplificamos un poco, llegamos a

$$v_f^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2d}{(t_e - t_d)^2}\right)^3 \left(t_e\sqrt{\frac{d_1}{d}} - t_d\right)^4. \tag{25}$$

Ahora saquemos raíz cuadrada:

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2d}{(t_e - t_d)^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(t_e\sqrt{\frac{d_1}{d}} - t_d\right)^2. \tag{26}$$

La velocidad es la rapidez con la dirección, que en este caso es $\hat{x}$:

$$\vec{v}_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2d}{(t_e - t_d)^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(t_e\sqrt{\frac{d_1}{d}} - t_d\right)^2 \hat{x}. \tag{27}$$

Finalmente, reemplazamos los valores numéricos:

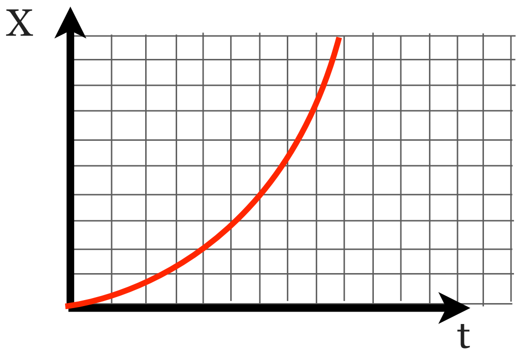
$$\vec{v}_f = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{2\overbrace{(100\text{ m})}^{d}}{(\underbrace{15\text{ s}}_{t_e} - \underbrace{1\text{ s}}_{t_d})^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\underbrace{15\text{ s}}_{t_e}\sqrt{\frac{\overbrace{50\text{ m}}^{d_1}}{\underbrace{100\text{ m}}_{d}}} - \underbrace{1\text{ s}}_{t_d}\right)^2 \hat{x} = 67.26\text{ m/s}. \tag{28}$$

Tormenta tiene una velocidad mucho mayor que la de Estrella y podemos inferir que la va a sobrepasar.

(d) Primero realicemos la gráfica cualitativa de posición contra tiempo de Estrella. Estrella empieza en el origen con velocidad inicial cero y tiene aceleración positiva. Por lo tanto, su ecuación de movimiento es de la siguiente forma (hemos aplicado la regla de oro):

$$x_e = \frac{1}{2}a_e t^2 \tag{29}$$

Esta es la ecuación de una parábola que se abre hacia arriba y que está centrada en el eje Y:

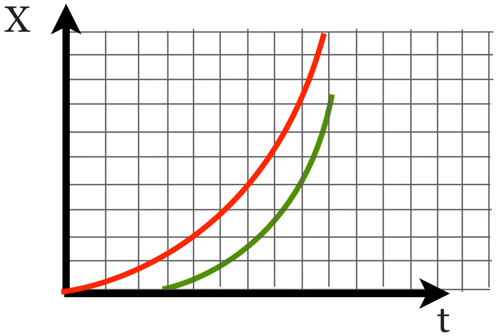


Gráfica de posición contra tiempo de Estrella. Es una parábola que comienza en el origen y se abre hacia arriba porque la aceleración es positiva.

La ecuación de movimiento de Tormenta es la ecuación (9). Al aplicar la regla de oro, obtenemos

$$x_t = \frac{1}{2}a_t t^2. \tag{30}$$

Esta es una parábola que se abre hacia arriba y que comienza en cero, tal como la de Estrella. Sin embargo, debemos tener cuidado con el tiempo porque Tormenta comienza la carrera un tiempo t_d después de que comienza Estrella. Además, como la aceleración de Tormenta es mayor, su parábola es más pronunciada. Si trazamos esta gráfica en la misma gráfica de Estrella, tenemos:



Gráfica de posición contra tiempo de Tormenta (verde). Es una parábola que se abre hacia arriba porque la aceleración es positiva. Tormenta comienza la carrera un tiempo después del inicio y su parábola es más pronunciada que la de Estrella porque su aceleración es mayor.

Nota 2.26. Cuando un objeto empieza su movimiento un tiempo después que otro

Si un objeto A comienza su movimiento un tiempo t_d después que otro objeto B, entonces el tiempo que ponemos en la ecuación de movimiento de A debe ser $t - t_d$, donde t es el tiempo de B.

2.1 Notas del capítulo

Nota 2.1: Posición de un objeto.

La posición de un objeto se representa con un vector que va del origen al punto en el plano en el que está el objeto. Para diferentes sistemas de coordenadas la posición del mismo objeto (bien sea su dirección, magnitud o ambas) puede ser diferente.

En este capítulo nos vamos a concentrar en objetos que se mueven en línea recta así que las posiciones sólo van a ser vectores de una sola dimensión (por costumbre vamos a usar el eje X para indicar estas posiciones).

Nota 2.2: Desplazamiento y distancia.

- El desplazamiento de un objeto es la resta vectorial de la posición final con la posición inicial. Si la posición inicial es $\vec{x}_i$ y la final es $\vec{x}_f$, entonces el desplazamiento es
$$\vec{D} = \vec{x}_f - \vec{x}_i$$
- Si un objeto tiene diferentes desplazamientos, el *desplazamiento neto* es simplemente la resta de la posición final con la posición inicial, ignorando las diferentes posiciones intermedias.
- La distancia entre dos puntos es la magnitud del desplazamiento entre ambos puntos:
$$d = \left\|\vec{D}\right\|.$$
- La distancia neta es la suma de la magnitud de cada uno de los diferentes desplazamientos intermedios. Por último, la distancia neta no es simplemente la magnitud de la resta vectorial entre la última posición y la posición inicial, es decir, la distancia neta no es la magnitud del desplazamiento neto.

Nota 2.3: La magnitud de un vector no depende del sistema.

La distancia recorrida (la magnitud del desplazamiento) por un objeto no depende del sistema de coordenadas escogido. En general, la magnitud de un vector no depende del sistema de coordenadas usado.

Nota 2.4: Desplazamiento y distancia neta cuando la posición final y la inicial son la misma.

Cuando un objeto realiza un movimiento y regresa hasta el punto del que partió, el desplazamiento neto es cero pero la distancia no lo es. La distancia depende de las diferentes posiciones intermedias del objeto.

Nota 2.5: ¿Cuándo cambia un vector?

Un vector cambia cuando su dirección o su magnitud cambia (en caso contrario decimos que el vector es constante). En el caso de la velocidad, esta cambia sólo si la rapidez o la dirección de movimiento cambia.

Nota 2.6: Velocidad y rapidez.

- La velocidad es una cantidad vectorial que relaciona el desplazamiento del objeto con el tiempo del desplazamiento. Cuando la velocidad es constante, la velocidad se calcula con

  $$\vec{v} = \frac{\vec{D}}{t} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t},$$

  donde $\vec{D}$ es el desplazamiento del objeto entre los puntos $\vec{x}_i$ y $\vec{x}_f$, y t es el tiempo que le toma al objeto moverse entre esos puntos.

- La *velocidad instantánea* es la velocidad del objeto en cierto instante. Cuando el objeto tiene velocidad constante, su velocidad instantánea es la misma en cualquier punto de su trayectoria y esa velocidad se calcula con la fórmula anterior.

- El vector de velocidad tiene la misma dirección que el vector del desplazamiento.

- La magnitud de la velocidad se llama rapidez y está dada por $v = d/t$, donde d es la distancia recorrida. En palabras, la rapidez es la distancia recorrida sobre el tiempo del recorrido. De forma equivalente, podemos decir que *distancia es rapidez por tiempo*.

- La rapidez, como cualquier magnitud de un vector, no depende del sistema.

Nota 2.7: Movimiento rectilíneo uniforme.

En un movimiento rectilíneo uniforme el objeto tiene velocidad constante. Es decir, el objeto preserva una rapidez constante y se mueve en línea recta, sin cambiar su dirección.

Nota 2.8: Ecuación de movimiento para un objeto en un movimiento rectilíneo uniforme.

Cuando un objeto se mueve con velocidad constante, la ecuación de movimiento del objeto es

$$\vec{x}_f = \vec{v}t + \vec{x}_i,$$

donde $\vec{x}_f$ es la posición final, $\vec{x}_i$ su posición inicial, v su velocidad y t el tiempo transcurrido entre la posición inicial y final.

Nota 2.9: Gráfica de posición contra tiempo para un movimiento rectilíneo uniforme.

Para realizar una gráfica de posición contra tiempo necesitamos seguir tres pasos:

(1) Escogemos un sistema de coordenadas cualquiera o usamos el que el problema nos indique.

(2) Con base en la información que tengamos y el sistema de coordenadas escogido, debemos escribir la ecuación de movimiento del objeto. En general, la ecuación de un movimiento con velocidad constante es $\vec{x}_f = \vec{v}t + \vec{x}_i$.

(3) Aplicamos la regla de oro a la ecuación de movimiento. Graficamos esta última ecuación teniendo en cuenta que es la ecuación de una línea recta. La posición inicial es el punto de corte con el eje Y, la posición final es la variable dependiente, el tiempo es la variable independiente y la velocidad es la pendiente de la recta (el signo de la velocidad dice si la pendiente es positiva o negativa).

Nota 2.10: Claves para resolver problemas de cinemática.

Para resolver problemas de cinemática es muy importante seguir los siguientes pasos:

(1) Escoger un sistema de coordenadas o usar el sistema que nos digan en el problema.

(2) Escribir la ecuación de movimiento de los diferentes objetos con base en el sistema elegido antes y con base en los datos conocidos. Si no conocemos ciertos datos (por ejemplo, si no conocemos la velocidad), escribimos la ecuación en término de variables desconocidas.

(3) Una vez tenemos la ecuación de movimiento de cada objeto, podemos encontrar lo que nos piden usando esas ecuaciones.

Nota 2.11: Tiempo de encuentro.

El tiempo de encuentro de dos objetos se halla igualando las ecuaciones de movimiento de los objetos.

Nota 2.12: Punto de intersección en una gráfica de posición contra tiempo.

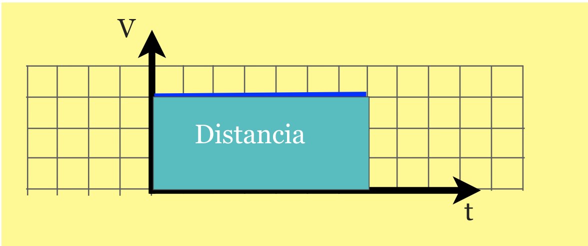
Si realizamos una gráfica de posición contra tiempo para varios objetos en un mismo sistema de coordenadas, el punto donde se intersecan las gráficas va a corresponder al punto en que se encuentran los objetos. Este punto nos da la información de la ubicación y el tiempo en que se encuentran los objetos.

Nota 2.13: ¿Qué es escoger un sistema de coordenadas?

Escoger un sistema de coordenadas es escoger cuál es el origen del sistema, cuál es la dirección positiva de los ejes y cuál es el tiempo inicial.

Nota 2.14: Área encerrada entre el eje X y la línea de velocidad.

El área encerrada entre el eje X y la línea de la velocidad en una gráfica de velocidad contra tiempo es igual a la distancia recorrida por el objeto.



Nota 2.15: Aceleración cero.

La aceleración de un objeto es cero solamente si la magnitud y la dirección de la velocidad final son iguales a la magnitud y dirección de la velocidad inicial. En otras palabras, si la rapidez del objeto cambia, o si la dirección en que se mueve cambia, el objeto tendrá aceleración distinta de cero.

Nota 2.16: Gráfica de velocidad contra tiempo para un movimiento con aceleración constante.

Para realizar una gráfica de velocidad contra tiempo necesitamos seguir tres pasos:

(a) Escogemos un sistema de coordenadas cualquiera o usamos el que el problema nos indique.

(b) Con base en la información que tengamos y el sistema de coordenadas escogido, debemos escribir la ecuación de la velocidad del objeto. En general, la ecuación de velocidad del objeto en un movimiento con aceleración constante es $\vec{v}_f = \vec{a}t + \vec{v}_i$.

(c) Aplicamos la regla de oro a la ecuación de la velocidad. Graficamos esta última ecuación teniendo en cuenta que es la ecuación de una línea recta. La velocidad inicial es el punto de corte con el eje Y, la velocidad final es la variable dependiente, el tiempo es la variable independiente y la aceleración es la pendiente de la recta (el signo de la aceleración indica si la pendiente es positiva o negativa).

Nota 2.17: Ecuación de movimiento para un objeto en un movimiento con aceleración constante.

Cuando un objeto se mueve con aceleración constante, la ecuación de movimiento del objeto es

$$\vec{x}_f = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_i t + \vec{x}_i,$$

donde $\vec{x}_f$ es la posición final, $\vec{x}_i$ su posición inicial, $\vec{v}_i$ su velocidad cuando está en la posición inicial y t el tiempo transcurrido entre la posición inicial y final.

Nota 2.18: Distancia recorrida por un objeto en un movimiento con aceleración constante.

La distancia recorrida por un objeto con aceleración constante y que se mueve en línea recta está dada por

$$d = \left\| \frac{1}{2}at^2 + v_i t \right\|,$$

donde a es la magnitud de la aceleración, t el tiempo y v_i la magnitud de la velocidad inicial.

2.19: Distancia entre dos posiciones.

La distancia entre dos posiciones $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ es la magnitud de la resta vectorial entre ambas: $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|$ (el orden no interesa porque es valor absoluto).

Nota 2.20: Gráfica de posición contra tiempo para un movimiento rectilíneo con aceleración constante.

(1) Escogemos un sistema de coordenadas cualquiera o usamos el que el problema nos indique.

(2) Con base en la información que tengamos y el sistema de coordenadas escogido, debemos escribir la ecuación de movimiento del objeto. En general, la ecuación de posición del objeto en un movimiento con aceleración constante es $\vec{x}_f = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_i t + \vec{x}$.

(3) Aplicamos la regla de oro. Graficamos esta última ecuación teniendo en cuenta que es la ecuación de una parábola y sólo tenemos en cuenta la parte positiva del eje X que corresponde a tiempos positivos. El signo del término con la aceleración (el término cuadrático) determina si se abre hacia arriba o hacia abajo. El punto de corte con el eje Y es la posición inicial. Si el término con la velocidad inicial tiene el mismo signo que el término con la aceleración, la parábola está corrida en el sentido negativo de X. Si tienen signos diferentes, la parábola está corrida en el sentido positivo de X.

Nota 2.21: Velocidad cero según la gráfica de posición contra tiempo.

En el punto más alto de la parábola y en el punto más bajo la velocidad del objeto es cero.

Nota 2.22: Disminución y aumento de rapidez en una gráfica de velocidad contra tiempo.

Si la aceleración es positiva la velocidad está aumentando, pero no se sigue de esto que la rapidez está aumentando. Si la aceleración es negativa la velocidad está disminuyendo, pero no necesariamente la rapidez está disminuyendo. La rapidez aumenta sólo si la magnitud de la velocidad aumenta, es decir, si en la gráfica de la velocidad contra tiempo la línea de la velocidad se aleja del eje del tiempo. La rapidez disminuye sólo si la magnitud de la velocidad disminuye, es decir, si en la gráfica de velocidad contra tiempo la línea de la velocidad se acerca al eje del tiempo.

Nota 2.23: Interpretando una gráfica de posición contra tiempo.

- La gráfica de posición contra tiempo puede ser muy complicada, puede ser una curva extraña, y sin embargo, si ponemos pequeñas líneas rectas sobre la curva, podemos analizar el movimiento del objeto.
- La velocidad es positiva en los tiempos en los cuales las pendientes de los segmentos rectos es positiva.
- La velocidad es negativa en los tiempos en los cuales las pendientes de los segmentos rectos son negativas.
- La velocidad es cero cuando la pendiente de los segmentos es cero, y esto ocurre en la parte más alta y más baja de la parábola.
- La rapidez es máxima cuando los segmentos son lo más inclinado posible (sin importar si son negativos o positivos) y la rapidez es mínima cuando la velocidad es cero.
- Por último, la aceleración es positiva si la velocidad es cada vez más positiva (si los segmentos son cada vez más inclinados de forma positiva, o cada vez menos inclinados si son negativos).

Nota 2.24: Rapidez final en un movimiento con aceleración constante si no conocemos el tiempo.

Si no conocemos el tiempo podemos hallar la rapidez final usando

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i),$$

donde a es la magnitud de la aceleración, v_i es la rapidez inicial y $x_f - x_i$ es la resta entre la posición final y la inicial. El signo de la aceleración y de las posiciones iniciales y finales se debe respetar.

Nota 2.25: ¿En qué tiempo la velocidad es cero?

Para hallar el tiempo en el cual un objeto que se mueve con aceleración constante alcanza velocidad cero, usamos la ecuación $\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_i$ y ponemos que la velocidad es cero: $0 = \vec{a}t + \vec{v}_i$.

Nota 2.26: Cuando un objeto empieza su movimiento un tiempo después que otro.

Si un objeto A comienza su movimiento un tiempo t_d después que otro objeto B, entonces el tiempo que ponemos en la ecuación de movimiento de A debe ser $t - t_d$, donde t es el tiempo de B.

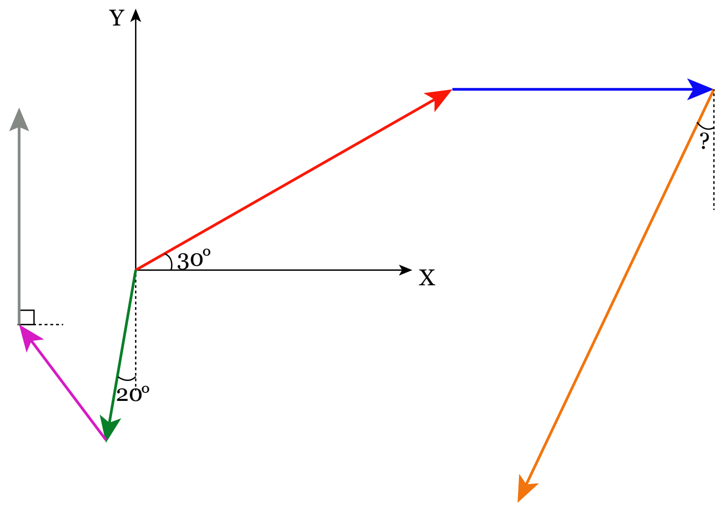
2.2 Problemas sin solucionar

1. Para ir al mercado, Julián toma un bus que hace el recorrido indicado en el dibujo. La distancia del tramo rojo es de 40 metros, la del tramo azul es 30 metros, y la del tramo naranja es 90 metros. Valentina toma otro bus, que hace un recorrido distinto: el tramo verde es de 20 metros, el morado es de 15, y el gris es de 50 metros.

(a) Indique el valor de los dos ángulos no conocidos en el dibujo, si la distancia que separa a Julián y a Valentina a lo largo de X al final del recorrido es 35 metros y la distancia en Y entre el punto inicial y Julián es de 60.19 metros.

(b) ¿A qué distancia se encuentra Valentina de Julián cuando Julián está en el punto final del tramo rojo y Valentina en el punto final del tramo gris?

(c) Diga cuál es el desplazamiento final, y la distancia total recorrida por Valentina y por Julián.



Problema similar: 2.3.

2. Si caminando con velocidad constante Hernán recorre una distancia de 5000 metros en la primera hora, y de 15 000 metros en la segunda,

(a) ¿Cuál es la razón entre la rapidez de Hernán en la primera hora sobre la rapidez de Hernán en la segunda?

(b) Realice una gráfica de posición contra tiempo de Hernán para todo el recorrido, si asumimos que Hernán camina en línea recta, en la dirección negativa del eje X, y si además asumimos que Hernán comienza a 1000 metros del origen de nuestro sistema en el sentido positivo.

Problema similar: 2.7.

3. Suponga que Adriana le pasa un balón en línea recta a Fernanda, y al mismo tiempo Fernanda le pasa un balón a Adriana, como se indica en el dibujo. El balón de Adriana tiene una rapidez constante de 10 metros por segundo, mientras que el de Fernanda tiene una rapidez constante de 8 metros por segundo. Si los balones se chocan después de 5 segundos de haber sido pateados,

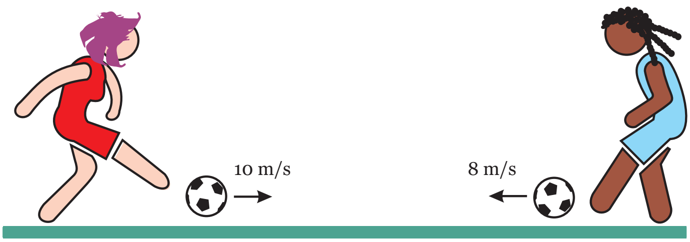
(a) ¿Cuál era la distancia que los separaba?

(b) Realice una gráfica de posición contra tiempo.

(c) Con base en la distancia hallada en (a), diga cuál habría sido el tiempo de encuentro si el balón de Adriana hubiera tenido el doble de rapidez.

(d) Haga una gráfica de velocidad contra tiempo para el balón de Fernanda, y calcule el área encerrado entre la línea de velocidad y el eje del tiempo.

(e) Responda de nuevo (b) y (d) pero usando un sistema de coordenadas en el que el eje de movimiento del balón tiene dirección opuesta al usado antes.



Problemas similares: 2.8, 2.9.

4. Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(a) Si un objeto parte de un punto A y regresa al punto A, la distancia recorrida no es cero.

(b) Si el desplazamiento del objeto es cero, podemos estar seguros de que el objeto regresó al punto de partida.

(c) El desplazamiento es igual a la rapidez por el tiempo.

(d) Si un objeto tiene velocidad variable, entonces el objeto no puede tener la misma velocidad en dos tiempos diferentes.

(e) Hay casos en los que un objeto no se mueve con velocidad constante y su gráfica de posición contra tiempo es la de una línea recta.

Problema similar: 2.6.

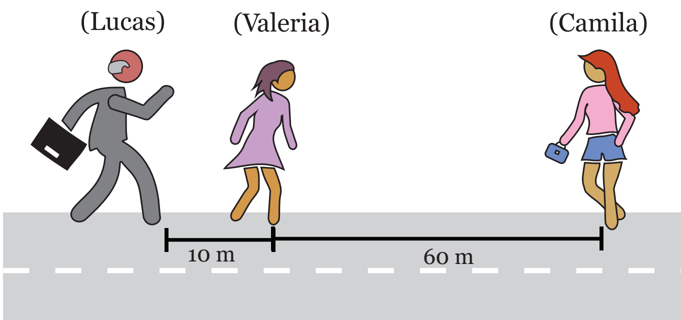
5. Lucas, Valeria y Camila están caminando sobre la misma calle. Lucas está 10 metros detrás de Valeria y ambos caminan en la misma dirección, mientras que Camila está a 60 metros de Valeria y camina en dirección contraria (ver dibujo). Todos caminan con rapidez constante. Suponga que después de 10 minutos, Lucas está a 2 metros de alcanzar a Camila, y Valeria está a 4 metros de alcanzar a Camila.

(a) ¿Cuál es la razón entre la rapidez de Lucas contra la rapidez de Valeria? Deje su respuesta en términos de la rapidez de Valeria.

(b) Con base en (a), halle la rapidez de Camila y Lucas si la rapidez de Valeria es de 2 m/s.

(c) ¿A qué distancia van a estar separados Lucas y Valeria después de que han pasado 3 minutos desde el momento en que Lucas alcanza a Valeria?

(d) Realice una gráfica de velocidad contra tiempo para los tres, desde el momento inicial en que Lucas está 10 metros detrás de Valeria, hasta el momento en que Lucas está 10 metros por delante de Valeria.



Problema similar: 2.9.

6. Suponga que le dan las siguientes ecuaciones de movimiento para dos objetos: $\vec{x}_f = -\frac{1}{2}(100\ \mathrm{m/s^2})t^2\hat{x} + (30\ \mathrm{m})\hat{x}$ y $\vec{x}_f = \frac{1}{2}(50\ \mathrm{m/s^2})t^2\hat{x} + (30\ \mathrm{m})t\hat{x}$.

(a) Explique, según las ecuaciones, cuál es la posición inicial de los objetos, y cuál es la velocidad inicial.

(b) ¿Cuál objeto va a recorrer una mayor distancia al cabo de una hora?

(c) ¿Cuál será el desplazamiento total de cada objeto al cabo de una hora?

Problemas similares: 2.13, 2.14.

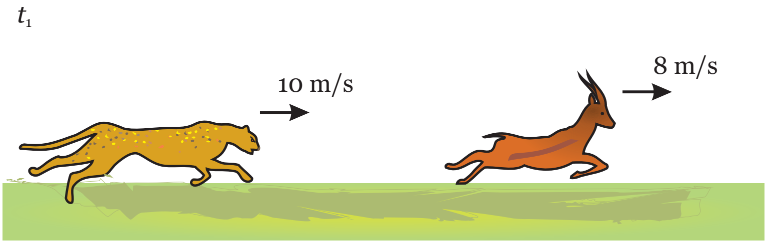
7. Una persona ve cómo en cierto tiempo t_1 un leopardo que persigue a una gacela tiene velocidad de 10 metros por segundo, y la gacela tiene velocidad de 8 metros por segundo. Dos segundos después, el leopardo tiene velocidad de 12 metros por segundo y la gacela conserva su velocidad. Si suponemos que desde t_1 y durante 5 segundos el leopardo incrementa su velocidad de forma constante,

(a) ¿Cuál es la distancia recorrida por el leopardo en esos 5 segundos desde t_1?

(b) ¿Cuál es la distancia recorrida por la gacela en esos 5 segundos?

(c) Si en t_1 había una distancia de 64 metros entre ambos, ¿después de cuánto tiempo el leopardo estará a un cuarto de esta distancia?

(d) Realice una gráfica cualitativa de velocidad contra tiempo.



Problemas similares: 2.13, 2.14, 2.20.

8. Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(a) Como la velocidad depende del sistema de referencia, y la rapidez es la magnitud de la velocidad, entonces la rapidez también depende del sistema de referencia.

(b) Si las líneas de posición contra tiempo de dos objetos se intersecan dos veces, entonces los objetos se encuentran dos veces.

(c) La rapidez puede cambiar sin que cambie la velocidad.

(d) Cuanto menor sea el área encerrada entre la línea de la velocidad y el eje X en una gráfica de velocidad contra tiempo, mayor es el desplazamiento del objeto.

(e) Si un carro no tiene velocidad cero, la línea de velocidad en una gráfica de velocidad contra tiempo no será paralela al eje del tiempo.

Problemas similares: 2.10.

9. Un tren tiene una velocidad de 10 metros por segundo justo antes de entrar a un túnel. Se demora 15 segundos cruzando el túnel y sale con una velocidad de 8 metros por segundo. El tren sigue con esa velocidad durante 1200 segundos, hasta que entra a otro túnel, que tiene una distancia de 200 metros. El tren se detiene por completo en la mitad del túnel. Finalmente, después de estar por 60 segundos detenido, el tren arranca de nuevo y sale por el otro extremo del túnel con una velocidad de 5 metros por segundo. Suponga que en todos los momentos en los que aumentó o disminuyó su velocidad, el tren tuvo aceleración constante.

(a) Halle la aceleración en cada tramo en el que disminuyó o aumentó su velocidad.

(b) Halle la distancia total recorrida por el tren.

(c) Halle el tiempo total del recorrido del tren.

(d) Realice una gráfica cualitativa de velocidad contra tiempo para todo el recorrido.

(e) Realice una gráfica cualitativa de posición contra tiempo.

(f) Vuelva a responder (a), (d) y (e) pero esta vez usando un sistema de coordenadas con el eje del movimiento apuntando en la dirección contraria al escogido en los numerales anteriores.

Problemas similares: 2.17.

10. Pablo lleva a su bebé en un coche. Inicialmente el coche se mueve en línea recta hacia el sur. Darío, que ve desde su ventana, hizo una gráfica de velocidad

contra tiempo para el coche, y Ana, que ve desde la calle, hizo una gráfica de posición contra tiempo.

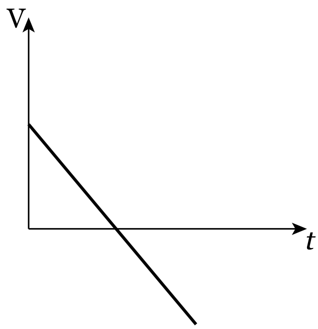
(a) Explique cómo se está moviendo el coche según la gráfica de Ana, y qué sistema de coordenadas está usando Ana.

(b) Realice una gráfica cualitativa de velocidad contra tiempo según el sistema usado por Ana.

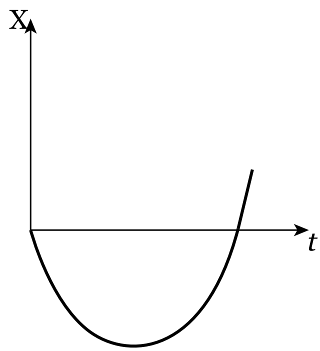
(c) Explique el movimiento del coche según la gráfica de Darío y diga cuál sistema de coordenadas está usando.

(d) Realice una gráfica cualitativa de posición contra tiempo según el sistema de Darío. Puede completar la información que haga falta como desee.

Gráfica de Darío



Gráfica de Ana



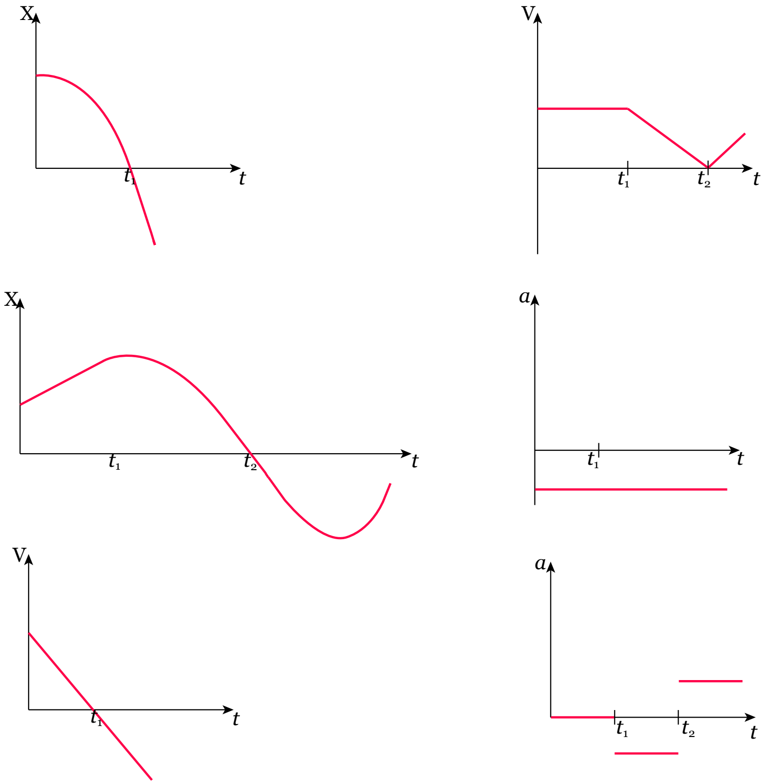
Problema similar: 2.19.

11. A continuación va a encontrar 6 gráficas, dos de posición contra tiempo, dos de aceleración y dos de velocidad.

(a) Explique detalladamente el comportamiento del objeto dada la información presentada en las gráficas.

(b) Diga qué gráficas corresponden al mismo comportamiento y, para ese caso, escriba la forma de la ecuación que representa el comportamiento del objeto.

(c) Explique en qué gráficas la rapidez aumenta, disminuye o permanece constante.



Problema similar: 2.23.

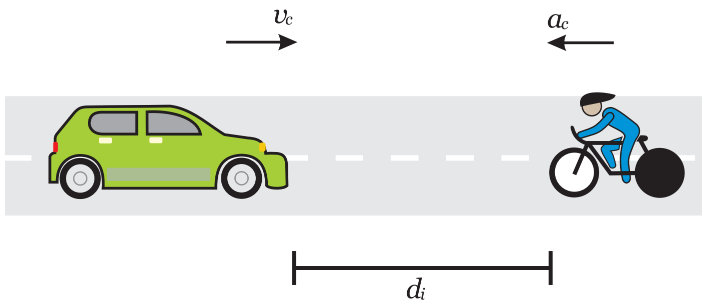
12. Con base en las siguientes ecuaciones, diga (sin dibujar) si la parábola de la gráfica de posición contra tiempo se abre hacia arriba o hacia abajo, y si está corrida hacia la derecha o hacia la izquierda:

$$\vec{x}_f = \frac{1}{2}(40\ \mathrm{m/s^2})t^2\hat{x} - (30\ \mathrm{m/s^2})t\hat{x}$$
$$\vec{x}_f = -\frac{1}{2}(20\ \mathrm{m/s^2})t^2\hat{x} - (10\ \mathrm{m/s^2})t\hat{x}$$
$$\vec{x}_f = -\frac{1}{2}(20\ \mathrm{m/s^2})t^2\hat{x} - (10\ \mathrm{m/s^2})t\hat{x} + (5\ \mathrm{m})\hat{x}$$

Problema similar: 2.15.

13. El conductor de un carro comienza a frenar cuando ve una persona en bicicleta, andando en sentido contrario (de frente hacia al carro). Suponga que el ciclista tiene aceleración a_c hacia el carro, que el carro y el ciclista tienen rapidez inicial v_c, que el tiempo que se demora en frenar el carro es t_f, que la distancia que los separa inicialmente es d_i, y que la distancia a la que está el

ciclista del carro cuando el carro se ha detenido por completo es d_f. Escriba una expresión para la aceleración del carro mientras frena.



Problema similar: 2.22.

14. Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(a) Si la gráfica de posición contra tiempo de un objeto es una parábola que se abre hacia arriba, entonces la aceleración del objeto es positiva.

(b) Un objeto puede tener aceleración negativa y velocidad final positiva.

(c) Si la gráfica de posición contra tiempo de un objeto es una parábola corrida hacia la izquierda, entonces podemos inferir que la aceleración tiene el mismo signo que la velocidad inicial.

(d) Si un objeto disminuye su velocidad podría aumentar su rapidez.

(e) Cuanto más inclinado sea un fragmento de la gráfica de posición contra tiempo, mayor es la rapidez en ese fragmento.

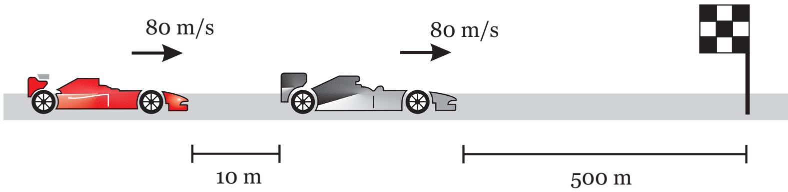
Problemas similares: 2.16, 2.24.

15. Lewis Hamilton, piloto británico de Fórmula 1, está a una distancia de 500 metros de la meta en la última recta del circuito. Sebastian Vettel, piloto alemán, está a sólo diez metros de Hamilton, como se ilustra en el dibujo. Justo en ese instante ambos pilotos tienen la misma rapidez de 80 metros por segundo. Suponga que a partir de ahí, Hamilton se mantiene con velocidad constante, pero Vettel acelera de forma constante y logra ganar la carrera por un segundo de diferencia.

(a) ¿Cuál fue la aceleración de Vettel?

(b) ¿Cuál es la velocidad de Vettel cuando llega a la meta?

(c) ¿Cuál habría tenido que ser la aceleración de Hamilton para llegar al mismo tiempo que Vettel, si Hamilton hubiera empezado a acelerar un segundo después de que Vettel empezara a acelerar?



Problema similar: 2.25.

Capítulo 3

Caída libre, lanzamiento vertical y movimiento parabólico

Problema (teórico) 3.1.

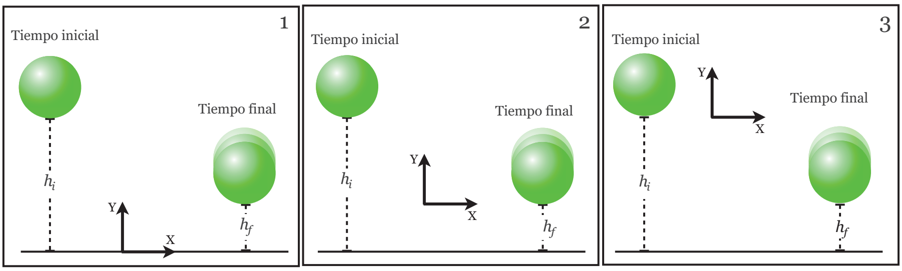
Palabras clave: caída libre, velocidad final de caída, caída libre en diferentes sistemas de coordenadas.

(a) Explique qué es un movimiento en caída libre.

(b) Suponga que una pelota se deja caer libremente desde una altura h_i medida con respecto al piso (ver dibujo). Nos interesa hallar una expresión para el tiempo que se demora la pelota en caer desde la altura h_f hasta otra altura h_f, que es la altura de la pelota en el tiempo final (medida con respecto al piso). Halle ese tiempo para los tres sistemas de coordenadas ilustrados en la figura.

(c) Halle una expresión para la velocidad de la pelota cuando toca el piso para los tres sistemas.

(d) Responda (b) y (c) pero esta vez suponiendo que la dirección positiva del eje Y apunta hacia el piso y no hacia arriba.



Solución

(a) Un movimiento en caída libre es un movimiento de un objeto que cumple dos condiciones. Primero, el objeto es liberado desde el reposo con velocidad inicial cero. Segundo, una vez se suelta, el objeto cae hacia el piso de forma libre con la aceleración de la gravedad. La magnitud de la aceleración de la gravedad cerca de la superficie terrestre es de 9.81 m/s^2 y su dirección es hacia el piso (hacia el centro de la Tierra, para ser precisos). Vamos a usar g para referirnos a la magnitud de esta aceleración que se suele tomar como constante[1]. Por supuesto, para que el objeto caiga con la aceleración de la gravedad debemos ignorar la fricción que el aire produce.

Por lo que se acaba de decir, un objeto en caída libre tiene un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado: es rectilíneo porque el objeto cae en línea

[1] En el capítulo sobre fuerzas veremos por qué podemos tomar esta aceleración como constante.

recta, y es uniformemente acelerado porque g es constante. Así, todo lo que hemos aprendido para resolver problemas de cinemática con aceleración constante se aplica a casos de caída libre. La ecuación de un movimiento en caída libre es (se suele usar el eje Y para analizar este movimiento):

$$\vec{y}_f = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{y}_i. \tag{1}$$

Nota 3.1. Movimiento en caída libre

Un movimiento en caída libre cumple dos condiciones:

(1) El objeto es liberado desde el reposo.

(2) El objeto cae con la aceleración de la gravedad, que tiene magnitud g. La caída libre es un caso especial de aceleración uniforme, y su ecuación de movimiento es $\vec{y}_f = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{y}_i$.

(b) Para hallar una expresión para el tiempo de caída de la pelota entre la altura inicial y final debemos empezar, como en todos los problemas de cinemática, por escoger un sistema de coordenadas. En este problema debemos usar tres sistemas.

Empecemos por usar el sistema del caso 1, el cual está situado en el piso y en el cual el eje Y apunta hacia arriba. Como se aprecia de la figura del caso 1, en el tiempo inicial la altura del objeto con respecto al sistema de coordenadas es h_i, y esta altura está en la parte positiva del eje Y. Por lo tanto, podemos escribir la posición inicial como $\vec{y}_i = h_i\hat{y}$. Además, la posición final del objeto también está en la parte positiva del eje Y, a una distancia h_f del piso. Así que podemos escribir a la posición final como $\vec{y}_f = h_f\hat{y}$. La dirección de la aceleración gravitacional es hacia el piso, y según este sistema, hacia el piso es la dirección negativa de Y. Además, recordemos que en caída libre la velocidad inicial siempre es cero. Por lo tanto, la ecuación de movimiento de la pelota desde que se suelta hasta la altura h_f es

$$h_f\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} + h_i\hat{y}. \tag{2}$$

De la ecuación (2) podemos despejar el tiempo que le toma a la pelota moverse desde $\vec{y}_i = h_i\hat{y}$ hasta $\vec{y}_f = h_f\hat{y}$. Pasemos a restar la posición inicial:

$$h_f\hat{y} - h_i\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y}. \tag{3}$$

Apliquemos la regla de oro:

$$h_f - h_i = -\frac{1}{2}gt^2. \tag{4}$$

Ahora dividamos todos los términos por $-1/2g$:

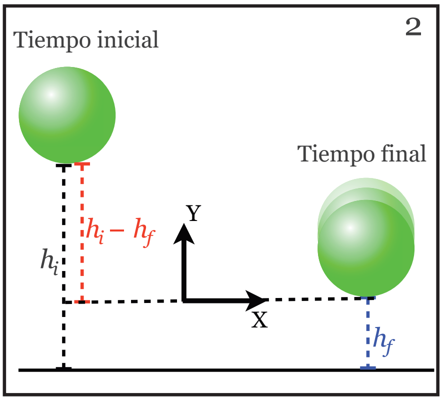
$$\frac{2(h_i - h_f)}{g} = t^2. \tag{5}$$

Si ahora sacamos raíz cuadrada, llegamos a

$$\sqrt{\frac{2(h_i - h_f)}{g}} = t. \tag{6}$$

Esta ecuación nos dice cuál es el tiempo que transcurre desde que la pelota está en la posición inicial a una altura h_i, hasta que llega a la altura h_f. Notemos que la raíz cuadrada tiene solución sólo si lo que está adentro es positivo o cero. Como 2 y g son números positivos, sólo debemos garantizar que h_i menos h_f sea un número positivo. Pero eso es claro, porque la altura inicial h_i es mayor que la altura final h_f. Si la altura final h_f fuera mayor que la inicial h_i, la pelota estaría subiendo y dejaríamos de estar en un caso de caída libre.

Ahora debemos volver a calcular el tiempo de caída pero para el sistema de coordenadas del caso 2. Notemos que en el segundo caso el sistema de coordenadas no está situado en el piso sino que está a una altura h_f. Por lo tanto, para este nuevo sistema, la altura de la pelota tanto en el tiempo inicial como en el final es una altura diferente a la del caso 1, como se explica a continuación:



Notemos que la longitud de la línea roja, que es la altura inicial para este sistema de coordenadas, es igual a h_i (línea negra) menos h_f (línea azul). Además, la altura final de la pelota para el nuevo sistema de coordenadas es cero porque la pelota está en el origen de Y.

Como se explica en la figura anterior, la altura inicial de la pelota es ahora $h_i - h_f$. La altura, como la posición, es algo relativo que cambia de acuerdo a cómo la medimos. Como la altura en el tiempo inicial es $h_i - h_f$, entonces la posición inicial es $\vec{y}_i = (h_i - h_f)\hat{y}$. La altura final es cero, $\vec{y}_f = 0\hat{y}$, como se muestra en la figura. Por lo tanto, la ecuación de movimiento de la pelota desde que se suelta hasta el tiempo final, según este sistema, es

$$0\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} + (h_i - h_f)\hat{y}. \tag{7}$$

Pasemos el término que está más a la derecha al otro lado:

$$-(h_i - h_f)\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y}. \tag{8}$$

Al abrir los paréntesis esto queda

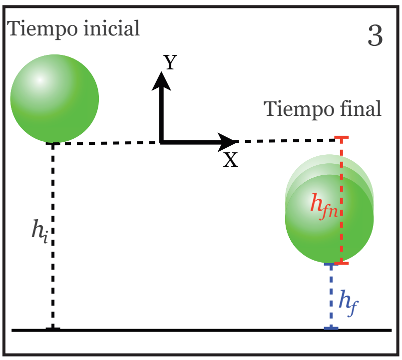
$$-h_i\hat{y} + h_f\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y}, \tag{9}$$

que es exactamente la misma ecuación que (3) (con el orden de los primeros términos invertido). Como esta es la misma ecuación que (3), es claro que vamos a obtener el mismo resultado que antes, así que no es necesario volver a hacer todos los pasos hasta la ecuación (6). El tiempo de caída nos volverá a dar

$$\sqrt{\frac{2(h_i - h_f)}{g}} = t. \tag{10}$$

Que nos haya dado el mismo tiempo indica que *el tiempo de caída no depende del sistema elegido*.

Finalmente, debemos calcular el tiempo de caída para el caso 3 (aunque ya debemos sospechar que el resultado no va a cambiar). Tal como en el caso previo, la posición inicial y final de la pelota es distinta porque nuestra forma de medirla cambia.



Para este sistema de coordenadas la altura inicial es cero porque la pelota está en el origen del eje Y. Hemos llamado h_{fn} a la nueva altura final.

Como vemos a partir de la figura anterior, la posición inicial de la pelota es $\vec{y}_i = 0\hat{y}$. La posición final de la pelota está a una distancia de $h_i - h_f$ (la línea roja de la figura anterior) del sistema de referencia y, además, en el sentido negativo del eje Y. Es decir, la posición final de la pelota es $\vec{y}_i = -(h_i - h_f)\hat{y}$, donde $h_i - h_f$ es la magnitud de la posición y el signo menos indica la dirección negativa de esta posición. Por lo tanto, la ecuación de movimiento de la pelota queda

$$-(h_i - h_f)\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} + 0\hat{y}. \tag{11}$$

Esto se puede escribir como

$$-h_i\hat{y} + h_f\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y}, \tag{12}$$

que es la misma ecuación (9) o (3). Así que como esperábamos, el tiempo va a volver a dar el mismo que dice la ecuación (6).

Nota 3.2. Tiempo de caída libre

El tiempo que se demora en caer un objeto en caída libre desde una altura inicial h_i hasta una altura final h_f está dado por

$$\sqrt{\frac{2(h_i - h_f)}{g}} = t.$$

Este tiempo no depende del sistema de coordenadas elegido.

(c) Para hallar la velocidad de la pelota en el tiempo final podemos usar la ecuación

$$\vec{v}_f = \vec{a}t + \vec{v}_i, \tag{13}$$

que nos dice la velocidad final en un movimiento con aceleración constante. En caída libre la velocidad inicial es siempre cero y la aceleración es la aceleración gravitacional, así que la ecuación para la velocidad final en caída libre es simplemente

$$\vec{v}_f = \vec{g}t, \tag{14}$$

donde el signo de la gravedad va a depender del sistema de coordenadas usado (generalmente se usa un sistema en el cual la aceleración de la gravedad es negativa). Usando la ecuación (14) y el tiempo de caída hallado en el numeral anterior, podemos determinar la velocidad de la pelota en el tiempo final.

En todos los casos anteriores el sistema de coordenadas es uno en el cual la aceleración de la gravedad es negativa, así que podemos escribir esta aceleración como $\vec{g} = -g\hat{y}$. Y como en todos los casos el tiempo de caída es el mismo, podemos inferir que la velocidad final en todos los casos será

$$\vec{v}_f = -\underbrace{g\sqrt{\frac{2(h_i - h_f)}{g}}}_{t}\hat{y}. \tag{15}$$

Esta ecuación se puede escribir de otra forma si recordamos que podemos introducir una constante en una raíz cuadrada si ponemos la constante al cuadrado. Por ejemplo, $2\sqrt{6}$ es lo mismo que $\sqrt{(2^2)6}$. En el caso que nos interesa, podemos poner la g que está afuera de la raíz dentro de la raíz:

$$\vec{v}_f = -\sqrt{g^2\frac{2(h_i - h_f)}{g}}\hat{y}. \tag{16}$$

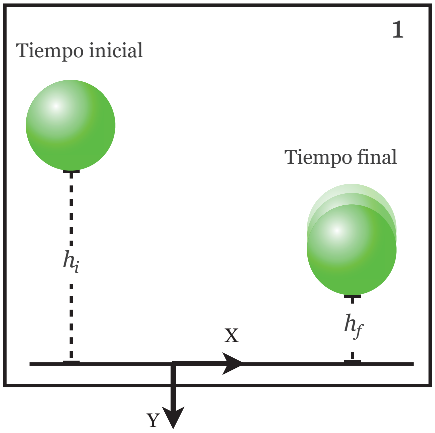
Y esto nos da

$$\vec{v}_f = -\sqrt{2g(h_i - h_f)}\hat{y}. \tag{17}$$

Notemos que el signo menos indica que la velocidad final apunta en la dirección negativa del eje Y, lo cual tiene sentido según los sistemas usados.

Otro método: esta misma expresión para la velocidad se hubiera podido obtener usando $v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$. Como la rapidez inicial es cero, la aceleración es g y es negativa, y como $x_f - x_i$ en este caso es $h_f - h_i$, esta ecuación queda $v_f^2 = -2g(h_f - h_i)$. Esto es lo mismo que $v_f^2 = 2g(h_f - h_i)$. Finalmente, si sacamos raíz cuadrada obtenemos exactamente la misma ecuación (17), aunque faltaría poner la dirección.

(d) Ahora debemos repetir los numerales (b) y (c) con un sistema según el cual la dirección positiva de Y es hacia el piso y la negativa es hacia arriba. Según esto, la figura del caso 1 queda así:

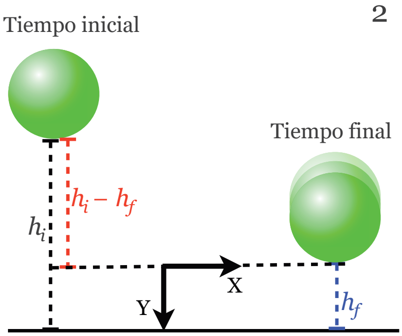


Notemos que al cambiar la orientación del eje Y, las posiciones iniciales y finales cambian; ahora la posición inicial es $\vec{y}_i = -h_i\hat{y}$, pues la posición inicial está en la parte negativa de este nuevo sistema. De modo similar, la posición final será $\vec{y}_f = -h_f\hat{y}$. Además, la dirección de la aceleración gravitacional es ahora positiva porque la dirección positiva de Y apunta hacia el piso. Así, la ecuación de movimiento queda

$$-h_f\hat{y} = \frac{1}{2}gt^2\hat{y} - h_i\hat{y}. \tag{18}$$

No es necesario continuar porque es claro que esta es exactamente la misma ecuación que (2) (la única diferencia es que los términos tienen los signos opuestos, pero eso no importa porque podemos multiplicar por -1 todos los término sin alterar la ecuación). Así que el tiempo de caída, de nuevo, está dado por la ecuación mostrada en la nota 3.2.

En el segundo caso podemos ver que la altura inicial ahora es negativa porque está en la parte negativa de Y y la altura final sigue siendo cero. Por supuesto, la magnitud de la altura inicial no puede cambiar porque el sistema de coordenadas sigue estando en la misma posición que antes. Si antes la altura inicial era $h_i - h_f$, entonces ahora es igual pero con un signo menos. Esto se ve claramente del siguiente dibujo:

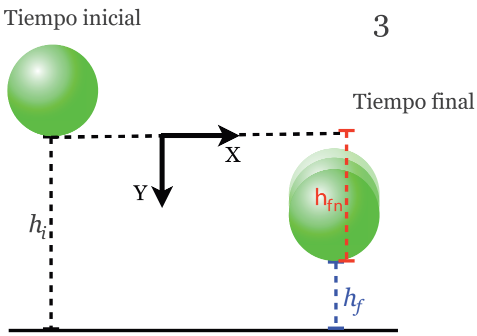


La ecuación de movimiento para este caso será

$$0\hat{y} = \frac{1}{2}gt^2\hat{y} - (h_i - h_f)\hat{y}, \tag{19}$$

donde de nuevo usamos el hecho de que la aceleración de la gravedad es positiva en este caso. Esta ecuación es la misma que habíamos encontrado antes; es como si hubiéramos cambiado el signo de todos los términos de la ecuación (7). De nuevo comprobamos que el tiempo de caída no se ve afectado por el nuevo sistema.

En el último caso esperamos que ocurra algo similar. La posición inicial va a seguir siendo cero y la posición final va a seguir teniendo magnitud $h_i - h_f$ pero tendrá un signo positivo, pues ahora hacia abajo es positivo:



Según este sistema, la posición final será $\vec{y}_f = (h_i - h_f)\hat{y}$ (con el sistema anterior, esta posición era negativa). La ecuación de movimiento será

$$(h_i - h_f)\hat{y} = \frac{1}{2}gt^2\hat{y} + 0\hat{y}. \tag{20}$$

De nuevo, esta es la misma ecuación que (11), sólo que con los signos opuestos. Así que hemos comprobado que el tiempo de caída no depende de la orientación de los ejes del sistema usado.

Para el caso de la velocidad final va a suceder algo similar. Según la ecuación (14), la velocidad final depende del tiempo y de la aceleración de la gravedad. Pero acabamos de ver que el tiempo no depende del sistema. La gravedad sí depende del sistema; según el nuevo sistema, hacia abajo es positivo, así que la gravedad se puede escribir como $\vec{g} = g\vec{y}$. La ecuación de la velocidad final ahora es

$$\vec{v}_f = g\underbrace{\sqrt{\frac{2(h_i - h_f)}{g}}}_{t}\,\hat{y}. \tag{21}$$

Esta es casi idéntica a la ecuación (15), excepto por un signo menos. Así que la velocidad final será la misma que antes, salvo que con un signo positivo en vez de negativo:

$$\vec{v}_f = \sqrt{2g(h_i - h_f)}\,\hat{y}. \tag{22}$$

Esta velocidad tiene la misma magnitud, pero dirección contraria, a la que hayamos con el sistema anterior.

Nota 3.3. Velocidad final en caída libre

Si usamos un sistema en el cual la aceleración gravitacional es positiva, la velocidad final en un movimiento en caída libre es $\vec{v}_f = \sqrt{2g(h_i - h_f)}\,\hat{y}$.

Si usamos un sistema en el cual la aceleración de la gravedad es negativa esta velocidad es $\vec{v}_f = -\sqrt{2g(h_i - h_f)}\,\hat{y}$.

La rapidez en ambos casos es la misma: $v_f = \sqrt{2g(h_i - h_f)}$.

Problema 3.2.

Palabras clave: caída libre combinada con caída con velocidad constante, tiempo de caída, gráfica velocidad contra tiempo, gráfica de posición contra tiempo.

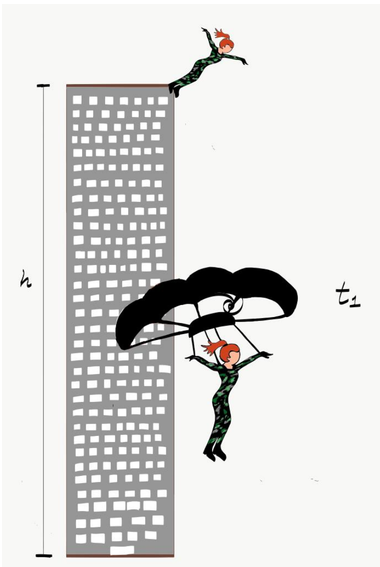
Como forma de entrenamiento, la soldado Sofía se lanza sin velocidad inicial desde un edificio de altura h, como se muestra en el siguiente dibujo (suponga que la caída es totalmente vertical). En el tiempo t_i abre su paracaídas para caer suavemente sobre el piso. Por la fuerza que el aire le ejerce a la capa, Sofía comienza a caer con velocidad constante.

(a) Escriba una expresión para la velocidad que tiene Sofía justo cuando abre la capa y para la velocidad cuando llega al suelo.

(b) Halle el tiempo total de caída de Sofía.

(c) Haga una gráfica cualitativa de velocidad contra tiempo para toda la caída.

(d) Haga una gráfica cualitativa de posición contra tiempo para toda la caída.



Solución

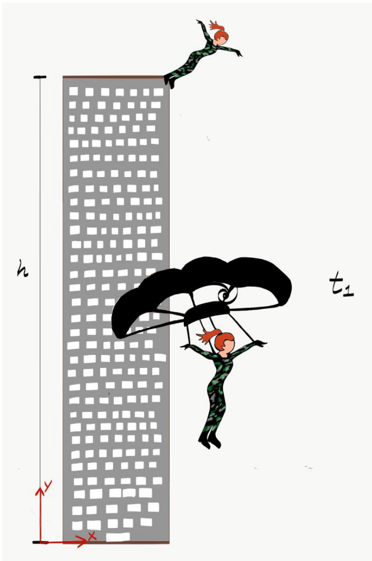
¿Qué información nos dan?

(a), (b) (c) y (d). Nos dicen la altura h del edificio y el tiempo t_1 en el que Sofía abre la capa y comienza a caer con velocidad constante.

¿Qué nos piden?

(a) Escribir una expresión de la velocidad de Sofía cuando abre la capa y cuando llega al piso.
(b) Hallar el tiempo total de caída de Sofía.
(c) Hacer una gráfica cualitativa de velocidad contra tiempo para toda la caída.
(d) Hacer una gráfica cualitativa de posición contra tiempo.

(a) Empecemos por escoger un sistema de coordenadas. Es común escoger uno en el cual el sistema esté en el piso y el eje Y apunte hacia arriba[2].



Usamos un sistema de coordenadas situado en el piso y en el que la caída ocurre en la dirección negativa del eje Y.

Es claro que desde que se lanza hasta que abre la capa Sofía cae libremente (en este tramo de la caída ignoramos la fricción del aire). Después de que abre el paracaídas Sofía ya no cae de forma libre sino que cae con velocidad constante, así que la velocidad cuando llega al suelo debe ser la misma que cuando abre la capa. Ahora, para hallar la velocidad cuando Sofía abre el paracaídas no

[2] Como vimos en el problema anterior, podemos escoger otro sistema y los resultados no se van a alterar (salvo por el signo de la velocidad si cambiamos la orientación de los ejes).

podemos usar la ecuación $\vec{v}_f = -\sqrt{2g(h_i - h_f)}\hat{y}$ porque no conocemos la altura cuando abre la capa. Podemos tratar de hallar esta altura usando la ecuación de movimiento pero hay una forma mucho más sencilla de hallar la velocidad en ese momento. Como nos dicen que cuando Sofía abre la capa ha pasado un tiempo t_1, podemos hallar la velocidad final usando $\vec{v}_f = \vec{g}t$.

Según nuestro sistema, la aceleración de la gravedad es negativa, así que

$$\vec{v}_f = -gt_1\hat{y}. \tag{1}$$

Esta expresión nos dice la velocidad final en el momento en que Sofía abre la capa en términos del tiempo t_1. *Esta es la misma velocidad que cuando Sofía toca el piso*, pues como ya dijimos, en este tramo Sofía cae con velocidad constante.

(b) Para hallar el tiempo total de caída necesitamos hallar el tiempo que transcurre desde que salta hasta que abre el paracaídas y sumarlo con el tiempo que transcurre desde que abre el paracaídas hasta que toca el suelo. Para hallar este último tiempo podemos utilizar la ecuación de movimiento de Sofía, pero notemos que Sofía no cae de forma libre sino que cae con velocidad constante, así que la ecuación de movimiento en este tramo es de la forma $\vec{y}_f = \vec{v}t + \vec{y}_i$.

La velocidad $\vec{v}$ en este movimiento está dada por la ecuación (1), que es la velocidad justo cuando abre el paracaídas (la velocidad final de la caída libre es la velocidad inicial de este tramo de caída que no es libre). Además, la posición inicial $\vec{y}_i$ de este movimiento es la posición en la cual Sofía abre el paracaídas, que no conocemos. La posición final $\vec{y}_f$ es cero según nuestro sistema. Por ahora escribamos la posición de Sofía en el momento en que abre la capa como $\vec{y}_i = h_c\hat{y}$. Teniendo en cuenta esto, la ecuación de movimiento de Sofía desde que abre la capa hasta que cae queda así:

$$0\hat{y} = -\underbrace{(gt_1)}_{\substack{\text{Velocidad}\\ \text{cuando}\\ \text{abre el}\\ \text{paracaídas}}} t\hat{y} + h_c\hat{y}. \tag{2}$$

En esta ecuación desconocemos el tiempo t (que es lo que queremos hallar) y la altura h_c. Pero podemos determinar h_c si tenemos en cuenta que desde que se suelta hasta que abre el paracaídas Sofía cae de forma libre y, además, se demora un tiempo t_1 en esa caída.

La ecuación de movimiento de Sofía desde que salta hasta que llega a la posición $\vec{y} = h_c\hat{y}$ (cuando abre la capa) es

$$h_c\hat{y} = -\frac{1}{2}gt_1^2\hat{y} + h\hat{y}, \tag{3}$$

donde hemos usado el hecho de que $h\hat{y}$ es ahora la posición inicial y que el tiempo de esta caída es t_1. Notemos que la parte derecha de la igualdad sólo tiene variables conocidas así que esta ecuación nos da la posición $h_c\hat{y}$. Podemos usar el resultado de esta ecuación en la ecuación (2):

$$0\hat{y} = -(gt_1)t\hat{y} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}gt_1^2\hat{y} + h\hat{y}\right)}_{h_c\hat{y}}. \tag{4}$$

Si pasamos el término con el tiempo t a la izquierda de la igualdad, obtenemos

$$(gt_1)t\hat{y} = -\frac{1}{2}gt_1^2\hat{y} + h\hat{y}. \tag{5}$$

Si aplicamos la regla de oro y dividimos por gt_1, obtenemos

$$t = -\frac{1}{2(t_1)}t_1^2 + \frac{h}{(gt_1)}. \tag{6}$$

Al simplificar un poco, esto queda

$$t = -\frac{1}{2}t_1 + \frac{h}{gt_1}. \tag{7}$$

Esta ecuación nos da el tiempo que le toma a Sofía caer desde que abre la capa hasta que llega al suelo. Pero este no es el tiempo total de caída, pues el tiempo total incluye el tiempo que le toma a Sofía caer desde la altura h hasta que abre la capa. Así que al tiempo t recién hallado debemos sumarle t_1:

$$t_c = -\frac{1}{2}t_1 + \frac{h}{gt_1} + t_1, \tag{8}$$

donde t_c es el tiempo total de caída. Esto es igual a

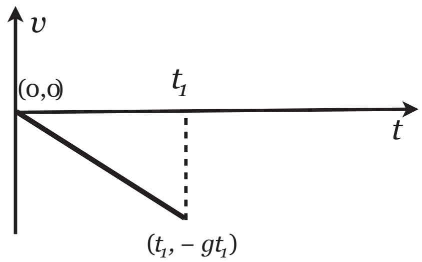
$$t_c = \frac{1}{2}t_1 + \frac{h}{gt_1}. \tag{9}$$

Notemos que el tiempo total de caída depende de la altura h. Como es de esperarse, cuanto mayor sea la altura h desde la que se lanza Sofía, mayor será el tiempo total.

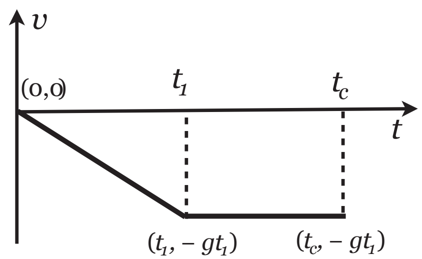
(c) Para trazar la gráfica de velocidad contra tiempo tengamos en cuenta que hay dos tipos de movimiento. El primero es uno de caída libre, es decir, caída con la aceleración de la gravedad y con velocidad inicial cero. En este tramo la velocidad se comporta según la ecuación $\vec{v}_f = -gt\hat{y}$. Si le aplicamos la regla de oro a esta ecuación, obtenemos

$$v_f = -gt. \tag{10}$$

Es claro que esta es la ecuación de una línea recta con pendiente negativa que comienza en el origen. Además, sabemos que en el tiempo t_1 la velocidad final alcanzada es $-gt_1\hat{y}$ —ecuación (1)—. Así que la gráfica de velocidad contra tiempo en este tramo es así:



Después, Sofía abre el paracaídas y cae con velocidad constante hasta el tiempo de caída total, es decir, su gráfica de velocidad en esta parte debe ser una línea horizontal (con pendiente cero):



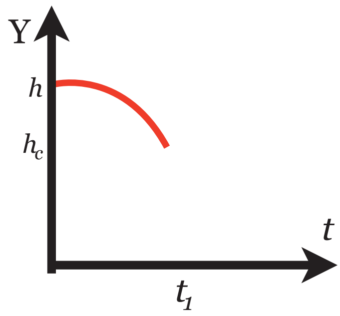
(d) También debemos trazar la gráfica cualitativa de posición contra tiempo de Sofía por tramos. Primero, trazamos el tramo de caída libre, con aceleración negativa de g. La posición inicial de Sofía es $h\hat{y}$, la aceleración es negativa y la velocidad inicial es cero. Así que la ecuación de movimiento de Sofía en esta parte (hasta que abre la capa) es

$$y_1\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2 + h\hat{y}. \tag{11}$$

Si aplicamos la regla de oro, tenemos

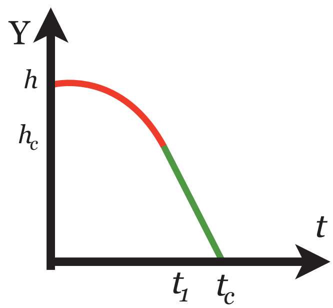
$$y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + h. \tag{12}$$

Esta es la ecuación de una parábola que se abre hacia abajo. Además, la parábola corta el eje Y en h y está completamente centrada en el eje Y porque no hay velocidad inicial (si es necesario, repase la nota 2.20). Por último, sabemos que en el tiempo t_1 Sofía llega a la posición $h_c\hat{y}$ en la que abre la capa. Así que para este tramo, la gráfica de posición contra tiempo es



Sofía tiene aceleración negativa. La parábola corta el eje Y en h y llega hasta cierta altura todavía positiva en el tiempo t_1.

Después de t_1 Sofía cae con velocidad constante negativa. En una gráfica de posición contra tiempo, un objeto con velocidad constante negativa traza una línea recta. Así que en el tramo desde que abre la capa tenemos una línea recta con pendiente negativa que llega hasta el eje X porque Sofía cae hasta la posición cero:



Desde que abre la capa hasta que cae al suelo, Sofía tiene velocidad constante negativa (línea verde).

Notemos que la pendiente de la línea verde coincide con la pendiente del último tramo de la línea roja. Esto es así porque la velocidad justo al final de la línea roja tiene que ser la misma que la velocidad después de que Sofía abre la capa (si es necesario, ver la parte final del problema 2.17).

Problema 3.3.

Palabras clave: distancia entre dos objetos en caída libre, objetos soltados en tiempos diferentes, uso de distintos sistemas de coordenadas, gráfica de velocidad contra tiempo.

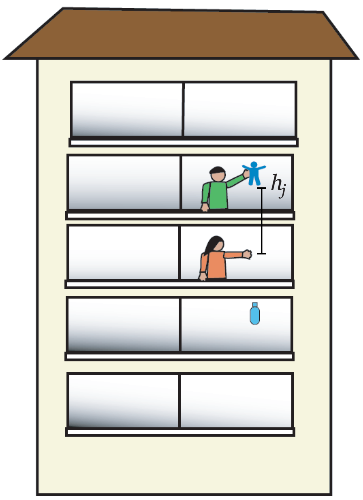
Ángela deja caer una botella de agua desde el tercer piso. Un tiempo t_j después, cuando la botella sigue en el aire, José deja caer un muñeco desde el cuarto piso, desde una altura h_j encima del punto en el cual Ángela soltó la botella (ver dibujo). Suponga que la botella de Ángela toca el suelo en el tiempo t_b después de haber sido soltada.

(a) Escriba una expresión para la altura del muñeco con respecto al suelo para el instante en el que la botella toca el suelo. Responda esta pregunta primero usando un sistema de coordenadas con el origen en el piso del edificio y luego usando un sistema de coordenadas cuyo origen esté en el punto desde el cual Ángela soltó la botella.

(b) Escriba una expresión para la razón entre la rapidez de la botella cuando toca el suelo y la rapidez del muñeco en ese mismo instante.

(c) Realice una gráfica cualitativa de velocidad contra tiempo para ambos objetos, en una misma gráfica.

(d) Suponga que t_j es 0.5 segundos, h_j es 2 metros, y t_b es 1.5 segundos. Con estos datos, escriba las respuestas de (a) y (b). Además, responda si el muñeco ya pasó por el punto desde el cual fue lanzada la botella cuando la botella llegó al suelo.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b), (c). José deja caer un muñeco desde un piso que está a una altura h_j sobre el punto en que Ángela soltó la botella, y el muñeco es soltado un tiempo t_j después de que Ángela suelta la botella. La botella toca el suelo un tiempo t_b después de que es soltada.

(d). t_j es 0.5 segundos, h_j es 2 metros, y t_b 1.5 segundos.

¿Qué nos piden?

(a) Hallar una expresión para la altura en la que está el muñeco con respecto al suelo del edificio en el momento en el cual la botella llega al suelo. Responder esta pregunta primero con un sistema con un origen que está en el piso del edificio, y después con un origen que está en el punto desde el cual Ángela soltó la botella.

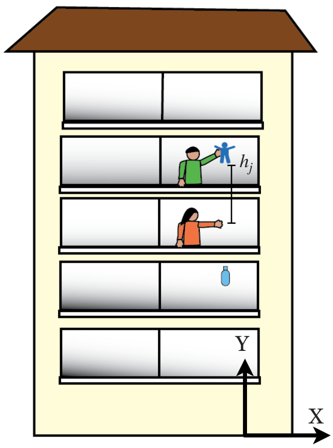
(b) La razón entre la rapidez de la botella y del muñeco cuando la botella llega al suelo.

(c) Realizar en una misma gráfica, la velocidad contra tiempo de ambos objetos.

(d) Responder (a) y (b) con los datos que nos dan y decir si el muñeco ya pasó por la altura desde donde fue lanzada la botella cuando la botella llega al suelo.

Solución

(a) Empecemos primero por situar un sistema de coordenadas en el piso del edificio, tal como nos dicen en el enunciado. Podemos escoger uno en el cual el eje Y apunta hacia arriba (no nos dicen nada al respecto de la dirección del eje):



Según este sistema, el suelo del edificio está en la posición $0\hat{y}$. Como nos piden una expresión para la altura del muñeco con respecto al suelo del edificio para el momento cuando la botella llega al suelo, necesitamos encontrar la posición del muñeco en ese momento.

La posición de un objeto se encuentra usando la ecuación de movimiento del objeto. La ecuación de movimiento del muñeco es una con aceleración g negativa, con velocidad inicial cero porque es un caso de caída libre, y con posición inicial $h_m\hat{y}$ (desconocida). Así que la ecuación de movimiento del muñeco es

$$y_f\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} + h_m\hat{y}. \tag{1}$$

La pregunta que debemos responder ahora es cuánto tiempo lleva el muñeco en el aire cuando la botella ha llegado al suelo para saber qué tiempo usar en la ecuación (1). Es importante resaltar que t_b es el tiempo que le toma a la botella llegar al suelo pero no es el mismo tiempo que el muñeco lleva en el aire, porque este fue soltado un tiempo t_j después de que la botella fue soltada. Así que el tiempo t_m que el muñeco lleva en el aire es la resta entre el tiempo de caída de la botella y el tiempo de retraso (nota 2.26):

$$t_m = t_b - t_j. \tag{2}$$

Insertemos este tiempo en la ecuación de movimiento del muñeco:

$$y_f\hat{y} = -\frac{1}{2}g(\underbrace{t_b - t_j}_{t_m})^2\hat{y} + h_m\hat{y}. \tag{3}$$

De aquí aún nos falta determinar h_m. Notemos que h_m es igual a la suma de la altura del punto donde Ángela suelta la botella con h_j (ver dibujo). Llamemos h_a a la altura desconocida desde la que fue lanzada la botella. Así, la altura inicial del muñeco se puede escribir como

$$h_m = h_a + h_j. \tag{4}$$

Por supuesto, no conocemos la altura h_a. Pero observemos que nos dicen el tiempo en el cual la botella llega al suelo, que es t_b. Si conocemos este tiempo de la caída podemos hallar la altura h_a desde donde fue lanzada la botella usando la ecuación

$$\sqrt{\frac{2(h_i - h_f)}{g}} = t. \tag{5}$$

La altura final de la botella es cero en nuestro sistema y la ecuación (5) queda

$$\sqrt{\frac{2(h_a)}{g}} = t_b. \tag{6}$$

De esta ecuación podemos despejar la altura h_a. Primero, elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación

$$\frac{2(h_a)}{g} = t_b^2. \tag{7}$$

Ahora multiplicamos por g y dividimos por 2:

$$h_a = \frac{g}{2}t_b^2. \tag{8}$$

Como ahora conocemos h_a, podemos decir la altura inicial del muñeco usando la ecuación (4):

$$h_m = \underbrace{\frac{g}{2}t_b^2}_{h_a} + h_j. \tag{9}$$

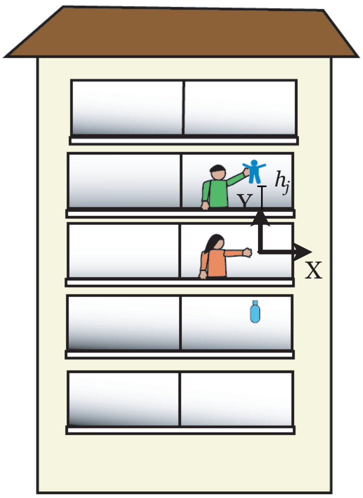
Finalmente, si insertamos este resultado en la ecuación (3), obtenemos la posición del muñeco cuando la botella llega al suelo:

$$y_f\hat{y} = -\frac{1}{2}g(t_b - t_j)^2\hat{y} + \underbrace{\left(\frac{g}{2}t_b^2 + h_j\right)}_{h_m}\hat{y}. \tag{10}$$

La magnitud de esta posición es precisamente la altura a la que está el muñeco del suelo (la altura es la distancia entre dos puntos, así que no nos puede dar negativa y por eso usamos valor absoluto). Así que la altura es

$$\|y_f\| = \left\|\left(-\frac{1}{2}g(t_b - t_j)^2 + \left(\frac{g}{2}t_b^2 + h_j\right)\right)\hat{y}\right\|. \tag{11}$$

Ahora debemos resolver el ejercicio, pero teniendo en cuenta un sistema de coordenadas cuyo origen está en el punto desde el cual Ángela soltó la botella:



Usando este sistema, la posición inicial del muñeco es conocida, pues es simplemente $h_j\hat{y}$ (el muñeco se deja caer desde una altura h_j sobre la posición inicial de la botella). Así que la ecuación de movimiento del muñeco es

$$y_f\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} + h_j\hat{y}. \tag{12}$$

El lector puede llegar a pensar que al usar este sistema el problema se vuelve mucho más corto, pues anteriormente teníamos que buscar $h_m\hat{y}$ que era la posición inicial del muñeco, pero ahora la posición inicial es simplemente $h_j\hat{y}$. Sin embargo, notemos que al usar este sistema la posición $y_f\hat{y}$ del muñeco no será la posición con respecto al piso del edificio sino que será la posición con respecto al punto desde donde se deja caer la botella.

La altura del muñeco con respecto al piso del edificio no es más que la distancia que hay entre el piso y el muñeco, y la distancia entre dos objetos siempre es la magnitud de la resta entre la posición de ambos objetos (nota 2.19). La posición del muñeco la hallamos usando el tiempo dado por (3) en la ecuación (12):

$$y_f\hat{y} = -\frac{1}{2}g(t_b - t_j)^2\hat{y} + h_j\hat{y}. \tag{13}$$

La posición del piso no es más que $-h_a\hat{y}$, pues el piso está a una distancia h_a del origen del nuevo sistema en el sentido negativo de Y. Podemos encontrar h_a tal como antes, usando el tiempo de caída de la botella y la ecuación (6), porque el tiempo de caída no depende del sistema (nota 3.2). Como h_a está dado por la ecuación (8), la posición del piso es

$$y_p\hat{y} = -\underbrace{\frac{g}{2}t_b^2}_{h_a}\,\hat{y}. \tag{14}$$

La resta entre ambas posiciones (entre el muñeco y el piso) es

$$y_f\hat{y} - y_p\hat{y} = \underbrace{-\frac{1}{2}g(t_b - t_j)^2\hat{y} + h_j\hat{y}}_{y_f\hat{y}} - \underbrace{\left(-\frac{g}{2}t_b^2\hat{y}\right)}_{y_p\hat{y}}. \tag{15}$$

Esto es igual a

$$y_f\hat{y} - y_p\hat{y} = -\frac{1}{2}g(t_b - t_j)^2\hat{y} + \frac{g}{2}t_b^2\hat{y} + h_j\hat{y}. \tag{16}$$

Finalmente, buscamos la magnitud de la anterior ecuación (pues la distancia siempre es positiva):

$$\left\|y_f\hat{y} - y_p\hat{y}\right\| = \left\|-\frac{1}{2}g(t_b - t_j)^2\hat{y} + \frac{g}{2}t_b^2\hat{y} + h_j\hat{y}\right\|. \tag{17}$$

Esto mismo se puede escribir así:

$$\|y_f\hat{y} - y_p\| = \left\|\left(-\frac{1}{2}g(t_b - t_j)^2 + \frac{g}{2}t_b^2 + h_j\right)\hat{y}\right\|. \tag{18}$$

Lo que está dentro de la norma en el lado derecho de esta ecuación es exactamente igual al lado derecho de la ecuación (11). Como era de esperarse, la altura a la que se encuentra el muñeco con respecto al piso no depende del sistema elegido, aun cuando el procedimiento para llegar al resultado requiere un planteamiento diferente.

(b) Como la ecuación (8) nos da la altura desde la cual fue soltada la botella, la rapidez de la botella cuando toca el suelo se puede calcular usando la siguiente ecuación (nota 3.3):

$$v_f = \sqrt{2g(h_i - h_f)}. \tag{19}$$

Sin embargo, hay una forma aun más sencilla de encontrar la rapidez si conocemos el tiempo de caída, como ocurre en este caso. Recordemos que en un caso de aceleración constante la velocidad está dada por la ecuación $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$. En el caso de la botella, que no tiene velocidad inicial, esta ecuación es

$$\vec{v}_b = -gt_b\hat{y}. \tag{20}$$

La rapidez es la magnitud de la velocidad, así que la rapidez es

$$v_b = gt_b. \tag{21}$$

Notemos que el signo menos, que indica la dirección, desaparece porque la rapidez es sólo la magnitud de la velocidad.

La rapidez del muñeco en el momento en el cual la botella llega al piso se calcula de modo muy similar sólo que debemos usar el tiempo de vuelo del muñeco. Este tiempo está dado por la ecuación (2), así que al usar la ecuación (20) para el muñeco tenemos

$$\vec{v}_m = -g(t_b - t_j)\hat{y}. \tag{22}$$

La rapidez del muñeco cuando la botella llega al suelo será entonces

$$v_m = g(t_b - t_j), \tag{23}$$

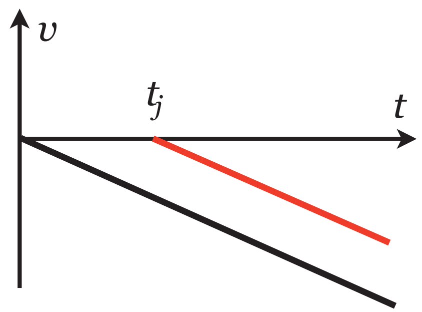
donde de nuevo ignoramos el signo negativo que sólo indica la dirección.

Finalmente, la razón entre la rapidez de la botella y la del muñeco es

$$\frac{v_b}{v_m} = \frac{gt_b}{g(t_b - t_j)} = \frac{t_b}{(t_b - t_j)}. \tag{24}$$

Notemos que esta fracción es mayor que 1, pues $t_b - t_j$ es menor que t_b. Esto tiene sentido, pues la rapidez de la botella debe ser mayor a la rapidez del muñeco ya que la botella lleva más tiempo en el aire. Además, esta ecuación no está definida para el caso en el que t_b es igual a t_j. Esto también era de esperarse; si estos tiempos fueran iguales, entonces cuando la botella llega al suelo el muñeco ni siquiera habría sido soltado, así que la pregunta no tendría sentido.

(c) Ambos objetos caen con la aceleración de la gravedad y ambos objetos comienzan con velocidad inicial cero. En una gráfica de velocidad contra tiempo la pendiente de la línea recta es la aceleración. Como la aceleración es negativa según nuestro sistema, entonces la gráfica de ambos objetos debe ser la de dos líneas rectas con pendientes negativas, y las pendientes deben ser iguales porque la aceleración es la misma (es $\vec{g}$). Finalmente, la gráfica de la botella comenzará en el tiempo inicial, pero la gráfica del muñeco comenzará un tiempo t_j después ya que el muñeco fue soltado con un tiempo de retraso. Reuniendo todo esto, la gráfica será la siguiente:



Ambas gráficas de velocidad contra tiempo son líneas rectas con pendiente negativa, pues ambos objetos están sujetos a la aceleración de la gravedad. El muñeco (línea roja) comienza a caer un tiempo t_j después con respecto al tiempo en el cual fue soltada la botella.

(d) Nos dicen que t_j es 0.5 segundos, h_j es 2 metros y t_b es 1.5 segundos. Entonces la altura a la que se encuentra el muñeco con respecto al piso cuando la botella llega al suelo está dada por la ecuación (10):

$$y_f = \left\| \left(-\frac{1}{2} \underbrace{9.81\ \mathrm{m/s^2}}_{g} (\underbrace{1.5\ \mathrm{s}}_{t_b} - \underbrace{0.5\ \mathrm{s}}_{t_j})^2 + \left(\frac{\overbrace{9.81\ \mathrm{m/s^2}}^{g}}{2} (\underbrace{1.5\ \mathrm{s}}_{t_b})^2 + \underbrace{2\ \mathrm{m}}_{h_j} \right) \right) \hat{y} \right\| \quad (25)$$

$$= 8.35\ \mathrm{m}.$$

Si usamos la ecuación (24), la razón entre las rapideces es

$$\frac{v_b}{v_m} = \frac{1.5 \text{ s}}{(1.5 \text{ s} - 0.5 \text{ s})} = 1.5. \tag{26}$$

Para saber si el muñeco ya pasó por la altura inicial de la botella cuando la botella llega al piso, debemos comparar la altura del muñeco cuando la botella llega al piso con la altura inicial de la botella. La altura inicial de la botella es h_a que podemos hallar con la ecuación (8):

$$h_a = \frac{9.81 \text{ m/s}^2}{2} \underbrace{(1.5 \text{ s})}_{t_b}{}^2 = 11.04 \text{ m}. \tag{27}$$

La altura a la que está el muñeco cuando la botella llega al suelo, como acabamos de hallar, es de 8.25 metros. Así que efectivamente el muñeco ya pasó por la altura desde la que fue lanzada la botella, que es de 11.04 metros. Como se puede notar de estas cifras, el muñeco está un poco más de 3 metros por debajo del piso de Ángela.

Nota 3.4. Velocidad final en caída libre conociendo el tiempo de caída

Si conocemos el tiempo de caída, podemos hallar la velocidad final usando la ecuación $\vec{v}_f = -gt\hat{y}$ en el caso de que usemos un sistema en el cual la aceleración gravitacional es negativa. O la ecuación $\vec{v}_f = gt\hat{y}$ si usamos un sistema en el cual la aceleración de la gravedad es positiva. La rapidez en ambos casos es la misma: $v_f = gt$.

Problema de repaso 3.4.

Palabras clave: caída libre, tiempo de caída libre, velocidad final de caída, aceleración en caída libre.

Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(1) Un movimiento de caída libre es un movimiento con velocidad uniforme.

(2) El tiempo de caída en un caso de caída libre no depende del sistema de coordenadas usado.

(3) En un caso de caída libre, incluso si conocemos el tiempo de caída no podemos hallar la velocidad final sin conocer la altura desde la que es soltado el objeto.

(4) Si multiplicamos la diferencia de altura por cuatro, el tiempo de caída se duplica.

(5) Si A lleva más tiempo en el aire que B, entonces la magnitud de la aceleración de A será mayor que la de B.

Solución

(1) Falso. Un movimiento de caída libre es un movimiento con aceleración uniforme (con aceleración gravitacional para ser más precisos).

(2) Verdadero. El tiempo de caída sólo depende de la diferencia de altura, la cual no depende del sistema (nota 3.2).

(3) Falso. Para hallar la velocidad final podemos usar la ecuación $v_f = gt$ que sólo depende del tiempo de caída (nota 3.4).

(4) Verdadero. De la ecuación $\sqrt{\frac{2(h_i - h_f)}{g}} = t$ se ve que al multiplicar $h_i - h_f$ por cuatro obtenemos: $\sqrt{\frac{2(4)(h_i - h_f)}{g}} = 2\sqrt{\frac{2(h_i - h_f)}{g}} = t$ (el 4 de la raíz se convierte en 2 fuera de la raíz), que es igual al tiempo que teníamos inicialmente por dos.

(5) Falso. En casos de caída libre la magnitud de la aceleración siempre es la misma: g.

Problema (teórico) 3.5.

Palabras clave: caída libre, tiempo de viaje del sonido cuando un objeto toca el suelo, lanzamiento vertical, altura máxima, velocidad inicial.

Matías deja caer una piedra desde un puente que está a una altura desconocida sobre un río. Dos segundos después Matías oye el sonido de la piedra chocando en el agua.

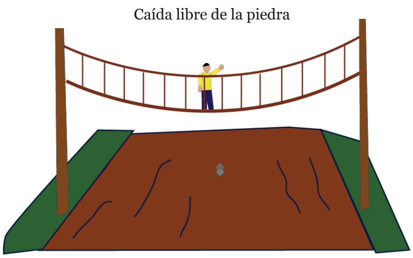
(a) Si la rapidez del sonido es de 343 m/s, ¿cuál es la altura con respecto al río desde la cual Matías dejó caer la piedra?

Suponga ahora que Matías lanza la piedra de modo vertical hacia arriba desde la misma altura inicial hallada en (a) (ver la figura derecha). Esta vez Matías oye el sonido de la piedra al tocar el río 8 segundos después de que lanza la piedra.

(b) ¿Qué tipo de movimiento sigue la piedra desde que Matías la lanza hasta que toca el agua?

(c) ¿Cuál fue la velocidad con la cual Matías lanzó la piedra hacia arriba?

(d) Encuentre el tiempo que le tomó a la piedra llegar hasta la altura máxima de su recorrido y diga cuál fue la altura máxima alcanzada.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) Nos dicen que la piedra cae de forma libre sobre el río, que Matías oye el sonido de la piedra al tocar el agua dos segundos después de haberla soltado y que la rapidez del sonido es de 343 m/s.

(b) Matías lanza la piedra de forma vertical hacia arriba desde la misma altura que antes, y pasan ocho segundos desde que la lanza hasta que oye el sonido de la piedra entrando al río.

¿Qué nos piden?

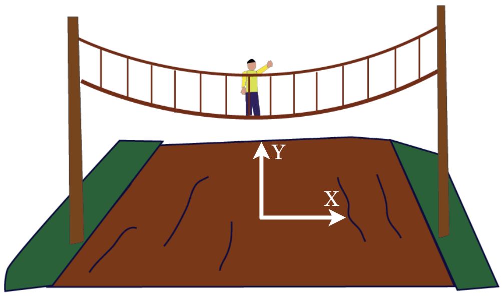
(a) Encontrar la altura sobre el río desde la cual Matías suelta la piedra.

(b) Explicar qué tipo de movimiento sigue la piedra desde que se lanza hasta que toca el agua.

(c) Determinar la velocidad con la cual Matías lanzó la piedra hacia arriba.

(d) Hallar el tiempo que le tomó a la piedra llegar a la altura máxima, y hallar la altura máxima que alcanzó.

(a) Comenzamos, como es costumbre, por escoger un sistema de coordenadas. Escojamos uno en el cual el origen se encuentre en el río, y el eje Y apunte hacia arriba (hacia el puente), como se ilustra a continuación:



Debemos encontrar la altura h desde la cual Matías suelta la piedra. Como en todo movimiento en caída libre, la piedra tiene aceleración gravitacional con dirección hacia el piso y tiene velocidad inicial cero. La posición inicial de la piedra es $h\hat{y}$ (es positiva porque el puente está en la parte positiva de nuestro sistema de coordenadas). Así que la ecuación de movimiento de la piedra es

$$y_f\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} + h\hat{y}. \tag{1}$$

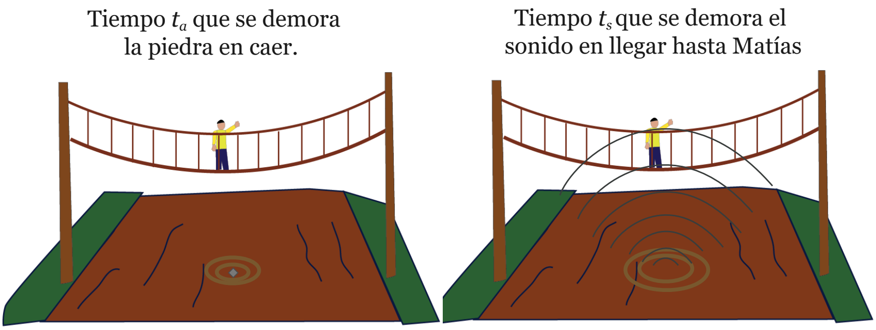
Cuando la piedra toca el río la altura final de la piedra es la posición cero porque el río está en el origen de nuestro sistema, así que la anterior ecuación nos da

$$0\hat{y} = -\frac{1}{2}gt_a^2\hat{y} + h\hat{y}, \tag{2}$$

donde hemos llamado t_a al tiempo que le toma a la piedra llegar al agua. De aquí nos interesa hallar h pero no conocemos el tiempo t_a que corresponde al tiempo en el cual la piedra llega al río.

Sin embargo, aún no hemos usado toda la información; nos dicen que Matías oye el sonido de la piedra al tocar el agua dos segundos después de que suelta la piedra, y nos dicen la rapidez del sonido. El sonido se produce justo en el instante en que la piedra toca el agua y ese sonido debe llegar hasta el oído de Matías, así que podemos entender los dos segundos así: en un tiempo desconocido t_a la piedra llega al río y después, en un tiempo desconocido t_s, el sonido viaja desde el agua hasta la altura h desde donde Matías soltó la piedra. Es decir, el tiempo que le toma a la piedra tocar el agua sumado con el tiempo que le toma al sonido llegar desde el río hasta la altura h debe dar dos segundos:

$$t_a + t_s = 2 \text{ s}. \tag{3}$$



El tiempo que se demora Matías en escuchar el sonido de la piedra al caer el agua es la suma del tiempo t_a que se demora la piedra en caer, más el tiempo t_s que le toma al sonido subir hasta donde está Matías.

Además, como conocemos la rapidez del sonido, podemos escribir una ecuación que relacione el tiempo t_s, la rapidez del sonido y la altura h. Recordemos que cuando la velocidad es constante distancia es rapidez por tiempo. En nuestro caso, sabemos que el sonido debe llegar desde el agua hasta la altura h en un tiempo t_s. Es decir, la altura a la que está Matías debe ser igual a la rapidez del sonido multiplicada por el tiempo t_s que le toma al sonido recorrer esa distancia:

$$h = v_s t_s. \tag{4}$$

Por supuesto, no conocemos t_s ni h, pero sí conocemos la rapidez del sonido y, además, la ecuación (3) nos permite escribir t_s en términos de t_a:

$$t_s = 2 \text{ s} - t_a. \tag{5}$$

Así que la ecuación (4) queda

$$h = \underbrace{(343 \text{ m/s})}_{v_s}\underbrace{(2 \text{ s} - t_a)}_{t_a}. \tag{6}$$

Esta es una ecuación que relaciona la altura h con t_a, así que podemos usar esto en la ecuación (2) para que todo nos quede en términos de una variable desconocida, t_a:

$$0\hat{y} = -\frac{1}{2}gt_a^2\hat{y} + \underbrace{(343\ \mathrm{m/s})(2\ \mathrm{s} - t_a)}_{h}\hat{y}. \tag{7}$$

Primero, abramos los paréntesis y apliquemos la regla de oro:

$$0 = -\frac{1}{2}gt_a^2 + (686\ \mathrm{m}) - (343\ \mathrm{m/s})t_a. \tag{8}$$

Si usamos el valor de g, esta ecuación queda

$$0 = -\frac{1}{2}(9.81\ \mathrm{m/s^2})t_a^2 + (686\ \mathrm{m}) - (343\ \mathrm{m/s})t_a. \tag{9}$$

Notemos que esta es una ecuación cuadrática en el tiempo t_a, es decir, una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. En este caso a (el término que acompaña a t_a^2) es igual a $-\frac{1}{2}(9.81\ \mathrm{m/s^2})$, b (el término que acompaña a t_a) es $-(343\ \mathrm{m/s})$ y c (la constante) es $(686\ \mathrm{m})$. Por lo tanto, el tiempo t_a será igual a

$$t_a = \frac{\overbrace{(343\ \mathrm{m/s})}^{-b} \pm \sqrt{\overbrace{(-343\ \mathrm{m/s})}^{b}{}^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\overbrace{(9.81\ \mathrm{m/s^2})}^{g}\right)\overbrace{(686\ \mathrm{m})}^{c}}}{2\left(-\frac{1}{2}\underbrace{(9.81\ \mathrm{m/s^2})}_{g}\right)}. \tag{10}$$

Esto nos da dos soluciones:

$$t_a = -71.87\ \mathrm{s}, \tag{11}$$

y

$$t_a = 1.95\ \mathrm{s}. \tag{12}$$

La primera solución no tiene sentido porque nos da un tiempo negativo. Así que la solución correcta debe de ser la segunda. En palabras, la piedra tarda un tiempo de 1.95 segundos en caer al agua. Con este tiempo podemos hallar la altura inicial h que buscamos. Por ejemplo, si usamos el tiempo que acabamos de hallar en la ecuación (6) obtenemos

$$h = (343\ \mathrm{m/s})(2\ \mathrm{s} - \underbrace{1.95\ \mathrm{s}}_{t_a}) = 17.15\ \mathrm{m}. \tag{13}$$

(b) Esta vez Matías lanza la piedra hacia arriba, o sea que la piedra no sigue un movimiento en caída libre porque la velocidad inicial no es cero. ¿Qué tipo de movimiento sigue la piedra? Como es lanzada hacia arriba, la piedra va a subir, va a llegar a un punto en el cual ya no puede subir más y luego va a comenzar a caer. Lo primero que podemos inferir es que la piedra se mueve en línea recta; sube en línea recta y vuelve a caer en línea recta, así que es un movimiento rectilíneo.

Segundo, una vez la piedra está en el aire, siempre estará sujeta a la aceleración de la gravedad. Esto es algo muy importante que vale la pena reiterar: una vez el objeto está en el aire y si la fricción del aire es despreciable (como en casi todos los problemas, a menos que nos digan lo contrario), *el objeto tendrá la aceleración de gravedad en dirección hacia el piso (hacia el centro de la Tierra para ser precisos), sin importar cuál sea la velocidad inicial*.

El lector puede pensar que cuando el objeto se lanza hacia arriba este tiene aceleración "hacia arriba", pero si piensa eso es porque confunde la velocidad con la aceleración. Es claro que un objeto que se lanza hacia arriba comienza con una velocidad positiva pero empieza a perder velocidad mientras sube, hasta que deja de subir. Esto indica que la aceleración apunta hacia abajo (hacia el piso). Si la aceleración apuntara hacia arriba, el objeto estaría andando cada vez más rápido hacia el cielo y no se detendría sino que subiría y se escaparía de la Tierra. De modo similar, no debemos pensar que un objeto lanzado hacia abajo tiene más aceleración que un objeto que es lanzado hacia arriba. El objeto lanzado hacia abajo se mueve más rápido que el objeto lanzado hacia arriba porque la velocidad inicial es hacia abajo, no porque la aceleración sea mayor o menor. La explicación de por qué todos los objetos que están en el aire tienen la misma aceleración tiene que ver con fuerzas, tema que estudiaremos con detalle en el capítulo 4.

Estos casos en los que un objeto se lanza hacia arriba o hacia abajo de forma vertical se suelen llamar casos de *lanzamiento vertical*. En cambio, cuando el objeto simplemente se suelta desde el reposo tenemos un caso de caída libre. Pero la diferencia de nombre entre ambos casos no es importante, lo que importa es que en la caída libre la velocidad inicial es cero, mientras que en el lanzamiento vertical no. Por supuesto, el tiempo de caída en un caso de *lanzamiento vertical* no es el mismo que en un caso de caída libre, y la velocidad al llegar al suelo tampoco es la misma que en un caso de caída libre; tanto el tiempo de caída y la velocidad de caída van a depender de la velocidad inicial. Por eso, *las ecuaciones de tiempo de caída y de velocidad de caída para un movimiento de caída libre no se pueden aplicar a casos de lanzamiento vertical*.

Nota 3.5. Lanzamiento vertical

El lanzamiento vertical es un tipo de movimiento en el cual el objeto es lanzado de modo vertical, hacia arriba o hacia abajo, con cierta velocidad inicial distinta de cero. Un objeto lanzado así sigue un movimiento rectilíneo uniforme con aceleración hacia abajo (hacia el centro de la Tierra).

(c) Cuando Matías lanza la piedra hacia arriba tenemos un caso de lanzamiento vertical. La piedra sigue un movimiento rectilíneo con aceleración g apuntando hacia abajo y con cierta velocidad inicial distinta de cero. Esta velocidad es desconocida pero sabemos que apunta hacia arriba, así que tiene signo positivo según el sistema que estamos usando. Así, la ecuación de movimiento de la piedra es de la siguiente forma:

$$y_f\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} + v_i t\hat{y} + h\hat{y}. \tag{14}$$

Según nuestro sistema, cuando la piedra llega al río su posición en Y es cero. Llamemos t_{a2} al tiempo en el cual eso ocurre. Teniendo en cuenta esto, la ecuación (14) queda así:

$$0\hat{y} = -\frac{1}{2}gt_{a2}^2\hat{y} + v_i t_{a2}\hat{y} + h\hat{y}. \tag{15}$$

A diferencia del apartado (a), ya conocemos la posición inicial de la piedra porque ya hallamos h, así que podemos escribir esta ecuación así:

$$0\hat{y} = -\frac{1}{2}gt_{a2}^2\hat{y} + v_i t_{a2}\hat{y} + \underbrace{(17.15\text{ m})}_{h}\hat{y}. \tag{16}$$

Tenemos dos incógnitas: t_{a2} y la rapidez inicial v_i.

El razonamiento para resolver este problema sigue siendo el mismo que en (a): el tiempo en el cual Matías escucha el sonido de la piedra en el agua es el tiempo que le toma a la piedra caer al río, que llamaremos t_{a2}, sumado con el tiempo que le toma al sonido llegar a h, que sigue siendo t_s —la altura desde donde se suelta la piedra no ha cambiado, así que el tiempo que le toma al sonido recorrer esta altura es el mismo que en (a)—. Como el tiempo en el cual Matías oye la piedra es ocho segundos después de haberla lanzado, podemos escribir la siguiente ecuación del tiempo, análoga a la ecuación (3):

$$t_{a2} + t_s = 8\text{ s}. \tag{17}$$

Por lo hecho en la sección (a) podemos hallar el tiempo t_s usando la ecuación (5). Como t_s es 1.95 segundos, entonces la ecuación (5) se puede escribir así:

$$t_s = 2\text{ s} - 1.95\text{ s} = 0.05\text{ s}. \tag{18}$$

Cuidado: para hallar el tiempo t_s no importa si Matías lanzó la piedra hacia arriba o no porque t_s es el tiempo que le toma al sonido llegar desde el río hasta Matías.

Como ya conocemos t_s, podemos hallar t_{a2} usando la ecuación (17):

$$t_{a2} + \underbrace{0.05\,\mathrm{s}}_{t_s} = 8\ \mathrm{s}. \tag{19}$$

Así que t_{a2} es

$$t_{a2} = 7.95\ \mathrm{s}. \tag{20}$$

Si usamos este tiempo en la ecuación (16), obtenemos

$$0\hat{y} = -\frac{1}{2}g\underbrace{(7.95\ \mathrm{s})}_{t_{a2}}{}^2\hat{y} + v_i\underbrace{(7.95\ \mathrm{s})}_{t_{a2}}\hat{y} + (17.15\ \mathrm{m})\hat{y}. \tag{21}$$

Pasemos el primero y último término de la parte derecha a la parte izquierda de la igualdad:

$$\frac{1}{2}g(7.95\ \mathrm{s})^2\hat{y} - (17.15\ \mathrm{m})\hat{y} = v_i(7.95\ \mathrm{s})\hat{y}. \tag{22}$$

Si operamos sólo la parte izquierda usando el valor de g, obtenemos

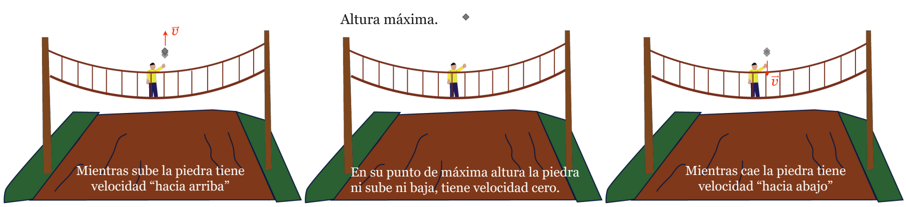
$$(292.86\ \mathrm{m})\hat{y} = v_i(7.95\ \mathrm{s})\hat{y}. \tag{23}$$

Finalmente, dividiendo por 7.95 s nos da

$$(36.84\ \mathrm{m})\hat{y} = v_i\hat{y}. \tag{24}$$

Es decir, Matías lanzó la piedra con una velocidad de 36.84 metros por segundo en la dirección positiva del eje Y.

(d) Para hallar el tiempo que le toma a la piedra llegar a su altura máxima podríamos tratar de usar la ecuación de movimiento de la piedra. Sin embargo, hacer eso no sería útil porque desconocemos la altura máxima. Pero hay una forma sencilla de hallar el tiempo en que la piedra alcanza la altura máxima si conocemos su velocidad inicial. Notemos que en el punto máximo de altura la velocidad de la piedra es cero porque allí la piedra deja de subir y se sostiene por un instante en el aire antes de comenzar a caer. Esto se ilustra a continuación:



Si conocemos la velocidad inicial de la piedra, la aceleración de la piedra (que es la aceleración de la gravedad) y la velocidad en el punto de altura máximo (que es cero), podemos hallar el tiempo de altura máximo usando la ecuación $\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_i$ (esto también es explicado en la nota 2.25). En el punto de altura máxima, en donde la velocidad es cero, esta ecuación queda

$$0\hat{y} = g t_m \hat{y} + v_i \hat{y}, \tag{25}$$

donde hemos llamado "t_m" al tiempo de altura máximo. Despejando el tiempo t_m, y aplicando la regla de oro, obtenemos

$$\frac{v_i}{g} = t_m. \tag{26}$$

Este es un resultado general: siempre que un objeto es lanzado hacia arriba con cierta velocidad inicial su tiempo de altura máximo estará dado por la rapidez inicial dividida por g.

Nota 3.6. Tiempo de altura máxima

El tiempo en el cual un objeto que es lanzado con cierta velocidad vertical alcanza la altura máxima se puede calcular dividiendo la rapidez inicial por g: $\frac{v_i}{g} = t_m$. Esta ecuación se deriva de la ecuación $\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_i$, usando el hecho de que la velocidad es cero en la altura máxima.

En el caso de la piedra, la rapidez inicial está dada por la ecuación (24), así que la ecuación (26) queda

$$\frac{\overbrace{36.84\ \text{m/s}}^{v_i}}{\underbrace{9.81\ \text{m/s}^2}_{g}} = 3.76\ \text{s} = t_m. \tag{27}$$

Es decir, la piedra alcanza la altura máxima cuando han pasado 3.76 segundos.

¿Cuál es la altura máxima de la piedra? La respuesta es sencilla una vez conocemos el tiempo de altura máxima. Si usamos este tiempo en la ecuación de movimiento de la piedra —ecuación (14)—, y si tenemos en cuenta la rapidez inicial hallada y la altura inicial, obtenemos

$$y_f\hat{y} = -\frac{1}{2}g(\underbrace{3.76\ \text{s}}_{t_m})^2\hat{y} + (\underbrace{36.84\ \text{m/s}}_{v_i})(\underbrace{3.76\ \text{s}}_{t_m})\hat{y} + (\underbrace{17.15\ \text{m}}_{h})\hat{y}. \tag{28}$$

Usando el valor de g, y sumando los términos, esto nos da

$$y_f \hat{y} = (86.32 \text{ m})\hat{y}. \tag{29}$$

Esta es la posición de altura máxima, pero la altura máxima es la magnitud de esta posición, es decir, 86.32 metros.

Problema (teórico) 3.6.

Palabras clave: análisis de objeto rebotando, velocidad de rebote, gráfica de velocidad contra tiempo, gráfica de aceleración contra tiempo, tiempo de caída, tiempo de altura máxima.

Se suelta una pelota desde una altura inicial de h_i metros y al rebotar la pelota alcanza una altura máxima h_m (ver la ilustración).

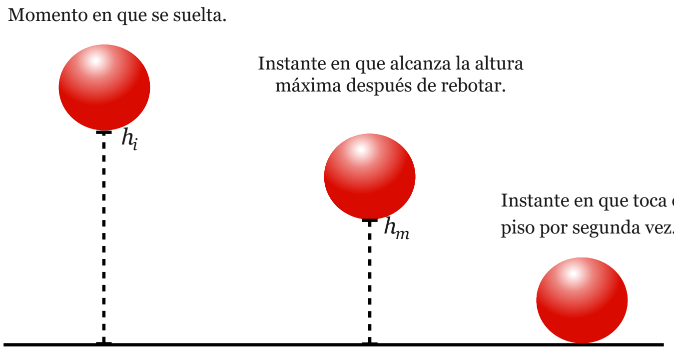
(a) Escriba una expresión para la velocidad con la que la pelota llega al suelo para el segundo rebote.

(b) Escriba una expresión para la velocidad con la que la pelota salió del piso en el primer rebote y compararla con la velocidad hallada en (a).

(c) Haga una gráfica cualitativa de velocidad contra tiempo desde que se suelta la pelota hasta que rebota por segunda vez.

(d) Haga una gráfica de aceleración contra tiempo para el mismo tiempo que la gráfica de la velocidad.

(e) Escriba una expresión para el tiempo que transcurre desde que se suelta la pelota hasta que la pelota toca el suelo por segunda vez. Suponga que el contacto entre la pelota y el suelo dura un tiempo despreciable (ignore ese tiempo en todas las operaciones).



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b), (c), (d). La altura inicial es h_i y la altura máxima después del primer rebote es h_m. Además, no debemos tener en cuenta el tiempo de contacto de la pelota con el suelo durante cada rebote.

¿Qué nos piden?

(a) Escribir una expresión para la velocidad con la que la pelota toca el suelo por segunda vez.

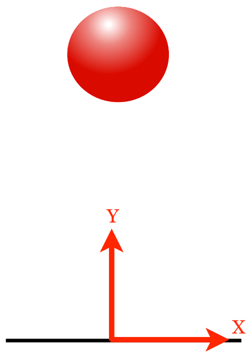
(b) Escribir una expresión para la velocidad con la que la pelota salió del suelo en el primer rebote y compararla con la hallada en (a).

(c) Hacer una gráfica cualitativa de velocidad contra tiempo desde que la pelota se suelta hasta que rebota por segunda vez.

(d) Hacer una gráfica de aceleración contra tiempo para el mismo tiempo que la gráfica de la velocidad.

(e) Escribir una expresión para el tiempo que transcurre desde que la pelota es soltada hasta que toca el suelo por segunda vez. Debemos ignorar el tiempo de contacto entre la pelota y el suelo.

(a) Empecemos, como siempre, por situar un sistema de coordenadas. Pongamos uno con el origen en el piso y cuyo eje Y apunte hacia arriba:

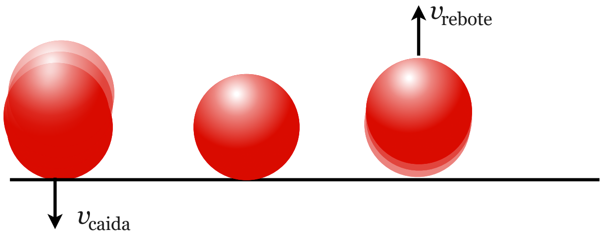


Debemos escribir una expresión para la velocidad con la que la pelota llega al suelo por segunda vez, es decir, su velocidad en el segundo rebote. Notemos que desde el punto de la altura máxima del primer rebote hasta que la pelota toca el suelo por segunda vez tenemos una situación de caída libre, pues es como si la pelota hubiera sido soltada desde esa altura máxima con velocidad cero (recordemos de la nota 3.6 que en la altura máxima la velocidad es cero). Como la altura máxima es h_m, entonces la velocidad es (nota 3.3)

$$-\sqrt{2gh_m}\hat{y} = \vec{v}, \tag{1}$$

donde el signo negativo indica que la velocidad es negativa según el sistema elegido.

(b) Ahora debemos buscar una expresión para la velocidad con la que la pelota parte del suelo al rebotar. Es importante no confundirse pensando que debemos hallar la velocidad con la cual la pelota toca el suelo al caer desde la altura inicial. La velocidad con la que toca el suelo apunta hacia abajo, mientras que la velocidad con la que rebota apunta hacia arriba, y, además, ambas velocidades no tienen necesariamente la misma magnitud.



La velocidad de caída apunta hacia abajo y la velocidad de rebote apunta hacia arriba. Además, sus magnitudes podrían ser diferentes.

¿Cómo hallamos esta velocidad al rebotar? Por un lado, sabemos que sea cual sea esta velocidad, es una velocidad que le permite a la pelota llegar a una altura máxima de h_m. Además, notemos que desde que rebota tenemos una situación de lanzamiento vertical: la pelota sigue un movimiento rectilíneo con aceleración g hacia abajo y con velocidad inicial de magnitud v_i distinta de cero y positiva según el sistema (esta es la velocidad desconocida que buscamos). Además, la posición inicial de esta parte del movimiento es la posición cuando rebota, la cual, según nuestro sistema, es cero. Así, la ecuación de movimiento de la pelota desde que rebota es de la siguiente forma:

$$y_f \hat{y} = -\frac{1}{2} g t^2 \hat{y} + v_i t \hat{y}. \tag{2}$$

Sabemos que la pelota alcanza una altura h_m en el tiempo altura máxima. Si llamamos a este tiempo t_m (no lo conocemos), y tenemos en cuenta que la posición de altura máxima es $(h_m)\hat{y}$ (es positiva según nuestro sistema y de magnitud h_m), la ecuación (2) queda

$$h_m \hat{y} = -\frac{1}{2} g t_m^2 \hat{y} + v_i t_m \hat{y}. \tag{3}$$

En esta ecuación tenemos dos incógnitas: la velocidad inicial y el tiempo de altura máximo. Pero estas variables están relacionadas porque el tiempo de altura máximo está dado por (nota 3.6)

$$\frac{v_i}{g} = t_m. \tag{4}$$

Si usamos esta ecuación en la ecuación (3), obtenemos

$$h_m\hat{y} = -\frac{1}{2}g\underbrace{\left(\frac{v_i}{g}\right)}_{t_m}^2\hat{y} + v_i\underbrace{\left(\frac{v_i}{g}\right)}_{t_m}\hat{y}. \tag{5}$$

De esta ecuación podemos despejar v_i. Si operamos un poco cada término derecho y los sumamos, obtenemos

$$h_m\hat{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_i^2}{g}\right)\hat{y}. \tag{6}$$

La ecuación (6) es un resultado general que muestra que la altura máxima alcanzada por un objeto en un lanzamiento vertical es igual a la rapidez inicial al cuadrado, dividido por dos veces g.

Nota 3.7. Altura máxima dada la rapidez inicial

La altura máxima h_m alcanzada por un objeto en un lanzamiento vertical se puede hallar si conocemos la rapidez inicial v_i usando la siguiente ecuación: $h_m = \frac{1}{2}\left(\frac{v_i^2}{g}\right)$.

Si el objeto es lanzado desde una altura inicial h_i, entonces la altura máxima es $h_m = \frac{1}{2}\left(\frac{v_i^2}{g}\right) + h_i$, pues debemos sumar la altura inicial del lanzamiento.

En nuestro caso conocemos la altura máxima pero no la velocidad inicial. Si multiplicamos la ecuación (6) en ambos lados por $2g$, obtenemos

$$2gh_m\hat{y} = v_i^2\hat{y}. \tag{7}$$

Finalmente, si sacamos raíz cuadrada, obtenemos

$$\sqrt{2gh_m}\hat{y} = v_i\hat{y}. \tag{8}$$

Es decir, la velocidad al rebotar tiene magnitud $\sqrt{2gh_m}$ y apunta en el sentido positivo del eje Y.

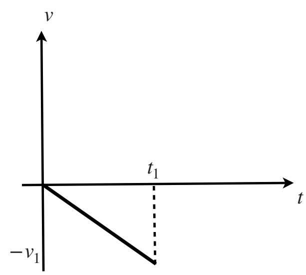
Comparemos esta velocidad al rebotar con la velocidad hallada en (a), que era la velocidad con la cual la pelota caía al piso por segunda vez —ecuación (1)—. ¡Las velocidades tienen exactamente la misma magnitud pero tienen direcciones contrarias! Esto implica que cuando un objeto es lanzado con cierta velocidad hacia arriba, *la velocidad del objeto cuando regresa al mismo punto del que fue lanzado tiene la misma magnitud inicial pero dirección opuesta que la* *velocidad inicial*. Si, por ejemplo, la pelota al rebotar hubiera salido disparada con una velocidad de 5 m/s, entonces la pelota, al regresar al piso, hubiera tenido también una velocidad de 5 m /s, pero dirección opuesta.

Nota 3.8. Velocidad inicial y final en lanzamiento vertical

En un lanzamiento vertical la velocidad inicial del objeto tiene la misma magnitud y dirección contraria que la velocidad del objeto cuando regresa al mismo punto desde el cual fue lanzado.

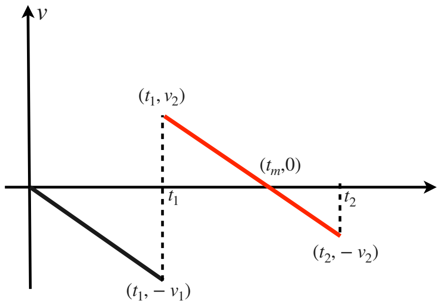
Cuidado: el lector podría preguntarse si acabamos de mostrar que la rapidez con la cual la pelota toca el suelo es igual que la rapidez con la cual la pelota parte del suelo al rebotar. La respuesta es *no*. Si yo dejo caer un ladrillo, la rapidez con la que toca el suelo no va a ser la misma que la rapidez con la que rebota; el ladrillo ni siquiera rebota, o rebota muy poco. Lo que acabamos de mostrar es que si lanzamos el ladrillo hacia arriba con cierta velocidad, una vez el ladrillo vuele y regrese al punto desde el cual lo lanzamos, en ese momento tendrá la misma rapidez que tuvo cuando fue lanzado.

(c) Para hacer una gráfica cualitativa de velocidad contra tiempo de la pelota desde que es soltada hasta que toca el suelo por segunda vez, debemos analizar el movimiento de la pelota por etapas. Desde que se suelta hasta que toca el suelo, la pelota cae libremente; comienza con velocidad cero y su velocidad se hace cada vez más negativa porque está sujeta a la aceleración de la gravedad g. Llamemos t_1 al tiempo en el cual la pelota llega al suelo por primera vez y v_1 a la rapidez con la cual lo hace. Teniendo en cuenta esto, la gráfica para este tramo es



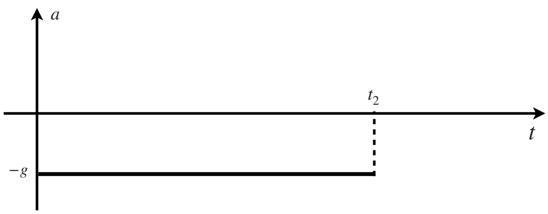
Después de que rebota, la pelota parte del piso con cierta velocidad positiva (apunta hacia arriba) que llamaremos v_2. Desde el momento en que rebota la pelota está sujeta a la aceleración de la gravedad que, por supuesto, sigue siendo negativa según el sistema elegido. Así que la pelota comienza a disminuir su velocidad inicial positiva hasta que llega un momento en que esta es cero y corresponde al punto en el cual la pelota alcanza la altura máxima después de rebotar. Llamemos t_m al tiempo en el cual eso sucede.

Después de t_m la pelota comienza a caer libremente de nuevo, hasta que toca el suelo por segunda vez. Llamemos t_2 al tiempo en el cual esto sucede. Además, la velocidad de la pelota al tocar el suelo por segunda vez debe ser de la misma magnitud que la velocidad de la pelota cuando partió desde el suelo, tal como comprobamos en las secciones (a) y (b). Es decir, la magnitud de esta velocidad debe ser otra vez v_2. Así que la gráfica de velocidad contra tiempo de la pelota queda de la siguiente forma:



En rojo está la gráfica para el intervalo de tiempo entre el instante t_1 en el cual la pelota toca el suelo por primera vez, y el tiempo t_2 en el cual vuelve a tocar el suelo. Cuando toca el suelo por primera vez, la pelota parte con velocidad v_2 positiva. Luego, por la desaceleración negativa g, en el tiempo t_m de altura máxima llega a velocidad cero. Después de ese punto comienza a tener velocidad negativa, lo que indica que comienza a caer. Finalmente, en el tiempo t_2 toca el suelo con velocidad $-v_2$. Como nos dicen en el enunciado, hemos ignorado el tiempo del rebote.

(d) La gráfica de aceleración contra tiempo para la pelota es muy sencilla; en todos los tramos del movimiento, tanto en la parte de caída libre como en la parte de lanzamiento vertical, la aceleración es g y es negativa. Por supuesto, durante unos milisegundos la pelota no está en el aire sino chocando contra el piso, pero en el enunciado nos piden que ignoremos el tiempo de ese contacto:



La aceleración corresponde a la gravedad, que es constante y negativa en nuestro sistema.

(e) El tiempo total desde que la pelota es soltada hasta que toca el suelo por segunda vez es fácil de calcular si dividimos el análisis en tramos. Primero, calculamos el tiempo que le toma a la pelota caer al piso por primera vez desde la altura h_i. Después, calculamos el tiempo de altura máximo desde que rebota hasta que llega a la altura h_m. Y después calculamos el tiempo que le toma caer desde la altura máxima h_m hasta que vuelve a tocar el suelo.

El tiempo que le toma a la pelota caer por primera vez es simplemente

$$\sqrt{\frac{2h_i}{g}} = t_1, \tag{9}$$

donde usamos la ecuación del tiempo de caída libre. El tiempo que le toma caer al suelo desde la altura h_m se calcula de la misma forma, sólo que ahora es una caída libre desde la altura h_m :

$$\sqrt{\frac{2h_m}{g}} = t_2. \tag{10}$$

Finalmente, calculemos el tiempo que le toma a la pelota llegar a la altura máxima después del primer rebote. Este tiempo está dado por la ecuación (4):

$$\frac{v_i}{g} = t_m. \tag{11}$$

Pero esto está en términos de la rapidez inicial v_i. v_i es $\sqrt{2gh_m}$ según la ecuación (8). Si usamos esto en la ecuación (11), obtenemos

$$\frac{\overbrace{\sqrt{2gh_m}}^{v_i}}{g} = t_m. \tag{12}$$

Metemos la g dentro de la raíz como g^2, y esto nos da

$$\sqrt{\frac{2h_m}{g}} = t_m. \tag{13}$$

¡Notemos que t_m es exactamente igual que t_2! Es decir, *el tiempo que le toma a la pelota subir hasta su altura máxima es igual al tiempo que le toma a la pelota caer desde la altura máxima hasta el piso.*

Finalmente, el tiempo total desde que se suelta la pelota hasta que esta toca el suelo por segunda vez es la suma de los tres tiempos que hemos hallado:

$$t = \underbrace{\sqrt{\frac{2h_i}{g}}}_{t_1} + \underbrace{\sqrt{\frac{2h_m}{g}}}_{t_m} + \underbrace{\sqrt{\frac{2h_m}{g}}}_{t_2}. \tag{14}$$

Esto es igual a

$$t = \sqrt{\frac{2h_i}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h_m}{g}}. \tag{15}$$

Nota 3.9. Tiempo de subida y tiempo de caída

En un lanzamiento vertical el tiempo que le toma a un objeto subir a su altura máxima es igual que el tiempo que le toma caer desde la altura máxima. El tiempo de caída desde la altura máxima es $\sqrt{\frac{2h_m}{g}} = t$ donde h_m es la altura máxima. El tiempo de subida hasta la altura máxima es $\frac{v_i}{g} = t_m$. Como ambos tiempos son iguales, podemos usar cualquiera de las dos ecuaciones para calcularlo (la que sea más conveniente según el problema).

Problema 3.7.

Palabras clave: lanzamiento vertical, tiempo de caída, altura después de cierto tiempo, aceleración, altura máxima.

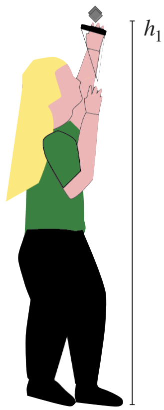
Andrea lanza una piedra con una cauchera de modo completamente vertical hacia arriba (ver dibujo). Suponga que el caucho de la cauchera le produce una aceleración constante a la piedra durante un tiempo t_1. Después de este tiempo la piedra sale disparada desde una altura h_1 sobre el piso. Pedro le dijo a Andrea que después de lanzar la piedra ella tenía un tiempo máximo t_a para moverse del lugar desde el cual disparó la piedra de modo que la piedra no le pegue en la cabeza.

(a) Si Andrea tiene una altura h_a, dé una expresión para la aceleración que le dio el caucho a la piedra.

(b) Diga cuál es la aceleración anterior suponiendo que Andrea mide 1.68 m, el tiempo t_a es 5 segundos, t_1 es 0.05 segundos y la altura de lanzamiento de la piedra es 1.80 m.

(c) Con los valores anteriores responda: ¿cuál es la altura máxima alcanzada por la piedra?

Tiempo antes de liberar la piedra.



Tiempo cuando la piedra sale volando.

Solución

¿Qué información nos dan?

(a) Andrea lanza verticalmente una piedra con una cauchera. El caucho produce una aceleración constante durante un tiempo t_1. La altura desde la cual sale disparada la piedra es h_1 medida con respecto al piso. Andrea tiene un tiempo máximo de t_a después de lanzar la piedra para que esta no le pegue en la cabeza. La altura de Andrea es h_a.

(b) y (c) Andrea mide 1.68 m, el tiempo t_a es 5 segundos, t_1 es 0.05 segundos y la altura de lanzamiento de la piedra es 1.80 m.

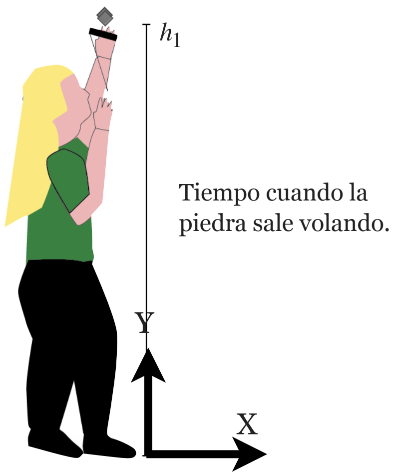
¿Qué nos piden?

(a) Escribir una expresión para la aceleración que el caucho le da a la piedra.

(b) Calcular numéricamente la aceleración que el caucho le da a la piedra.

(c) Calcular la altura máxima alcanzada por la piedra.

(a) Empecemos por escoger un sistema de coordenadas. Si escogemos uno cuyo origen está en el piso y con el eje Y apuntando hacia arriba, entonces la posición inicial de la piedra es $h_1\hat{y}$:



Nos están pidiendo una expresión para la aceleración que el caucho le proporciona a la piedra. Esta aceleración se puede expresar usando la definición de aceleración:

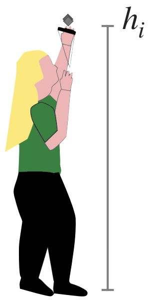
$$\vec{a} = \frac{\hat{v}_f - \hat{v}_i}{t}. \tag{1}$$

La velocidad inicial en este caso es cero, pues mientras Andrea no libere el caucho la piedra permanecerá en reposo. La velocidad final $\vec{v}_f$ es la velocidad con la cual la piedra sale disparada del caucho. Aunque no conocemos la magnitud de dicha velocidad, sabemos que esta tiene que ser positiva según nuestro sistema, así que se puede escribir como $v_f\hat{y}$. Por último, el tiempo t de la anterior ecuación es el tiempo durante el cual la piedra está en contacto con el caucho. Nos dicen que este tiempo es t_1. Así, la ecuación (1) se puede escribir como

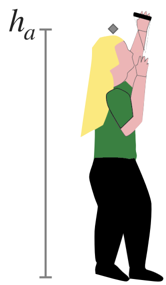
$$\vec{a} = \frac{v_f\hat{y}}{t_1}. \tag{2}$$

Según esta ecuación, para hallar la aceleración que el caucho le da a la piedra debemos hallar la velocidad $v_f\hat{y}$ con la cual la piedra sale disparada. Notemos que una vez la piedra sale disparada, tenemos un caso de lanzamiento vertical en el cual la piedra va a subir hasta cierta altura máxima y después va a caer hasta el piso. La velocidad $v_f\hat{y}$ que debemos hallar es precisamente la velocidad inicial de este lanzamiento vertical.

Para hallar esta velocidad necesitamos usar más información, como el tiempo que tiene Andrea para moverse antes de que la piedra le pegue en la cabeza. Notemos que el tiempo máximo t_a que tiene Andrea para moverse debe entenderse como el tiempo que le toma a la piedra volar desde la posición inicial hasta regresar a la posición en la cual está la cabeza de Andrea (y la posición en la cual está la cabeza de Andrea la conocemos, pues conocemos la altura de Andrea). Esto se ilustra a continuación:



Tiempo cuando la piedra sale volando.



En el tiempo t_a la piedra llega hasta la altura de Andrea.

Como se ilustra con este dibujo, el tiempo t_a máximo que tiene Andrea para moverse es el tiempo que le toma a la piedra caer hasta la altura de Andrea.

Para usar esta información usemos la ecuación de movimiento de la piedra. Según nuestro sistema, la aceleración de la piedra es g en dirección negativa, la velocidad inicial es positiva (y desconocida) y la posición inicial de la piedra es

$h_1\hat{y}$ (conocida). Así, la ecuación de movimiento de la piedra es de la siguiente forma:

$$y_p\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} + v_f t\hat{y} + h_1\hat{y}, \tag{3}$$

donde hemos llamado $v_f\hat{y}$ a la *rapidez inicial* del lanzamiento —la llamamos así porque habíamos dicho que la rapidez inicial del lanzamiento era precisamente la velocidad desconocida $v_f\hat{y}$ de la ecuación (2)—. Como ya dijimos, el tiempo que le toma a la piedra volar hasta caer a la altura de la cabeza de Andrea es precisamente t_a. Además, la altura de Andrea es h_a, por lo que la posición de la piedra en el tiempo t_a será $h_a\hat{y}$. Usando esto en la ecuación de movimiento, obtenemos

$$\underbrace{h_a\hat{y}}_{\substack{\text{Posición de}\\ \text{la piedra en}\\ \text{el tiempo } t_a}} = -\frac{1}{2}gt_a^2\hat{y} + v_f t_a\hat{y} + h_1\hat{y}. \tag{4}$$

Si dejamos solo el término que tiene la velocidad $v_f\hat{y}$, tenemos

$$h_a\hat{y} + \frac{1}{2}gt_a^2\hat{y} - h_1\hat{y} = v_f t_a\hat{y}. \tag{5}$$

Al dividir por t_a, esto queda

$$\frac{h_a}{t_a}\hat{y} + \frac{1}{2}gt_a\hat{y} - \frac{h_1}{t_a}\hat{y} = v_f\hat{y}. \tag{6}$$

El lado izquierdo de la igualdad se puede escribir de la siguiente forma:

$$\left(\frac{h_a - h_1}{t_a} + \frac{1}{2}gt_a\right)\hat{y} = v_f\hat{y}. \tag{7}$$

Esta ecuación nos dice la velocidad que buscábamos en términos de variables conocidas como la altura inicial, la altura de Andrea y el tiempo de vuelo de la piedra. Finamente, si usamos el resultado de esta ecuación en la ecuación (2), tenemos

$$\vec{a} = \frac{\overbrace{\left(\frac{h_a - h_1}{t_a} + \frac{1}{2}gt_a\right)}^{v_f}}{t_1}\hat{y}. \tag{8}$$

(b) Si Andrea mide 1.68 m, el tiempo t_a es 5 segundos, t_1 es 0.05 segundos y la altura de lanzamiento de la piedra es 1.80 metros, entonces la aceleración dada por el caucho se puede calcular usando la ecuación (8):

$$\vec{a} = \frac{\left(\frac{\overbrace{1.68\ \text{m}}^{h_a} - \overbrace{1.80\ \text{m}}^{h_1}}{\underbrace{5\ \text{s}}_{t_a}} + \frac{1}{2}(9.81\ \text{m/s}^2)\underbrace{(5\ \text{s})}_{t_a}\right)}{\underbrace{0.05\ \text{s}}_{t_1}}\hat{y} = (490.02\ \text{m/s}^2)\hat{y}. \tag{9}$$

(c) Como conocemos la altura inicial y podemos hallar la rapidez inicial con la ecuación (7), podemos hallar la altura máxima alcanzada por la piedra usando la siguiente ecuación (nota 3.7):

$$h_m = \frac{1}{2}\left(\frac{v_i^2}{g}\right) + h_i. \tag{10}$$

Primero usemos los valores numéricos en la ecuación (7) para hallar la rapidez inicial:

$$\left(\frac{\overbrace{1.68\ \text{m}}^{h_a} - \overbrace{1.80\ \text{m}}^{h_1}}{\underbrace{5\ \text{s}}_{t_a}} + \frac{1}{2}(9.81\ \text{m/s}^2)\underbrace{(5\ \text{s})}_{t_a}\right)\hat{y} = (24.50\ \text{m/s})\hat{y} = v_f\hat{y}. \tag{11}$$

Cuidado: aunque se llame $v_f\hat{y}$, esta es la *velocidad inicial* del lanzamiento (como ya dijimos, la llamamos así porque es la velocidad final que le da el caucho, pero es la inicial al subir).

Si usamos esta velocidad y la altura inicial en la ecuación (10), obtenemos

$$h_m = \frac{1}{2}\left(\frac{\overbrace{(24.50\ \text{m/s})^2}^{v_i}}{(9.81\ \text{m/s})^2}\right) + \underbrace{(1.80\ \text{m})}_{h_1} = 32.09\ \text{m}. \tag{12}$$

Problema de repaso 3.8.

Palabras clave: tiempo de subida contra tiempo de caída, velocidad inicial contra velocidad final, caída libre contra lanzamiento vertical, rapidez en el punto de altura máxima.

Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(1) El tiempo que le toma a un objeto lanzado hacia arriba alcanzar su altura máxima es igual al tiempo que le toma caer desde esa altura máxima hasta el punto desde el que fue lanzado.

(2) La velocidad inicial de un objeto lanzado hacia arriba es diferente a la velocidad del objeto cuando ha caído hasta al punto desde el que fue lanzado.

(3) Un movimiento de lanzamiento vertical sólo se diferencia de un movimiento en caída libre por el hecho de que en el caso de lanzamiento vertical la velocidad inicial no es cero.

(4) La rapidez es cero cuando el objeto alcanza su altura máxima.

(5) Incluso si conocemos la rapidez inicial en un movimiento de lanzamiento vertical, no podemos hallar el tiempo total de vuelo (desde que se lanza hasta que vuelve al mismo punto).

Solución

(1) Verdadero. Como indica la nota 3.9, ambos tiempos están dados por la ecuación $\sqrt{2h_m/g} = t$.

(2) Verdadero. La velocidad inicial de un objeto lanzado hacia arriba tiene dirección contraria a la velocidad final del objeto cuando ha caído hasta el punto desde el que fue lanzado, pero la rapidez sí es la misma (nota 3.8).

(3) Verdadero. Ambos son movimientos rectilíneos con aceleración uniforme, la única diferencia entre ambos es que en el lanzamiento vertical la velocidad inicial es diferente de cero.

(4) Verdadero. En el punto de altura máximo la velocidad y la rapidez son cero.

(5) Falso. Si conocemos la rapidez inicial podemos hallar el tiempo de altura máximo, usando la ecuación $v_i/g = t_m$. Y como dijimos en la respuesta 1, el tiempo de subida es igual al de bajada, así que el tiempo total sería simplemente dos veces este tiempo.

Problema 3.9.

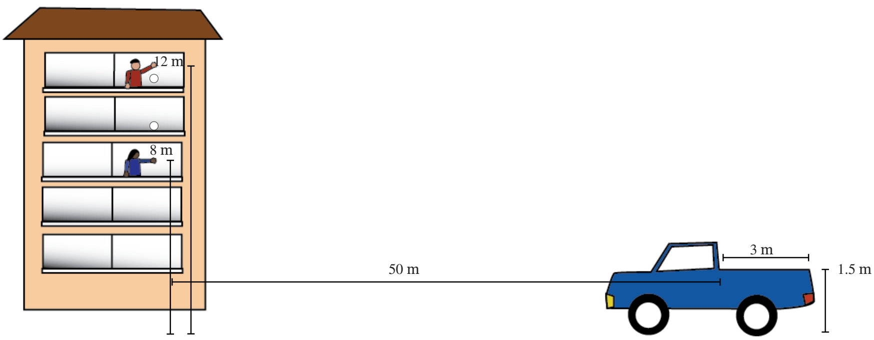
Palabras clave: encuentro de un objeto que cae libremente y otro que se mueve de forma horizontal, tiempo de caída.

Una camioneta está andando con una velocidad constante desconocida. La camioneta tiene un volco de 3 metros de longitud y la parte superior del volco está a 1.5 metros del piso. Valeria lanza una pelota de manera vertical hacia arriba, desde una altura de 8 metros sobre el nivel del piso. Valeria lanza la pelota con una rapidez inicial de 12 m/s. Si cuando Valeria lanza la pelota la parte frontal del volco de la camioneta está a una distancia de 50 metros del edificio de Valeria (ver dibujo):

(a) ¿Cuál es la rapidez mínima de la camioneta para que la pelota caiga en el volco?

(b) ¿Cuál es la rapidez máxima de la camioneta para que la pelota caiga en el volco?

(c) Eduardo también lanza una pelota pero la lanza de modo vertical hacia abajo, con una rapidez inicial de 15 m/s. El balcón de Eduardo está a 12 metros sobre el nivel del piso. Si la pelota de Eduardo cayó justo en la mitad del volco y la rapidez de la camioneta es la hallada en (b), ¿cuál era la distancia entre el edificio y la parte frontal del volco en el momento en que Eduardo lanzó la pelota?



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) y (b) Valeria lanza de forma vertical hacia arriba una pelota con rapidez de 12 m/s y desde una altura de 8 metros. Una camioneta se mueve con velocidad constante en la dirección del edificio en el que está Valeria y la parte frontal del volco está a una distancia de 50 metros. La altura del volco es de 1.5 metros.

(c) Eduardo lanza una la pelota de forma vertical hacia abajo, con rapidez inicial de 15 m/s y desde una altura de 12 metros. La pelota cae en el centro del volco (esta vez no conocemos la distancia entre la camioneta y el edificio).

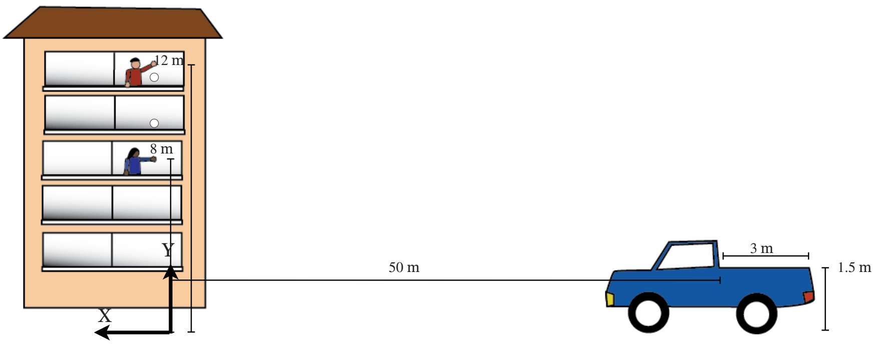
¿Qué nos piden?

(a) Encontrar la rapidez mínima de la camioneta para que la pelota caiga en el volco.

(b) Encontrar la rapidez máxima de la camioneta para que la pelota caiga en el volco.

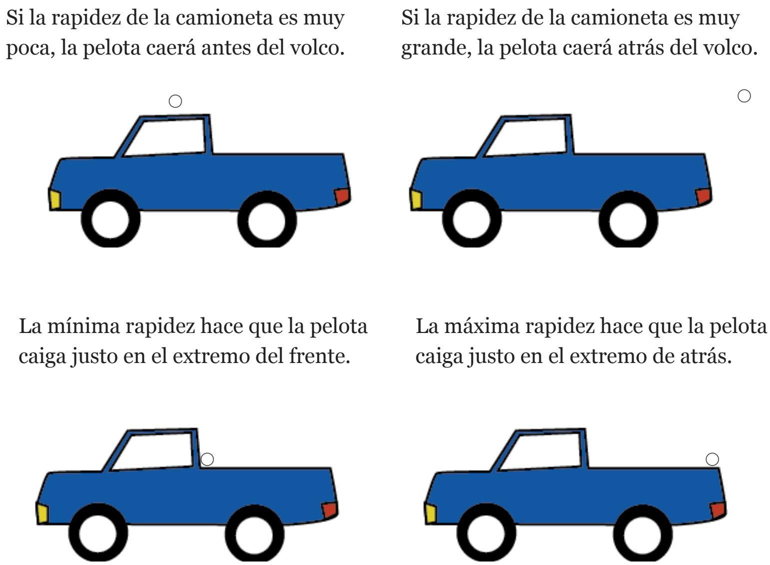
(c) Encontrar la distancia entre el edificio y la parte frontal del volvo en el momento en que Eduardo lanza la pelota.

(a) Empecemos por situar un sistema de coordenadas. Usemos un sistema cuyo origen esté en el piso del edificio (justo debajo del balcón de Valeria) y cuyo eje X apunte en el sentido en que se mueve la camioneta.



Según este sistema, la parte frontal del volco está en la posición inicial $\vec{x}_i = -(50\text{ m})\hat{x}$, pues él está a una distancia de 50 metros del edificio en el sentido negativo del eje X. Por otro lado, según este sistema, la posición inicial de la pelota de Valeria es de $\vec{y}_i = (8\text{ m})\hat{y}$.

Debemos encontrar la rapidez mínima de la camioneta para que la pelota caiga en el volco. ¿Qué quiere decir la rapidez mínima? Notemos que si la camioneta se mueve muy rápido, cuando la pelota caiga hasta 1.5 metros el volco ya se habrá pasado y la pelota caerá por fuera del volco. Por otro lado, si la rapidez de la camioneta es muy pequeña, la pelota caerá antes de que el volco haya llegado al edificio. Sólo hay un rango intermedio (ni muy rápido ni muy lento) para que la pelota caiga en el volco; con cierta rapidez, la pelota caerá en la mitad del volco; con una rapidez de la camioneta menor a la anterior, la pelota caerá en la primera mitad del volco y con aun menos rapidez, la pelota caerá justo en el extremo frontal del volco. Esta última sería la rapidez mínima, pues cualquier otra rapidez menor hará que la pelota caiga un poco antes de que la parte frontal del volco llegue a la posición de la pelota. En resumen, la rapidez mínima es aquella que debe tener la camioneta para que la pelota caiga justo en la parte frontal del volco. De modo similar, *la rapidez máxima será la velocidad necesaria para que la pelota caiga en la parte extrema trasera del volco* (si la camioneta anduviera un poco más rápido que esta rapidez máxima, entonces la pelota caería atrás de la parte trasera del volco). Esto se ilustra a continuación:



Una vez entendemos qué quiere decir la rapidez mínima en este contexto, debemos buscar ecuaciones que nos permitan hallarla. Por un lado, como la altura del volco es de 1.5 metros, necesitamos garantizar que cuando la pelota haya caído hasta la altura de 1.5 metros la parte frontal del volco esté justo debajo de la pelota. Si la parte frontal del volco no está justo debajo de la pelota en ese momento, sino que todavía no ha llegado, entonces la pelota ya no caerá dentro del volco. Y si la parte frontal del volco ya pasó cuando la pelota está a 1.5 metros de altura, entonces no cumplimos la condición de que sea la mínima rapidez. Además, sabemos que la parte frontal del volco está a una distancia de 50 metros del edificio cuando Valeria lanza la pelota. Esto quiere decir que *el tiempo que le toma a la camioneta recorrer esos 50 metros tiene que ser igual al tiempo que le toma a la pelota llegar a la altura de 1.5 metros.*

Para la camioneta, que sigue un movimiento con velocidad constante, distancia es rapidez por tiempo:

$$d = v_c t, \tag{1}$$

donde v_c es la rapidez de la camioneta (es lo que queremos hallar). La distancia que tiene que recorrer la parte frontal del volco (que es la parte que nos interesa para la rapidez mínima) es de 50 metros:

$$50 \text{ m} = v_c t. \tag{2}$$

De aquí podemos escribir v_c en términos del tiempo y la distancia:

$$\frac{50 \text{ m}}{t} = v_c. \tag{3}$$

Si hallamos el tiempo t que le toma a la camioneta recorrer 50 metros, esta ecuación nos permitirá determinar la rapidez de la camioneta.

Como ya dijimos, el tiempo t que le toma a la camioneta recorrer la distancia de 50 metros debe ser igual al tiempo que le toma a la pelota llegar hasta una altura de 1.5 metros. Hay dos formas de hallar el tiempo que le toma a la pelota llegar hasta la altura de 1.5 metros. Una forma es usando la ecuación de movimiento de la pelota. A continuación seguiremos ese método y luego mostraremos el otro método:

Método 1: Hallar el tiempo con la ecuación de movimiento

La pelota sale con una velocidad inicial en el sentido positivo de Y de magnitud de 12 m/s. Además, la posición inicial de la pelota es $\vec{y}_i = (8 \text{ m})\hat{y}$ y la aceleración es g en el sentido negativo de Y. Así que la ecuación de movimiento de la pelota es la siguiente:

$$y_f \hat{y} = -\frac{1}{2} g t^2 \hat{y} + (12 \text{ m/s}) t \hat{y} + (8 \text{ m})\hat{y}. \tag{4}$$

Para hallar el tiempo en el cual la pelota llega a la altura de 1.5 metros, simplemente ponemos en la anterior ecuación la condición de que la posición final de la pelota sea $y_f \hat{y} = (1.5 \text{ m})\hat{y}$:

$$\underbrace{(1.5 \text{ m})\hat{y}}_{y_f \hat{y}} = -\frac{1}{2} g t^2 \hat{y} + (12 \text{ m/s}) t \hat{y} + (8 \text{ m})\hat{y}. \tag{5}$$

Si pasamos el término del lado izquierdo de la igualdad al lado derecho y lo sumamos, obtenemos

$$0\hat{y} = -\frac{1}{2} g t^2 \hat{y} + (12 \text{ m/s}) t \hat{y} + (6.5 \text{ m})\hat{y}. \tag{6}$$

Si aplicamos la regla de oro, esto queda

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + (12 \text{ m/s})t + (6.5 \text{ m}). \tag{7}$$

El lector puede notar que esta es una ecuación cuadrática en el tiempo (recordemos que la ecuación cuadrática es de la forma $a^2x + bx + c = 0$). Si resolvemos la ecuación cuadrática podemos determinar el tiempo t para el momento en que la pelota llega a la altura de 1.5 metros. Notemos que b (el término que acompaña a t) es 12 m/s, a (el término que acompaña t^2) es $-1/2$g, y c (el término independiente) es 6.5 metros. Por lo tanto, el tiempo t es

$$t = \frac{-(12 \text{ m/s}) \pm \sqrt{(12 \text{ m/s})^2 - 4(-0.5 \times 9.81 \text{ m/s}^2)(6.5 \text{ m})}}{2(-0.5 \times 9.81 \text{ m/s}^2)} = 2.90 \text{ s}, \tag{8}$$

donde hemos descartado la solución que no tiene sentido (el tiempo negativo).

Método 2: Hallar el tiempo total con el tiempo de altura máxima y el tiempo de caída

El otro método consiste en dividir el análisis del movimiento de la pelota en dos: primero, hallar el tiempo que le toma a la pelota subir hasta su altura máxima y, segundo, hallar el tiempo que le toma a la pelota caer desde su altura máxima hasta la altura de 1.5 metros. La suma de ambos tiempos será el tiempo total que le toma a la pelota llegar hasta la altura de 1.5 metros. La ventaja de este método es que hallar el tiempo de altura máxima es sencillo y hallar el tiempo de caída libre también lo es, la desventaja es que requiere dividir el movimiento de la pelota en dos tramos y además debemos hallar la altura máxima. El tiempo de altura máxima lo podemos calcular usando la ecuación de altura máxima:

$$\frac{v_i}{g} = t_m. \tag{9}$$

Como la rapidez inicial es de 12 m/s, y la magnitud de la aceleración de la gravedad es de 9.81 m/s^2, el tiempo de altura máxima será:

$$\frac{\overbrace{12 \text{ m/s}}^{v_i}}{\underbrace{9.81 \text{ m/s}^2}_{g}} = 1.22 \text{ s}. \tag{10}$$

Cuando llega a la altura máxima la pelota cae libremente, así que podemos calcular el tiempo que se demora la pelota en caer desde esa altura máxima hasta la altura de 1.5 metros usando

$$\sqrt{\frac{2(h_{im} - h_f)}{g}} = t_2. \tag{11}$$

La altura inicial h_{im} de la caída libre es aquí la altura máxima alcanzada por la pelota (esta no es la altura desde la que es lanzada inicialmente, por eso no hemos usado h_i sino h_{im}). La altura final h_f es 1.5 metros. Para hallar la altura máxima, podemos usar la siguiente ecuación (nota 3.7):

$$\frac{v_i^2}{2g} + h_i = h_m. \tag{12}$$

La altura inicial h_i de la pelota es 8 metros, la rapidez inicial es 12 m/s y la magnitud de la aceleración de la gravedad es 9.81 m/s^2. Así, esta ecuación queda

$$\frac{\overbrace{(12\ \mathrm{m/s})}^{v_i}{}^2}{\underbrace{2\,(9.81\ \mathrm{m/s^2})}_{g}} + \underbrace{8\ \mathrm{m}}_{h_i} = 15.34\ \mathrm{m}. \tag{13}$$

La anterior es la altura máxima, que es la altura inicial de la caída libre que debemos usar en la ecuación (11). Al usar esta altura máxima y teniendo en cuenta que la altura final es 1.5 metros, tenemos

$$\sqrt{\frac{2(\overbrace{15.34\ \mathrm{m}}^{h_{im}} - \overbrace{1.5\ \mathrm{m}}^{h_f})}{9.81\ \mathrm{m/s^2}}} = 1.67\ \mathrm{s}. \tag{14}$$

Por lo tanto, el tiempo total que le toma a la pelota caer hasta 1.5 metros de altura será la suma del tiempo anterior, con el tiempo dado por la ecuación (10):

$$1.22\ \mathrm{s} + 1.67\ \mathrm{s} = 2.89\ \mathrm{s}. \tag{15}$$

Notemos que la ecuación cuadrática nos daba un tiempo de 2.90 segundos y este método nos da un tiempo de 2.89 segundos. Los tiempos son casi iguales, pero no son iguales porque no tuvimos en cuenta suficientes decimales. En el método 2 aproximamos varias veces; sacando el tiempo máximo de altura, sacando la altura máxima, e incluso sacando el tiempo de caída desde la altura máxima. Por supuesto, ambos métodos son válidos. El primero es sencillo porque sólo necesitamos plantear bien la ecuación de movimiento, pero al resolver o plantear la ecuación cuadrática fácilmente podemos cometer errores. El segundo método requiere usar ecuaciones muy simples pero debemos hallar cosas que en el primer método no debemos hallar (como la altura máxima).

Regresando al problema, recordemos que debemos usar el tiempo que acabamos de hallar en la ecuación (3) para obtener la rapidez mínima de la camioneta:

$$\underbrace{\frac{50 \text{ m}}{2.90 \text{ s}}}_{t} = 17.24 \text{ m/s} = v_c. \tag{16}$$

Es decir, la rapidez mínima de la camioneta es de 17.24 metros por segundo; si la camioneta se moviera sólo un poco más lento, por ejemplo a 17.23 m/s, entonces la pelota caería justo adelante del volco.

(b) Ahora debemos hallar la rapidez máxima de la camioneta. Como explicamos antes, cuando nos piden la rapidez máxima nos están diciendo que la pelota debe caer justo en la parte trasera del volco. Por supuesto, el análisis es muy similar al de antes. De hecho, el tiempo que le toma a la pelota llegar hasta 1.5 metros de altura es el mismo que hallamos antes, pues el lanzamiento de Valeria es exactamente igual. Lo único que cambia es que ahora no queremos que la parte delantera del volco esté justo debajo de la pelota sino que queremos que la parte trasera del volco esté justo debajo de la pelota. Como el volco mide 3 metros de largo, cuando Valeria lanza la pelota la parte trasera del volco está a 53 metros del edificio. Así que la parte trasera tiene que recorrer 53 metros en el tiempo en el cual la pelota llega hasta la altura de 1.5 metros. Es decir, en la ecuación (16), en vez de 50 metros, debemos poner 53 metros:

$$\frac{53 \text{ m}}{2.90 \text{ s}} = 18.27 \text{ m/s} = v_c. \tag{17}$$

En palabras, la máxima rapidez de la camioneta para que la pelota caiga en el volco es de 18.27 metros por segundo (una rapidez sólo un poco mayor, como una de 18.28 m/s, hará que la pelota caiga atrás del volco).

(c) Ahora nos dicen que Eduardo lanza una pelota desde una altura inicial de 12 metros y con velocidad inicial de 15 m/s hacia el piso. La pelota cae justo en el centro del volco y la camioneta se mueve con la rapidez máxima hallada en (b) (que es 18.27 m/s).

Como la camioneta se mueve con velocidad constante, podemos usar el hecho de que distancia es rapidez por tiempo. Además, si llamamos d a la distancia que hay entre el frente del volco y el edificio (esta es la distancia que debemos hallar), entonces el centro del volco debe recorrer una distancia de $d + 1.5$ m hasta el edificio, pues el volco mide 3 metros de largo así que su centro está a 1.5 metros. Por lo tanto, para el centro del volco tenemos

$$d + 1.5 \text{ m} = v_c t. \tag{18}$$

Además, la rapidez es 18.27 m/s, pues esta es la rapidez del camión hallada en (b):

$$d + 1.5 \text{ m} = (18.27 \text{ m/s})t. \tag{19}$$

Ahora, el tiempo t que le toma al centro del volco recorrer la distancia $d + 1.5$ m es el mismo que le toma a la pelota caer hasta el volco. Así que si hallamos este tiempo de la pelota, podemos despejar d de la ecuación (19).

Podemos hallar el tiempo que le toma a la pelota llegar hasta una altura de 1.5 metros con la ecuación de movimiento de la pelota, así como hallamos el tiempo en la sección (a)[3]. La rapidez inicial de la pelota es de 15 m/s y la pelota es lanzada hacia abajo, así que la dirección de su velocidad inicial es negativa en Y. La altura desde la cual es lanzada la pelota es de 12 metros, así que la posición inicial de la pelota es $\vec{y}_i = (12\text{ m})\hat{y}$. Y la aceleración es negativa, de magnitud g. Por lo tanto, la ecuación de movimiento de la pelota es

$$y_f\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} - \underbrace{(15\text{ m/s})}_{v_i}t\hat{y} + \underbrace{(12\text{ m})}_{\vec{y}_i}\hat{y}. \tag{20}$$

La altura final de la pelota es 1.5 metros, así que su posición final es $\vec{y}_f = (1.5\text{ m})\hat{y}$. Si usamos esta posición final en la anterior ecuación, obtenemos

$$\underbrace{(1.5\text{ m})}_{\vec{y}_f}\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} - (15\text{ m/s})t\hat{y} + (12\text{ m})\hat{y}. \tag{21}$$

Si pasamos el término izquierdo al lado derecho de la igualdad y lo sumamos, y aplicamos la regla de oro, obtenemos

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 - (15\text{ m/s})t + (10.5\text{ m}). \tag{22}$$

Esta es una ecuación cuadrática. Notemos que b (el término que acompaña a t) es -15 m/s, a (el término que acompaña t^2) es $-1/2$g, y c (el término independiente) es 10.5 metros. Su solución es entonces

$$t = \frac{(15\text{ m/s}) \pm \sqrt{(-15\text{ m/s})^2 - 4(-0.5\times 9.81\text{ m/s}^2)(10.5\text{ m})}}{2(-0.5\times 9.81\text{ m/s}^2)} = 0.59\text{ s}, \tag{23}$$

donde hemos descartado la solución negativa (el tiempo negativo). Si usamos este tiempo en la ecuación (19), obtenemos

$$d + 1.5\text{ m} = (18.27\text{ m/s})(0.59\text{ s}). \tag{24}$$

Así que la distancia d a la que se encuentra la parte frontal del volco cuando Eduardo lanza la pelota es

$$d = (18.27\text{ m/s})(0.59\text{ s}) - 1.5\text{ m} = 9.10\text{ m}. \tag{25}$$

[3] El segundo método que vimos no se puede usar porque la pelota no alcanza su altura máxima, ya que la pelota no es lanzada hacia arriba.

Problema (teórico) 3.10.

Palabras clave: movimiento parabólico, altura máxima, tiempo de altura máximo, distancia horizontal total.

(a) Explique qué es un movimiento parabólico y qué ecuaciones de movimiento sigue un objeto en movimiento parabólico.

(b) Derive una expresión en términos de la rapidez inicial en Y para el tiempo de altura máximo y para la altura máxima en un movimiento parabólico.

(c) Suponga que tiene la rapidez v_x del objeto (la rapidez en X) y la rapidez inicial v_{iy} en Y del objeto. Escriba una expresión para la distancia total recorrida en X por el objeto en términos de ambas rapideces y de g, suponiendo que el objeto termina a la misma altura de la cual es lanzado.

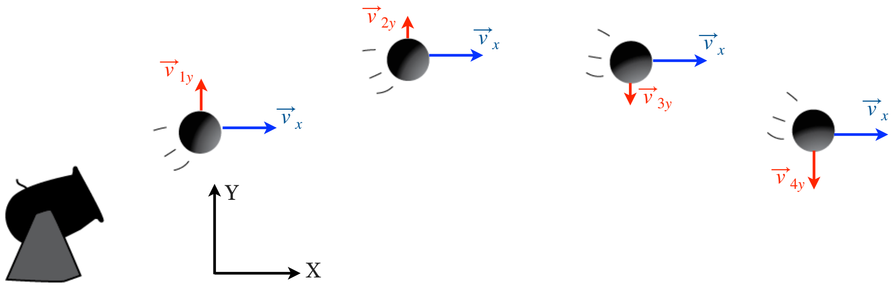
Solución

(a) En todos los problemas de cinemática hasta aquí hemos tratado casos de movimiento rectilíneo, tanto con velocidad constante como con aceleración constante. En el movimiento parabólico, en cambio, el objeto no se mueve en línea recta sino que se mueve siguiendo una parábola. Como no se mueve en línea recta, no podemos describir el movimiento usando un solo eje sino que debemos usar al mismo tiempo dos ejes. Para analizar este movimiento es común usar un sistema en el cual el eje Y apunta hacia arriba (hacia el cielo) y el eje X apunta hacia la derecha o hacia la izquierda.

En un movimiento parabólico el objeto se mueve simultáneamente de manera vertical en Y y de manera horizontal al suelo en X. Es muy importante notar que el movimiento en Y no es del mismo tipo que el movimiento en X. En Y el objeto se mueve como si hubiera sido lanzado de manera vertical hacia arriba, es decir, en Y el objeto sigue un movimiento acelerado con la aceleración de la gravedad. Por su parte, en X el objeto se mueve con velocidad constante. Además, como el objeto se mueve en dos dimensiones a la vez, el objeto tiene dos velocidades diferentes; la velocidad que tiene en X es responsable de que el objeto avance en X y la velocidad que tiene en Y es responsable de que avance en Y.

Si usamos un sistema con el eje Y apuntando hacia arriba, la aceleración en Y será negativa. Esto quiere decir que la velocidad Y del objeto siempre disminuye; si la velocidad en Y es positiva al comienzo, la velocidad comenzará a disminuir hasta que en el punto de altura máximo sea cero y luego la velocidad comenzará a hacerse cada vez más negativa. Esto que le pasa a la velocidad en Y es exactamente lo mismo que le pasa a la velocidad de un objeto que es lanzado hacia arriba, como estudiamos. Por su parte, en un movimiento parabólico la velocidad en X siempre es la misma.

Todo esto lo podemos ilustrar con un caso sencillo en el cual un cañón dispara una bala; la bala se mueve en Y mientras sube y baja y se mueve en X mientras avanza de forma horizontal:



En el movimiento parabólico el objeto se mueve tanto en X como en Y. En X mantiene una velocidad constante (en azul) a lo largo de todo el vuelo, mientras que en Y la velocidad del objeto (en rojo) va cambiando continuamente, debido a la gravedad; mientras sube el objeto tiene una velocidad en Y positiva, hasta que llega a la parte más alta y comienza a descender con velocidad negativa.

Por lo explicado anteriormente, es claro que podemos escribir dos ecuaciones de movimiento para el objeto: una ecuación que dice cómo es el movimiento en X y otra ecuación que indica el movimiento en Y. Como en X el objeto se mueve con velocidad constante, su ecuación de movimiento es simplemente

$$\vec{x} = \vec{v}_x t + \vec{x}_i, \tag{1}$$

donde hemos llamado $\vec{v}_x$ a la velocidad X del objeto.

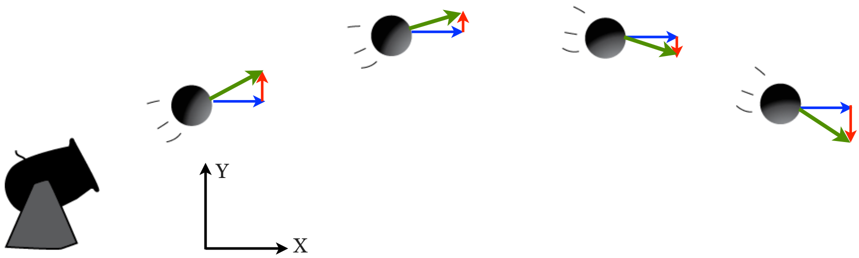
En Y el objeto se mueve con aceleración de la gravedad, así que su ecuación de movimiento en Y es de la forma

$$\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_{iy}t + \vec{y}_i. \tag{2}$$

(No hemos puesto signo menos a la aceleración porque estamos escribiendo la ecuación para cualquier sistema, no para uno en particular). Además, debido a la aceleración de la gravedad, la velocidad Y del objeto se comporta así (esto ya lo sabíamos por casos de lanzamiento vertical):

$$\vec{v}_y = \vec{g}t + \vec{v}_{iy}. \tag{3}$$

Si el objeto tiene dos movimientos simultáneos entonces el objeto tiene dos velocidades, una en X y una en Y. La velocidad total o velocidad neta del objeto será la suma vectorial de la velocidad en X y la velocidad en Y. Por ejemplo, en el caso de la bala de cañón, la velocidad total de la bala en cada punto de su trayectoria se puede escribir como la suma vectorial de la velocidad en X (azul), con la velocidad en Y (roja), así:



La velocidad total de la bala (en verde) en cada punto de la trayectoria se puede entender como la suma vectorial de la velocidad en X con la velocidad en Y. Como la velocidad en Y va cambiando en cada punto, la velocidad total del objeto también va cambiando.

(b) Por lo dicho en la sección anterior, el lector puede sospechar correctamente que todos los resultados que obtuvimos para el caso de lanzamiento vertical se pueden usar para el movimiento Y del objeto en un movimiento parabólico. Por ejemplo, así como en el lanzamiento vertical la velocidad del objeto es cero en el punto de altura máxima, en el movimiento parabólico la velocidad en Y del objeto va a ser cero en el punto más alto. Si usamos un sistema en el cual el eje Y apunta hacia arriba, la ecuación (3) para el punto más alto queda

$$0\hat{y} = -gt\hat{y} + v_{iy}\hat{y}. \tag{4}$$

Si aplicamos la regla de oro y despejamos el tiempo (que en este caso es el tiempo de altura máxima), esto nos da

$$\frac{v_{iy}}{g} = t. \tag{5}$$

Esta es exactamente la misma ecuación que teníamos antes, en el lanzamiento vertical para el tiempo máximo de altura.

Como el comportamiento en Y del objeto es igual al de un lanzamiento vertical, el tiempo que se demora un objeto en subir hasta el punto de altura máximo en un movimiento parabólico es igual al tiempo que se demora en caer desde el punto máximo de altura hasta la altura desde la que fue lanzado (nota 3.9). Esto quiere decir que en un movimiento parabólico, *el tiempo total de vuelo* *desde que un objeto sale disparado hasta que vuelve a caer a la altura inicial es dos veces el tiempo de altura máximo*, es decir,

$$2\frac{v_{iy}}{g} = t_{total}. \tag{6}$$

La ecuación de movimiento en Y de un objeto en movimiento parabólico que es lanzado desde una posición inicial $y_i\hat{y}$, según un sistema en el cual el eje Y apunta hacia arriba, es

$$y_f\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} + v_{iy}t\hat{y} + y_i\hat{y}. \tag{7}$$

Si usamos el tiempo de altura máximo dado por la ecuación (5) en esta ecuación, podemos obtener la altura máxima alcanzada por el objeto:

$$y_m\hat{y} = -\frac{1}{2}g\Big(\underbrace{\frac{v_{iy}}{g}}_{t}\Big)^2\hat{y} + v_{iy}\Big(\underbrace{\frac{v_{iy}}{g}}_{t}\Big)\hat{y} + y_i\hat{y}. \tag{8}$$

Simplificando y sumando los términos que se pueden sumar, esto es igual a

$$y_m\hat{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_{iy}^2}{g}\right)\hat{y} + y_i\hat{y}. \tag{9}$$

Si aplicamos la regla de oro, esto da

$$y_m = \frac{1}{2}\left(\frac{v_{iy}^2}{g}\right) + y_i. \tag{10}$$

De nuevo, esto es lo mismo que habíamos encontrado para el lanzamiento vertical (nota 3.7).

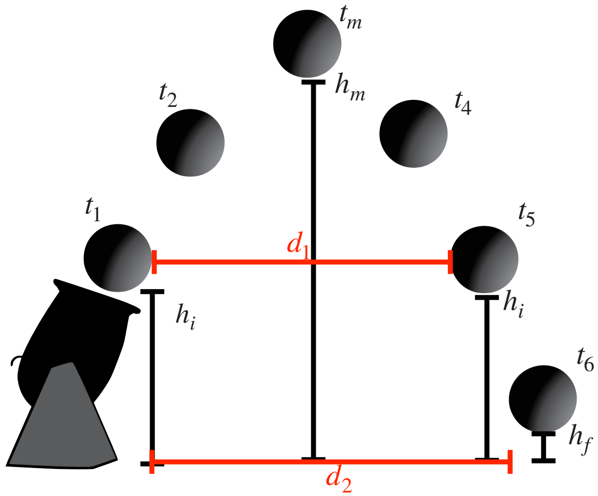
(c) La distancia total recorrida en X es fácil de calcular porque en X el objeto se mueve con rapidez constante; la distancia recorrida en X es igual a rapidez en X por el tiempo de vuelo:

$$d_x = v_x t. \tag{11}$$

Pero esta ecuación está en términos de t, y según el enunciado debemos dejar expresada la distancia recorrida en términos de la rapidez inicial en Y, la rapidez en X y g. Si un objeto realiza un movimiento parabólico que termina a la misma altura de la cual es lanzado, entonces el tiempo total de vuelo es dos veces el tiempo de altura máximo, como dice la ecuación (6). Así que si usamos el tiempo total de vuelo en la ecuación anterior, obtenemos

$$d_x = v_x\left(2\frac{v_{iy}}{g}\right) = 2\frac{v_x v_{iy}}{g}. \tag{12}$$

En palabras, la distancia total recorrida en X, en un movimiento parabólico que termina a la misma altura a la cual empieza, es dos veces la rapidez en X por la rapidez inicial en Y sobre la aceleración de la gravedad. Es muy importante entender que esta ecuación sólo es válida si el objeto termina a la misma altura a la cual empezó. Si el objeto no termina a la misma altura inicial, entonces el tiempo que se demora en subir hasta la altura máxima no va a ser igual al tiempo que se demora en caer desde la altura máxima hasta la altura final. Esto se puede ver en la siguiente figura:



El tiempo que se demora el objeto en subir desde la altura inicial h_i hasta la altura máxima h_m (el tiempo de altura máxima) es igual al tiempo que se demora el objeto en caer desde h_m hasta h_i de nuevo. Es decir, desde t_1 hasta t_m pasa el mismo tiempo que desde t_m hasta t_5, así que desde t_1 hasta t_5 pasa dos veces el tiempo de altura máxima. Por lo tanto, la distancia d_1 recorrida por el objeto en X entre el tiempo t_1 y t_5 se puede calcular usando la ecuación (12). Pero si el objeto termina a una altura diferente a la altura inicial, como en este caso en el cual el objeto termina en h_f, entonces claramente el tiempo de vuelo total no es igual a dos veces el tiempo de altura máxima, pues entre t_1 y t_m habrá pasado menos tiempo que entre t_m y t_6. Por lo tanto, la distancia total recorrida en X, que hemos llamado d_2, no puede ser calculada usando la ecuación (12) (en este caso sólo podemos usar esa ecuación para calcular la distancia d_1).

Nota 3.10. Movimiento parabólico

En un movimiento parabólico el objeto sigue dos movimientos simultáneos; un movimiento en X que tiene velocidad constante, y un movimiento en Y que tiene aceleración constante de magnitud g.

El tiempo de altura máxima es $\frac{v_{iy}}{g} = t$, donde v_{iy} es la rapidez inicial en Y.

El tiempo de vuelo total, si el objeto termina a la misma altura de la que partió, es dos veces el tiempo anterior: $2\frac{v_{iy}}{g} = t$.

La altura máxima alcanzada por el objeto es $y_m = \frac{1}{2}\left(\frac{v_{iy}^2}{g}\right) + y_i$, donde y_i es la altura inicial.

La distancia en X total recorrida por el objeto, si termina a la misma altura de la que partió, es $d_x = 2\frac{v_x v_{iy}}{g}$.

Problema 3.11.

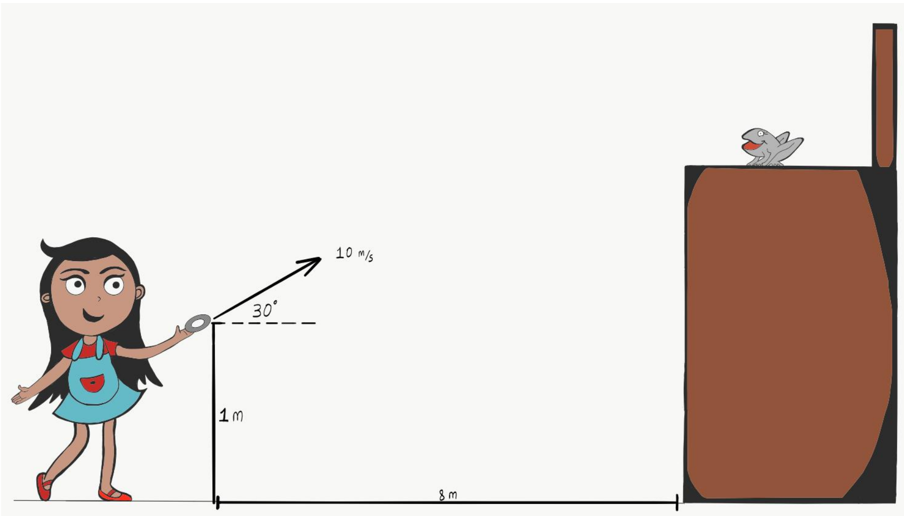
Palabras clave: movimiento parabólico, posición en Y en cierto tiempo, altura máxima, magnitud y dirección de la velocidad total.

Roberta está jugando rana (lanzar el aro de forma que caiga justo en la boca de la rana). Si Roberta se encuentra a una distancia de 8 metros de la rana, y lanza el aro desde una altura de 1 metro, con una rapidez total de 10 m/s y con un ángulo de 30 grados con respecto al piso,

(a) ¿A qué altura debe estar la boca de la rana para que el aro caiga justo ahí?

(b) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el aro?

(c) ¿Cuál es la magnitud y dirección de la velocidad del aro cuando llega a la boca de la rana?



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b), (c) Roberta lanza el aro con rapidez total de 10 m/s formando un ángulo de 30 grados con respecto al piso. La altura inicial del aro es 1 metro y la distancia entre la rana y Roberta es de 8 metros.

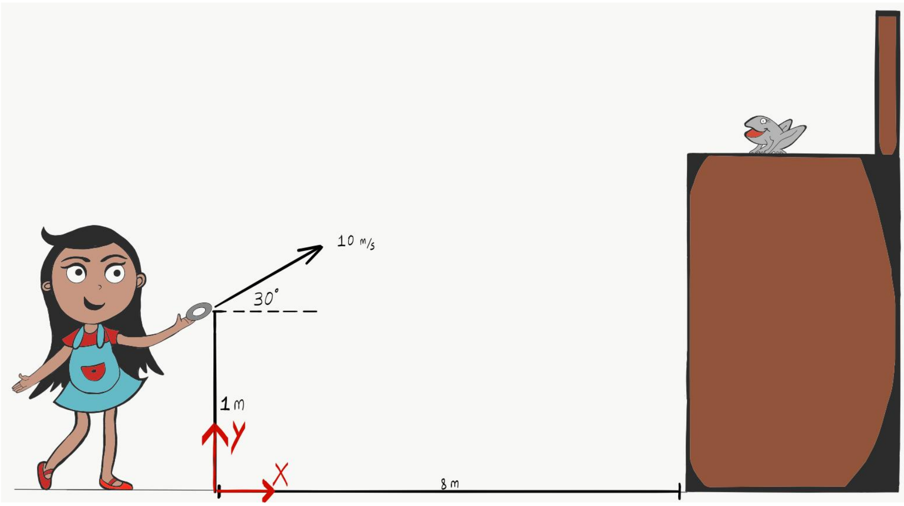
¿Qué nos piden?

(a) Determinar la altura a la que está la boca de la rana para que el aro llegue a su boca.

(b) Determinar la altura máxima alcanzada por el aro.

(c) Determinar la magnitud y la dirección de la velocidad del aro cuando llega a la boca de la rana.

(a) Como ya debe ser costumbre, comenzamos por situar un sistema de coordenadas. Usaremos uno que esté sobre el piso y según el cual la posición inicial X del aro sea cero:

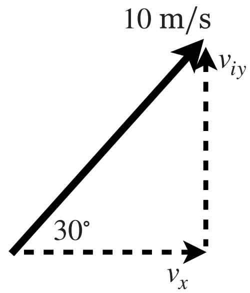


Debemos hallar la altura a la que debe estar la boca de la rana para que el aro le caiga allí. Esto quiere decir que debemos hallar la altura a la que está el aro cuando este ha recorrido 8 metros en X, y esa será la altura a la que debe estar la boca de la rana.

Para hallar la altura debemos usar la ecuación de movimiento en Y. Como en todo movimiento parabólico, la posición en Y del aro está dada por una ecuación de la forma

$$\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_{iy}t + \vec{y}_i. \tag{1}$$

A partir de esto no conocemos la rapidez inicial en Y ni el tiempo t. Podemos obtener la rapidez inicial en Y porque conocemos la rapidez inicial total y el ángulo. De hecho, notemos que el vector de la velocidad total inicial forma el siguiente triángulo rectángulo:



Como es un vector, podemos descomponer la velocidad en sus componentes. En este caso, la velocidad total inicial es un vector que forma 30 grados con el eje X. La magnitud de dicho vector es la rapidez inicial, que es de 10 metros por segundo. La magnitud de la componente Y de dicho vector corresponde a la rapidez inicial en Y y la magnitud de la componente X de dicho vector corresponde a la rapidez en X.

Del triángulo anterior es claro que la rapidez inicial en Y es el cateto opuesto, así que está dada por

$$v_{iy} = \underbrace{(10 \text{ m/s})}_{v_i} \sin 30^\circ = 5 \text{ m/s}. \tag{2}$$

(Si desea repasar trigonometría el lector puede leer el problema 1.16). Según el sistema elegido, la gravedad es negativa en Y. Además, según nuestro sistema, la posición inicial en Y del aro es (1 m)$\hat{y}$ (el aro es lanzado desde 1 metro de altura en la dirección positiva del eje Y). Por lo tanto, podemos escribir la ecuación de movimiento del aro así:

$$y_f \hat{y} = -\frac{1}{2} g t^2 \hat{y} + \underbrace{(5 \text{ m/s})}_{v_{iy}} t \hat{y} + \underbrace{(1 \text{ ms})}_{\vec{y}_i} \hat{y}. \tag{3}$$

Para saber en qué posición Y se encuentra el aro cuando llega hasta la rana, necesitamos saber cuánto tiempo se demora este en recorrer los 8 metros en X que separan a la rana de Roberta. Para hallar este tiempo, debemos analizar el movimiento en X del aro.

En X el aro se mueve con velocidad constante, así que la distancia recorrida en X es simplemente rapidez en X por tiempo:

$$d_x = v_x t. \tag{4}$$

Queremos hallar el tiempo que le toma al aro recorrer 8 metros en X:

$$8 \text{ m} = v_x t. \tag{5}$$

Podemos hallar la rapidez en X como hallamos la rapidez inicial en Y. De la figura anterior se puede apreciar que la rapidez en X es la rapidez total por el coseno de 30 grados:

$$v_x = \underbrace{(10 \text{ m/s})}_{v_i} \cos 30^\circ = 8.66 \text{ m/s}. \tag{6}$$

Si usamos esta rapidez en la ecuación (5), tenemos

$$8 \text{ m} = \underbrace{(8.66 \text{ m/s})}_{v_x} t. \tag{7}$$

Así que el tiempo que le toma al aro recorrer 8 metros en X es

$$\frac{8 \text{ m}}{8.66 \text{ m/s}} = 0.92 \text{ s} = t. \tag{8}$$

Finalmente, usamos este tiempo en la ecuación (3) para hallar la posición Y cuando el aro ha recorrido 8 metros:

$$y_f \hat{y} = -\frac{1}{2}(9.81 \text{ m/s}^2)(\underbrace{0.92 \text{ s}}_{t})^2 \hat{y} + (5 \text{ m/s})(\underbrace{0.92 \text{ s}}_{t})\hat{y} + (1 \text{ m})\hat{y} = (1.45 \text{ m})\hat{y}. \tag{9}$$

Es decir, la boca de la rana tiene que estar a 1.45 metros de altura para que el aro le caiga allí.

(b) A la altura máxima alcanzada por el aro la podemos encontrar usando la ecuación presentada en la nota 3.10, que es

$$y_m = \frac{1}{2}\left(\frac{v_{iy}^2}{g}\right) + y_i. \tag{10}$$

La rapidez inicial en Y es de 5 m/s —ver ecuación (2)—, y la altura inicial es 1 metro, así que esta ecuación da

$$y_m = \frac{1}{2}\left(\frac{(\overbrace{5 \text{ m}}^{v_{iy}})^2}{(9.81 \text{ m/s}^2)}\right) + 1 \text{ m} = 2.27 \text{ m}. \tag{11}$$

(c) Para hallar la magnitud y dirección de la velocidad del aro cuando llega a la boca de la rana, necesitamos hallar la velocidad en X y en Y del aro en ese momento (la velocidad total es la suma vectorial de la velocidad X y Y). La velocidad en X es constante, así que es la misma que hallamos antes: 8.66 m/s en la dirección positiva de X.

La velocidad en Y está dada por

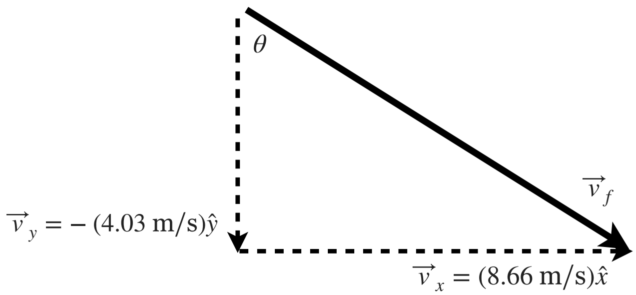
$$\vec{v}_y = \vec{g}t + \vec{v}_{iy}. \tag{12}$$

Si usamos el hecho de que la gravedad tiene dirección negativa, que la velocidad inicial en Y es de 5 m/s en la dirección positiva de Y y que el tiempo en el cual queremos determinar la velocidad es de 0.92 segundos (ese es el tiempo que ha transcurrido hasta que el aro llega a la boca de la rana), la ecuación (12) queda

$$\vec{v}_y = -\left(9.81\ \mathrm{m/s^2}\right)\underbrace{(0.92\ \mathrm{s})}_{t} + \underbrace{(5\ \mathrm{m/s})}_{v_{iy}}\hat{y} = -(4.03\ \mathrm{m/s})\hat{y}. \tag{13}$$

El signo menos indica que el aro está descendiendo cuando llega a la boca de la rana[4].

La velocidad total del aro al llegar a la boca de la rana es la suma vectorial de la velocidad X y Y:



La velocidad total del aro cuando llega a la boca de la rana tiene componentes de −4.03 m/s en Y y de 8.66 m/s en X.

Ahora, la magnitud de la velocidad final se puede hallar con el teorema de Pitágoras:

$$v_f = \sqrt{\underbrace{(8.66\ \mathrm{m/s})}_{v_x}{}^2 + \underbrace{(4.03\ \mathrm{m/s})}_{v_{iy}}{}^2} = 9.55\ \mathrm{m/s}. \tag{14}$$

(No ponemos el signo negativo de la componente Y porque sólo estamos considerando la magnitud).

[4] En vez de usar la ecuación (12), también hubiéramos podido obtener la velocidad en Y usando $v_y^2 = v_{iy}^2 + 2a(h_f - h_i)$, donde a es $-g$, la altura final es la altura de la boca de la rana que ya conocemos y la altura inicial es 1 metro.

Sólo nos falta hallar la dirección del vector de la velocidad final. Esta dirección se puede expresar como el ángulo θ que forma el vector de la velocidad con la parte negativa del eje Y, como se ilustra en la figura anterior. Según esta figura es claro que el cateto opuesto es la componente X y el cateto adyacente es la componente Y, así que la tangente del ángulo θ es

$$\tan\theta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{\overbrace{8.66 \text{ m/s}}^{v_x}}{\underbrace{4.03 \text{ m/s}}_{v_{iy}}} = 2.15. \tag{15}$$

Por lo tanto, el ángulo θ es

$$\theta = \arctan 2.15 = 65.06^\circ. \tag{16}$$

Así, la velocidad del aro cuando llega a la boca de la rana tiene magnitud de 9.55 m/s y tiene dirección de 65.06 grados con respecto al eje Y negativo, medido en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

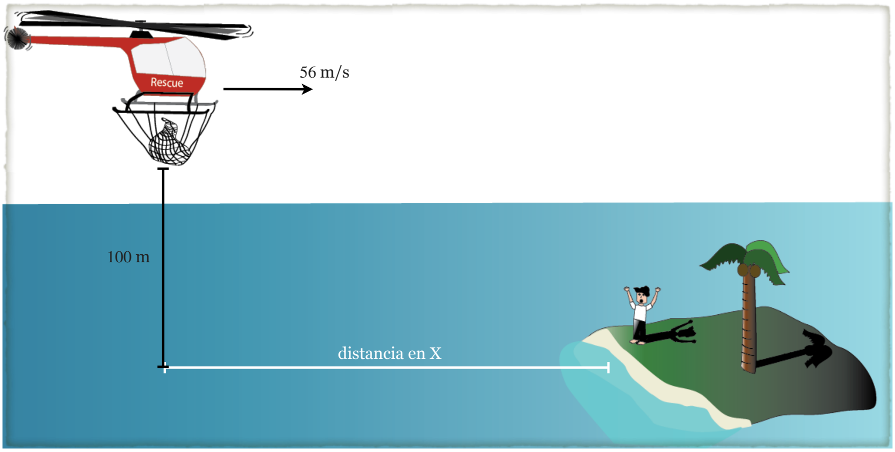
Problema (teórico) 3.12.

Palabras clave: movimiento semiparabólico, distancia horizontal, tiempo de caída.

Un helicóptero que va con rapidez horizontal constante de 56 m/s debe soltar una bolsa con suministros para que caiga en la isla donde está Camilo. Si el helicóptero se mantiene a una altura de 100 metros de altura con respecto al mar:

(a) ¿A qué distancia horizontal (en X) de la isla se debe soltar la bolsa para que caiga en la isla?

(b) Halle la nueva distancia en X a la que se debería soltar la bolsa si el helicóptero viajara a la mitad de la altura pero con la misma rapidez. Para este mismo caso, halle la razón entre esta nueva distancia y la hallada anteriormente.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) La rapidez horizontal del helicóptero es de 56 m/s y la altura a la que vuela es de 100 metros.

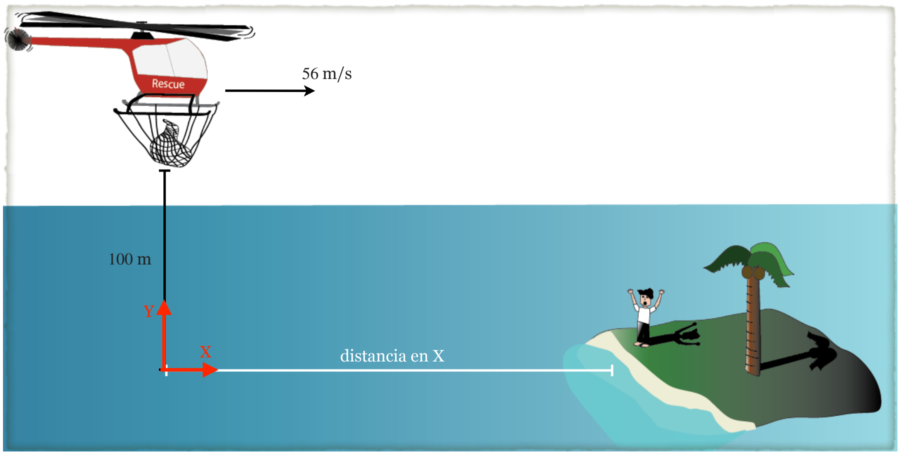
(b) La misma rapidez anterior pero ahora la altura es la mitad, es decir, 50 metros.

¿Qué nos piden?

(a) La distancia en X a la que está el helicóptero de la isla, para que la bolsa caiga allí.

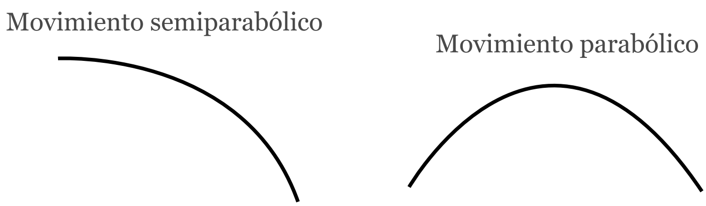
(b) La nueva distancia y la razón entre esta y la distancia d hallada en (a).

(a) Empecemos por situar un sistema de coordenadas. Vamos a poner un sistema que en X esté justo debajo del helicóptero cuando va a soltar la bolsa y que esté en el nivel del mar, así:



Debemos hallar la distancia en X desde la cual el helicóptero debe soltar la bolsa de modo que esta caiga en la isla. Empecemos por notar que así como las ventanas, los pilotos y todo lo que está unido o hace parte del helicóptero se mueve con la rapidez del helicóptero, la bolsa también. Por lo tanto, cuando el helicóptero libere la bolsa esta va a salir con una rapidez de 56 m/s. Además, es importante notar que la bolsa saldrá volando en dirección paralela al eje X, así que inicialmente sólo tendrá rapidez en X (después empezará a caer y tendrá rapidez en Y). Como en X la velocidad es constante, esta velocidad será la misma en cualquier punto del vuelo.

Antes de seguir, notemos que la bolsa sigue un movimiento semiparabólico, pues la bolsa sólo recorre media parábola mientras cae. Por supuesto, las ecuaciones del movimiento parabólico aplican en este caso ya que este es un *caso particular de movimiento parabólico*:



La distancia horizontal recorrida por la bolsa está dada por la rapidez en X por el tiempo de vuelo de la bolsa:

$$d_x = v_x t. \tag{1}$$

Conocemos la rapidez en X, que es 56 m/s, pero no conocemos el tiempo t_c de caída y sin este tiempo no podemos usar la ecuación (1).

Podemos hallar el tiempo t_c de caída usando la ecuación de movimiento en Y de la bolsa. La rapidez inicial en Y es cero, la aceleración es la aceleración de la gravedad y la posición inicial se puede escribir como $(100\ \mathrm{m})\hat{y}$ (pues la altura inicial es de 100 metros), así que la ecuación de movimiento en Y queda

$$y_f\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} + (100\ \mathrm{m})\hat{y}. \tag{2}$$

Para hallar el tiempo de caída, debemos usar el hecho que la posición final en Y de la bolsa es cero según nuestro sistema (la bolsa termina en el nivel del mar):

$$0\hat{y} = -\frac{1}{2}gt_c^2\hat{y} + (100\ \mathrm{m})\hat{y}. \tag{3}$$

Si usamos el hecho que la aceleración de la gravedad es $9.81\ \mathrm{m/s^2}$ y pasamos el término con el tiempo a la izquierda, tenemos

$$\frac{1}{2}(9.81\ \mathrm{m/s^2})t_c^2\hat{y} = (100\ \mathrm{m})\hat{y}. \tag{4}$$

Si aplicamos la regla de oro, multiplicamos por 2 y dividimos por la aceleración de la gravedad, obtenemos

$$t_c^2 = \frac{2(100\ \mathrm{m})}{(9.81\ \mathrm{m/s^2})}. \tag{5}$$

Así que el tiempo de caída es

$$t_c = \sqrt{\frac{2(100\ \mathrm{m})}{(9.81\ \mathrm{m/s^2})}} = 4.52\ \mathrm{s}. \tag{6}$$

Recordemos que en un caso de caída libre, el tiempo de caída está dado por

$$t = \sqrt{\frac{2(h_i - h_f)}{g}}.$$

Esta es precisamente la ecuación (6) para el tiempo de caída de la bolsa, donde la altura inicial es 100 metros y la altura final es cero. Esto no debería sorprendernos, pues el movimiento en Y de la bolsa es igual a un caso de caída libre ya que la bolsa es soltada con rapidez inicial cero en Y. Sin embargo, es interesante notar que este tiempo de vuelo es independiente de la velocidad X con la que el objeto es lanzado (en ninguna parte en la ecuación anterior aparece la velocidad en X). Es decir, ¡no importa qué tan rápido el helicóptero suelta la bolsa, en todos los casos la bolsa se demorará el mismo tiempo en caer! Muchas personas tienden a creer que cuanto mayor sea la velocidad en X con la que es lanzado un objeto, mayor será el tiempo de vuelo, pero acabamos de mostrar que esto no es así[5].

Nota 3.11. Tiempo de caída en un movimiento semiparabólico

Un movimiento semiparabólico es aquel en el que un objeto que está a cierta altura del piso sale disparado con cierta rapidez inicial en X y rapidez cero en Y.

Si la altura inicial en Y es h_i, el tiempo que le toma al objeto caer hasta otra altura menor h_f es igual que el tiempo de caída en una caída libre, y no depende de la velocidad en X: $t = \sqrt{\frac{2(h_i - h_f)}{g}}$.

Ahora que conocemos el tiempo de caída de la bolsa, podemos usar ese tiempo en la ecuación (1) para hallar la distancia en X a la que debe ser soltada la bolsa:

$$d_x = \underbrace{(56 \text{ m/s})}_{v_x}\underbrace{(4.52 \text{ s})}_{t_c} = 253.12 \text{ m}. \tag{7}$$

En palabras, para que caiga en la isla la bolsa debe ser soltada a 253.12 metros de distancia de la isla.

(b) Ahora el helicóptero lanza la bolsa desde una altura de 50 metros. Esto quiere decir que el tiempo de caída es diferente. Si usamos la ecuación del tiempo de caída (nota 3.11), para una altura inicial de 50 metros y una altura final de cero, obtenemos

$$t_c = \sqrt{\frac{2(50 \text{ m})}{(9.81 \text{ m/s}^2)}} = 3.19 \text{ s}. \tag{8}$$

Si usamos este tiempo en la ecuación de la distancia en X, tenemos

$$d_x = \underbrace{(56 \text{ m/s})}_{v_x}\underbrace{(3.19 \text{ s})}_{t} = 178.64 \text{ m}. \tag{9}$$

[5] Por supuesto, hubiéramos podido haber usado directamente la ecuación del tiempo de caída libre, pero eso hubiera podido confundir a ciertos lectores que creen que el tiempo de caída puede depender de la velocidad en X. Para fines pedagógicos es mejor derivar de nuevo la ecuación.

Así, el helicóptero tendrá que soltar la bolsa desde mucho más cerca a la isla que antes (antes habíamos hallado 253.12 metros). Esto tiene sentido, pues entre menor sea altura menos tiempo tiene la bolsa para volar, así que recorre una menor distancia en X.

Finalmente, la razón entre la nueva distancia y la anterior es

$$\frac{d_{2x}}{d_{1x}} = \frac{178.64 \text{ m}}{253.12 \text{ m}} = 0.71 \tag{10}$$

Problema de repaso 3.13.

Palabras clave: movimiento parabólico, velocidad, tiempo de vuelo, movimiento semiparabólico, distancia horizontal, tiempo de caída.

Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(1) En un movimiento parabólico el objeto no tiene velocidad constante.

(2) En todo movimiento parabólico, el tiempo de vuelo total es igual a dos veces el tiempo de altura máxima.

(3) Cuanto mayor sea la velocidad con la que es lanzado un objeto en X, mayor será el tiempo durante el cual el objeto vuela.

(4) En un movimiento parabólico, lo que sucede en Y es como lo que sucede en un caso de lanzamiento vertical.

(5) La distancia total recorrida en X en un movimiento parabólico no depende de lo que sucede en Y.

Solución

(1) Verdadero. El objeto tiene velocidad constante en X, pero velocidad variable en Y, pues tiene aceleración vertical g.

(2) Falso. El tiempo de vuelo total sólo es igual a dos veces el tiempo de altura máximo si la altura final es igual a la altura inicial del lanzamiento. Pero no siempre la altura inicial es igual a la final.

(3) Falso. El tiempo de vuelo en un movimiento parabólico o semiparabólico sólo depende de lo que sucede en Y, es decir, sólo depende de la altura inicial y de la rapidez inicial en Y.

(4) Verdadero. En un movimiento parabólico, lo que sucede en Y es exactamente lo que sucede en un caso de lanzamiento vertical.

(5) Falso. La distancia total recorrida depende de la rapidez inicial en X y de la rapidez inicial en Y (nota 3.10). Que esta distancia dependa de la rapidez inicial en Y no debe ser una sorpresa pues esta rapidez determina el tiempo de vuelo (nota 3.10).

Problema 3.14.

Palabras clave: ángulo de lanzamiento para máxima distancia, altura y velocidad de un proyectil en cierto punto de su trayectoria.

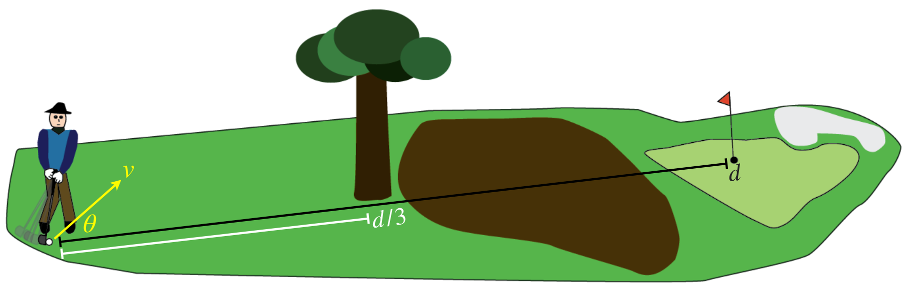
Un golfista realiza un excelente tiro al *green*. Si la magnitud de la velocidad con la que la bola salió impactada fue v y el ángulo que hizo con respecto al piso fue θ (ver dibujo),

(a) Escriba una expresión para hallar la distancia d desde el punto de impacto hasta el *green* en términos de la rapidez inicial y el ángulo θ. Con base en esa expresión, ¿puede decir cuál es el ángulo para el cual la distancia es mayor? (Pista: la siguiente identidad trigonométrica puede ser útil: $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$).

(b) Suponga que la bola pasó rozando la parte más alta de la copa de un árbol de altura desconocida que estaba a una distancia $d/3$ del punto de impacto. Escriba una ecuación para la altura del árbol en términos de la distancia d, v y θ.

(c) Dé una expresión para la velocidad en Y que tiene la bola cuando la bola pasa por el árbol, en términos del ángulo θ y la rapidez v, y diga si la bola está subiendo o bajando en ese momento —use el resultado del apartado (b)—.

Nota para todas las preguntas: Tenga en cuenta que el *green* está a la misma altura a la cual está la bola inicialmente.



Solución

¿Qué información nos dan?

a), (b) y (c) Conocemos la rapidez v con la que la bola sale impactada y el ángulo θ con el que parte la bola. El árbol está a una distancia $d/3$ del golfista y la bola pasa rozando el árbol. El *green* está a la misma altura a la cual está la bola inicialmente.

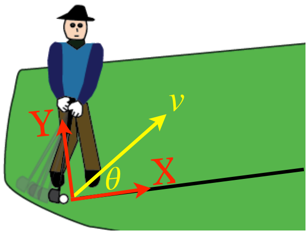
¿Qué nos piden?

(a) Una expresión para la distancia d recorrida por la bola en términos de la rapidez inicial y el ángulo θ. Con base en esta expresión, decir cuál es el ángulo con el cual se alcanza la máxima distancia.

(b) Una expresión para la altura del árbol si la bola pasó justo por encima de él, en términos de d, v y θ.

(c) Escribir una expresión en términos de v y θ para la velocidad Y de la bola, y decir si la bola está subiendo o cayendo cuando pasa por el árbol.

(a) Empezamos por escoger un sistema de coordenadas. Pongamos el sistema de coordenadas en la posición del impacto, desde el cual se miden las distancias al *green* y al árbol:

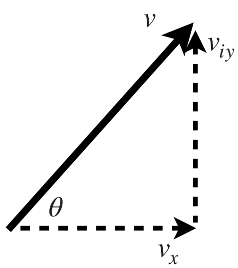


Ponemos el origen de nuestro sistema de coordenadas (en rojo) en el punto de impacto porque desde ese punto se miden las diferentes distancias del problema.

La distancia total en X que tiene que recorrer la bola para llegar al *green* se puede calcular usando el hecho de que en X distancia es rapidez por tiempo. Sin embargo, no conocemos el tiempo y, aunque lo podríamos hallar, es más sencillo usar lo que dice la siguiente ecuación explicada en la nota 3.10:

$$d = 2\frac{v_x v_{iy}}{g}. \tag{1}$$

En la respuesta no podemos dejar la distancia recorrida en términos de la rapidez inicial en Y y la rapidez en X sino en términos de la rapidez inicial v, pero podemos relacionar estas rapideces con la rapidez inicial así:



La rapidez inicial en Y y la rapidez en X se pueden obtener a partir de la rapidez total inicial y el ángulo θ si usamos el triángulo rectángulo dibujado.

De esta figura podemos ver que $v_x = v\cos\theta$ y $v_{iy} = v\sin\theta$. Si usamos estas rapideces en la ecuación (1), obtenemos:

$$d = \frac{2\overbrace{v\cos\theta}^{v_x}\overbrace{v\sin\theta}^{v_{iy}}}{g} = \frac{2v^2\cos\theta\sin\theta}{g}. \tag{2}$$

Esta ecuación nos dice la distancia recorrida por la bola en términos de la rapidez inicial y el ángulo inicial. Más aún, este resultado se puede escribir de forma más sencilla si tenemos en cuenta la identidad trigonométrica $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$. Como en la ecuación (2) tenemos $2\cos\theta\sin\theta$, entonces podemos escribir

$$d = \frac{v^2\sin(2\theta)}{g}. \tag{3}$$

Acabamos de derivar una nueva ecuación que nos permite calcular la distancia recorrida en X en función del ángulo inicial y la rapidez inicial cuando el objeto termina su vuelo a la misma altura a la que empieza.

Con base en el resultado hallado, debemos determinar cuál es el ángulo θ para que la distancia recorrida sea la mayor posible. El ángulo θ para que la distancia sea mayor es aquel ángulo que haga que $\sin(2\theta)$ sea mayor. El máximo valor que puede tomar la función seno es cuando el ángulo es 90 grados, en cuyo caso seno es 1. Así que $\sin 2\theta$ es máximo cuando el ángulo θ es 90 grados y esto ocurre cuando θ es 45 grados. Así que *la distancia recorrida por un objeto es máxima cuando el ángulo de disparo es de 45 grados*. Esto tiene sentido porque la distancia recorrida depende de la rapidez en X y la rapidez en X depende del coseno del ángulo. Además, la distancia recorrida depende de la rapidez en Y y la rapidez en Y depende del seno del ángulo. Así que necesitamos un equilibrio entre el coseno del ángulo y el seno del ángulo; un ángulo cerca a 90 grados hace que el seno sea cerca a 1 pero al mismo tiempo hace que coseno esté cerca a cero. Un ángulo muy pequeño, cerca a cero, hace que el coseno esté cerca a 1 pero el seno cerca a cero. Resulta que el equilibrio se da precisamente cuando el ángulo es 45 grados, en cuyo caso el coseno y el seno dan lo mismo ($\sqrt{2}/2$).

Nota 3.12. Ángulo de lanzamiento para la distancia máxima

La distancia total recorrida en X si conocemos el ángulo inicial de lanzamiento, la rapidez total inicial, y si el objeto termina a la misma altura a la cual empezó es $d_x = \frac{2v^2\cos\theta\sin\theta}{g} = \frac{v^2\sin(2\theta)}{g}$.

Esta distancia es máxima cuando θ (el ángulo de lanzamiento) es 45 grados.

(b) Para hallar la altura del árbol debemos tener en cuenta que la bola pasa justo por encima de este, así que podemos encontrar la altura del árbol si encontramos la altura de la bola cuando pasa por allí. Para hallar esta altura de la bola necesitamos usar la ecuación de movimiento en Y de la bola.

En Y la bola tiene aceleración negativa de la gravedad, posición inicial cero (pues el origen está en el piso) y rapidez inicial en Y igual a $v \sin\theta$ —como dijimos en (a)—:

$$y_f \hat{y} = -\frac{1}{2} g t^2 \hat{y} + \underbrace{(v \sin\theta)}_{v_{iy}} t \hat{y}. \tag{4}$$

Ahora debemos hallar el tiempo en el cual la bola pasa por el árbol. Esto lo podemos hacer si tenemos en cuenta que el árbol está a una distancia de $d/3$ y que la rapidez en X es $v_x = v \cos\theta$. Como en X distancia es rapidez por tiempo, tenemos

$$d/3 = \underbrace{(v \cos\theta)}_{v_x} t_a, \tag{5}$$

donde hemos llamado t_a al tiempo en el cual la bola llega hasta el árbol. Si despejamos ese tiempo, tenemos

$$\frac{d/3}{v \cos\theta} = t_a. \tag{6}$$

Si ahora usamos este tiempo en la ecuación (4), podemos obtener la posición en Y a la que pasa la bola cuando está encima del árbol:

$$y_f \hat{y} = -\frac{1}{2} g \underbrace{\left(\frac{d/3}{v \cos\theta}\right)}_{t_a}^2 \hat{y} + (v \sin\theta) \underbrace{\left(\frac{d/3}{v \cos\theta}\right)}_{t_a} \hat{y}. \tag{7}$$

Simplificando un poco, esto da

$$y_f \hat{y} = -\frac{1}{18} g \left(\frac{d^2}{v^2 \cos^2\theta}\right) \hat{y} + (\sin\theta) \left(\frac{d/3}{\cos\theta}\right) \hat{y}. \tag{8}$$

Si usamos que $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ y aplicamos valor absoluto (pues la altura es la magnitud de la posición así que debemos garantizar que esta altura sea positiva[6]), obtenemos

$$y_f = \left\| -\frac{1}{18} g \left(\frac{d^2}{v^2 \cos^2\theta}\right) \hat{y} + \frac{d}{3} \tan\theta \hat{y} \right\|. \tag{9}$$

[6] En este problema tendría sentido ignorar el valor absoluto, pues es de esperarse que la altura dé positiva. Sin embargo, no siempre es así, y hay problemas en los que la altura puede ser negativa. Así que es mejor ser un poco más rigurosos y acostumbrarse a usar el valor absoluto incluso en problemas que no lo requieren.

La anterior es la altura de la bola cuando ha recorrido la distancia X a la que está el árbol. Es decir, para que la bola no se choque con el árbol, el árbol debe medir máximo lo que dice la ecuación (9).

(c) Como en Y la aceleración es constante, la velocidad Y de la bola está dada por la ecuación

$$\vec{v}_y = \vec{g}t + \vec{v}_{iy}\text{[7]}. \tag{10}$$

Si usamos el hecho de que el tiempo en el cual pasa la bola por el árbol está dado por la ecuación (6), que la dirección de la gravedad es negativa y que la velocidad inicial en Y tiene magnitud $v_{iy} = v \sin\theta$ y apunta en la dirección positiva de Y, obtenemos

$$\vec{v}_y = -g\underbrace{\left(\frac{d/3}{v\cos\theta}\right)}_{t_a}\hat{y} + \underbrace{v\sin\theta}_{v_{iy}}\hat{y}. \tag{11}$$

Esto se puede expresar como

$$\vec{v}_y = \left(-\frac{gd}{3v\cos\theta} + v\sin\theta\right)\hat{y}. \tag{12}$$

Pero en el enunciado nos piden que la expresión de la velocidad en Y sólo pueda quedar en términos del ángulo θ y la rapidez inicial v, y la ecuación (12) hace referencia a la distancia d. En la sección (a) obtuvimos una expresión para la distancia en términos de θ y v —la ecuación (2)—. Así que podemos usar la ecuación (2) en la ecuación (12):

$$\vec{v}_y = \left(-\frac{g\overbrace{\left(\frac{2v^2\cos\theta\sin\theta}{g}\right)}^{d}}{3v\cos\theta} + v\sin\theta\right)\hat{y}. \tag{13}$$

(Notemos que no usamos la ecuación (3) porque es más fácil simplificar si todo queda en términos de θ en vez de 2θ). Si simplificamos algunos términos en el primer término derecho, esto da

$$\vec{v}_y = \left(-\frac{2v\sin\theta}{3} + v\sin\theta\right)\hat{y}. \tag{14}$$

[7] En vez de usar la ecuación (10) podemos obtener la velocidad en Y usando el hecho de que la rapidez en Y está dada por $v_{iy}^2 = v_{iy}^2 + 2a(h_f - h_i)$, donde a es $-g$, la altura final es la altura del árbol hallada en (a) y la altura inicial es cero.

Finalmente, si sumamos, esto da

$$\vec{v}_y = \left(\frac{v}{3}\sin\theta\right)\hat{y}. \tag{15}$$

Notemos que esta expresión sólo puede ser negativa si $\sin\theta$ es negativo, pero $\sin\theta$ no puede ser negativo porque θ está entre cero y 90 grados (si $\sin\theta$ fuera negativo, entonces la velocidad inicial en Y sería negativa, lo cual no puede pasar porque la bola no se está enterrando en el piso al ser impactada). Así, esta expresión tiene que ser positiva, es decir, *la velocidad Y de la bola cuando pasa por el árbol es positiva*. Por lo tanto, *la bola está subiendo*.

Hay otra forma sencilla de explicar por qué la bola tiene que estar subiendo. Si la altura inicial y final es la misma, un objeto alcanza la altura máxima en la mitad del tiempo de vuelo (nota 3.10), y en la mitad del tiempo de vuelo la bola va por la mitad del recorrido en X. La mitad del recorrido en X es $d/2$ pero el árbol está a una distancia de $d/3$. Es decir, cuando la bola pasa por el árbol todavía no ha llegado a su altura máxima, así que todavía debe de estar subiendo.

Problema 3.15.

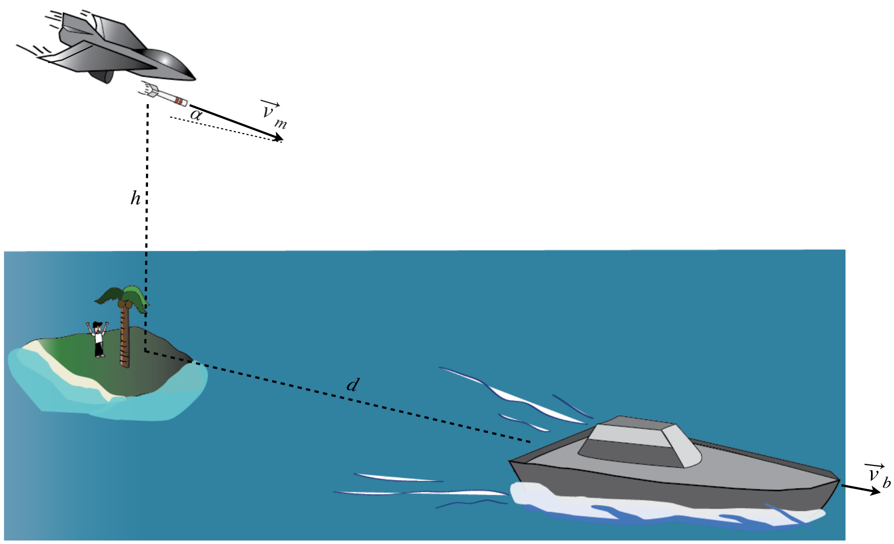
Palabras clave: encuentro de un proyectil con un objeto con velocidad constante, ángulo de lanzamiento.

Una persona en una isla ve cómo un avión de guerra le dispara un misil a un barco que se mueve con velocidad constante. Suponga que el misil da en el objetivo en el tiempo t_1. Además, la magnitud de la velocidad del barco, medida con respecto a la isla, es v_b. La altura inicial del misil es h y la distancia entre la isla y el barco en el momento del disparo es d. Suponga que el misil no tiene propulsión, así que sigue un movimiento parabólico.

(a) Escriba una expresión para el ángulo de lanzamiento α indicado en la figura para que el misil impacte el barco. Note que el ángulo es medido con respecto a una línea paralela al mar.

(b) Escriba una expresión para la magnitud v_m de la velocidad inicial del misil.

Nota: desprecie la altura del barco.



Solución

¿Qué información nos dan?

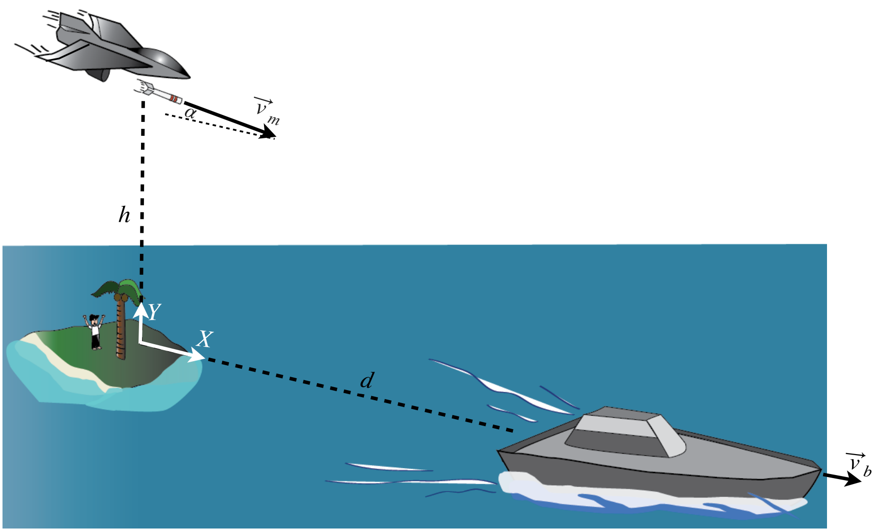
(a) y (b) La rapidez v_b del barco, la altura inicial h desde la cual es disparado el misil, el tiempo t_1 de vuelo del misil y la distancia d entre el barco y la isla cuando el misil es disparado. Debemos despreciar la altura del barco.

¿Qué nos piden?

(a) Una expresión para el ángulo de lanzamiento α indicado en la figura para que el misil impacte el barco.

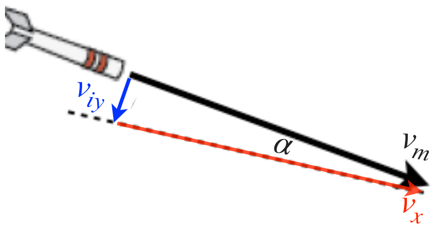
(b) Una expresión para la magnitud v_m de la velocidad inicial del misil.

(a) Como es costumbre, debemos escoger un sistema de coordenadas. El sistema más conveniente aquí es uno situado en la isla, desde el cual se mide la distancia al barco, la altura del misil y cuyo eje X apunte en la dirección de movimiento del barco y del misil:



Debemos hallar una expresión para el ángulo de disparo de modo que el misil impacte el barco, así que debemos buscar ecuaciones en las que aparezca este ángulo.

Notemos que las velocidades iniciales en Y y en X dependen del ángulo, como se aprecia a continuación:



Descomponemos la velocidad inicial del misil en sus componentes. La magnitud de la componente en Y es v_{iy} y la magnitud de la componente en X es v_x.

Notemos que la línea punteada sobre la que se mide el ángulo α (sobre la que está la velocidad X) es paralela al eje X. En este dibujo se puede ver claramente que el cateto adyacente al ángulo α es v_x. Por lo tanto,

$$v_x = v_m \cos\alpha. \tag{1}$$

Por su parte, en el mismo dibujo podemos ver que la magnitud de la velocidad inicial en Y es

$$v_{iy} = v_m \sin\alpha. \tag{2}$$

Estas dos ecuaciones relacionan el ángulo α que buscamos con v_x, v_{iy} y v_m. El problema es que no conocemos ninguna de estas variables, así que debemos usar más información.

Nos dicen que el misil impacta el barco en el tiempo t_1. Para que el misil impacte el barco se debe cumplir la condición de que *cuando el misil llegue al mar su posición en X debe ser la misma que la posición X del barco*. Escribamos entonces las ecuaciones X de movimiento del barco y del misil.

La posición X del barco está dada por la ecuación de un movimiento con velocidad uniforme. En el caso presente la posición inicial del barco es $d\hat{x}$, pues inicialmente el barco está a una distancia d en la dirección positiva de X. Además, la velocidad del barco es de magnitud v_b y apunta en la dirección positiva de X. Por lo tanto, la posición en función del tiempo del barco es

$$x_v\hat{x} = v_b t\hat{x} + d\hat{x}. \tag{3}$$

Ahora escribamos la ecuación en X del misil. La posición X inicial del misil es cero según el sistema usado. No conocemos la velocidad X del misil aunque sabemos que debe ser positiva y constante (es constante porque el misil sigue un movimiento parabólico). Así, podemos escribir la ecuación de movimiento en dirección X de esta forma:

$$x_m\hat{x} = v_{mx}t\hat{x}. \tag{4}$$

La velocidad en X del misil está dada por la ecuación (1), así que la ecuación (4) queda

$$x_m\hat{x} = \underbrace{v_m \cos\alpha}_{v_x} t\hat{x}. \tag{5}$$

Como habíamos dicho, para que el misil impacte el barco las posiciones en X deben coincidir. Estas posiciones coinciden en el tiempo t_1 que es cuando el misil impacta el barco. Por lo tanto, $x_m\hat{x}$ tiene que ser igual a $x_b\hat{x}$ en el tiempo t_1. Así que podemos igualar las ecuaciones (3) y (5) en dicho tiempo:

$$\underbrace{v_b t_1\hat{x} + d\hat{x}}_{x_b\hat{x}} = \underbrace{(v_m\cos\alpha)t_1\,\hat{x}}_{x_m\hat{x}}. \tag{6}$$

Aquí no conocemos v_m y α. Por ahora, despejemos $v_m\cos\alpha$ dividiendo por el tiempo t_1 y apliquemos la regla de oro:

$$v_b + \frac{d}{t_1} = v_m\cos\alpha. \tag{7}$$

Queremos hallar el ángulo α pero no podemos hacerlo sólo con esta ecuación porque no conocemos v_m, así que debemos buscar más ecuaciones. Por ejemplo, no hemos usado la ecuación de movimiento en Y.

En Y el misil tiene aceleración negativa y tiene velocidad inicial también negativa porque sale disparado hacia abajo. Además, según el sistema escogido la posición inicial en Y es $h\hat{y}$. Así que la ecuación de movimiento en Y del misil es de esta forma:

$$y\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} - v_{iy}t\hat{y} + h\hat{y}. \tag{8}$$

Podemos usar la ecuación (2) para escribir la velocidad inicial en Y del misil en términos de α y v_m:

$$y\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} - \underbrace{v_m\sin\alpha}_{v_{iy}} t\hat{y} + h\hat{y}. \tag{9}$$

Cuando ha pasado un tiempo t_1, la posición Y del misil es $0\hat{y}$, pues en ese momento el misil impacta el barco que está sobre el nivel del mar (altura cero):

$$0\hat{y} = -\frac{1}{2}gt_1^2\hat{y} - v_m\sin\alpha\, t_1\hat{y} + h\hat{y}. \tag{10}$$

Si pasamos el término $v_m \sin\alpha$ al lado izquierdo y aplicamos la regla de oro, obtenemos

$$v_m \sin\alpha\, t_1 = -\frac{1}{2} g t_1^2 + h. \tag{11}$$

Si dividimos todo por t_1, esto da

$$v_m \sin\alpha = -\frac{1}{2} g t_1 + \frac{h}{t_1}. \tag{12}$$

De aquí tampoco podemos despejar α porque no conocemos v_m. Pero de la ecuación (7) podemos despejar v_m en términos de $\cos\alpha$ y usar ese resultado en la ecuación (12) —también podemos despejar v_m de la ecuación (12) en términos de $\sin\theta$ y usar eso en la ecuación (7)—. Si dividimos la ecuación (7) por $\cos\alpha$, tenemos

$$\frac{1}{\cos\alpha}\left(v_b + \frac{d}{t_1}\right) = v_m. \tag{13}$$

Ahora remplacemos esto en la ecuación (12):

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\cos\alpha}\left(v_b + \frac{d}{t_1}\right)\right)}_{v_m} \sin\alpha = -\frac{1}{2} g t_1 + \frac{h}{t_1}. \tag{14}$$

Antes de continuar, notemos que $\sin\alpha$ está en el numerador del término izquierdo, mientras que $\cos\alpha$ está en el denominador, y eso es lo mismo que $\tan\alpha$:

$$\left(v_b + \frac{d}{t_1}\right)\tan\alpha = -\frac{1}{2} g t_1 + \frac{h}{t_1}. \tag{15}$$

Podemos dejar $\tan\alpha$ sólo a la izquierda dividiendo por el término entre paréntesis que multiplica a $\tan\alpha$:

$$\tan\alpha = \frac{-\frac{1}{2} g t_1 + \frac{h}{t_1}}{\left(v_b + \frac{d}{t_1}\right)}. \tag{16}$$

Esta ya es una expresión que nos permite hallar α en términos de variables conocidas. Pero antes podemos simplificar un poco más el término derecho si sumamos los fraccionarios en el numerador y en el denominador:

$$\tan\alpha = \frac{\dfrac{-\frac{1}{2} g t_1^2 + h}{t_1}}{\left(\dfrac{v_b t_1 + d}{t_1}\right)}. \tag{17}$$

Si cambiamos 1/2 por 0.5 y simplificamos t_1, esto queda

$$\tan\alpha = -\frac{0.5gt_1^2 + h}{(v_b t_1 + d)}. \tag{18}$$

Finalmente, usando arcotangente, podemos encontrar la expresión para α:

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{0.5gt^2 + h}{v_b t + d}\right). \tag{19}$$

(b) Ahora que tenemos una expresión para α es sencillo hallar una expresión para la magnitud v_m de la velocidad inicial del misil. Por ejemplo, la ecuación (13) nos dice v_m en términos de coseno de α. Si usamos el hecho de que α está dado por la ecuación (19), entonces la ecuación (13) queda[8]

$$\frac{1}{\cos\underbrace{\left(\arctan\left(-\frac{0.5gt^2 + h}{v_b t + d}\right)\right)}_{\alpha}}\left(v_b + \frac{d}{t_1}\right) = v_m. \tag{20}$$

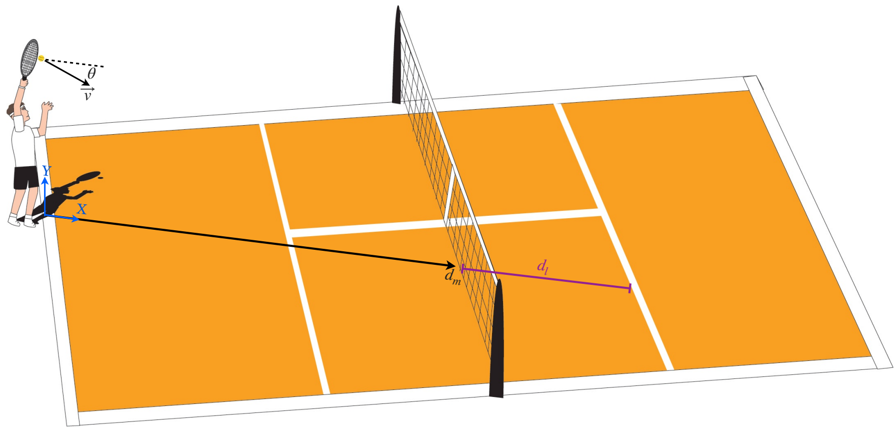
[8] Otra forma de buscar una expresión para v_m es con la ecuación $v_m = \sqrt{v_x^2 + v_{iy}^2}$. Al seguir esta ruta el lector va a llegar a una ecuación que no es evidentemente equivalente a (20), pero si reemplaza valores numéricos puede comprobar que sí lo son.

Problema 3.16.

Palabras clave: distancia recorrida en caso de proyectil disparado hacia abajo, altura después de cierto tiempo del recorrido.

Un tenista está realizando un servicio como se indica en el dibujo. Tenemos la siguiente información: el ángulo θ que se mide entre el vector de velocidad $\vec{v}$ de la bola y una línea paralela al eje X es 4°. La magnitud de la velocidad inicial v de la bola es de 36 metros por segundo. La distancia d_m entre el tenista y la malla medida a lo largo del eje X de la figura es de 12 metros. La altura de la malla es 1 metro. Además, la distancia d_l (en morado) es de 7 metros. Si el tenista impacta la bola a una altura inicial h de 2.8 metros y si suponemos que la trayectoria que sigue la bola se mantendrá alineada con el eje X, ¿será un servicio válido? (El servicio es válido si la bola cae antes de que se termine la línea en morado, d_l). Use el sistema de coordenadas en azul indicado en el dibujo.

Nota: haga todo en términos de las variables conocidas d_m, h, d_l, v y θ, no con números. Sólo ponga los números al final.



Solución

¿Qué información nos dan?

La magnitud de la velocidad inicial de la bola es de 36 metros por segundo. El ángulo que se forma entre la velocidad inicial y una línea paralela al eje X es $\theta = 4°$. La distancia entre la malla y el tenista es $d_m = 12$ m y va a lo largo del eje X. La altura de la malla es de 1 m, la distancia es d_l es 7 m. La altura inicial es 2.8 m. La bola se mueve a lo largo de X. Debemos usar el sistema de coordenadas indicado.

¿Qué nos piden?

Debemos determinar si el servicio es válido. Para que sea válido, la bola debe superar la malla y caer dentro de los límites definidos por la distancia d_l. Nos piden hacer todo en términos de las variables conocidas d_m, h, d_l, v y θ y sólo poner los números al final.

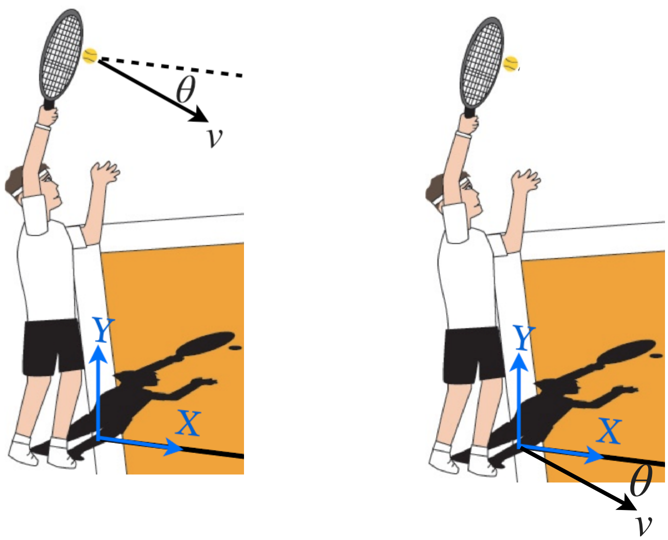
Esta vez no tenemos que empezar por escoger un sistema de coordenadas porque en el problema nos dan uno. Para determinar si el servicio es válido debemos verificar dos cosas: primero, que cuando la bola llegue a donde está la malla tenga una altura de más de un metro para que pueda superar la malla. Y segundo, si la bola supera la malla, debe caer dentro de la distancia permitida d_l.

Para saber si la bola supera la malla debemos determinar la posición en Y para el tiempo en el cual la bola ha recorrido la distancia d_m. Como la bola sale disparada hacia abajo, en Y la bola tiene cierta rapidez inicial negativa (desconocida). Además, tiene aceleración g negativa y tiene posición inicial $h\hat{y}$ (esta última es conocida). Podemos escribir la ecuación en Y de la bola así:

$$y\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} - v_{iy}t\hat{y} + h\hat{y}. \qquad (1)$$

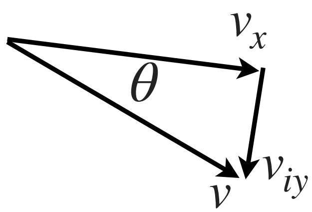
Para hallar la velocidad inicial en Y descompongamos el vector de la velocidad inicial, y para hacer esto es conveniente poner el vector a lo largo del eje X:

Situación inicial.



Trasladamos el vector $\vec{v}$ sin cambiar su dirección, de modo que su cola se ubique en el origen del sistema de coordenadas.

Hemos trasladado el vector de velocidad al origen de nuestro sistema para ver de forma más clara el triángulo que forma el vector con el eje X cuando lo descomponemos[9]:



Descomponemos el vector en v_x (magnitud de la componente X) y v_{iy} (magnitud de la componente inicial en Y).

En este triángulo se nota que $v_x = v\cos\theta$ y $v_{iy} = v\sin\theta$. Si usamos esta información en la ecuación (1), obtenemos

$$y\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} - (\underbrace{v\sin\theta}_{v_{iy}})t\hat{y} + h\hat{y}. \tag{2}$$

Para saber si la bola superó la malla nos interesa saber la posición en Y de la bola en el tiempo en el que la bola pasa por la malla. Para hallar el tiempo que le toma a la bola llegar a la malla debemos usar la ecuación de movimiento en X.

En X la velocidad es constante, así que distancia es rapidez por tiempo. La distancia en X que tiene que recorrer la bola es d_m y la rapidez en X es $v_x = v\cos\theta$. Por lo tanto, tenemos

$$d_m = \underbrace{(v\cos\theta)}_{v_x}\, t_m, \tag{3}$$

donde hemos llamado t_m al tiempo que le toma a la bola llegar hasta la malla. Si despejamos el tiempo, tenemos

$$\frac{d_m}{(v\cos\theta)} = t_m. \tag{4}$$

[9] En el capítulo de vectores aprendimos que si trasladamos un vector sin cambiar su dirección el vector no cambia.

Ahora debemos usar este tiempo en la ecuación (2) para encontrar la posición en Y para el momento en que la bola pasa por la malla:

$$y_m\hat{y} = -\frac{1}{2}g\underbrace{\left(\frac{d_m}{(v\cos\theta)}\right)^2}_{t_m}\hat{y} - v\sin\theta\underbrace{\left(\frac{d_m}{(v\cos\theta)}\right)}_{t_m}\hat{y} + h\hat{y}, \tag{5}$$

donde y_m es la altura de la bola cuando pasa por la malla. Si aplicamos la regla de oro y tenemos en cuenta que el segundo término del lado derecho tiene $\sin\theta$ sobre $\cos\theta$ que es igual a $\tan\theta$, esto queda

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{d_m}{v\cos\theta}\right)^2 - d_m\tan\theta + h. \tag{6}$$

Esta es la expresión de la altura de la bola cuando pasa por la malla en término de variables conocidas. Ahora sí podemos usar los valores numéricos de cada variable para saber si la bola pasa la malla.

$$y = -\frac{1}{2}(9.81\ \text{m/s}^2)\left(\frac{\overbrace{12\ \text{m}}^{h}}{\underbrace{(36\ \text{m/s})}_{v}(\cos\underbrace{4^\circ}_{\theta})}\right)^2 - \underbrace{(12\ \text{m})}_{d_m}\tan\underbrace{4^\circ}_{\theta} + \underbrace{2.8\ \text{m}}_{h} = 1.41\ \text{m}. \tag{7}$$

La altura de la malla es de 1 metro, así que la bola sí pasa la malla.

Ahora debemos determinar dónde cae la bola para saber si cae dentro de la distancia reglamentaria (este no es un caso en el cual la altura inicial sea igual a la final, así que no podemos usar la ecuación de distancia en X que vimos en la nota 3.10 o en la nota 3.12). En X distancia es rapidez por tiempo, así que en X, cuando la bola cae, tenemos

$$d_x = (v\cos\theta)t_c, \tag{8}$$

donde d_x es la distancia en X donde cae la bola y t_c es el tiempo en el cual cae la bola. Lo único desconocido aquí es t_c.

Podemos hallar t_c usando la ecuación de movimiento en Y, pues cuando la bola cae la posición en Y es $0\hat{y}$. Si usamos esto en la ecuación (2), obtenemos

$$0\hat{y} = -\frac{1}{2}gt_c^2\hat{y} - (v\sin\theta)t_c\hat{y} + h\hat{y}. \tag{9}$$

Si aplicamos la regla de oro, esto queda

$$0 = -\frac{1}{2}gt_c^2 - (v\sin\theta)t_c + h. \tag{10}$$

Notemos que esta es una ecuación cuadrática en el tiempo. Si usamos los valores numéricos, obtenemos

$$0 = -\frac{1}{2}(9.81 \text{ m/s}^2)t_c^2 - (36 \text{ m/s})(\sin 4°)t_c + 2.8 \text{ m}. \tag{11}$$

Como la ecuación cuadrática es de la forma $a^2x + bx + c = 0$, podemos hacer la siguiente identificación: el término a que acompaña la variable al cuadrado (t_c^2 en nuestro caso) es $-1/2(9.81 \text{ m/s}^2)$. El término b que acompaña la variable a la primera potencia (t_c) es $-(36 \text{ m/s})(\sin 4°)$. Y el término independiente c es 2.8 m. Por lo tanto, la solución de esta ecuación es

$$t_c = \frac{(36 \text{ m/s})(\sin 4°) \pm \sqrt{\left(-(36 \text{ m/s})(\sin 4°)\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}(9.81 \text{ m/s}^2)\right)(2.8 \text{ m})}}{2\left(-\frac{1}{2}(9.81 \text{ m/s}^2)\right)}. \tag{12}$$

Esto nos da dos soluciones:

$$t_c = -1.05 \text{ s}, \qquad t_c = 0.54 \text{ s}. \tag{13}$$

La primera solución no tiene sentido porque nos da un tiempo negativo, así que el tiempo correcto tiene que ser el segundo. Si usamos este tiempo en la ecuación (8) que nos da la distancia recorrida en X, y teniendo en cuenta que θ es 4 grados y v es 36 metros por segundo, hallamos que la distancia en X es

$$d_x = (36 \text{ m/s})(\cos 4°)(\underbrace{0.54 \text{ s}}_{t_c}) = 19.39 \text{ m}. \tag{14}$$

¿Es válido el servicio? Notemos en el dibujo inicial que el servicio sólo es válido si cae dentro de los límites de la distancia d_l. La mínima distancia válida es cuando la bola cae justo en el comienzo de d_l (es decir, justo al final de d_m). En ese caso, la distancia recorrida por la bola en X es 12 metros. Por otro lado, la máxima distancia a la que puede caer la bola para un servicio válido es $d_m + d_l$, que es 12 metros más 7 metros, es decir, 19 metros. Pero ya calculamos que la bola recorre 19.39 metros. Por lo tanto, *el servicio no es válido*.

Problema de repaso 3.17.

Palabras clave: altura máxima, ángulo de lanzamiento, distancia máxima horizontal, velocidad inicial en Y, tiempo de vuelo.

Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(1) Si conoce el ángulo de lanzamiento y la velocidad total inicial de lanzamiento, puede hallar la altura máxima alcanzada por el objeto con respecto al nivel del mar.

(2) Cuanto mayor sea el ángulo inicial de lanzamiento, más distancia X recorre el objeto.

(3) Si la velocidad de lanzamiento de un objeto A es de mayor magnitud que la velocidad hacia arriba en un lanzamiento vertical de un objeto B, entonces sabemos que A va a volar durante más tiempo.

(4) Si un objeto lleva volando un tiempo dado por $v_{iy}/2g$, donde v_{iy} es la rapidez inicial en Y, podemos estar seguros de que el objeto no ha alcanzado la altura máxima.

(5) Si nos dicen la altura inicial de un lanzamiento parabólico, y nos dicen el tiempo de altura máxima, podemos hallar la altura del objeto en cualquier otro tiempo que nos pidan.

Solución

(1) Falso. Además de la rapidez inicial en Y, que sí podemos hallar con la velocidad inicial y el ángulo, necesitamos conocer la altura inicial del lanzamiento. Lo que sí podemos hallar con estos datos es la *diferencia* entre la altura máxima y la inicial.

(2) Falso. La mayor distancia en X se obtiene cuando el ángulo es de 45 grados (nota 3.12). Un ángulo mayor a 45 grados da una distancia menor en X.

(3) Falso. El tiempo de vuelo de A no sólo depende de la magnitud de la velocidad inicial sino también del ángulo de lanzamiento, y este ángulo no lo conocemos (si el ángulo es muy pequeño o cero, entonces el objeto no va a volar mucho).

(4) Verdadero. El tiempo de altura máxima está dado por v_{iy}/g, y $v_{iy}/2g$ es menor que v_{iy}/g así que en el tiempo $v_{iy}/2g$ el objeto no ha alcanzado aún el punto de altura máxima.

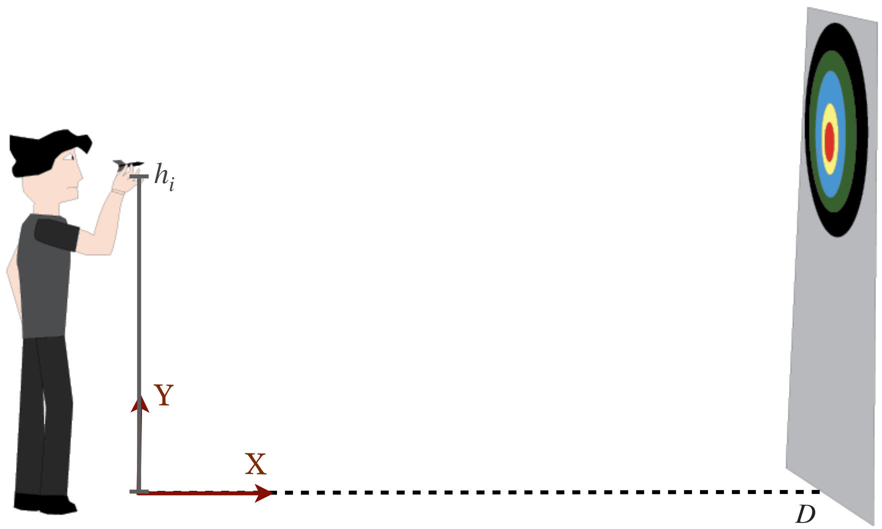
(5) Verdadero. Para hallar la altura del objeto en cualquier momento necesitamos utilizar la ecuación Y del objeto, que es $\vec{y} = (1/2)\vec{g}t^2 + \vec{v}_{iy}t + \vec{y}_i$. En este

caso conocemos la altura inicial, y también podemos hallar la rapidez inicial en Y porque nos dan el tiempo de altura máxima. Con este tiempo podemos despejar v_{iy} usando $v_{iy}/g = t_m$.

Problema 3.18.

Palabras clave: distancia final en Y entre dos puntos, altura máxima, distancia horizontal, tiempo de vuelo.

Camilo va a lanzar un dardo, como se ve en el dibujo. Nos dicen que la altura máxima del trayecto medida con respecto al piso es h_m, y esta altura ocurre cuando el dardo ha recorrido una distancia horizontal d_m. Además, conocemos h_i, que es la altura inicial del dardo medida con respecto al piso, y conocemos la distancia horizontal D entre la posición inicial del dardo y el tablero. Si el centro del blanco del tablero (círculo rojo) está a una altura h_b con respecto al piso, dé una expresión en término de las variables conocidas para la distancia vertical a la que cae el dardo con respecto al centro del blanco. Haga esto usando el sistema de coordenadas indicado en el dibujo.



Solución

¿Qué información nos dan?

La altura inicial h_i del lanzamiento, la distancia D en X entre el punto inicial del dardo y el tablero, la distancia d_m en X entre el punto de altura máximo y la posición inicial. También tenemos la altura del centro del blanco h_b, y la altura máxima del trayecto h_m, ambas medidas con respecto al piso. Debemos usar el sistema de coordenadas indicado.

¿Qué nos piden?

Debemos hallar una expresión para la distancia a lo largo del eje Y a la que cae el dardo del centro del blanco.

(a) No debemos empezar por escoger un sistema de coordenadas porque nos dicen cuál sistema usar. Para hallar una expresión para la distancia a la cual cae el dardo del centro del blanco (círculo rojo), empecemos por recordar que la distancia entre dos posiciones cualesquiera es la magnitud de la resta vectorial entre las posiciones (nota 2.19). En nuestro caso, la distancia que buscamos es aquella entre la posición del blanco y la posición de impacto del dardo.

Como el blanco está a una altura h_b conocida, su posición Y según nuestro sistema es $h_b\hat{y}$. Pero no conocemos la posición Y del dardo cuando llega al tablero, que vamos a llamar $y_f\hat{y}$. La distancia que queremos hallar está dada por

$$D_y = \left\| h_b\hat{y} - y_f\hat{y} \right\| \tag{1}$$

Notemos que en este problema no sabemos si el dardo cae arriba o abajo del blanco, pues no nos dan datos numéricos. Si cae arriba, entonces la resta entre $h_b\hat{y}$ y $y_f\hat{y}$ será negativa porque $y_f\hat{y}$ será mayor que $h_b\hat{y}$. Esta es la razón por la cual, para que la distancia entre $h_b\hat{y}$ y $y_f\hat{y}$ sea positiva, debemos usar el valor absoluto en la ecuación (1).

Para hallar $y_f\hat{y}$ y poder usar la ecuación (1), empecemos por plantear la ecuación de movimiento en Y del objeto. En Y el dardo tiene un movimiento con aceleración g negativa, velocidad inicial en Y $v_{iy}\hat{y}$ desconocida y positiva (sabemos que es positiva porque el dardo sube hasta cierta altura máxima), y altura inicial h_i conocida y positiva. Teniendo en cuenta esto, la ecuación de movimiento en Y es de la siguiente forma:

$$y\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} + v_{iy}t\hat{y} + h_i\hat{y}. \tag{2}$$

De aquí no conocemos $v_{iy}\hat{y}$. Además, como queremos hallar la posición en Y cuando el dardo llega al tablero, necesitamos hallar el tiempo que le toma al dardo llegar al tablero. Para hallar este tiempo y $v_{iy}\hat{y}$ podemos usar la información sobre la altura máxima alcanzada por el dardo. Recordemos que la altura máxima de un objeto en lanzamiento vertical o en movimiento parabólico está siempre dada por (nota 3.10)

$$y_m = \frac{1}{2}\left(\frac{v_{iy}^2}{g}\right) + y_i. \tag{3}$$

En nuestro caso conocemos la altura máxima que es h_m y la altura inicial que es h_i. Por lo tanto, tenemos

$$\underbrace{h_m}_{y_m} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_{iy}^2}{g}\right) + \underbrace{h_i}_{y_i}. \tag{4}$$

Si pasamos h_i al lado izquierdo de la igualdad, y después multiplicamos por $2g$, esto queda

$$2g(h_m - h_i) = v_{iy}^2. \tag{5}$$

Finalmente, sacando raíz cuadrada, hallamos v_{iy}:

$$\sqrt{2g(h_m - h_i)} = v_{iy}. \tag{6}$$

Aún nos falta hallar el tiempo que le toma al dardo llegar al tablero. Si encontramos la rapidez en X y usamos el hecho de que en X distancia es rapidez por tiempo, podemos hallar el tiempo porque también conocemos la distancia D recorrida en X. Para hallar la rapidez en X podemos usar el hecho de que hasta el punto de altura máximo la distancia en X es d_m, así que en X tenemos

$$d_m = v_x t_m, \tag{7}$$

donde t_m es el tiempo de altura máximo. El tiempo de altura máximo es fácil de hallar porque ya conocemos la rapidez inicial en Y, así que podemos usar (nota 3.10)

$$\frac{v_{iy}}{g} = t_m. \tag{8}$$

Si usamos el hecho de que v_{iy} está dado por la ecuación (6), la ecuación (8) queda

$$\frac{\overbrace{\sqrt{2g(h_m - h_i)}}^{v_{iy}}}{g} = t_m. \tag{9}$$

Si metemos la g del denominador dentro de la raíz (hay que meterla como g^2), y simplificamos con la otra g, esto nos da

$$\sqrt{\frac{2(h_m - h_i)}{g}} = t_m. \tag{10}$$

Como el lector tal vez recuerde, esta es la ecuación del tiempo de caída en un movimiento en caída libre. Como el tiempo de subida es igual al tiempo de caída, esto no es una sorpresa (nota 3.9). Si usamos el tiempo dado por la ecuación (10) en la ecuación (7), tenemos

$$d_m = v_x \underbrace{\left(\sqrt{\frac{2(h_m - h_i)}{g}}\right)}_{t_m}. \tag{11}$$

Si dividimos por el término de la raíz, esto queda

$$\frac{d_m}{\sqrt{\frac{2(h_m-h_i)}{g}}} = v_x. \tag{12}$$

Ahora que tenemos la rapidez en X, podemos hallar el tiempo que le toma al dardo llegar hasta el tablero. La distancia total recorrida en X es D, así que la rapidez en X multiplicada por el tiempo que queremos hallar nos debe dar la distancia total D:

$$D = \underbrace{\frac{d_m}{\sqrt{\frac{2(h_m-h_i)}{g}}}}_{v_x} t_f, \tag{13}$$

donde hemos llamado t_f al tiempo que le toma al dardo llegar al tablero. Si dividimos todo por el término que acompaña a t_f, esto da

$$D\left(\frac{\sqrt{\frac{2(h_m-h_i)}{g}}}{d_m}\right) = t_f. \tag{14}$$

Si ahora usamos este tiempo en la ecuación en Y del dardo —ecuación (2)—, y si usamos v_{iy} dada por la ecuación (6), podemos obtener una expresión para la posición Y del dardo cuando llega al tablero:

$$y_f\hat{y} = -\frac{1}{2}g\underbrace{\left(D\frac{\sqrt{\frac{2(h_m-h_i)}{g}}}{d_m}\right)^2}_{t_f}\hat{y} + \underbrace{\sqrt{2g(h_m-h_i)}}_{v_{iy}}\underbrace{\left(D\frac{\sqrt{\frac{2(h_m-h_i)}{g}}}{d_m}\right)}_{t_f}\hat{y} + h_i\hat{y}. \tag{15}$$

Si elevamos al cuadrado el numerador y denominador del primer término que está entre paréntesis, y escribimos la multiplicación de raíces cuadradas del segundo término como una sola raíz[10], esto queda

$$y_f\hat{y} = -\frac{1}{2}g\left(D^2\frac{\frac{2(h_m-h_i)}{g}}{d_m^2}\right)\hat{y} + \left(D\frac{\sqrt{(2g(h_m-h_i))\frac{2(h_m-h_i)}{g}}}{d_m}\right)\hat{y} + h_i\hat{y}. \tag{16}$$

[10] Dos raíces multiplicadas es lo mismo que una sola raíz de la multiplicación. Por ejemplo, $\sqrt{4}\sqrt{25}$ es igual a $\sqrt{4\times 25}$. En ambos casos la respuesta es 10.

Esto mismo se puede simplificar aún más. Primero, la raíz se pierde en el segundo término y en el primero el 2 se cancela. Segundo, la aceleración gravitacional se cancela en ambos términos. Finalmente, en el segundo término tenemos un 4 que sale de la multiplicación de 2 por 2, y al aplicar raíz cuadrada este cuatro se convierte en 2:

$$y_f\hat{y} = -D^2\left(\frac{h_m - h_i}{d_m^2}\right)\hat{y} + 2D\frac{(h_m - h_i)}{d_m}\hat{y} + h_i\hat{y}. \tag{17}$$

Si sacamos factor común de $(h_m - h_i)\frac{D}{d_m}\hat{y}$ para los primeros dos términos del lado derecho, esto da

$$y_f\hat{y} = (h_m - h_i)\frac{D}{d_m}\left(2 - \frac{D}{d_m}\right)\hat{y} + h_i\hat{y}. \tag{18}$$

Finalmente, podemos usar esta expresión para la posición en Y en la ecuación (1):

$$D = \left\| h_b\hat{y} - \underbrace{\left((h_m - h_i)\frac{D}{d_m}\left(2 - \frac{D}{d_m}\right)\hat{y} + h_i\hat{y}\right)}_{y_f\hat{y}}\right\|. \tag{19}$$

Esto mismo se pude escribir así:

$$D = \left\|\left(h_b - (h_m - h_i)\frac{D}{d_m}\left(2 - \frac{D}{d_m}\right) + h_i\right)\hat{y}\right\|. \tag{20}$$

Esta expresión nos da la distancia a la cual cae el dardo del centro del blanco. De nuevo, no podemos saber si el dardo cae arriba o abajo, pero el valor absoluto garantiza que, sea cual sea la situación, la distancia nos dará positiva.

Problema 3.19.

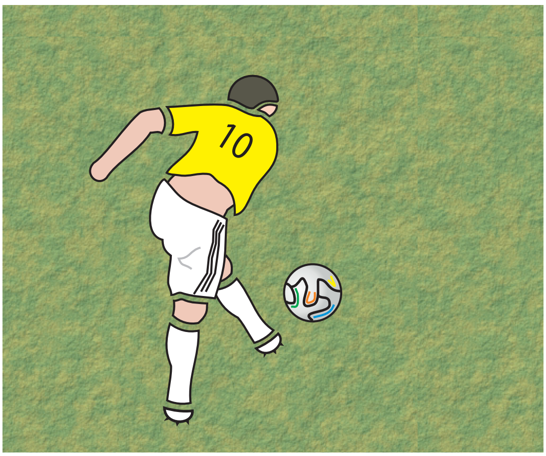
Palabras clave: velocidad inicial, distancia horizontal recorrida, uso se distintos sistemas de coordenadas.

El gol que James Rodríguez hizo en el partido de octavos de final entre Colombia y Uruguay del mundial de Brasil 2014 fue elegido mejor gol de ese año. James le pegó al balón cuando el balón estaba cayendo, el balón pegó en el palo superior de la portería de Muslera (el arquero de Uruguay) y cruzó la línea de gol. El tiempo que voló el balón desde que le pegó James hasta que tocó el palo fue de aproximadamente 0.9 segundos. La altura sobre el piso desde la cual le pegó James fue de aproximadamente 31.5 centímetros. La altura a la que está el palo superior es de 2.44 metros. Además, James le pegó al balón cuando estaba a más o menos 26.5 metros del arco. Usando un sistema de coordenadas cuyo origen esté en el prado justo debajo del punto de impacto, responda:

(a) ¿Cuál fue la velocidad con la que salió el balón al ser impactado por James?

(b) Aproximadamente a qué distancia horizontal (en X) de la línea de gol se encontraba el balón cuando llegó a su altura máxima?

(c) Responda de nuevo (a) pero usando un sistema cuyo origen esté justo en el punto de impacto (no en el prado) y según el cual el eje Y apunta hacia abajo.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b) La altura inicial desde la cual salió el balón fue aproximadamente de 31.5 centímetros. El tiempo de vuelo del balón desde que salió disparado hasta que tocó el palo es de 0.9 segundos. La distancia entre el arco y el punto de impacto es de más o menos 26.5 metros. La altura a la que está el palo es de 2.44 metros. Debemos usar un sistema de coordenadas en el piso justo debajo del punto de impacto.

(c) Debemos usar un sistema como el de antes pero con el eje Y apuntando hacia abajo.

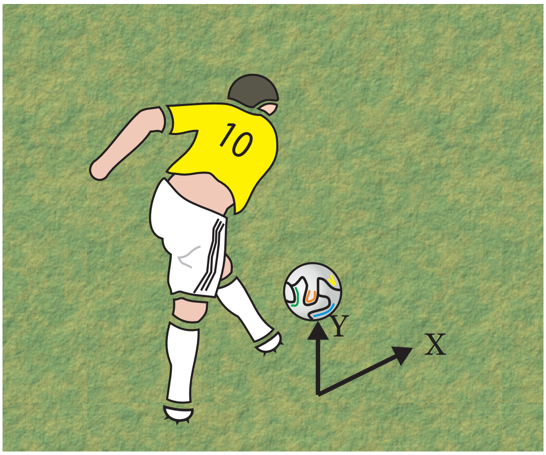
¿Qué nos piden?

(a) Debemos decir la velocidad con la que salió el balón al ser impactado por James.

(b) Encontrar la distancia horizontal entre la línea de gol y el balón cuando el balón está en su altura máxima.

(c) Responder (a) con un sistema de coordenadas cuyo eje Y apunte hacia abajo.

(a) No debemos escoger un sistema de coordenadas porque en el enunciado nos dicen que usemos uno con el origen en el pasto y justo debajo de balón:



Para determinar la velocidad con la que salió el balón al ser pateado por James, necesitamos encontrar las componentes X y Y de esta velocidad. Una vez encontramos estas componentes, podemos hallar la magnitud y dirección de la velocidad inicial.

Comencemos por hallar la velocidad en X del balón. La distancia total recorrida en X por el balón es de 26.5 metros. Además, el balón recorre esta distancia en un tiempo de 0.9 segundos. Por lo tanto, como en X distancia es rapidez por tiempo, tenemos

$$(26.5 \text{ m}) = v_x(0.9 \text{ s}). \tag{1}$$

Así que la rapidez v_x es

$$\frac{(26.5\text{ m})}{(0.9\text{ s})} = 29.44\text{ m/s} = v_x. \tag{2}$$

Para hallar la rapidez inicial en Y podemos usar la ecuación de movimiento en Y, pues conocemos el tiempo de vuelo, la posición final en Y y la posición inicial en Y. Según nuestro sistema de coordenadas, la posición inicial del balón es $(0.315\text{ m})\hat{y}$ (hemos pasado 31.5 cm a metros). La posición final es $(2.44\text{ m})\hat{y}$, que es cuando el balón toca el poste, la aceleración es g y es negativa, y el tiempo de vuelo es de 0.9 segundos. Por último, la rapidez inicial en Y debe ser positiva (el balón sale hacia arriba). Por lo tanto, la ecuación de movimiento en Y queda así:

$$\underbrace{(2.44\text{ m})\hat{y}}_{y_f\hat{y}} = -\frac{1}{2}(9.81\text{ m/s}^2)(\underbrace{0.9\text{ s}}_{t})^2\hat{y} + v_{iy}(\underbrace{0.9\text{ s}}_{t})\hat{y} + \underbrace{(0.315\text{ s})\hat{y}}_{y_i\hat{y}}. \tag{3}$$

Si aplicamos la regla de oro, dejamos el término que tiene v_{iy} solo a la derecha y sumamos todo lo que se puede sumar, esta ecuación queda

$$6.10\text{ m} = v_{iy}(0.9\text{ s}). \tag{4}$$

Finalmente, si dividimos entre el tiempo esto da

$$\frac{6.09\text{ m}}{0.9\text{ s}} = 6.78\text{ m/s} = v_{iy}. \tag{5}$$

Ahora que conocemos tanto la rapidez en X como la rapidez inicial en Y podemos hallar la rapidez inicial total. Recordemos que la magnitud de un vector está dada por la raíz cuadrada de la suma de la magnitud de cada componente al cuadrado, así que en este caso tenemos

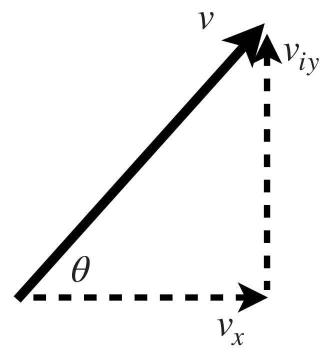
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_{iy}^2}. \tag{6}$$

Si usamos la rapidez en X dada por la ecuación (2) y la rapidez inicial en Y dada por la ecuación (5), la ecuación (6) queda

$$v = \sqrt{(\underbrace{29.44\text{ m/s}}_{v_x})^2 + (\underbrace{6.78\text{ m/s}}_{v_{iy}})^2} = 30.21\text{ m/s}. \tag{7}$$

En palabras, la rapidez con la que salió el balón fue de 30.21 metros por segundo, que es igual a 108.76 kilómetros por hora. Sólo nos falta hallar la dirección en la cual salió disparado el balón.

La dirección es fácil de hallar porque conocemos ambas componentes y también conocemos la magnitud de la velocidad inicial. Como ya hemos hecho en varios problemas, la componente X es adyacente al ángulo de lanzamiento y la componente Y es opuesta al ángulo:



La rapidez inicial en Y es el cateto opuesto y la rapidez inicial en X es el cateto adyacente.

Por lo tanto, la componente X sobre la magnitud de la velocidad inicial (que es la hipotenusa) nos da el coseno del ángulo:

$$\frac{v_x}{v} = \frac{29.44 \text{ m/s}}{30.21 \text{ m/s}} = 0.97 = \cos\theta. \tag{8}$$

Así que θ es

$$\theta = \arccos(0.97) = 12.88°. \tag{9}$$

Así, la velocidad inicial tiene magnitud de 30.21 metros por segundo y apunta en dirección de 12.88 grados con respecto al eje X, medidos en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

(b) Para hallar la distancia horizontal entre el balón y la línea de gol cuando el balón alcanza su altura máxima, debemos determinar cuánta distancia ha recorrido el balón a lo largo de X cuando llega a su altura máxima. Para hallar esta distancia, necesitamos la rapidez en X que ya conocemos y el tiempo de altura máxima que no conocemos. Recordemos (nota 3.10) que este tiempo de altura máxima está dado por

$$\frac{v_{iy}}{g} = t_m. \tag{10}$$

Según la ecuación (5), v_{iy} es 6.78 m/s. Así que el tiempo de altura máxima es

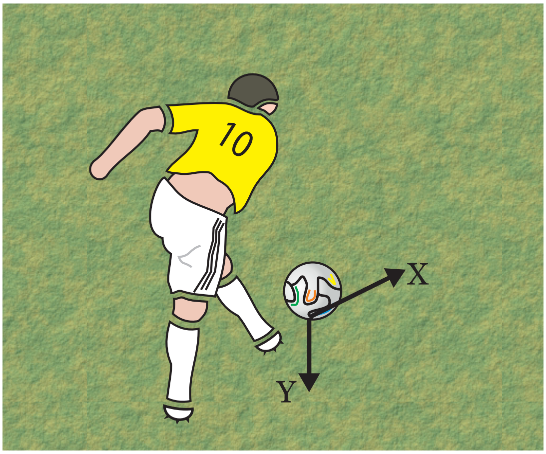
$$\frac{\overbrace{6.78 \text{ m/s}}^{v_{iy}}}{9.81 \text{ m/s}} = 0.69 \text{ s}. \tag{11}$$

Como en X distancia es rapidez por tiempo, en este tiempo la distancia recorrida es

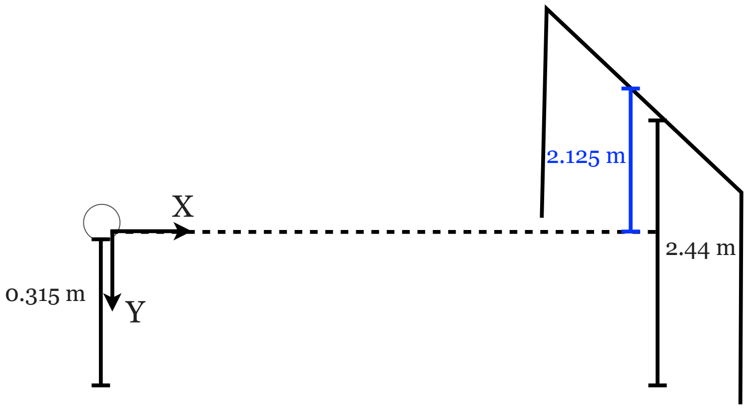
$$d_x = \underbrace{(29.44 \text{ m/s})}_{v_x}\underbrace{(0.69 \text{ s})}_{t} = 20.31 \text{ m}. \tag{12}$$

Entre la línea de meta y el punto de impacto hay una distancia de 26.5 metros en X. Según la ecuación (12), el balón ha recorrido 20.31 metros en X. Por lo tanto, el balón está a 26.5 m-20.31 m = 6.19 m de la línea de gol. Es decir, cuando llega a su altura máxima el balón casi está en el área pequeña del arquero (en las cinco con cincuenta), lo que explica lo difícil que era para el arquero atajarlo.

(c) Ahora debemos usar un sistema cuyo origen esté en el punto de impacto del balón y cuyo eje Y apunte hacia abajo, tal como se indica a continuación:



La rapidez en X es la misma porque la distancia recorrida en X sigue siendo la misma y porque el tiempo sigue siendo el mismo. Así que la ecuación (1) sigue siendo válida. Ahora, para hallar la rapidez inicial en Y debemos volver a usar la ecuación de movimiento en Y, sólo que ahora esta ecuación tiene otra forma. Primero, la posición inicial en Y es cero con el nuevo sistema. En segundo lugar, la velocidad inicial en Y es negativa porque ahora hacia arriba es negativo y la aceleración de la gravedad es ahora positiva. Finamente, con respecto a este sistema nuevo la altura final es de 2.44 m-0.15 m = 2.125 m, como se aprecia a continuación:



Con respecto al nuevo sistema, la altura del poste es de 2.125 metros (en azul) y no de 2.44 metros, pues el nuevo sistema está a 0.315 metros sobre el pasto.

Como la altura final está en la parte negativa del eje Y del nuevo sistema, debe ir con un signo menos. Así, la ecuación de movimiento en Y para el balón según este sistema queda

$$\underbrace{-(2.125\ \text{m})\hat{y}}_{y_f\hat{y}} = +\frac{1}{2}(9.81\ \text{m/s}^2)(\underbrace{0.9\ \text{s}}_{t})^2\hat{y} - v_{iy}(\underbrace{0.9\ \text{s}}_{t})\hat{y} + (\underbrace{0\ \text{m}}_{y_i\hat{y}})\hat{y}. \tag{13}$$

Si pasamos el término que tiene v_{iy} al lado izquierdo y movemos los otros términos a la derecha, sumamos lo que se pueda sumar y aplicamos la regla de oro, obtenemos

$$v_{iy}(0.9\ \text{s}) = 6.10\ \text{m}. \tag{14}$$

¡Este es exactamente el mismo resultado que el dado por la ecuación (4)! Así que no es necesario continuar, pues podemos repetir los mismos pasos de antes y llegaremos a la misma rapidez inicial en Y. El ángulo θ también es el mismo, pues lo seguimos midiendo tal como antes con respecto al eje X.

No nos debería sorprender que la rapidez inicial sea la misma pues recordemos que las magnitudes de los vectores no cambian si cambiamos de sistema, y la rapidez es la magnitud de la velocidad (nota 2.3). El lector puede pensar que todo da lo mismo con este nuevo sistema pero en realidad no; la velocidad inicial en Y y la aceleración de la gravedad son diferentes porque son negativas. Como hemos comprobado en distintas ocasiones, las direcciones no siempre se preservan cuando cambiamos de sistema de coordenadas.

Problema 3.20.

Palabras clave: ángulo de proyectil para pegarle a objeto en caída libre, distancia total entre dos objetos en vuelo.

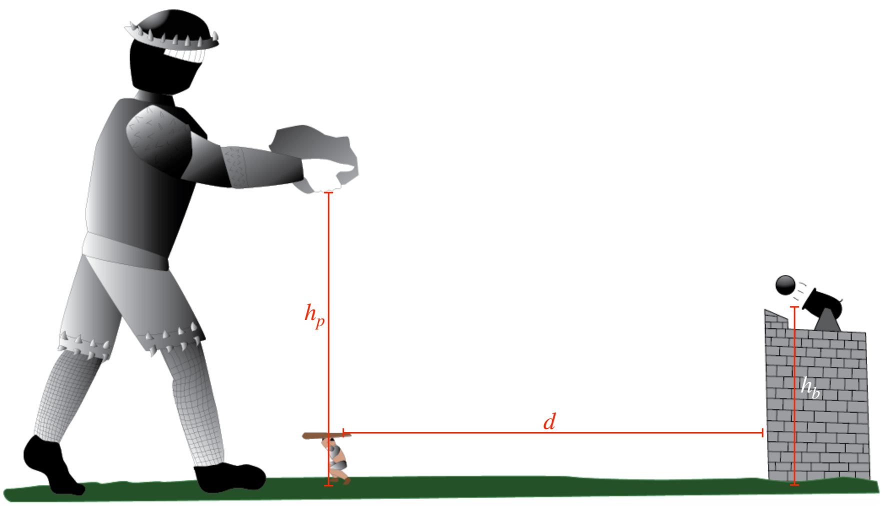
Un gigante con armadura está a punto de soltar una gran piedra sobre una valiente guerrera, como se ve en el dibujo. Desde una muralla cercana, que está a una distancia d de la guerrera, los aldeanos van a disparar una bala de cañón para que le pegue a la piedra, y así salvar a la guerrera. La altura inicial de la piedra es h_p con respecto al piso, la altura inicial de la bala de cañón es h_b, también con respecto al piso, y la magnitud de la velocidad inicial de la bala es v_i.

(a) Escriba una expresión para el ángulo de disparo de modo que la bala de cañón le pegue a la piedra cuando esta esté cayendo libremente. Tenga en cuenta que el cañón dispara justo cuando el gigante suelta la piedra.

(b) Desde la perspectiva del cañón, ¿el ángulo hallado anteriormente apunta arriba de la posición inicial de la pierda, abajo de la posición de la piedra o justo a la posición inicial de la piedra?

(c) Suponga que la distancia d es de 250 metros, la altura inicial de la bala de cañón es 5 metros, la piedra es soltada desde una altura de 15 metros y la rapidez inicial de la bala es de 170 metros por segundo. Con base en esto, ¿a qué altura está la piedra cuando la bala de cañón le pega?

(d) Con base en la misma información de (c), ¿a qué distancia está la piedra de la bala cuando la bala está en su altura máxima?



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) y (b) La rapidez inicial v_i de la bala, la altura inicial h_p desde la cual es soltada la piedra, la altura inicial h_b de la bala y la distancia d entre el punto de disparo de la bala y la guerrera. El cañón dispara justo cuando el gigante suelta la piedra.
(c) y (d): v_i es 170 metros por segundo, h_p es de 15 metros, h_b es de 5 metros y d es de 250 metros.

¿Qué nos piden?

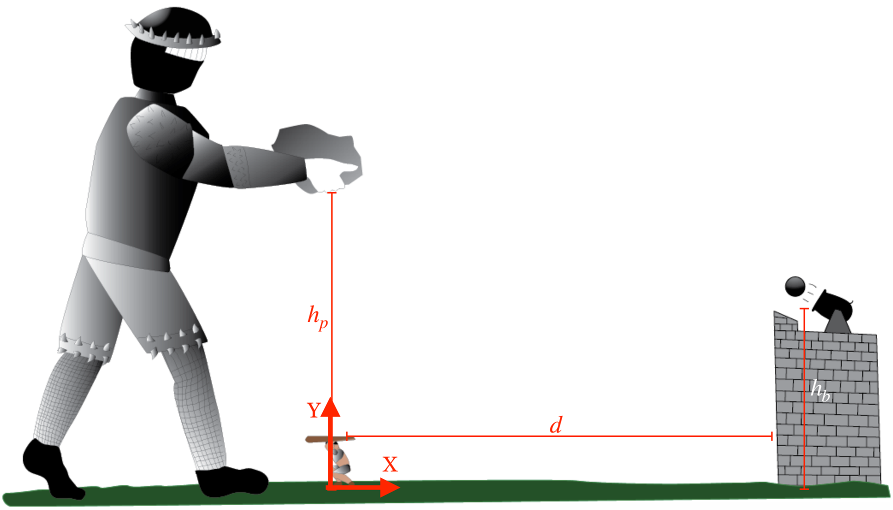
(a) Debemos dar una expresión para el ángulo de disparo de forma que la bala le pegue a la roca cuando esta esté cayendo.

(b) Debemos decir si el ángulo de disparo apunta hacia la posición inicial de la piedra, o arriba o abajo de esta posición.

(c) Debemos encontrar la altura de la piedra cuando la bala de cañón la alcanza.

(d) Debemos encontrar la distancia entre la bala de cañón y la piedra cuando la bala está en su punto de altura máxima.

(a) Como siempre, empezamos por ubicar un sistema de coordenadas. Pongamos uno que esté en la posición de la guerrera:



Ahora, según este sistema, la posición inicial Y de la piedra es $h_p\hat{y}$ y la posición inicial Y de la bala es $h_b\hat{y}$. Además, la posición inicial de la bala a lo largo de X es $d\hat{x}$. Debemos encontrar el ángulo de disparo y para hacerlo debemos tener presente lo siguiente: *para que la bala le pegue a la piedra la posición en X y en Y de la piedra y de la bala deben ser iguales.*

Comencemos por escribir las ecuaciones de movimiento. La ecuación de movimiento de la piedra es sencilla porque es un caso de caída libre (velocidad inicial cero):

$$y_p\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} + h_p\hat{y}, \tag{1}$$

donde hemos llamado $y_p\hat{y}$ a la posición Y de la piedra. Por su parte, la bala sigue un movimiento parabólico así que tiene una ecuación de movimiento en X y en Y. En Y la bala tiene cierta velocidad inicial v_{iy} desconocida (pero sabemos que es positiva porque la bala sube), altura inicial $y_b\hat{y}$ y aceleración de la gravedad:

$$y_b\hat{y} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{y} + v_{iy}t\hat{y} + h_p\hat{y}, \tag{2}$$

donde hemos llamado $y_b\hat{y}$ a la posición Y de la bala. En X la bala se mueve con velocidad constante y, como dijimos, su posición inicial es $d\hat{x}$. Además, la velocidad en X es desconocida pero sabemos que tiene dirección negativa en X según el sistema elegido. Por lo tanto, la ecuación de movimiento en X queda así:

$$x_b\hat{x} = -v_xt\hat{x} + d\hat{x}. \tag{3}$$

Como ya dijimos, para que la bala le pegue a la piedra, las posiciones de ambas deben coincidir. Primero, esto quiere decir que la posición X de la bala debe ser cero, pues esta es siempre la posición de la piedra (la piedra se mueve sólo a lo largo del eje Y). Así que si ponemos esta condición en la ecuación (3), y llamamos t_e al tiempo en el cual se encuentran la bala y la piedra, obtenemos

$$0\hat{x} = -v_xt_e\hat{x} + d\hat{x}. \tag{4}$$

Si aplicamos la regla de oro y pasamos el término de la velocidad al otro lado, la ecuación queda

$$v_xt_e = d. \tag{5}$$

No conocemos ni la velocidad X ni el tiempo de encuentro, así que esta ecuación no sirve mucho por ahora. Como en el tiempo de encuentro la posición Y de la piedra y la roca son iguales, entonces podemos igualar la ecuación (2) y la (1):

$$\underbrace{-\frac{1}{2}gt_e^2\hat{y} + h_p\hat{y}}_{x_p\hat{x}} = \underbrace{-\frac{1}{2}gt_e^2\hat{y} + v_{iy}t_e\hat{y} + h_b\hat{y}}_{x_b\hat{x}}. \tag{6}$$

Notemos que los términos con aceleración se cancelan, y llegamos a

$$h_p\hat{y} = v_{iy}t_e\hat{y} + h_b\hat{y}. \tag{7}$$

Si pasamos el término de la altura inicial de la bala al otro lado y aplicamos la regla de oro, obtenemos

$$h_p - h_b = v_{iy}t_e. \tag{8}$$

Podemos escribir el tiempo de encuentro en términos de la distancia d y la rapidez en X si usamos la ecuación (5):

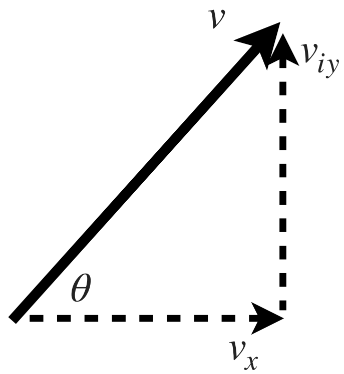
$$t_e = \frac{d}{v_x}. \tag{9}$$

Si usamos este tiempo en la ecuación (8), obtenemos

$$h_p - h_b = v_{iy} \underbrace{\left(\frac{d}{v_x}\right)}_{t_e}. \tag{10}$$

Esta ecuación relaciona la rapidez inicial en Y y la rapidez en X con variables conocidas.

Lo que debemos hallar es el ángulo de disparo, pero recordemos que el ángulo de disparo está relacionado con las rapideces iniciales, como se aprecia a continuación:



La rapidez inicial en Y es el cateto opuesto y la rapidez en X es el cateto adyacente.

Si llamamos θ al ángulo de disparo, y usamos el triángulo recién dibujado, la ecuación (10) se puede escribir así:

$$h_p - h_b = \overbrace{v \sin\theta}^{v_{iy}} \underbrace{\left(\frac{d}{v\cos\theta}\right)}_{v_x}. \tag{11}$$

La rapidez v se cancela y seno sobre coseno es tangente, así que esto se puede escribir así:

$$h_p - h_b = d\tan\theta. \tag{12}$$

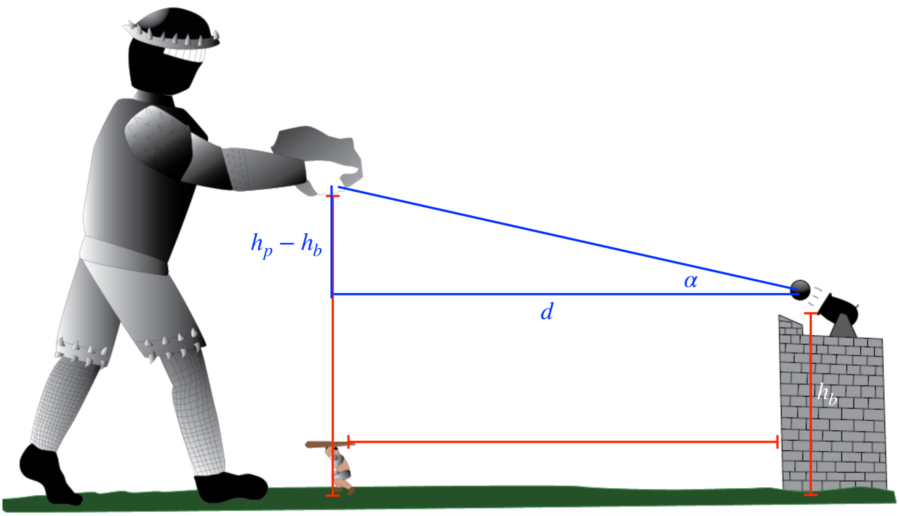
Si dividimos por d, tenemos

$$\frac{h_p - h_b}{d} = \tan\theta. \tag{13}$$

Finalmente, sacando arcotangente, obtenemos una expresión para el ángulo de disparo:

$$\arctan\left(\frac{h_p - h_b}{d}\right) = \theta. \tag{14}$$

(b) Debemos decir si desde la perspectiva del cañón el ángulo recién hallado apunta hacia arriba o abajo de la posición inicial de la piedra. ¿Cómo podemos saber esto? Una forma de averiguarlo es haciendo un triángulo que relacione las diferentes cantidades que aparecen en la ecuación (13), de la siguiente forma:



En esta figura dibujamos un triángulo cuya base es d, su altura es $h_p - h_b$ y tiene un ángulo α desconocido. Si el ángulo de disparo θ es igual a α, entonces el cañón debe apuntar a la piedra. Si θ es mayor a α, entonces el cañón debe apuntar encima de la piedra y si es menor debe apunta por debajo de la piedra. Según este dibujo, la tangente de α será igual a $h_p - h_b$ (que es el cateto opuesto) sobre d (que es el cateto adyacente). Es decir,

$$\frac{h_p - h_b}{d} = \tan\alpha. \tag{15}$$

La parte izquierda de esta ecuación es exactamente igual a la parte izquierda de la ecuación (13), ¡así que tangente de α tiene que ser igual a tangente de θ!

Por lo tanto, α tiene que ser igual a θ. Es decir, *el cañón tiene que apuntar justo a la piedra*, no más arriba o más abajo.

Nota 3.13. Ángulo de disparo para darle a objeto en caída libre

Si queremos disparar un proyectil de forma que le pegue a un objeto en caída libre, y si el proyectil se dispara al mismo tiempo que el objeto comienza a caer, entonces el proyectil debe apuntar a la posición inicial del objeto, no más arriba ni más abajo.

(c) La altura de la piedra cuando la bala la alcanza se puede hallar teniendo en cuenta los valores numéricos que nos dan. La altura de la piedra se puede hallar con la ecuación (1), pero para eso necesitamos primero saber cuánto tiempo lleva cayendo la piedra cuando la bala la alcanza (es decir, necesitamos averiguar cuál es el tiempo de encuentro).

El tiempo de encuentro se puede hallar con la ecuación (9), pero para eso necesitamos primero la rapidez en X. Y para hallar la rapidez en X necesitamos conocer el ángulo, pues $v_x = v_i \cos\theta$. Al ángulo lo podemos obtener usando la ecuación (14):

$$\arctan\left(\frac{\overbrace{15\text{ m}}^{h_p} - \overbrace{5\text{ m}}^{h_b}}{\underbrace{250\text{ m}}_{d}}\right) = 2.29°. \tag{16}$$

Con este ángulo y la rapidez inicial podemos obtener la rapidez en X de la bala:

$$v_x = \underbrace{(170\text{ m/s})}_{v_i}\cos 2.29° = 169.86\text{ m/s}. \tag{17}$$

Con esta velocidad podemos hallar el tiempo de encuentro usando la ecuación (9):

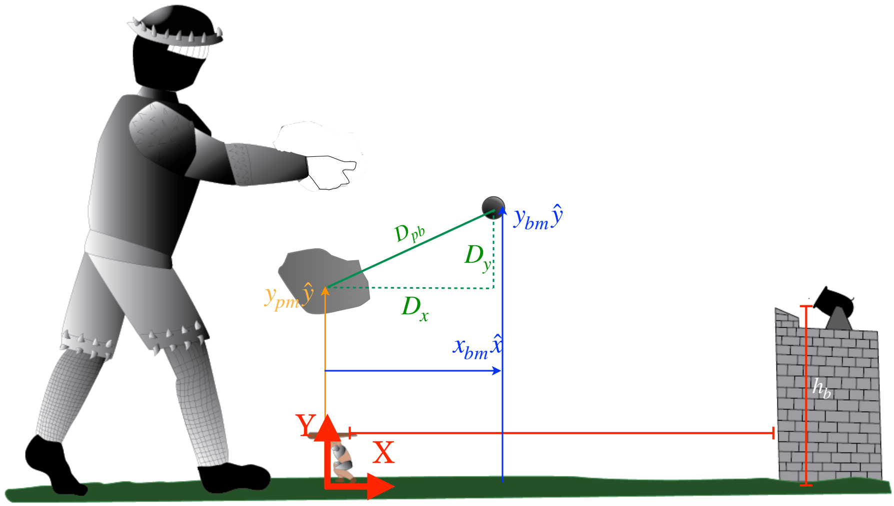
$$t_e = \frac{\overbrace{250\text{ m}}^{d}}{\underbrace{169.9\text{ m/s}}_{v_x}} = 1.47\text{ s}. \tag{18}$$

Finalmente, si usamos este tiempo en la ecuación de movimiento en Y de la piedra —ecuación (1)—, y usamos los demás valores conocidos, obtenemos

$$y_p\hat{y} = -\left(\frac{1}{2}(9.81\text{ m/s}^2)\underbrace{(1.47\text{ s})^2}_{t_e}\right)\hat{y} + \underbrace{(15\text{ m})}_{h_p}\hat{y} = (4.4\text{ m})\hat{y}. \tag{19}$$

Es decir, la piedra es alcanzada por la bala cuando la piedra está a una altura de 4.4 metros.

(d) Debemos hallar la distancia entre la bala y la piedra cuando la bala está en su altura máxima. Para entender mejor esta distancia, consideremos el siguiente dibujo que representa el momento en que la bala llega a la altura máxima:



Hemos llamado a la posición de la bala en su momento de máxima altura $y_{bm}\hat{y}$, y $y_{pm}\hat{y}$ a la posición de la piedra en ese mismo momento. $x_{bm}\hat{x}$ es la posición X de la bala en su punto de máxima altura. Notemos que la hipotenusa del triángulo en verde es precisamente la distancia que buscamos.

Lo que debemos hallar es D_{pb}, que es la distancia entre la bala en su punto de máxima altura y la piedra en ese mismo instante. En el dibujo es claro que D_{pb} es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos D_x y D_y. Así que D_{pb} está dado por

$$D_{pb} = \sqrt{D_x^2 + d_y^2}. \tag{20}$$

Para usar esta ecuación debemos hallar D_x y D_y. Como tanto D_x y D_y son distancias, para hallarlas debemos buscar la magnitud de la resta de la posición entre los dos puntos que nos interesan. En particular, D_y es igual la magnitud de la resta entre la posición Y de la bala y la posición Y de la piedra en ese mismo momento:

$$D_y = \left\| y_{bm}\hat{y} - y_{pm}\hat{y} \right\|. \tag{21}$$

El valor absoluto es crucial (estamos buscando una magnitud) porque no sabemos cuál posición en Y es mayor, y debemos garantizar que, como toda distancia, el resultado dé positivo.

Conocemos la rapidez inicial de la bala y conocemos el ángulo de disparo, así que podemos hallar la rapidez inicial en Y y con ella podemos hallar la altura máxima. La rapidez inicial en Y de la bala es $v_{iy} = v_i \sin\theta$, así que tenemos

$$v_{iy} = \underbrace{(170\ \mathrm{m/s})}_{v} \sin \underbrace{2.29^\circ}_{\theta} = 6.79\ \mathrm{m/s}. \tag{22}$$

La altura máxima está dada por la ecuación

$$h_m = \frac{1}{2}\left(\frac{v_{iy}^2}{g}\right) + h_i. \tag{23}$$

Si usamos los valores conocidos, esta altura nos da

$$h_m = \frac{1}{2}\left(\frac{(\overbrace{6.79\ \mathrm{m/s}}^{v_{iy}})^2}{\underbrace{9.81\ \mathrm{m/s^2}}_{g}}\right) + \underbrace{5\ \mathrm{m}}_{h_i} = 7.35\ \mathrm{m}. \tag{24}$$

Es decir, $y_{bm}\hat{y} = (7.35\ \mathrm{m})\hat{y}$.

Para usar la ecuación (22) aún nos falta hallar $y_{pm}\hat{y}$, la posición Y de la piedra cuando la bala llega al punto de altura máxima. Esta posición la podemos hallar usando la ecuación (1) si conocemos el tiempo en que la bala llega a la altura máxima. Este tiempo lo podemos hallar usando la ecuación

$$\frac{v_{iy}}{g} = t_m. \tag{25}$$

Si reemplazamos el valor de la rapidez inicial en Y que ya conocemos, llegamos a

$$\frac{\overbrace{6.79\ \mathrm{m/s}}^{v_{iy}}}{\underbrace{9.81\ \mathrm{m/s^2}}_{g}} = 0.69\ \mathrm{s} = t_m. \tag{26}$$

Ahora usemos este tiempo en la ecuación (1):

$$y_{pm}\hat{y} = -\frac{1}{2}(9.81\ \mathrm{m/s^2})(\underbrace{0.69\ \mathrm{s}}_{t_m})^2\hat{y} + (\underbrace{15\ \mathrm{m}}_{h_p})\hat{y} = (12.66\ \mathrm{m})\hat{y}. \tag{27}$$

Como ya conocemos $y_{bm}\hat{y}$ y $y_{pm}\hat{y}$ podemos usar la ecuación (22):

$$D_y = \left\| \underbrace{(7.35 \text{ m})\hat{y}}_{y_{bm}\hat{y}} - \underbrace{(12.66 \text{ m})\hat{y}}_{y_{pm}\hat{y}} \right\| = 5.31 \text{ m}. \tag{28}$$

Ahora debemos hallar D_x. En el ultimo dibujo es claro que D_x no es más que la magnitud de la posición X de la bala de cañón en su punto de máxima altura, es decir,

$$D_x \left\| x_{bm}\hat{x} \right\|. \tag{29}$$

Podemos hallar la posición X en el punto de altura máxima usando la ecuación (3). Ya conocemos el tiempo de altura máxima que es 0.69 s —ecuación (27)—, conocemos la rapidez en X que es 169.86 m/s —ecuación (17)—, y conocemos la distancia inicial en X que es 250 metros. Usando estos valores en la ecuación (3), obtenemos

$$x_b\hat{x} = -\underbrace{(169.86 \text{ m/s})}_{v_x}\underbrace{(0.69 \text{ s})}_{t_m}\hat{x} + \underbrace{(250 \text{ m})}_{d}\hat{x} = (132.8 \text{ m})\hat{x}, \tag{30}$$

D_x es simplemente la magnitud de la anterior posición.

$$D_x = \left\| (132.8 \text{ m})\hat{x} \right\| = 132.8 \text{ m}. \tag{31}$$

Finalmente, si usamos los valores hallados de D_y y D_x en la ecuación (21), podemos hallar la distancia buscada:

$$D_{pb} = \sqrt{(\underbrace{132.8 \text{ m}}_{D_x})^2 + (\underbrace{5.31 \text{ m}}_{D_y})^2} = 132.9 \text{ m}. \tag{32}$$

En palabras, cuando la bala está en su punto de altura máxima, está a una distancia de 132,9 metros de la roca.

3.1 Notas del capítulo

Nota 3.1: Movimiento en caída libre.

Un movimiento en caída libre cumple dos cosas:

(1) El objeto es liberado desde el reposo.

(2) El objeto cae con la aceleración de la gravedad, que tiene magnitud g.

Este movimiento es un caso especial de aceleración uniforme, y su ecuación de movimiento es $\vec{y}_f = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{y}_i$.

Nota 3.2: Tiempo de caída libre.

El tiempo que se demora en caer un objeto en caída libre desde una altura inicial h_i hasta una altura final h_f está dado por $\sqrt{\frac{2(h_i - h_f)}{g}} = t$.

Este tiempo no depende del sistema de coordenadas elegido.

Nota 3.3: Velocidad final en caída libre.

Si usamos un sistema en el cual la aceleración gravitacional es positiva, la velocidad final en un movimiento en caída libre es $\vec{v}_f = \sqrt{2g(h_i - h_f)}\hat{y}$.

Si usamos un sistema en el cual la aceleración de la gravedad es negativa esta velocidad es $\vec{v}_f = -\sqrt{2g(h_i - h_f)}\hat{y}$.

La rapidez en ambos casos es la misma: $v_f = \sqrt{2g(h_i - h_f)}$.

Nota 3.4: Velocidad final en caída libre conociendo el tiempo de caída.

Si conocemos el tiempo de caída, podemos hallar la velocidad final usando la ecuación $\vec{v}_f = -gt\hat{y}$ en el caso de que usemos un sistema en el cual la aceleración gravitacional es negativa. O la ecuación $\vec{v}_f = gt\hat{y}$ si usamos un sistema en el cual la aceleración de la gravedad es negativa. La rapidez en ambos casos es la misma: $v_f = gt$.

Nota 3.5: Lanzamiento vertical.

El lanzamiento vertical es un tipo de movimiento en el cual el objeto es lanzado de modo vertical, hacia arriba o hacia abajo, con cierta velocidad inicial distinta de cero. Un objeto lanzado así sigue un movimiento rectilíneo uniforme con aceleración g hacia abajo (hacia el centro de la Tierra).

Nota 3.6: Tiempo de altura máxima.

El tiempo en el cual un objeto que es lanzado con cierta velocidad vertical alcanza la altura máxima se puede calcular dividiendo la rapidez inicial por g: $\frac{v_i}{g} = t_m$. Esta ecuación se deriva de la ecuación $\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_i$ usando que la velocidad es cero en la altura máxima.

Nota 3.7: Altura máxima dada la rapidez inicial.

La altura máxima h_m alcanzada por un objeto en un lanzamiento vertical se puede hallar si conocemos la rapidez inicial v_i usando la siguiente ecuación: $h_m = \frac{1}{2}\left(\frac{v_i^2}{g}\right)$.

Si el objeto es lanzado desde una altura inicial h_i, entonces la altura máxima es $h_m = \frac{1}{2}\left(\frac{v_i^2}{g}\right) + h_i$, pues debemos sumar la altura inicial del lanzamiento.

Nota 3.8: Velocidad inicial y final en lanzamiento vertical.

En un lanzamiento vertical, la velocidad inicial del objeto tiene la misma magnitud y dirección contraria a la velocidad del objeto cuando regresa al mismo punto desde el cual fue lanzado.

Nota 3.9: Tiempo de subida y tiempo de caída.

En un lanzamiento vertical, el tiempo que le toma a un objeto subir a su altura máxima es igual al tiempo que le toma caer desde la altura máxima. El tiempo de caída desde la altura máxima es $\sqrt{\frac{2h_m}{g}} = t$ donde h_m es la altura máxima. El tiempo de subida hasta la altura máxima es $\frac{v_i}{g} = t_m$. Como ambos tiempos son iguales, podemos usar cualquiera de las dos ecuaciones para calcularlo (la que sea más conveniente según el problema).

Nota 3.10: Movimiento parabólico.

En un movimiento parabólico el objeto sigue dos movimientos simultáneos; un movimiento en X que tiene velocidad constante, y un movimiento en Y que tiene aceleración constante de magnitud g.

El tiempo de altura máximo es $\frac{v_{iy}}{g} = t$, donde v_{iy} es la rapidez inicial en Y.

El tiempo de vuelo total, si el objeto termina a la misma altura de la que partió, es dos veces el tiempo anterior: $2\frac{v_{iy}}{g} = t$.

La altura máxima alcanzada por el objeto es $y_m = \frac{1}{2}\left(\frac{v_{iy}^2}{g}\right) + y_i$, donde y_i es la altura inicial.

La distancia en X total recorrida por el objeto, si termina a la misma altura de la que partió, es $d_x = 2\frac{v_x v_{iy}}{g}$.

Nota 3.11: Tiempo de caída en un movimiento semiparabólico.

Un movimiento semiparabólico es aquel en el que un objeto que está a cierta altura del piso sale disparado con cierta rapidez inicial en X y rapidez cero en Y.

Si la altura inicial en Y es h_i, el tiempo que le toma al objeto caer hasta otra altura menor h_f es igual al tiempo de caída en una caída libre, y no depende de la velocidad en X:

$$t = \sqrt{\frac{2(h_i - h_f)}{g}}.$$

Nota 3.12: Ángulo de lanzamiento para la distancia máxima.

La distancia total recorrida en X si conocemos el ángulo inicial de lanzamiento, la rapidez total inicial, y si el objeto termina a la misma altura a la cual empezó es

$$d_x = \frac{2v^2 \cos\theta \sin\theta}{g} = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}.$$

Esta distancia es máxima cuando θ (el ángulo de lanzamiento) es 45 grados.

Nota 3.13: Ángulo de disparo para darle a objeto en caída libre.

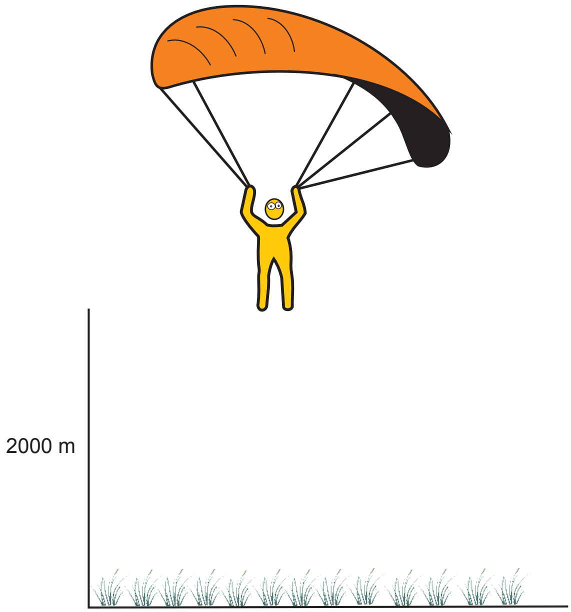
Si queremos disparar un proyectil de forma que le pegue a un objeto en caída libre, y si el proyectil dispara al mismo tiempo que el objeto comienza a caer, entonces el proyectil debe apuntar a la posición inicial del objeto, no más arriba ni más abajo.

3.2 Problemas sin solucionar

1. Homero se lanza en paracaídas desde una altura de 2000 metros. Suponga que el tiempo en el que está con el paracaídas abierto es 20 veces el tiempo en el que está sin el paracaídas abierto (cuando tiene el paracaídas abierto, cae con velocidad constante).

(a) ¿En qué tiempo desde que saltó abrió el paracaídas?

(b) ¿A qué altura sobre el suelo estaba cuándo abre el paracaídas?



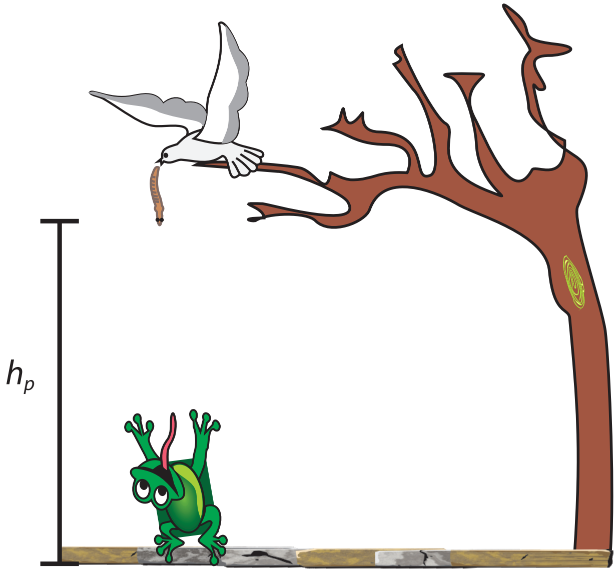
Problemas similares: 3.1, 3.2.

2. Un pájaro que está en una rama deja caer de forma vertical una lombriz desde una altura h_p. En ese mismo momento una rana salta en dirección vertical, hasta una altura máxima h_r.

(a) Escriba una expresión para la rapidez inicial de la rana, en términos de la altura máxima a la que llega.

(b) Escriba una expresión para la distancia a la que se encuentra la lombriz de la rana cuando la rana llega a su altura máxima.

(c) Escriba una expresión para la rapidez de la lombriz cuando la rana está a una altura $h_r/2$.



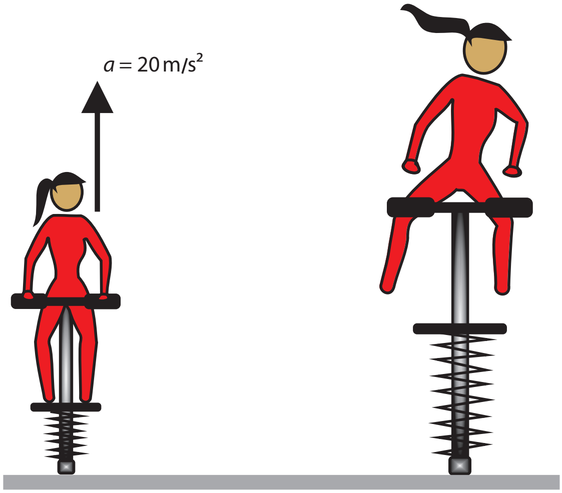
Problemas similares: 3.3, 3.5.

3. Juliana está saltando en un juguete que tiene un resorte, como se muestra en el dibujo. Suponga que desde el punto de mayor compresión hasta el punto en que sus pies se separan transcurre un tiempo de 0.5 segundos, y el resorte le da una aceleración constante de magnitud de 20 m/s^2.

(a) ¿En qué tiempo llega Juliana a su altura máxima?

(b) Cuál es la velocidad de Juliana un segundo después de que se separa del juguete?

(c) Si la aceleración inicial hubiera sido el doble de lo que fue, ¿cuántas veces la altura máxima inicial sería la altura máxima alcanzada?



Problemas similares: 3.5, 3.7.

4. Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(a) Un movimiento de caída libre es un movimiento con velocidad variable.

(b) El tiempo de caída en un caso de caída libre depende del sistema de coordenadas usado.

(c) Si conocemos el tiempo de caída, podemos hallar la velocidad final del objeto en un caso de caída libre.

(d) Si en un caso de caída libre dividimos la diferencia de altura por dos, el tiempo de caída se reduce a la mitad.

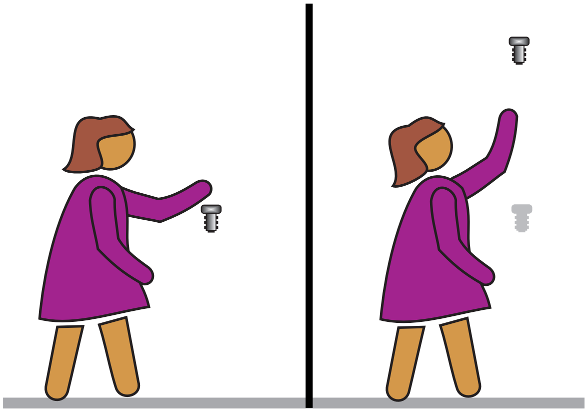
(e) La aceleración en un caso de caída libre no es proporcional al tiempo de la caída.

Problema similar: 3.4.

5. Liliana deja caer libremente un tornillo desde una altura desconocida. Ella escucha el tornillo sonar un segundo después. La rapidez del sonido es 343 m/s.

(a) Halle la altura desde la que Liliana dejó caer el tornillo.

(b) Si Liliana lanza otro tornillo desde la misma altura, pero ahora de forma vertical hacia arriba con rapidez de 12 metros por segundo, ¿cuánto tiempo se va a demorar en escuchar el sonido que hace al tocar el suelo?

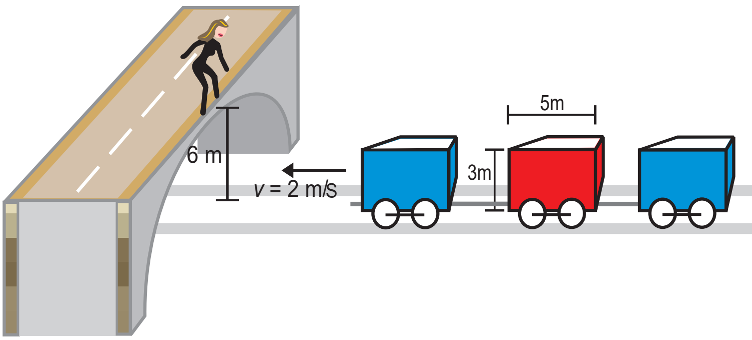


Problema similar: 3.5.

6. Para grabar una película de acción, Angelina tiene que saltar desde un puente, al tiempo que un tren pasa por debajo del puente (ver dibujo). Angelina tiene que caer en el vagón rojo porque los otros son muy peligrosos. El vagón rojo tiene una altura de 3 metros y tiene una longitud de 5 metros. Inicialmente Angelina está a 6 metros del suelo.

(a) Si Angelina salta de forma que en su altura máxima está a 7 metros del suelo, y si el tren tiene una rapidez de 2 metros por segundo, ¿cuánto antes de que llegue el vagón rojo al puente tiene que saltar Angelina para que alcance a caer en el vagón rojo? Ignore el desplazamiento horizontal de Angelina, pues ella salta de forma casi totalmente vertical.

(b) Si el vagón rojo llega al puente y Angelina salta justo en ese momento, ¿alcanzaría a caer en el vagón rojo?



Problema similar: 3.9.

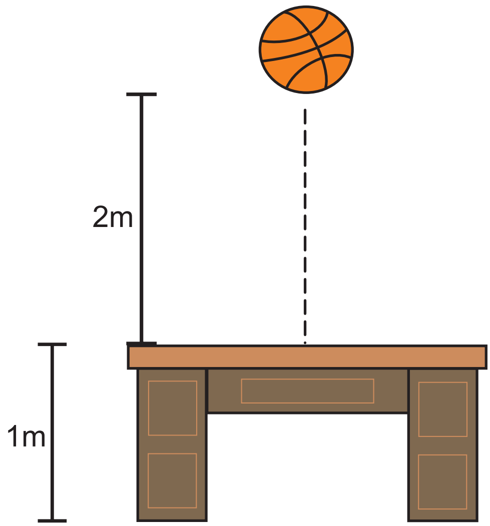
7. Una pelota rebota sobre una mesa de altura de 1 metro. Después del primer rebote, la pelota alcanza una altura de 2 metros con respecto a la mesa, pero cuando va a tocar la mesa por segunda vez, alguien la mueve (a la mesa), así que la pelota rebota en el suelo.

(a) ¿Cuál es la rapidez de la pelota cuando toca el suelo?

(b) ¿Cuál es el tiempo total desde que rebota por primera vez en la mesa hasta que toca el suelo en el segundo rebote?

(c) ¿Cuál es la máxima altura con respecto al suelo en el segundo rebote si el tiempo de altura máxima en el segundo rebote es el doble al tiempo del altura máxima del primer rebote?

(d) Realice una gráfica cualitativa (sin valores) de velocidad contra tiempo desde el momento en que se deja caer, hasta que toca el suelo por segunda vez (el tercer rebote), suponiendo que el tiempo de contacto entre la pelota y el suelo se puede ignorar.



Problema similar: 3.6.

8. Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(a) El tiempo que le toma a un objeto lanzado hacia arriba alcanzar la mitad de su altura máxima es igual al tiempo que le toma caer desde la mitad de su altura máxima hasta el punto en que fue lanzado.

(b) La rapidez inicial de un objeto lanzado hacia arriba no es diferente a la rapidez del objeto cuando ha caído hasta al punto en que fue lanzado.

(c) Un movimiento de lanzamiento vertical sólo se diferencia de un movimiento en caída libre por el hecho de que en el caso de lanzamiento vertical, la rapidez inicial no es cero.

(d) En el lanzamiento vertical, la rapidez y la velocidad son cero cuando el objeto alcanza su altura máxima.

(e) Si conocemos el tiempo total de vuelo en un caso de lanzamiento vertical, y conocemos la altura del lanzamiento, podemos hallar la velocidad inicial.

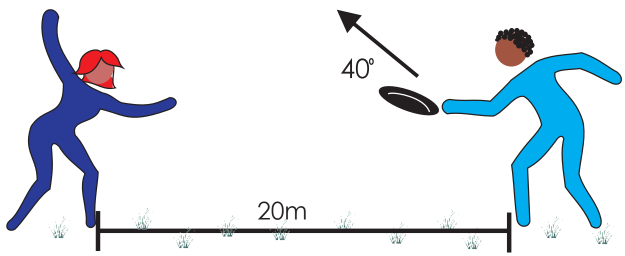
Problema similar: 3.8.

9. John lanza un *frisbee* a Paola. Suponga que el ángulo inicial del lanzamiento es 40°, y que la altura a la que Paola alcanza el *frisbee* es de 1.5 metros. Además, la distancia que los separa es de 20 metros.

(a) ¿Cuál es la rapidez inicial del *frisbee*?

(b) ¿Cuál es la velocidad final?

(c) ¿Cuál es la altura máxima y el tiempo de altura máxima del *frisbee*?



Problema similar: 3.11.

10. Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(a) En un movimiento parabólico, lo que sucede en Y es como lo que sucede en un caso de caída libre.

(b) El tiempo de vuelo total es igual a dos veces el tiempo de altura máximo si la altura inicial y final son la misma.

(c) Cuanto mayor sea la rapidez con la que es lanzado un objeto en X, mayor será el tiempo que se demora en caer.

(d) La distancia total recorrida en Y en un movimiento parabólico no depende de la velocidad en X.

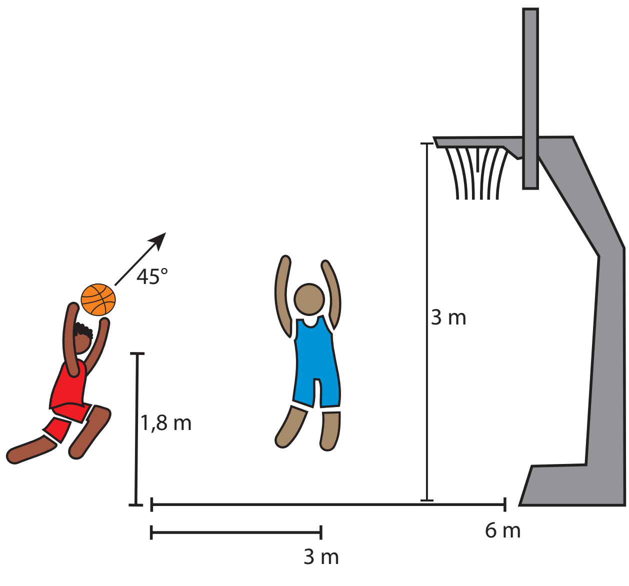
(e) Si conoce la velocidad en X y la velocidad en Y en cierto tiempo, puede hallar la velocidad total en ese tiempo.

Problema similar: 3.13.

11. En un partido de baloncesto, Michael lanza el balón con un ángulo inicial de 45°, desde una altura de 1.8 metros y a una distancia de 6 metros del aro, como se indica en el dibujo. El balón va directo a meterse al aro, que tiene una altura de 3 metros, pero un segundo después de ser lanzado, Bryan lo alcanza a interceptar. Bryan está a 3 metros de Michael.

(a) ¿A qué altura Bryan interceptó el balón?

(b) ¿Cuál es la velocidad del balón justo cuando Bryan lo toca?



Problema similar: 3.14.

12. Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(a) Si conoce la altura máxima alcanzada por el objeto y la velocidad total inicial de lanzamiento, puede hallar el ángulo de lanzamiento.

(b) El ángulo de lanzamiento para el cual un objeto recorre la máxima distancia posible es 45 grados.

(c) Si la velocidad hacia arriba en el lanzamiento de un objeto A es de mayor magnitud que la velocidad hacia arriba en el lanzamiento de un objeto B, entonces sabemos que A va a volar durante más tiempo que B.

(d) Si un objeto lleva volando un tiempo dado por $3v_{iy}/2g$, donde v_{iy} es la rapidez inicial en Y, podemos estar seguros de que el objeto ha alcanzado la altura máxima.

(e) Si nos dicen la altura inicial de un lanzamiento parabólico, y nos dicen el tiempo de altura máximo, podemos hallar la velocidad del objeto en cualquier tiempo que nos pidan.

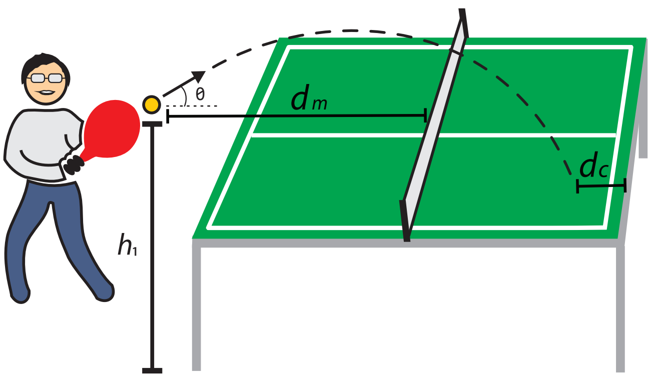
Problema similar: 3.17.

13. En un partido de tenis de mesa, Sebastián le pega a la bola cuando está a una altura h_1 sobre el suelo. El ángulo del impacto es de θ con respecto a una línea horizontal. La pelota sigue un movimiento parabólico y cae a una distancia d_c del extremo final de la mesa, como se indica en el dibujo. Entre el punto de impacto y la malla hay una distancia horizontal d_m, y la bola pasa a una altura h_b por encima de la malla. Además, la mesa mide $3/2\ d_m$.

(a) Escriba una expresión para la rapidez inicial de la bola.

(b) Escriba una expresión para la altura de la malla.

(c) Escriba una expresión para el ángulo entre la mesa y la velocidad final de la bola cuando la bola cae en la mesa.



Problema similar: 3.16.

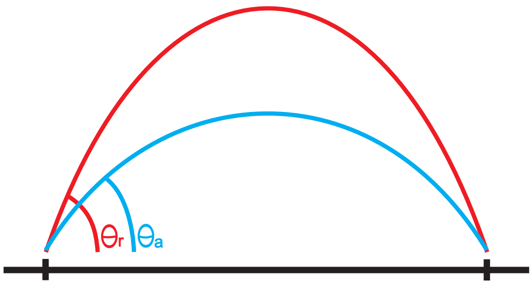
14. Considere las dos trayectorias parabólicas indicadas en el dibujo, que corresponden a dos lanzamientos de una pelota. Ambas pelotas alcanzan la misma distancia horizontal y son lanzadas desde la misma altura. Suponga que el ángulo de lanzamiento de la pelota que alcanza mayor altura es θ_r y el ángulo de lanzamiento de la otra pelota es θ_a. Además, suponga que $\frac{\sin(2\theta_r)}{\sin(2\theta_a)} = 1.5$.

(a) ¿Cuál es la razón entre la rapidez de lanzamiento de la pelota azul sobre la rapidez de lanzamiento de la pelota roja?

Ayuda: tenga en cuenta que $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$.

(b) ¿Cuál es la razón entre las alturas máximas?

(c) ¿Llegan las pelotas al mismo tiempo a la altura máxima, y si no, cuál llega primero?

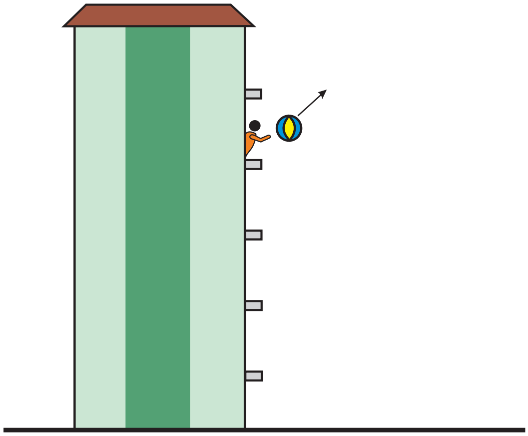


Problemas similares: 3.11, 3.14.

15. Alguien lanza desde un edificio una pelota con una velocidad inicial de $\vec{v} = (5 \text{ m/s})\hat{y}$.

(a) ¿Cuál será la velocidad en Y al cabo de 4 segundos?

(b) ¿Cuál será la altura de la pelota cuando la velocidad en Y es la mitad de la hallada en (a)?



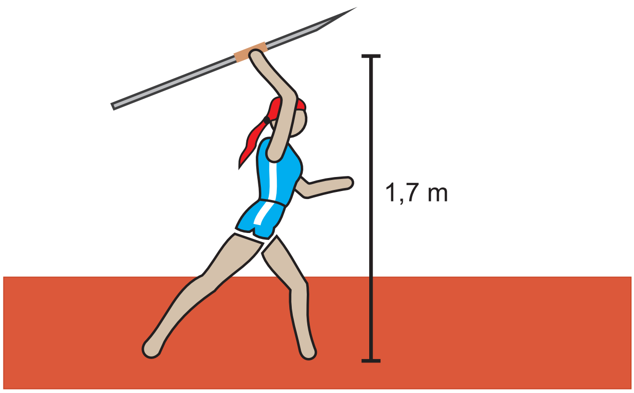
Problemas similares: 3.3, 3.11.

16. Considere el lanzamiento de jabalina en los Juegos Olímpicos de la atleta de Grecia, que se muestra en el dibujo. La altura inicial del lanzamiento es de 1.7 metros. La rapidez inicial del lanzamiento es de 21 metros por segundo.

(a) Si a los dos segundos de estar en el aire la jabalina tiene una rapidez de 20 metros por segundo y si todavía no ha alcanzado la altura máxima, ¿cuál fue el ángulo de lanzamiento?

(b) ¿Cuál es la altura de la jabalina tres segundos después del lanzamiento?

(c) ¿Cuál es la distancia total recorrida?

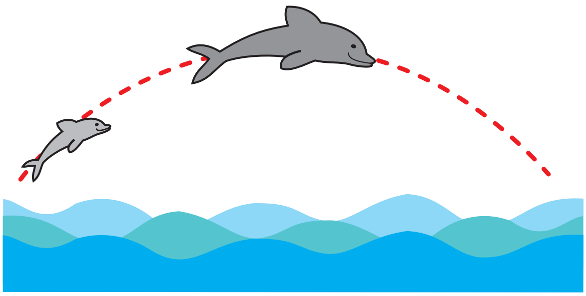


Problema similar: 3.19.

17. Dos delfines saltan en el mar, siguiendo un movimiento parabólico. El delfín más grande salta medio segundo antes que el delfín más pequeño. La rapidez inicial del salto del delfín más grande es de 10 metros por segundo, y la del pequeño es de 12 metros por segundo. El ángulo inicial del salto es de 10 grados para el grande y de 8 grados para el pequeño.

(a) ¿A qué distancia está el delfín grande del pequeño cuando el grande está en su altura máxima?

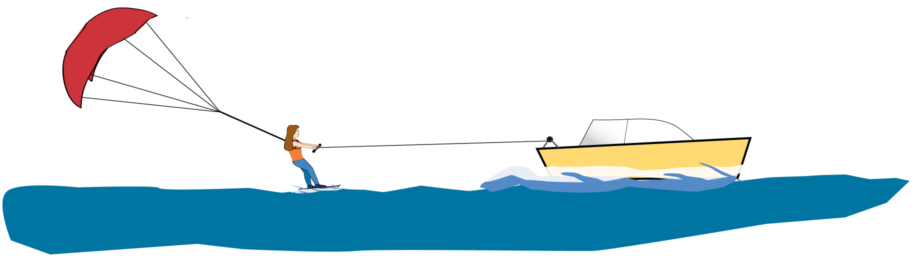
(b) ¿Cuál es la velocidad de ambos delfines en ese momento?



Problema similar: 3.20

Capítulo 4

Fuerzas



Problema (teórico) 4.1.

Palabras clave: leyes de Newton, masa, segunda ley en términos de las componentes.

(a) Explique las tres leyes de Newton.

(b) Escriba la segunda ley de Newton en términos de las componentes X y Y de la fuerza y de la aceleración para el caso en que haya una sola fuerza.

(c) Responda (b) para el caso en que haya más de una fuerza.

(d) ¿Qué unidades tiene la fuerza?

Solución

(a)

***Primera ley*:**

Un cuerpo en reposo o que se mueve con velocidad constante seguirá en reposo o seguirá moviéndose con velocidad constante a menos que una fuerza sea aplicada sobre él. Esta fuerza cambiará su estado de movimiento; si estaba en reposo el cuerpo se comenzará a mover, o si estaba moviéndose con velocidad constante el cuerpo cambiará su velocidad. Como todos los cuerpos que se mueven con velocidad constante siguen un movimiento en línea recta con rapidez uniforme (nota 2.7), esta ley dice que un cuerpo va a dejar de moverse en línea recta o va a dejar de tener rapidez constante si una fuerza actúa sobre él.

Nota 4.1. Primera ley de Newton

Un cuerpo que tiene velocidad constante va a seguir teniéndola a menos que una fuerza actúe sobre él.

***Segunda ley*:**

Supongamos que sobre un objeto se ejerce una sola fuerza. En ese caso, la segunda ley de Newton afirma tres cosas: (1) La magnitud de la aceleración del objeto es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada. (2) La dirección de la aceleración del objeto es la dirección de la fuerza sobre el objeto (la fuerza y la aceleración son vectores, así que tienen dirección). (3) La magnitud de la aceleración del objeto es inversamente proporcional a la masa (cuanta más masa menos aceleración). La formulación matemática de esta ley es

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{1}$$

Si dividimos la anterior ecuación por la masa, podemos ver que

$$\vec{F}/m = \vec{a}, \tag{2}$$

lo que muestra que *la aceleración es proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa del objeto*. Como la aceleración es inversamente proporcional a la masa, la masa se puede entender como una medida de la resistencia de un cuerpo para acelerar (es decir, para cambiar su velocidad). Por ejemplo, es mucho más difícil empujar un elefante desde el reposo que empujar un gato, pues el elefante tiene una masa mayor así que es más difícil cambiarle su velocidad (es más difícil hacerlo acelerar).

Es importante recalcar que un objeto puede acelerar sin cambiar la magnitud de la velocidad, pues si cambia la dirección en que se mueve cambia la dirección de su velocidad. Así que la masa también es una medida de la resistencia de un cuerpo para cambiar su dirección de movimiento. Por ejemplo, es más difícil desviar un bus que desviar una persona, precisamente porque el bus tiene más masa.

Nota 4.2. La masa mide la resistencia para cambiar la velocidad

La masa es una medida de la resistencia que ejerce un cuerpo para cambiar su velocidad (ya sea para cambiar la magnitud de la velocidad o la dirección). Cuanto mayor sea la masa, más difícil es cambiar la velocidad del objeto.

Hasta este punto sólo hemos explicado la segunda ley de Newton en el caso en que haya una sola fuerza actuando sobre el objeto. Supongamos ahora que sobre el objeto hay más de una fuerza. En este caso, la segunda ley de Newton afirma que la *suma vectorial* de todas las fuerzas es igual a la aceleración del objeto multiplicada por la masa. La suma vectorial de la fuerza se conoce como *fuerza neta*. Matemáticamente, para el caso de más de una fuerza, la segunda ley se formula así:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}, \tag{3}$$

donde $\sum$ indica que se deben sumar las fuerzas. El término $\sum \vec{F}$ (la suma de todas las fuerzas) es la *fuerza neta* sobre el objeto.

***Tercera ley*:**

Si un objeto A le hace una fuerza $\vec{F}$ a un objeto B, entonces el objeto B reacciona produciendo una fuerza con la misma magnitud que $\vec{F}$ y con sentido contrario a $\vec{F}$ sobre el objeto A. Es decir, para toda fuerza siempre existe una fuerza de igual magnitud y sentido contrario. Por ejemplo, si le pegamos un puño a una pared (nuestro puño es el objeto A y la pared es el objeto B), nuestra mano produce una fuerza en la pared pero la pared también produce una fuerza de igual magnitud en nuestra mano. Cuanto más duro le peguemos un puño a la pared, más nos duele porque mayor es la magnitud de la fuerza con que "reacciona" la pared. Si denominamos $\vec{F}_a$ a la fuerza que el objeto A ejerce sobre el objeto B y $\vec{F}_b$ a la fuerza de reacción que el objeto B le hace al objeto A, entonces podemos escribir matemáticamente la relación entre ambas fuerzas así:

$$\vec{F}_a = -\vec{F}_b. \tag{4}$$

La anterior ecuación indica que la fuerza $\vec{F}_a$ que le hace el objeto A a B es igual en magnitud, pero tiene sentido contrario (por eso el signo menos), a la fuerza $\vec{F}_b$ de reacción que le hace el objeto B al objeto A.

Nota 4.3. Tercera ley de Newton

La fuerza $\vec{F}_a$ que le hace un objeto A a un objeto B es igual en magnitud, pero tiene sentido contrario, a la fuerza $\vec{F}_b$ de reacción que le hace el objeto B al objeto A: $\vec{F}_a = -\vec{F}_b$.

(b) Como acabamos de explicar, si sobre un cuerpo actúa una sola fuerza, la segunda ley nos da la siguiente ecuación:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{5}$$

Como la fuerza y la aceleración son vectores, podemos escribir cada uno de estos en términos de sus componentes. Si $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$ son las componentes X y Y de la fuerza respectivamente, la fuerza se puede escribir como $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$. Para la aceleración también podemos hacer lo mismo: $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$. Por lo tanto, podemos escribir la ecuación (4) así:

$$\underbrace{\vec{F}_x + \vec{F}_y}_{\vec{F}} = m\underbrace{(\vec{a}_x + \vec{a}_y)}_{\vec{a}}. \tag{6}$$

Recordemos que si tenemos una igualdad entre vectores, las componentes X y Y de los vectores tienen que ser iguales (nota 1.18). Así que si separamos las componentes X y Y de la fuerza y de la aceleración, podemos deducir lo siguiente: la fuerza en X tiene que ser igual a la masa por la aceleración en X, y la fuerza en Y tiene que ser igual a la masa por la aceleración en Y:

$$\vec{F}_x = m\vec{a}_x \tag{7}$$

$$\vec{F}_y = m\vec{a}_y. \tag{8}$$

Cuidado: la masa no es un vector, así que no tiene componentes.

(c) Si sobre el objeto actúa más de una fuerza, entonces la segunda ley se escribe así:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}. \tag{9}$$

Ahora, cada fuerza se puede descomponer en X y Y, así que la anterior ecuación se puede escribir así:

$$\sum \underbrace{\vec{F}_x + \vec{F}_y}_{\vec{F}} = m\,\underbrace{(\vec{a}_x + \vec{a}_y)}_{\vec{a}}. \tag{10}$$

Esta es una igualdad entre vectores; a la izquierda tenemos el vector que resulta de sumar todas las fuerzas y a la derecha tenemos el vector aceleración. Así que de nuevo podemos dividir el análisis en lo que sucede en la dirección X y lo que sucede en la dirección Y. Pero a diferencia de la sección anterior, esta vez en la dirección X tenemos una suma de componentes en X (por cada fuerza tenemos una componente X) y en la dirección Y tenemos una suma de componentes en Y:

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \tag{11}$$

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y. \tag{12}$$

Si el lector no está seguro de por qué pasamos de (9) a (10) y a (11), puede considerar un ejemplo sencillo. Suponga que hay dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ actuando sobre un objeto. La segunda ley de Newton quedaría así:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{a}. \tag{13}$$

Ahora descomponemos todos los vectores:

$$\underbrace{\vec{F}_{1x} + \vec{F}_{1y}}_{\vec{F}_1} + \underbrace{\vec{F}_{2x} + \vec{F}_{2y}}_{\vec{F}_2} = m\,\underbrace{(\vec{a}_x + \vec{a}_y)}_{\vec{a}}. \tag{14}$$

Y como tenemos una ecuación vectorial, sabemos que las componentes X deben ser iguales entre sí, y las componentes Y también:

$$\vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} = m\vec{a}_x \tag{15}$$

$$\vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} = m\vec{a}_y. \tag{16}$$

Esto es precisamente lo que muestran las ecuaciones (10) y (11): la suma de las componentes X de las distintas fuerzas es igual a la masa por la componente X de la aceleración, y la suma de las componentes Y de la fuerza es igual a la masa por la componente Y de la aceleración.

Nota 4.4. Segunda ley de Newton

La segunda ley de Newton dice que la sumatoria total de fuerzas (la fuerza neta) sobre un cuerpo es igual a la masa por la aceleración del cuerpo: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$.

La segunda ley de Newton se puede escribir en términos de las componentes X y Y de las fuerzas y de la aceleración. Esta ley dice que la suma de fuerzas en X es igual a la masa por la aceleración X: $\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x$. Y dice que la suma de fuerzas en Y es igual a la masa por la aceleración en Y: $\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y$.

(d) Según la segunda ley de Newton, la fuerza es igual a la masa por la aceleración. En el Sistema Internacional de Unidades la masa tiene unidades de kilogramos y la aceleración tiene unidades de metro sobre segundo cuadrado. Así que la fuerza tiene unidades de kilogramos por metros sobre segundo cuadrado: $\mathrm{km} \times \mathrm{m/s^2}$. La unidad de fuerza se denomina *newton*. Un newton es un kilogramo por metro sobre segundo cuadrado.

Problema de repaso 4.2.

Palabras clave: leyes de Newton, rapidez constante contra velocidad constante.

Responda falso o verdadero y justifique respuesta:

(1) Si la suma de fuerzas sobre un cuerpo es cero, la aceleración es cero.

(2) Si la masa de un objeto A es mayor que la masa de un objeto B, y A y B tienen la misma aceleración, la fuerza neta sobre A es mayor que la fuerza neta sobre B.

(3) Si la rapidez es constante, la suma de fuerzas sobre un cuerpo tiene que ser cero.

(4) Si un objeto cambia la dirección del movimiento, podemos estar seguros de que la fuerza neta sobre el objeto es diferente de cero.

(5) Si una persona empuja una caja, la caja no se va a mover porque según la tercera ley de Newton la fuerza que la persona le hace a la caja se contrarresta con la fuerza que la caja hace sobre la persona.

Solución

(1) Verdadero. Según la segunda ley, si la suma de fuerzas es cero, la aceleración tiene que ser cero. Matemáticamente esto se puede ver así: si $\sum \vec{F}$ es cero, entonces la aceleración tiene que ser cero, pues ambas cantidades están relacionadas por la segunda ley:

$$\frac{\sum \vec{F}}{m} = \vec{a}. \tag{1}$$

(2) Verdadero. Según la segunda ley de Newton, es claro que la sumatoria de fuerzas sobre el objeto dividida por la masa es igual a la aceleración:

$$\frac{\sum \vec{F}}{m} = \vec{a}. \tag{2}$$

Por lo tanto, cuanto mayor sea la masa menor será la aceleración (ya sabíamos que la aceleración es inversamente proporcional a la masa). Así que si la aceleración de A y B son iguales pero la masa de A es mayor, entonces la sumatoria de fuerzas sobre A tiene que ser mayor que sobre B.

(3) Falso. Aun si la rapidez es constante, no podemos estar seguros de que la velocidad es constante y lo que interesa en la segunda ley de Newton es el *cambio en velocidad*, no de rapidez. Por ejemplo, puede suceder que el objeto

se mueva con rapidez constante pero esté cambiando la dirección en la que se mueve, así que la velocidad no sería constante y entonces el objeto tendrá aceleración. Así que si la rapidez es constante, no podemos estar seguros de que la suma de fuerzas sea cero, porque no podemos estar seguros de que la aceleración sea cero.

(4) Verdadero. Si el objeto cambia la dirección del movimiento entonces tiene aceleración porque la velocidad está cambiando (recordemos que si la dirección o la rapidez cambia, o si ambas cosas cambian, la velocidad cambia). Y si el objeto tiene aceleración entonces, según la segunda ley de Newton, podemos saber que hay una fuerza neta diferente de cero actuando sobre el objeto.

(5) Falso. Es verdad que según la tercera ley de Newton, la fuerza que la caja hace sobre la persona es igual en magnitud y tiene dirección contraria a la fuerza que la persona hace sobre la caja. Pero esto no evita que la caja se mueva porque *el movimiento de la caja depende de las fuerzas que haya sobre ella y en nada importan las fuerzas que la caja hace*. La fuerza que hace la caja sobre la persona no actúa sobre la caja (actúa sobre la persona), así que esa fuerza no contrarresta la fuerza que la persona ejerce sobre la caja.

Esta última respuesta sugiere que es importante entender dos cosas. Primero, que la tercera ley de Newton relaciona fuerzas que actúan sobre diferentes objetos. La fuerza que A le hace a B es igual en magnitud a la fuerza que B le hace a A, pero la fuerza que hace A actúa sobre B y la fuerza que hace B actúa sobre A, *no actúan ambas sobre el mismo cuerpo*. Y segundo, la aceleración de un objeto depende sólo de las fuerzas aplicadas sobre este, no de las fuerzas que dicho objeto ejerce.

Nota 4.5. La aceleración de un objeto no depende de las fuerzas que hace el objeto

La aceleración de un objeto sólo depende de las fuerzas que actúan sobre ese objeto. En nada afecta a la aceleración del objeto las fuerzas que este ejerce sobre otros objetos.

Problema (teórico) 4.3.

Palabras clave: ley de gravedad, peso, masa, fuerza normal, fuerza de fricción estática, fuerza de fricción dinámica.

(a) Explique la fuerza de gravedad y escriba la ecuación que representa la magnitud de esta fuerza.

(b) Explique qué es el peso y cómo se diferencia de la masa.

(c) Explique qué es la fuerza normal.

(d) Explique qué es la fuerza de fricción y cuál es la diferencia entre la fuerza de fricción dinámica y la fuerza de fricción estática.

Solución

(a) La fuerza de gravedad resulta de la interacción entre la masa de los objetos, es proporcional a la masa de estos y siempre es atractiva (siempre atrae a los objetos). La magnitud de la fuerza gravitacional es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los objetos, y directamente proporcional a la masa de los objetos. Su magnitud está dada por

$$\left\|\vec{F}_g\right\| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1}$$

donde m_1 es la masa de un objeto, m_2 la masa del otro objeto, y G es la constante de gravitación universal que es igual a

$$G = 6.67384 \times 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}. \tag{2}$$

(b) El peso es una fuerza que resulta de la atracción gravitacional entre nuestro planeta y los objetos (en el problema 4.4 estudiaremos en detalle la relación entre la fuerza gravitacional y el peso). El peso (que vamos a representar con $\vec{W}$) de un objeto está dado por

$$\vec{W} = m\vec{g}, \tag{3}$$

donde m se refiere a la masa del objeto y g es la magnitud de la aceleración de la gravedad cuyo valor en la superficie terrestre es aproximadamente

$$g = 9.81\ \text{m/s}^2. \tag{4}$$

Como se ve en la ecuación (3), el peso es proporcional a la masa, y la dirección del peso es la misma que la dirección de $\vec{g}$, es decir, hacia el centro de la Tierra.

Es muy importante diferenciar el *peso* de la *masa*. La masa es una *cantidad escalar* y, como dijimos, es una medida de la resistencia de un cuerpo para cambiar su estado de movimiento (nota 4.2). En cambio el peso es una *cantidad vectorial*, es la fuerza con que la Tierra "hala" o "atrae" un objeto.

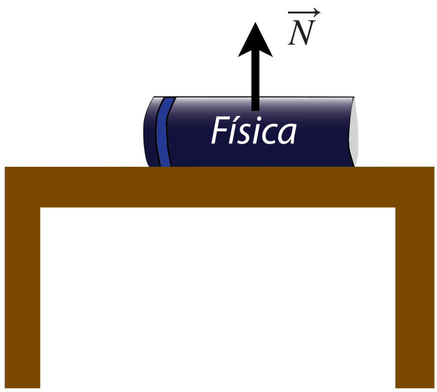
Cuando nosotros nos pesamos, estamos midiendo nuestra masa pero no el peso; la magnitud del peso es mg, así que para calcular nuestro peso debemos multiplicar la masa (que es lo que marca la balanza) por g. Por ejemplo, si nuestra balanza marca 60 kilogramos, la magnitud de nuestro peso es de 60 kg $\times$ 9.81 m/s^2 = 588.6 N.

Nota 4.6. Peso y masa

El peso es la fuerza que la Tierra le hace a los objetos como consecuencia de la fuerza gravitacional. Esta fuerza apunta en la dirección del centro de la Tierra y tiene magnitud de mg, donde m es la masa del objeto y g es la aceleración gravitacional.

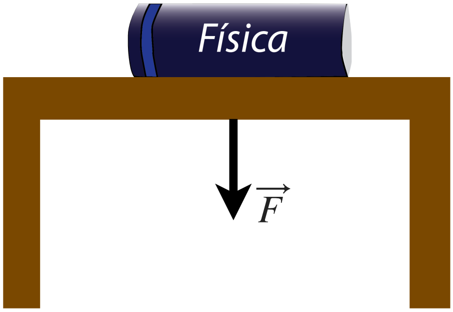
La masa no es lo mismo que el peso. La masa es una medida de la resistencia a cambiar el estado de movimiento y es una cantidad escalar, no vectorial como el peso.

(c) La fuerza normal es una fuerza que resulta de la interacción entre un objeto y una superficie. Cuando un objeto se apoya sobre una superficie, la superficie le ejerce una fuerza al objeto. El origen de esta fuerza es la fuerza electromagnética (los átomos de la superficie se repelen con los átomos del objeto). *La fuerza normal siempre apunta desde la superficie hacia el objeto y es perpendicular a la superficie*. Por ejemplo, el libro del dibujo a continuación está apoyado sobre una mesa, así que la superficie de la mesa le debe de hacer una fuerza normal al libro:



La superficie sobre la que está el libro es la mesa, así que hay una fuerza perpendicular a la superficie de la mesa que apunta de la mesa hacia el libro.

Como dice la tercera ley de Newton, si un objeto A siente una fuerza por otro objeto B, entonces B también siente una fuerza por A, con la misma magnitud y sentido contrario. Por lo tanto, si el libro siente una fuerza normal debido a la mesa, la mesa siente una fuerza debido al libro. Esto se ilustra a continuación:



La mesa siente una fuerza igual en magnitud y en dirección contraria a la fuerza normal que ella ejerce sobre el libro.

En realidad, la fuerza $\vec{F}$ también es una fuerza normal porque es la fuerza que la superficie inferior del libro ejerce sobre la mesa. Como regla general podemos decir que *siempre que un objeto A le produce una fuerza normal a un objeto B, el objeto B le produce una fuerza normal de igual magnitud y sentido contrario al objeto A*.

Por último, es importante resaltar que para que se dé una fuerza normal el objeto no tiene que estar encima de la superficie. La superficie podría estar encima del objeto, o al lado, o en diagonal. Lo que importa es que estén en contacto.

Nota 4.7. Fuerza normal

Cuando un objeto está en contacto con una superficie, la superficie le ejerce una *fuerza normal* al objeto. Esta fuerza es perpendicular a la superficie y apunta desde esta hacia el objeto. Si un objeto A le hace una fuerza normal a un objeto B, entonces según la tercera ley de Newton el objeto B le hace una fuerza normal al objeto A. Ambas fuerzas normales tienen la misma magnitud pero direcciones opuestas.

(d) La fuerza de fricción es una fuerza que resulta de la interacción entre la superficie de dos objetos. Así como la fuerza normal, el origen de las fuerzas de fricción es la fuerza electromagnética entre los átomos de las superficies que están en contacto. La fuerza de fricción depende de los materiales de la superficie y del objeto. Por ejemplo, si movemos una mesa sobre una pista de hielo la fricción será mucho menor que si la movemos en un suelo de cemento.

El coeficiente de fricción es un número que cuantifica la fricción que hay entre un objeto y una superficie y, por supuesto, este número depende tanto de los materiales del objeto como aquellos de la superficie sobre la que se mueve el objeto. Hay dos tipos de fuerzas de fricción: fuerzas de fricción dinámica y fuerzas de fricción estática. Primero, explicaremos la fuerza de fricción dinámica.

La fuerza de fricción dinámica es la fricción que siente un objeto que se está moviendo con respecto a una superficie (por eso se llama *dinámica*). Esta fuerza tiene dirección contraria a la dirección en la que se mueve el objeto sobre la superficie. Por ejemplo, si arrastramos una caja sobre el suelo a lo largo de la dirección positiva del eje X, la fuerza de fricción dinámica irá en el sentido negativo del eje X (en este ejemplo, la superficie es el suelo). La magnitud de la fuerza de fricción dinámica está dada por la fórmula

$$F_r = \mu_d N, \tag{5}$$

donde μ_d es el coeficiente de fricción dinámico y N es la magnitud de la fuerza normal que ejerce la superficie sobre el objeto.

La fuerza de fricción estática es la fuerza de fricción que una superficie le hace a un objeto cuando el objeto no se mueve con respecto a la superficie. *La dirección de la fuerza de fricción estática depende de las fuerzas que actúan sobre el objeto*. Específicamente, la fuerza de fricción estática se opone al movimiento que las otras fuerzas intentan darle al objeto; si las otras fuerzas intentan mover el objeto hacia el sur, la fuerza de fricción estática se opone apuntando hacia el norte. Si las otras fuerzas intentan mover al objeto hacia la derecha, la fuerza de fricción estática apuntará hacia la izquierda. Así, esta fuerza siempre se resiste a la dirección en la que otras fuerzas tienden a mover el objeto. Si las fuerzas logran mover el objeto, ya no tenemos una fuerza de fricción estática sino dinámica.

Algo importante de la fuerza de fricción estática es que *no es constante sino que su magnitud depende de la magnitud de las otras fuerzas que actúan sobre el objeto*. Por ejemplo, cuando intentamos empujar una mesa, podemos empezar por ejercer muy poca fuerza y la mesa no se va a mover porque la fuerza de fricción estática contrarresta la fuerza con la que intentamos empujar la mesa. Podemos incrementar la fuerza un poco y la mesa seguirá quieta, lo que quiere decir que la fuerza de fricción estática también aumentó (si no hubiera aumentado, entonces nuestra fuerza habría logrado mover la mesa). Si sigo aumentando la fuerza que le hago a la mesa para moverla, seguirá aumentando también la fuerza de fricción estática, hasta que llegará un punto para el cual la fuerza de fricción habrá llegado a su máxima magnitud. En ese punto, si incrementamos levemente la fuerza que estamos haciendo, la mesa comenzará a moverse. En este límite, en el cual la fuerza de fricción es máxima, en el cual el objeto está a punto de empezar a moverse, la magnitud de la fuerza de fricción estática está dada por

$$F_r = \mu_e N, \tag{6}$$

donde μ_e es el coeficiente de fricción estático entre el objeto y la superficie. Notemos que la magnitud de esta fuerza es parecida a la de la fuerza de fricción dinámica, sólo que en la dinámica el coeficiente es μ_d y aquí es μ_e.

En todas las situaciones de este libro nos interesa la fuerza de fricción estática cuando el objeto está a punto de moverse, es decir, cuando la fuerza que le hacemos al objeto hace que la fricción estática sea máxima —en ese caso podemos usar la ecuación (6)—.

Para resumir, nos debe quedar claro que la fuerza de fricción estática surge en los casos en los que el objeto está en reposo sobre una superficie y una fuerza lo intenta mover, mientras que la fuerza de fricción dinámica surge en los casos en que el objeto ya se mueve con respecto a la superficie.

Nota 4.8. Fuerza de fricción dinámica y estática

Cuando un objeto está en contacto con una superficie se da una fuerza de fricción entre la superficie y el objeto. Si el objeto se está moviendo sobre la superficie entonces la fuerza de fricción es *dinámica* y apunta en la dirección contraria al movimiento del objeto sobre la superficie.

La magnitud de la fuerza de fricción dinámica es $F_r = \mu_d N$, donde N es la magnitud de la fuerza normal que le hace la superficie al objeto y μ_d es el coeficiente de fricción dinámico (que depende de los materiales).

Si el objeto está en reposo sobre la superficie y otras fuerzas intentan moverlo, aparece una fuerza de fricción estática que apunta en la dirección contraria a la dirección en la que las fuerzas intentan mover el objeto.

Esta fuerza es variable; cuanto mayor sea la magnitud de las fuerzas que intentan mover el objeto, mayor será la fuerza de fricción estática oponiéndose a las fuerzas. Cuando la fuerza de fricción estática es máxima (cuando las otras fuerzas ya están a punto de mover el objeto), la magnitud de la fuerza de fricción estática es

$$F_r = \mu_e N, \tag{7}$$

donde μ_e es el coeficiente de fricción estático (que depende de los materiales).

Cuidado: si en un problema no nos dicen si el coeficiente de fricción es estático o dinámico, podemos deducirlo dependiendo de si el objeto se está moviendo sobre la superficie o si no lo está haciendo.

Es bueno resaltar que según la física moderna, en la naturaleza sólo hay cuatro fuerzas fundamentales; la fuerza electromagnética, la fuerza de gravedad, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte. El peso, la fuerza normal y las fuerzas de fricción *no son fuerzas fundamentales*, son más bien efectos macroscópicos de las fuerzas fundamentales.

Problema 4.4.

Palabras clave: ley de gravedad, peso, variación del peso con la altura, derivación de la aceleración gravitacional g.

(a) Use la ecuación de la magnitud de la fuerza de gravedad para escribir una expresión para la magnitud de la fuerza que la Tierra le hace a un objeto que está a una altura h sobre el nivel del mar. Suponga para este problema que el radio de la Tierra es R_T, la masa de la Tierra es m_T y la masa del objeto es m_o. Además, tenga en cuenta que la distancia que debe usar en la ecuación es la que hay entre el objeto y el centro de la Tierra.

(b) Con base en (a), use la segunda ley de Newton para escribir una expresión para la aceleración del objeto suponiendo que la única fuerza sobre él es la fuerza de gravedad.

(c) Muestre que si h es despreciable con respecto a R_T, la aceleración que acaba de hallar se puede aproximar a $\vec{g}$ y la magnitud de la fuerza hallada en (a) se puede aproximar a mg. Para hacer esto debe usar los valores de la masa de la Tierra, del radio de la Tierra y de G, que son, respectivamente: 5.972×10^{24} kg, 6371 km y $G = 6.67384 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 (en su respuesta trate de usar al menos 4 decimales).

(d) Ahora responda (a) y (b) con valores numéricos para diferentes alturas del objeto si el objeto tiene una masa de 60 kilogramos. Responda (a) y (b) para h igual a 0 metros, para h igual a 1000 metros, para h igual a 5000 metros y para h igual a 30 000. ¿Cambian mucho los resultados de acuerdo a la altura?

Solución

¿Qué información nos dan?

(a) y (b) El objeto está a una altura h sobre el nivel del mar y tiene masa m_o. El radio de la Tierra es R_T, la masa de la Tierra es m_T. Además, nos dicen que la distancia que debemos usar es la distancia que hay entre el objeto y el centro de la Tierra.

(c) Suponga que h es despreciable con respecto a R_T. El radio de la Tierra es de 6371 km, la masa de la Tierra es de 5.972×10^{24}kg y la constante de gravitación universal es $G = 6.67384 \times 10^{24}\text{Nm}^2/\text{kg}^2$.

(d) Una altura h de: 0 metros, 1000 metros, 5000 metros y 30 000 metros. La masa del objeto es de 60 kilogramos.

¿Qué nos piden?

(a) Una expresión para la magnitud de la fuerza que le hace la Tierra a un objeto.

(b) Una expresión para la aceleración del objeto suponiendo que la única fuerza es la hallada en (a).

(c) Mostrar que si h es despreciable con respecto al radio de la Tierra, la aceleración hallada en (b) es $\vec{g}$ y la magnitud de la fuerza hallada en (a) se puede aproximar a mg.

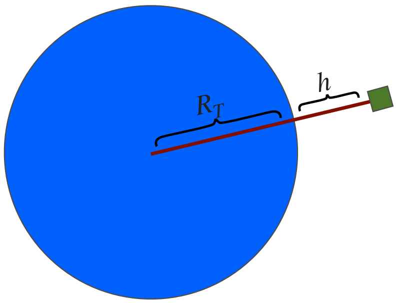
(d) Responder (a) y (b) con valores numéricos para diferentes alturas. Comentar los resultados.

(a) Para escribir una expresión para la magnitud de la fuerza de gravedad que la Tierra le hace a un objeto necesitamos usar la ecuación de la magnitud de la fuerza de gravedad que, como vimos en la sección (a) del problema 4.3, es

$$\left\|\vec{F}_g\right\| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1}$$

donde m_1 es la masa de uno de los objetos, m_2 la masa del otro objeto y r la distancia entre ambos. En este caso nos interesa la distancia que hay entre un objeto y el centro de la Tierra.

Como desde el centro de la Tierra hasta la superficie de la Tierra (el nivel del mar) hay una distancia R_T (el radio de la Tierra), y como el objeto está a una altura h sobre la superficie de la Tierra, entonces la distancia entre el centro de la Tierra y el objeto es $R_T + h$, como se aprecia en la siguiente figura:



La distancia entre el centro de la Tierra y el objeto es $R_T + h$.

Si usamos esta distancia en la ecuación (1) y si tenemos en cuenta que la masa del objeto es m_o y la masa de la Tierra es m_T, entonces la ecuación (1) queda

$$\left\|\vec{F}_g\right\| = G\frac{m_o m_T}{\underbrace{(R_T + h)^2}_{r}}. \tag{2}$$

Esta es la expresión para la magnitud de la fuerza de gravedad entre el objeto y la Tierra.

(b) Ahora debemos escribir una expresión para la aceleración del objeto teniendo en cuenta el resultado anterior. Recordemos que según la segunda ley de Newton, la aceleración de un objeto es proporcional a la suma de fuerzas:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}. \tag{3}$$

En este caso la única fuerza que actúa sobre el objeto es la fuerza de gravedad, que tiene la magnitud dada por la ecuación (2) y que apunta hacia el centro de la Tierra (el objeto se siente atraído hacia el centro de la Tierra). Si usamos la ecuación (2) en la ecuación (3), si tenemos en cuenta que la masa del objeto es m_o y si llamamos $\hat{r}$ a la dirección que apunta hacia el centro de la Tierra, tenemos

$$\underbrace{G\frac{m_o m_T}{(R_T+h)^2}}_{\|\vec{F}_g\|}\hat{r} = m_o\vec{a}. \tag{4}$$

Podemos cancelar la masa del objeto a ambos lados y así obtenemos una expresión para la aceleración del objeto:

$$G\frac{m_T}{(R_T+h)^2}\hat{r} = \vec{a}. \tag{5}$$

Notemos que esta aceleración depende de la masa de la Tierra, del radio de la Tierra, de la constante G, de la altura sobre la superficie a la que esté el objeto, *y no depende de la masa del objeto. Como la aceleración gravitacional no depende de la masa de los objetos, todos los objetos que estén a la misma distancia del centro de la Tierra tienen la misma aceleración gravitacional*. Un elefante y un lápiz que están a la misma altura sobre el nivel del mar caen con la misma aceleración (si la única fuerza que actúa sobre ambos es la fuerza de gravedad).

Nota 4.9. Todos los objetos tienen la misma aceleración gravitacional

Si sobre dos objetos actúa sólo la fuerza de gravedad, y ambos están a la misma altura, tienen la misma aceleración, sin importar su masa.

(c) Si la altura h es despreciable con respecto a R_T, entonces podemos ignorar h en la ecuación (2) y también en la ecuación (5) (cuando un número A es despreciable con respecto a otro número B, podemos ignorar el número A). Por ejemplo, 1 centavo es despreciable con respecto a 1 millón de pesos, así que en vez de escribir “1 millón y 1 centavo” podemos simplemente escribir “un millón” y olvidarnos del centavo. En este caso, en vez de escribir $R_T + h$ podemos escribir R_T. Si hacemos esto en la ecuación (2), obtenemos

$$\|\vec{F}_g\| = G\frac{m_o m_T}{(R_T)^2}. \tag{6}$$

Si hacemos lo mismo en la ecuación (5), llegamos a

$$G\frac{m_T}{(R_T)^2}\hat{r} = \vec{a}. \tag{7}$$

Ahora usemos en estas ecuaciones el hecho de que el radio de la Tierra es de 6371 kilómetros (debemos pasar esto a metros), la masa de la Tierra es de 5.972×10^{24}kg, y la constante de gravitación universal es $G = 6.67384 \times 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2$ (por ahora no reemplazamos la masa del objeto). Si hacemos esto en la ecuación (6), obtenemos

$$\begin{aligned}\left\|\vec{F}_g\right\| &= \underbrace{\left(6.67384 \times 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\right)}_{G}\frac{(m_o)\overbrace{(5.972 \times 10^{24}\ \text{kg})}^{m_T}}{(\underbrace{6371000\ \text{m}}_{R_T})^2} \\ &= (9.8192\ \text{m/s}^2)m_o.\end{aligned} \tag{8}$$

De hecho, notemos que $9.8193\ \text{m/s}^2$ es aproximadamente g, la magnitud de la aceleración de la gravedad que tanto usamos en los problemas de lanzamiento vertical y movimiento parabólico. O sea que en vez de escribir $9.8193\ \text{m/s}^2$ en la ecuación (8) podemos escribir el anterior resultado usando g[1]:

$$\left\|\vec{F}_g\right\| = m_o g. \tag{9}$$

Este resultado es muy importante, pues muestra que *la magnitud de la fuerza que siente un objeto debido a la atracción de la Tierra si la altura a la que está el objeto es despreciable con respecto al radio de la Tierra es mg*. ¡Así que hemos demostrado a partir de la ley de gravedad que la magnitud de la fuerza de gravedad sobre un objeto cerca de la superficie de la Tierra es el peso mg!

Ahora, si reemplazamos los valores en la ecuación (7), vamos a ver que la aceleración es igual a $\vec{g}$

$$\underbrace{\left(6.67384 \times 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\right)}_{G}\frac{\overbrace{(5.972 \times 10^{24}\ \text{kg})}^{m_T}}{(\underbrace{6371000\ \text{m}}_{R_T})^2}\hat{r} = (9.8192\ \text{m/s}^2)\hat{r} = \vec{g}. \tag{10}$$

[1] En realidad este es un valor aproximado de g porque no estamos teniendo en cuenta todos los decimales de la constante G, y porque la Tierra no es perfectamente esférica y entonces el radio usado es también aproximado. El valor estándar usado para g es de $9.80665\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Es decir, la aceleración de un objeto si la altura del objeto es despreciable con respecto al radio de la Tierra es 9.8193 $\mathrm{m/s^2}$, que es aproximadamente g, y apunta hacia el centro de la Tierra[2].

(d) Ahora debemos calcular la magnitud de la fuerza de gravedad y la aceleración para diferentes alturas (es decir, debemos usar las ecuaciones (2) y (5) con diferentes valores de h). Para una altura cero, la magnitud de la fuerza nos da simplemente mg, como dice la ecuación (9), así que obtenemos

$$\left\|\vec{F}_g\right\| = (60\ \mathrm{kg})(9.8192\ \mathrm{m/s^2}) = 589.1520\ \mathrm{N}. \tag{11}$$

Y la aceleración para esta altura es simplemente g como dice la ecuación (10):

$$\vec{g} = (9.8193\ \mathrm{m/s^2})\hat{r}. \tag{12}$$

Para una altura de 1000 metros la magnitud de la fuerza de gravedad es —ecuación (2)—

$$\left\|\vec{F}_g\right\| = \underbrace{\left(6.67384\times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}}\right)}_{G}\frac{\overbrace{(60\ \mathrm{kg})}^{m_o}\overbrace{(5.972\times 10^{24}\ \mathrm{kg})}^{m_T}}{(\underbrace{6371000\ \mathrm{m}}_{R_T}+\underbrace{1000\ \mathrm{m}}_{h})^2} = 588.972\ \mathrm{N}. \tag{13}$$

Notemos que la fuerza es parecida a la fuerza hallada con altura cero —ecuación (11)—. La aceleración en este caso es —usamos la ecuación (5)—

$$\vec{a} = \underbrace{\left(6.67384\times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}}\right)}_{G}\frac{\overbrace{(5.972\times 10^{24}\ \mathrm{kg})}^{m_T}}{(\underbrace{6371000\ \mathrm{m}}_{R_T}+\underbrace{1000\ \mathrm{m}}_{h})^2}\hat{r} = (9.8162\ \mathrm{m/s^2})\hat{r}. \tag{14}$$

Notemos que esta aceleración es parecida a la anterior —ecuación (12)—, ambas se aproximan a 9.81 $\mathrm{m/s^2}$. Esto muestra por qué en los problemas de lanzamiento vertical y movimiento parabólico siempre usamos 9.81 $\mathrm{m/s^2}$, pues casi no importa si el objeto está al nivel del mar o a otra altura, como 1000 metros.

[2] Recordemos que $\hat{r}$ apunta hacia el centro de la Tierra, lo que es consistente con la dirección de $\vec{g}$, pero en otros libros se usa $\hat{r}$ apuntando del centro de la Tierra hacia el objeto, así que en ese caso hay que poner un signo negativo en la ecuación (10).

Para una altura de 5000 metros (más o menos la altura del Nevado del Ruiz), la magnitud de la fuerza gravitacional es —de nuevo usamos la ecuación (2)—:

$$\|\vec{F}_g\| = \underbrace{\left(6.67384 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\right)}_{G} \frac{\overbrace{(60\ \mathrm{kg})}^{m_o}\overbrace{(5.972 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}^{m_T}}{(\underbrace{6371000\ \mathrm{m}}_{R_T} + \underbrace{5000\ \mathrm{m}}_{h})^2} = 588.2341\ \mathrm{N}. \quad (15)$$

Para efectos prácticos esta fuerza es casi igual a la hallada en las otras alturas examinadas (ni siquiera hay 1 newton de diferencia entre esta fuerza y la fuerza en el nivel del mar), lo cual es interesante porque estamos considerando un objeto que ya está a una gran altura sobre el nivel del mar. Como la fuerza es muy parecida, se puede usar mg incluso para objetos que están a 5000 metros de altura. Notemos que la fuerza es menor que la hallada en los otros problemas porque la distancia entre el objeto y el centro de la Tierra es mayor en este caso, y la fuerza de gravedad es inversamente proporcional a esta distancia.

La aceleración para un objeto a esta altura es —usando la ecuación (5)—

$$\vec{a} = \left(6.67384 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\right) \frac{(5.972 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{(6371000\ \mathrm{m} + 5000\ \mathrm{m})^2}\hat{r} = (9.8039\ \mathrm{m/s}^2)\hat{r}. \quad (16)$$

De nuevo, esto es casi 9.81 $\mathrm{m/s}^2$, aunque es levemente menor.

Finalmente, para 30 000 metros de altura la magnitud de la fuerza de gravedad sobre el objeto es

$$\|\vec{F}_g\| = \underbrace{\left(6.67384 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\right)}_{G} \frac{\overbrace{(60\ \mathrm{kg})}^{m_o}\overbrace{(5.972 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}^{m_T}}{(\underbrace{6371000\ \mathrm{m}}_{R_T} + \underbrace{30000\ \mathrm{m}}_{h})^2} = 583.6482\ \mathrm{N}. \quad (17)$$

Esta fuerza es casi 6 newtons menor que la fuerza al nivel del mar. Así que si vamos a analizar objetos que están a una altura tan grande como la altura de vuelo de un avión, ya no podemos aproximar el peso a mg sino que debemos usar la ecuación de la gravedad como hemos hecho en este caso. La aceleración para este caso es

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left(6.67384 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\right) \frac{(5.972 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{(6371000\ \mathrm{m} + 30000\ \mathrm{m})^2}\hat{r} \\ &= (9.7275\ \mathrm{m/s}^2)\hat{r}.\end{aligned} \quad (18)$$

La aceleración también nos da un poco menos que 9.81 m/s^2, aunque la diferencia sigue siendo mínima.

Nota 4.10. Dependencia de g y mg de la altura sobre el nivel del mar

Para los casos diarios en que la altura a la que está un objeto sobre el nivel del mar no es muy grande (por ejemplo, no es más de 5000 metros), está justificado usar el hecho de que la magnitud de la fuerza con que la Tierra atrae al objeto es el peso mg. Además, la aceleración del objeto si sólo actúa la atracción de la Tierra sobre él es g, que tiene un valor aproximado de 9.81 m/s^2 y apunta hacia el centro de la Tierra.

En casos en los que la altura del objeto es considerable (como 30 000 metros), no debemos aproximar el peso a mg, sino que debemos usar

$$\left\|\vec{F}_g\right\| = G\frac{m_o m_T}{(R_T + h)^2},$$

donde h es la altura del objeto con respecto al nivel del mar. De forma similar, para alturas muy grandes no debemos usar el hecho de que la aceleración es g sino que debemos calcular la aceleración usando

$$G\frac{m_T}{(R_T + h)^2}\hat{r} = \vec{a}.$$

En este libro, a menos que se diga lo contrario, siempre estará justificado usar el hecho de que el peso es mg y la aceleración producida por la Tierra sobre un objeto es $\vec{g}$.

Problema (teórico) 4.5.

Palabras clave: leyes de Newton, inercia, comportamiento de objetos en un vehículo.

Imagine que Ramón está parado en un bus de Transmilenio que lleva velocidad constante, y suponga que el bus frena de repente y Ramón se choca contra el pasajero del frente, que se llama Stefano. No ignore la fricción entre los pies de Ramón y el bus.

(a) Usando la primera ley de Newton, explique qué causa que Ramón se choque con Stefano.

(b) Suponga que Stefano no se cae ni se resbala; ¿qué diría la segunda ley de Newton para el caso de Stefano?

(c) Usando la primera y la segunda ley de Newton, explique qué pasa cuando uno está sentado en una silla y el bus acelera.

(d) Si no hubiera ninguna fricción entre el piso del bus y nuestros pies, y si no estuviéramos sujetados de nada más, ¿qué pasaría si el bus acelerara o frenara?

Solución

(a) La primera ley de Newton dice que todo cuerpo va a moverse con velocidad constante a menos que una fuerza actúe sobre él. Inicialmente el bus lleva velocidad constante, y como Ramón está parado en él, entonces Ramón también lleva velocidad constante. De repente el bus frena. Ahora, ¿por qué Ramón se choca contra Stefano? Porque todo cuerpo va a tender a moverse con la misma velocidad que lleva a menos que una fuerza actúe sobre él, así que Ramón va a tender a seguir con la misma velocidad que llevaba antes de que el bus frenara.

El punto importante es que no hay una fuerza que esté empujando a Ramón hacia Stefano. Todo lo contrario, la razón por la cual ambos se chocan es que no hay una fuerza que ayude a Ramón a frenar (es cierto que hay fricción, pero si Ramón se chocó con Stefano es porque esa fricción no fue suficiente). Es el contacto con Stefano lo que ayuda a Ramón a frenar.

(b) Si Stefano no se cae ni se resbala mientras el bus frena debe de ser porque hay alguna fuerza que está actuando sobre Stefano que le ayuda a frenar. Si no hubiera ninguna fuerza, por la primera ley de Newton Stefano debería seguir con velocidad constante mientras el bus frena, y se chocaría con alguien adelante, tal como le pasó a Ramón. Así que para que frene, la suma de fuerzas en X (suponemos que el bus se mueve en X) sobre Stefano tiene que ser diferente de cero, para que esas fuerzas le den la aceleración requerida a Stefano. ¿Qué fuerzas pueden estar ayudando a Stefano a frenar? Simplemente la fuerza que le transmiten las barandas del bus mientras él se coge de ellas, y también la fuerza de fricción de sus pies con el piso del bus.

(c) Antes de que el bus acelere, llevamos cierta velocidad constante, que es la misma que lleva el bus. Una vez este acelera, nosotros, como todos los objetos, tendemos a mantener la velocidad que llevábamos (eso es lo que dice la primera ley de Newton). Sin embargo, el espaldar de la silla o la fricción con el piso hace que no podamos seguir con la velocidad que llevábamos, y hacen que aceleremos. Es decir, la fuerza normal que nos hace el espaldar de la silla y la fuerza de fricción que el piso le hace a nuestros pies hacen que aceleremos.

Podemos llegar a sentir como si hubiera una fuerza que nos empuja contra el espaldar de la silla pero no hay tal fuerza. No hay nada que nos empuje hacia atrás, todo lo contrario, hay fuerzas que nos empujan hacia adelante mientras el bus acelera.

(d) Si no hubiera nada de fricción entre nuestros pies y el piso del bus, y si no estuviéramos sujetos de nada, no sentiríamos nada si el bus frena o acelera. No habría ninguna fuerza que nos empujara hacia adelante ni ninguna fuerza que nos ayudara a frenar; si el bus frenara nosotros "seguiríamos derecho", como si nada hubiera pasado (como dice la primera ley de Newton) hasta que, por supuesto, nos choquemos contra algo adelante. Del mismo modo, si el bus acelera nosotros no vamos a acelerar, hasta que nos choquemos con la parte de atrás del bus o con alguien detrás de nosotros.

Este caso demuestra que no hay necesidad de mencionar ninguna fuerza para explicar por qué nos vamos hacia adelante cuando el bus frena o por qué nos vamos hacia atrás cuando acelera; en realidad no nos vamos hacia adelante cuando el bus frena, más bien el bus está acercándose a nosotros y nosotros, como no podemos frenar, nos chocamos con las cosas que están adelante. Del mismo modo, cuando el bus acelera no nos estamos yendo hacia atrás sino que las cosas que están atrás de nosotros aceleran y nos alcanzan (y nosotros no podemos evadirlas porque no hay ninguna fuerza que nos ayude a acelerar).

Nota 4.11. ¿Por qué nos vamos hacia adelante o hacia atrás cuando un vehículo frena o acelera?

Cuando estamos dentro de un vehículo y este frena, tendemos a movernos o, de hecho, nos movemos hacia delante del vehículo como si nos estuvieran empujando. Esto no sucede como resultado de una fuerza que nos empuje sino porque según la primera ley de Newton todo objeto tiende a seguir moviéndose con la velocidad que tiene y desde el principio nos estábamos moviendo hacia delante (al frenar la parte delantera del vehículo se acerca a nosotros). De forma similar, cuando el vehículo acelera, sentimos que nos vamos hacia atrás o, de hecho, nos vamos hacia atrás del vehículo. De nuevo, no hay ninguna fuerza que nos empuje hacia atrás sino que, por la primera ley, tendemos a seguir con nuestra velocidad inicial que era menor a la que el vehículo tiene después (al acelerar la parte trasera del vehículo se acerca).

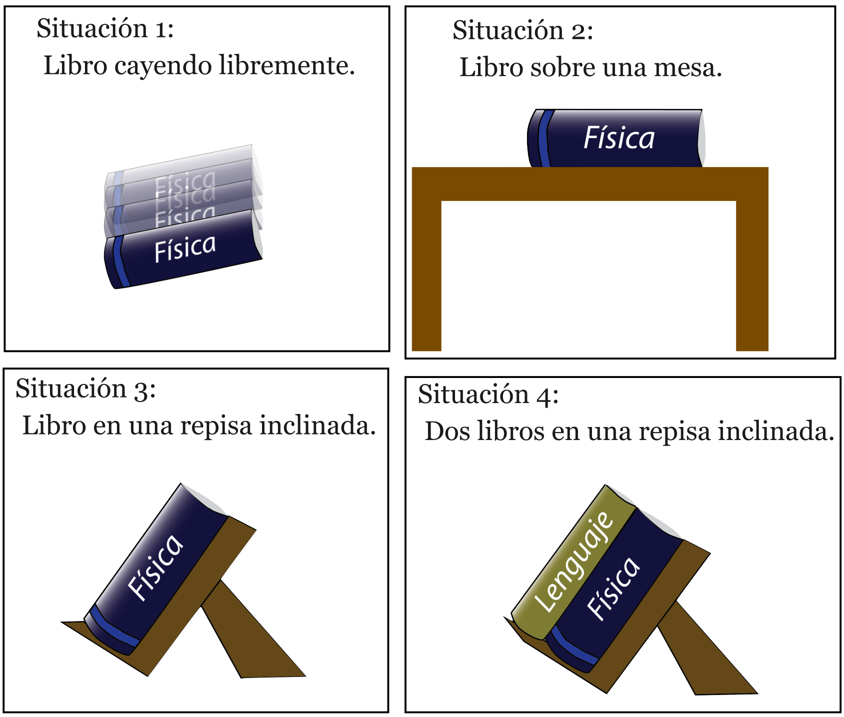
Problema (teórico) 4.6.

Palabras clave: diagrama de fuerzas.

(a) Explique qué es un diagrama de fuerzas y para qué sirve.

(b) A continuación va a encontrar unos libros en cuatro situaciones diferentes. Haga un diagrama de fuerzas para los libros en las cuatro situaciones.

(c) Descomponga los vectores de fuerza para la situación 3 usando dos sistemas de coordenadas diferentes: primero, uno en el cual el eje Y apunte hacia arriba de la página (de forma vertical) y el eje X apunte hacia la derecha de la página, y después use uno en el cual el eje X esté alineado con la parte larga de la repisa sobre la que está el libro y el eje Y esté alineado con la parte pequeña de la repisa.

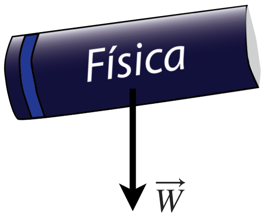


Solución

(a) Siempre que vamos a resolver un problema de fuerzas es muy importante realizar lo que se conoce como un *diagrama de fuerzas* (también se conoce como *diagrama de cuerpo libre*). Un diagrama de fuerzas es un dibujo en el cual debemos indicar las fuerzas que actúan sobre el objeto que vamos a analizar. Como las fuerzas son vectores, en nuestro diagrama las representamos con flechas, en las que la punta indica la dirección de la fuerza. El objetivo de los diagramas de fuerzas es ilustrar qué fuerzas actúan sobre los distintos objetos. Una vez realizado el diagrama de fuerzas será más sencillo plantear las ecuaciones de la segunda ley de Newton. Es muy importante entender que *el diagrama de fuerzas de un objeto sólo tiene en cuenta las fuerzas que actúan sobre el objeto, no las fuerzas que el objeto le hace a otros objetos. Esto es así porque la aceleración de un objeto sólo depende de las fuerzas que actúan sobre él* (nota 4.5).

(b) **Situación 1:**

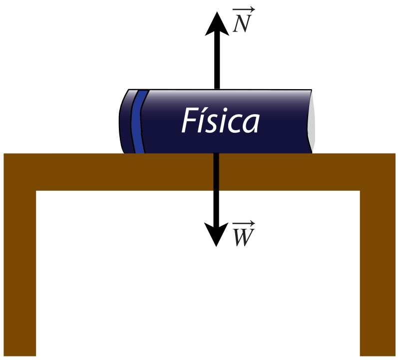
Como el libro cae libremente, sobre él solamente actúa el peso, así que el diagrama de fuerzas del libro es



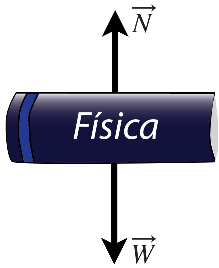
El peso es una fuerza que apunta hacia el suelo (hacia el centro de la Tierra).

Situación 2:

Como el libro está apoyado sobre la mesa, sobre el libro actúa una fuerza normal. Así, tenemos dos fuerzas sobre el libro, el peso y la fuerza normal que ejerce la superficie de la mesa:



También es común realizar el diagrama de fuerzas de modo que pintemos sólo el cuerpo que queremos analizar. Por ejemplo, en este caso podríamos pintar sólo el libro (sin la mesa) con sus respectivas fuerzas:



Muchos diagramas de fuerzas sólo pintan el objeto que nos interesa analizar.

Ambos diagramas son equivalentes (con la mesa o sin la mesa) y el lector puede usar el que más le convenga. Lo importante es siempre *pintar las fuerzas sobre el objeto que vamos a analizar*. En este libro vamos a pintar los diagramas de fuerzas usando el dibujo original, sin aislar el objeto, y cuando haya más de un objeto vamos a diferenciar las fuerzas de cada objeto con la forma o el color de las flechas. Además, es importante aclarar que no hay que pintar todas las fuerzas que actúan sobre todos los objetos, sino *sólo las fuerzas sobre los objetos que debemos analizar*. Por ejemplo, en este problema no hemos pintado las fuerzas sobre la mesa porque nos han dicho que realicemos un diagrama de fuerzas del libro. Por ejemplo, si hiciéramos el diagrama de fuerzas de la situación 2 para el libro y la mesa, sería el siguiente:

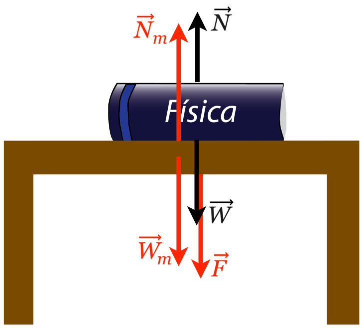
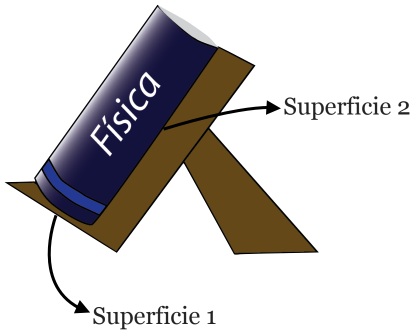


Diagrama de fuerzas para el libro y para la mesa. Notemos que sobre la mesa hay tres fuerzas (en rojo), el peso $\vec{W}_m$ de la mesa, la fuerza normal $\vec{N}_m$ que el piso le hace a la mesa, y otra fuerza normal $\vec{F}$ que es la fuerza que el libro le hace a la mesa. Por la tercera ley de Newton, la magnitud de $\vec{F}$ es igual a la magnitud de $\vec{N}$ que es la fuerza normal que la mesa le hace al libro (y tienen direcciones contrarias).

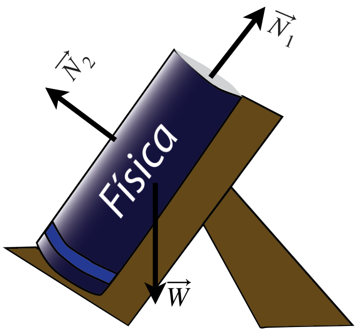
Situación 3:

En este caso debemos notar que el libro está apoyado sobre dos superficies. Una de las superficies es el soporte más largo de la repisa (llamémosla superficie 2), mientras la otra es la parte inferior de la repisa (llamémosla superficie 1). Esto se ilustra a continuación:



El libro está en contacto con dos superficies de la repisa, que hemos llamado *superficie 1* y *superficie 2*.

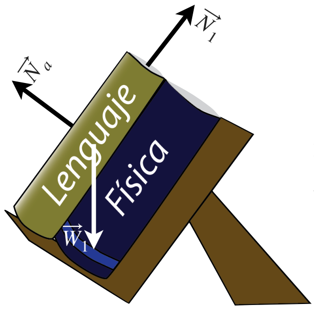
Como hay dos superficies, habrá dos fuerzas normales que actúan actúen sobre el libro. Si tenemos en cuenta que las fuerzas normales son perpendiculares a la superficie, el diagrama de fuerzas de esta situación queda así:



A la fuerza normal que ejerce la *superficie 1* la hemos llamado $\vec{N}_1$. Notemos que es perpendicular a la *superficie 1*. A la fuerza normal que ejerce la *superficie 2* la hemos llamado $\vec{N}_2$. En rojo hemos pintado el peso, que siempre va hacia abajo.

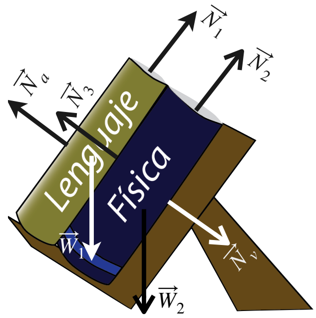
Situación 4

Esta vez tenemos dos libros. Analicemos primero el libro *Lenguaje*. Este libro está apoyado sobre dos superficies; por un lado está apoyado sobre el libro Física y por otro lado está apoyado sobre la parte inferior de la repisa, que en el problema anterior habíamos denominado superficie 1. El diagrama de fuerzas de este libro verde debe ser exactamente igual al diagrama que habíamos hecho para el libro azul (*Física*) en la situación previa ya que se está apoyando sobre dos superficies como el libro azul lo hacía en la sección anterior (la única diferencia es que lo que servía de superficie 2 en la sección anterior era la parte más larga de la repisa y ahora es el libro azul). Siguiendo lo que hicimos en el numeral anterior, para este libro verde tenemos el siguiente diagrama de fuerzas:



Sobre el libro verde actúa la fuerza normal que produce el libro azul y que hemos llamado $\vec{N}_a$ y la fuerza normal que produce la parte inferior de la repisa, que hemos denominado $\vec{N}_1$. Hemos llamado $\vec{W}_1$ al peso de este libro (lo pintamos de blanco porque en negro no se alcanza a ver bien).

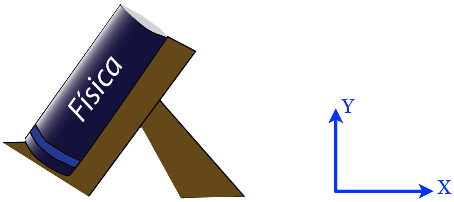
Sobre el libro azul actúa la fuerza normal de la superficie inferior de la repisa y la fuerza normal de la parte larga de la repisa. Hasta aquí su diagrama es idéntico al del numeral anterior. Sin embargo, notemos que hay una tercera superficie que está en contacto con este libro azul, a saber, la carátula del libro verde. Por lo tanto, como está en contacto con tres superficies, hay tres fuerzas normales sobre el libro azul. El diagrama de fuerzas para ambos libros es entonces



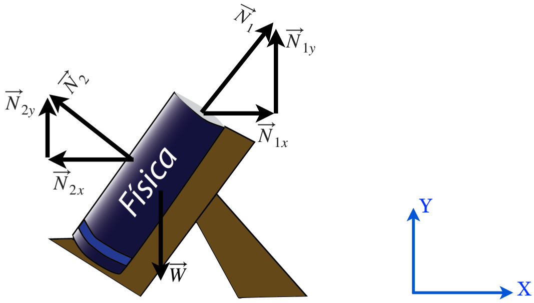
Sobre el libro azul tenemos tres fuerzas normales: la fuerza $\vec{N}_2$ que hace la superficie inferior de la repisa, la fuerza $\vec{N}_3$ que ejerce la parte larga de la repisa, y $\vec{N}_v$ que es la fuerza que ejerce el libro verde sobre el libro azul. Notemos que para diferenciar las fuerzas sobre cada libro, las puntas de las flechas sobre el libro azul tienen un estilo diferente (el lector no debe confundirse por el cambio de color de algunos vectores, esto se debe sólo a razones de diagramación).

Debemos tener presente que según la tercera ley de Newton, la fuerza $\vec{N}_v$ debe ser igual en magnitud a la fuerza $\vec{N}_a$. En otras palabras, la fuerza normal que le hace el libro verde al azul es la misma en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza normal que le hace el libro azul al verde, es decir: $\vec{N}_a = -\vec{N}_v$.

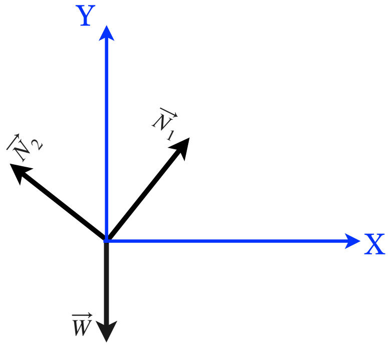
(c) Debemos descomponer los vectores de la situación 3 usando un sistema como el indicado a continuación:



Como ya sabemos cuál es el diagrama de fuerzas, podemos usar directamente ese diagrama y descomponer los vectores sobre el mismo diagrama, así:

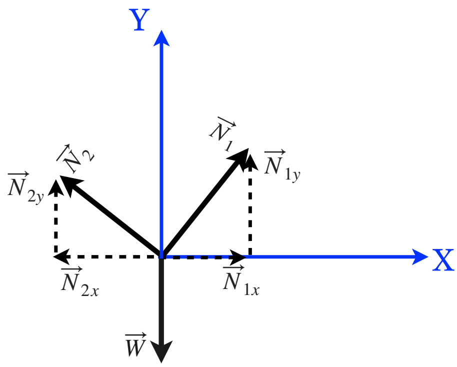


Notemos que las dos fuerzas normales se han descompuesto en sus componentes X y Y, pero el peso no porque el peso ya está sobre el eje Y. Aunque el dibujo anterior es relativamente claro, puede ser más claro si después de dibujar el diagrama de fuerzas sobre los objetos, dibujamos esas mismas fuerzas sobre el sistema de coordenadas y descomponemos las fuerzas en el sistema de coordenadas. Si hacemos esto, tenemos



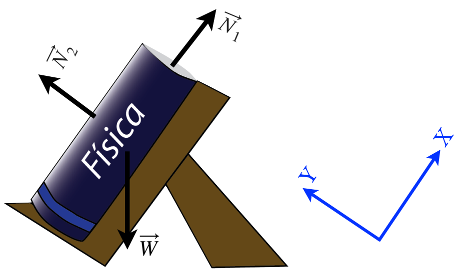
Por cuestiones de claridad, es más conveniente dibujar los vectores de fuerza sobre el origen del sistema de coordenadas usado que sobre el dibujo original.

Una vez dibujamos los vectores sobre el sistema de coordenadas, podemos descomponer los vectores (siguiendo lo explicado en la nota 1.8):

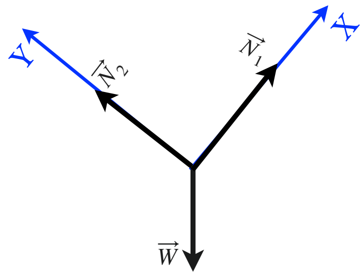


Después de pintar las fuerzas sobre el sistema, las podemos descomponer en el mismo sistema (con flechas punteadas distinguimos a las componentes de los vectores).

Ahora debemos hacer el diagrama de fuerzas para otro sistema de coordenadas en el cual el eje X sea paralelo a la superficie 2 de la repisa, es decir, para un sistema así:

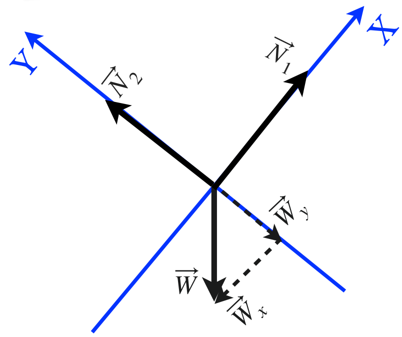


Después de que tenemos el diagrama de fuerzas sobre el dibujo original, dibujamos los vectores sobre el sistema de coordenadas:



Dibujamos los vectores de fuerza sobre el origen del sistema de coordenadas.

Ahora descomponemos los vectores sobre el sistema de coordenadas. Notemos que el único vector que debemos descomponer es el peso porque las fuerzas normales están sobre los ejes:



Descomponemos el peso que es el único vector que no está alineado con alguno de los ejes.

Por supuesto, somos libres de escoger el sistema de coordenadas pero debemos ser prácticos; en este caso fue más conveniente usar un sistema inclinado porque sólo debimos descomponer el peso, mientras que con el primer sistema que no era inclinado tuvimos que descomponer dos fuerzas normales.

De ahora en adelante vamos a dibujar directamente las fuerzas sobre el sistema de coordenadas y en el mismo paso las vamos a descomponer (si es necesario, el lector debe repasar el capítulo de vectores para descomponer rápidamente vectores).

Nota 4.12. Pasos para realizar un diagrama de fuerzas

(1) Dibujamos las fuerzas que actúan sobre el objeto que queremos analizar sin tener en cuenta las fuerzas que el objeto hace (esas no las dibujamos).

(2) Volvemos a dibujar esas fuerzas pero sobre el sistema de coordenadas que hemos elegido, y en ese mismo sistema las descomponemos.

Problema 4.7.

Palabras clave: segunda ley, fuerza normal.

(a) Camilo empuja su biblioteca de 12 kilogramos de masa como se ilustra en el dibujo. Supongamos que entre la biblioteca y el piso no hay fricción. La magnitud de la aceleración de la biblioteca es de 0.5 m/s^2. ¿Cuál es la fuerza que hace Camilo?

(b) Si la biblioteca tuviera una cuarta parte de la masa que tiene y Camilo ejerciera la fuerza hallada en el punto (a), ¿cuál sería la nueva aceleración de la biblioteca? ¿Cuál sería la razón entre la magnitud de la fuerza normal en esta sección y la magnitud de la fuerza normal hallada en (a)?

Solución

¿Qué información nos dan?

(a) La masa de la biblioteca es de 12 kilogramos y no hay fricción. La magnitud de la aceleración es 0.5 m/s^2.

(b) Nos hacen suponer que la masa de la biblioteca es una cuarta parte de la actual, y Camilo ejerce la fuerza que hallamos en (a).

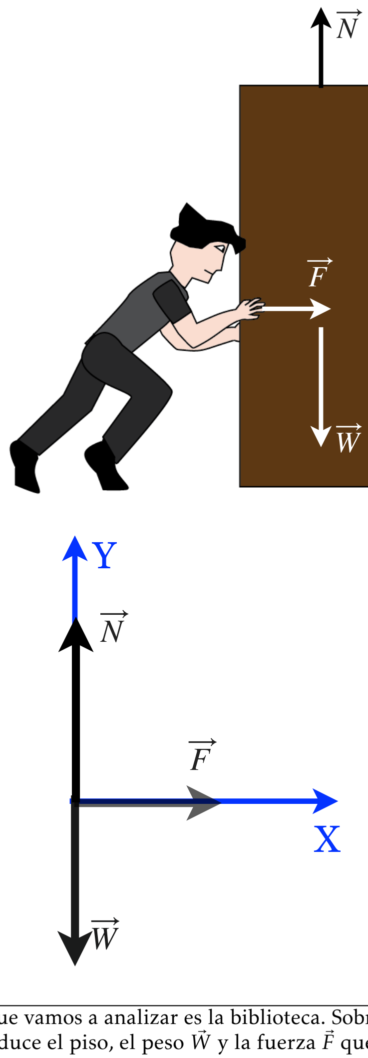
¿Qué nos piden?

(a) La fuerza que ejerce Camilo.

(b) La nueva aceleración de la biblioteca. También debemos hallar la razón entre la magnitud de la fuerza normal en el caso (b) y la fuerza normal hallada en (a).

(a) Como nos dicen la aceleración y la masa de la biblioteca, con la segunda ley de Newton podemos hallar la fuerza que hace Camilo sobre la biblioteca. Pero antes de escribir la segunda ley, realicemos el diagrama de fuerzas, que nos va a facilitar el planteamiento de las ecuaciones.

Para hacer el diagrama, es conveniente seguir los dos pasos explicados en la nota 4.12. En este problema podemos usar un sistema de coordenadas en el cual el eje X apunta en la dirección de movimiento de la biblioteca y el eje Y apunta hacia arriba. Teniendo en cuenta esto, nuestro diagrama queda así:



Arriba: El objeto que vamos a analizar es la biblioteca. Sobre ella actúa una fuerza normal $\vec{N}$ que produce el piso, el peso $\vec{W}$ y la fuerza $\vec{F}$ que le ejerce Camilo.

Abajo: si usamos un sistema en el cual la biblioteca se mueve a lo largo del eje X, no debemos descomponer ninguna fuerza, pues la fuerza normal y el peso van a lo largo del eje Y y la fuerza de Camilo va en la dirección positiva del eje X.

Después de realizar el diagrama de fuerzas y de escoger un sistema de coordenadas, podemos plantear la segunda ley de Newton. Esta ley dice que la aceleración total a lo largo del eje Y depende de la suma de todas las fuerzas que hay a lo largo del eje Y, mientras que la aceleración en X depende de la suma de todas las fuerzas que hay en X.

Empecemos por escribir la segunda ley de Newton para lo que sucede en el eje X, que es el eje en el cual hay aceleración:

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x. \tag{1}$$

Como en X sólo hay una fuerza, que es la fuerza de Camilo, la segunda ley de Newton en X queda

$$\vec{F} = m\vec{a}_x. \tag{2}$$

Antes de seguir notemos que no hemos reemplazado el valor de la aceleración o de la masa en la ecuación (2). Esto ha sido a propósito, como en muchos problemas anteriores, pues es conveniente acostumbrarse a reemplazar los valores de las variables sólo al final[3].

Podemos volver a escribir la ecuación (2) usando vectores unitarios, si tenemos en cuenta que el movimiento de la biblioteca y la dirección de la fuerza van a lo largo de la dirección positiva de X:

$$F\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{3}$$

Ahora sólo debemos reemplazar los valores numéricos de la aceleración y de la masa;

$$F\hat{x} = \underbrace{(12\ \mathrm{kg})}_{m}\underbrace{(0.5\ \mathrm{m/s^2})}_{a}\hat{x} = (6\ \mathrm{N})\hat{x}. \tag{4}$$

En palabras, Camilo ejerce una fuerza de 6 newtons de magnitud en el sentido positivo de X.

(b) Ahora debemos averiguar la aceleración de la biblioteca si Camilo ejerciera la fuerza que acabamos de hallar —en la ecuación (4)— pero suponiendo que la biblioteca tuviera la cuarta parte de su masa. Volvemos a aplicar la segunda

[3] Esto es conveniente porque ayuda a entender mejor la situación cuando vemos la relación algebraica que existe entre las distintas variables (por ejemplo, si no reemplazamos podemos ver fácilmente qué variable es proporcional a qué otra). Además, el estudiante se debe acostumbrar a trabajar con fórmulas abstractas, que son muy comunes en física.

ley de Newton —ecuación (3)—, pero esta vez suponiendo que la masa es la cuarta parte y la fuerza es la hallada recientemente:

$$(6\ \mathrm{N})\hat{x} = \underbrace{\frac{(12\ \mathrm{kg})}{4}}_{m} a_n \hat{x}, \tag{5}$$

donde hemos llamado a_n a la nueva aceleración, que es la que buscamos. Si despejamos la aceleración, obtenemos:

$$2\ \mathrm{m/s}^2 = a\hat{x}. \tag{6}$$

Note que la aceleración es cuatro veces la aceleración original, lo cual muestra una vez más que la aceleración es inversamente proporcional a la masa (si la masa se divide por cuatro, la aceleración se multiplica por cuatro).

También debemos hallar la razón entre la magnitud de la nueva fuerza normal y la magnitud de la fuerza normal inicial. Empecemos por hallar la fuerza normal en el caso en el cual la masa de la biblioteca es 12 kilogramos. Para hallar esta fuerza, debemos escribir la segunda ley de Newton a lo largo del eje Y.

En Y hay dos fuerzas sobre la biblioteca: el peso que apunta en la dirección negativa del eje Y y la fuerza normal que apunta en la dirección positiva del eje Y:

$$N\hat{y} - W\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{7}$$

Ahora, es claro que la biblioteca no se está moviendo en sentido vertical, es decir, no se está moviendo a lo largo del eje Y. Por lo tanto, a_y es cero:

$$N\hat{y} - W\hat{y} = \underbrace{0}_{\substack{\text{La biblioteca}\\ \text{no tiene}\\ \text{aceleración}\\ \text{en Y}}}. \tag{8}$$

Si aplicamos la regla de oro y pasamos el peso al otro lado, esto queda

$$N = W. \tag{9}$$

Sabemos que la magnitud del peso es $W = mg$, entonces llegamos a

$$N = \underbrace{mg}_{W}. \tag{10}$$

Ahora podríamos reemplazar los valores de las variables, pero como nos piden la razón entre la nueva fuerza normal y esta fuerza normal, no es necesario reemplazar estos valores. Simplemente escribamos la segunda fuerza normal teniendo en cuenta que la única cosa que cambia en la ecuación (10) es que la nueva masa es un cuarto de la masa inicial;

$$N_n = \frac{m}{4} g, \tag{11}$$

donde hemos llamado N_n a la nueva fuerza normal.

Si ahora calculamos la razón entre la fuerza normal nueva y la vieja, obtenemos

$$\frac{N_n}{N} = \frac{(m/4)g}{mg} = \frac{1}{4}. \tag{12}$$

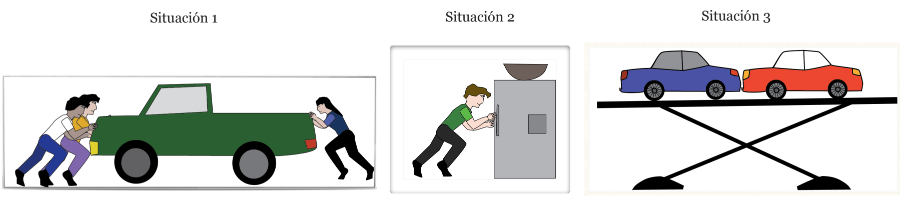
Como debíamos sospechar, la magnitud de la nueva fuerza normal es un cuarto de la magnitud de la fuerza normal inicial, y esto tiene sentido porque si la normal es igual en magnitud al peso, y si el peso se reduce en cuatro (porque la masa se reduce en cuatro), entonces la magnitud de la fuerza normal también se reduce en cuatro.

Problema 4.8.

Palabras clave: diagrama de fuerzas, segunda ley de Newton, diferencia entre normal y peso.

En el dibujo a continuación el lector encontrará diferentes situaciones. En la situación 1 Mario (de camisa blanca), Carlos (de camisa naranja) e Isabel compiten empujando una camioneta. Isabel trata de empujar en dirección contraria a la de Mario y Carlos, pero al final la camioneta acelera en la dirección en que los dos hombres empujan. Suponga que entre la camioneta y el piso no hay fricción. En la situación 2 David empuja una nevera que tiene encima una canasta, y la nevera acelera. Suponga que no hay fricción entre la canasta y la nevera. En la situación 3, el carro rojo da reversa y empuja al carro azul, causando que el azul acelere hacia atrás. Tenga en cuenta que para dar reversa el motor del carro rojo realiza una fuerza hacia atrás. Al mismo tiempo que ocurre esto la plataforma sobre la que están los carros acelera al subir. Ignore la fricción que hay entre los carros y la plataforma.

Para cada situación haga dos cosas: primero, realice el diagrama de fuerzas para la camioneta, la nevera y ambos carros, usando un sistema de coordenadas cuyo eje X apunte en la dirección derecha de la página y cuyo eje Y apunte hacia la parte de arriba de la página. Segundo, con base en cada diagrama de fuerzas escriba la segunda ley de Newton para la camioneta, la nevera y ambos carros.



Solución

¿Qué información nos dan?

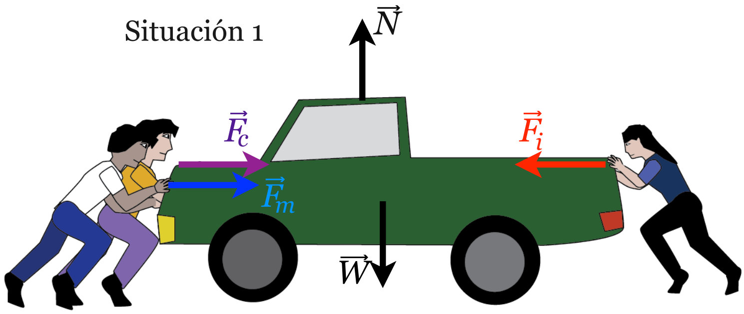
En la primera situación Carlos y Mario empujan una camioneta desde el frente mientras que Isabel la empuja desde la parte de atrás. La camioneta acelera en la dirección en que los hombres la empujan y no hay fricción entre ella y el piso. En la segunda situación, David empuja una nevera que tiene una canasta encima, y la nevera acelera (no hay fricción entre la canasta y la nevera). En la tercera situación, una plataforma sube acelerando hacia arriba dos carros mientras que el carro rojo da reversa y hace que el carro azul acelere hacia atrás. Además, hay una fuerza del motor del carro rojo que permite dar reversa, y debemos ignorar la fricción entre los carros y la plataforma. Tenemos que usar siempre un sistema de coordenadas cuyo eje X apunte hacia la derecha y cuyo eje Y apunte hacia arriba.

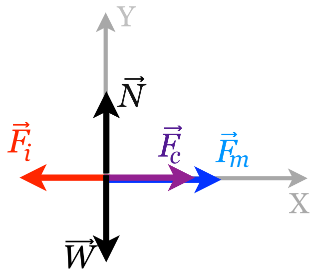
¿Qué nos piden?

Debemos realizar un diagrama de fuerzas para los objetos que nos interesan (la camioneta, la nevera y los dos carros) en cada situación. Con base en este diagrama debemos plantear la segunda ley de Newton en X y Y.

Situación 1

En X hay tres fuerzas sobre la camioneta; la fuerza de Mario, la de Carlos y la de Isabel. En Y hay dos fuerzas sobre la camioneta; la fuerza normal que hace el piso, que apunta hacia arriba, y el peso de la camioneta, que apunta hacia abajo. Teniendo en cuenta esto, y siguiendo los pasos para realizar un diagrama de fuerzas explicados en la nota 4.12, el diagrama de fuerzas de la situación 1 quedaría así:





Sobre la camioneta actúan en total cinco fuerzas; la fuerza $\vec{F_i}$ que hace Isabel y que apunta en la dirección negativa de X, la fuerza $\vec{F_m}$ que hace Mario que apunta en la dirección positiva de X al igual que la fuerza $\vec{F_c}$ que hace Carlos. También tenemos el peso que apunta en la dirección negativa de Y y la normal que apunta en la dirección positiva de Y.

Según el diagrama de fuerzas de la camioneta, y teniendo en cuenta que la aceleración X de la camioneta se da en la dirección positiva de X, la segunda ley de Newton en X queda

$$F_m\hat{x} + F_c\hat{x} - F_i\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{1}$$

Por su parte, ya dijimos que en Y hay dos fuerzas sobre la camioneta: la fuerza normal que hace el piso y el peso de la camioneta:

$$N\hat{y} - W\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{2}$$

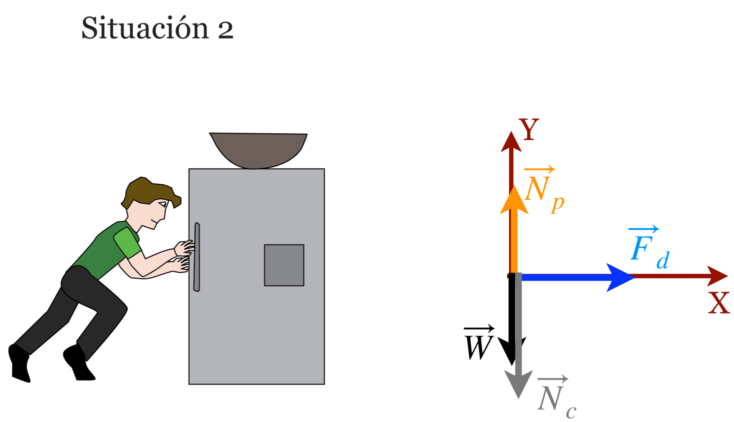
Como la aceleración en Y es cero (la camioneta no sube o baja), esto nos da

$$N\hat{y} - W\hat{y} = 0\hat{y}. \tag{3}$$

Notemos que de la anterior ecuación se sigue que la magnitud del peso es igual a la magnitud de la normal: $N = W$ (aun si la magnitud es la misma, recuerde que el peso y la normal siempre son tipos de fuerzas diferentes).

Situación 2

En esta situación hay cuatro fuerzas sobre la nevera. El peso de la nevera, la normal del piso, la normal de la canasta y la fuerza con la que empuja David. Si hacemos el diagrama de fuerzas, obtenemos



Sobre la nevera actúan cuatro fuerzas; la fuerza $\vec{F}_d$ que hace David y que apunta en la dirección positiva de X, el peso que apunta en la dirección negativa de Y, la normal del piso $\vec{N}_p$ que apunta en la dirección positiva de Y y la normal de la canasta $\vec{N}_c$ que apunta en la dirección negativa de Y.

Como en X sólo hay una fuerza que apunta en la dirección positiva de X, y como la aceleración de la nevera es en la dirección positiva de X, la segunda ley de Newton para esta situación queda así:

$$F_d\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{4}$$

Por su parte, en Y están las tres fuerzas que ya mencionamos, y como la nevera no tiene aceleración en Y, la segunda ley de Newton en Y queda

$$N_p\hat{y} - N_c\hat{y} - W\hat{y} = 0\hat{x}. \qquad (5)$$

Cuidado: algunas personas podrían llegar a decir que sobre la nevera actúa el peso que la canasta le hace, pero el peso de un objeto sólo actúa sobre el mismo objeto (el peso de la canasta sólo actúa sobre la canasta). No debemos confundir a la normal con el peso, incluso si sus magnitudes a veces son iguales (como en la situación 1).

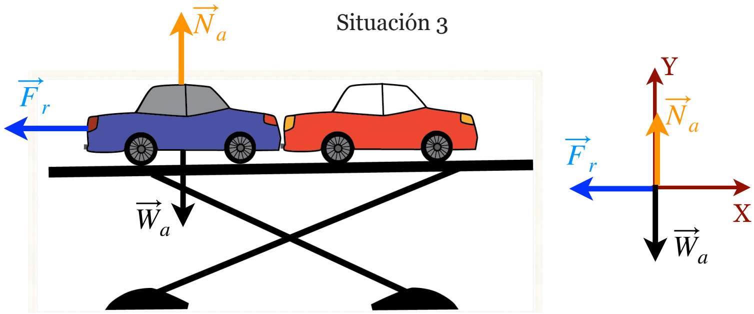
Nota 4.13. Diferencias entre el peso y la fuerza normal

Aunque muchas veces la magnitud del peso y de la normal son iguales (mg), el peso no es igual a la normal. Hay tres diferencias fundamentales:

- El peso siempre apunta hacia el centro de la Tierra mientras que la normal, salvo en casos muy especiales, no lo hace. De hecho, cuando ambas fuerzas tienen la misma magnitud la normal suele tener dirección contraria al peso.
- La fuerza normal resulta de la interacción de dos superficies y proviene de la fuerza electromagnética, mientras que el peso resulta de la interacción del objeto con la Tierra y proviene de la fuerza de gravedad.
- Un objeto A ejerce una fuerza normal sobre un objeto B, pero A nunca podrá ejercer su peso sobre B porque el peso de A sólo actúa sobre A.

Situación 3

Empecemos por el carro azul. Sobre este carro actúa sólo una fuerza en X, que es la fuerza con la que el otro carro lo empuja al dar reversa. Esta fuerza apunta en la dirección negativa de X. Por otra parte, tenemos la normal que la plataforma ejerce y que apunta en la dirección positiva de Y y el peso del carro que tiene dirección negativa en Y. Teniendo en cuenta esto, el diagrama de fuerzas para el carro azul queda así:



Sobre el carro azul actúan tres fuerzas; la fuerza $\vec{F}_r$ que hace el carro rojo y que apunta en la dirección negativa de X, el peso $\vec{W}_a$ que apunta en la dirección negativa de Y y la normal $\vec{N}_a$ de la plataforma que apunta en la dirección positiva de Y (los subíndices "a" son para aclarar que hablamos del carro azul).

Teniendo en cuenta el diagrama de fuerzas anterior, podemos plantear las ecuaciones de la segunda ley de Newton para el carro azul. Para lo que sucede en X, tengamos presente que la fuerza del carro rojo se da en la dirección negativa de X y que la aceleración del carro azul también se da en la dirección negativa de X:

$$-F_r\hat{x} = -ma_x\hat{x}, \tag{6}$$

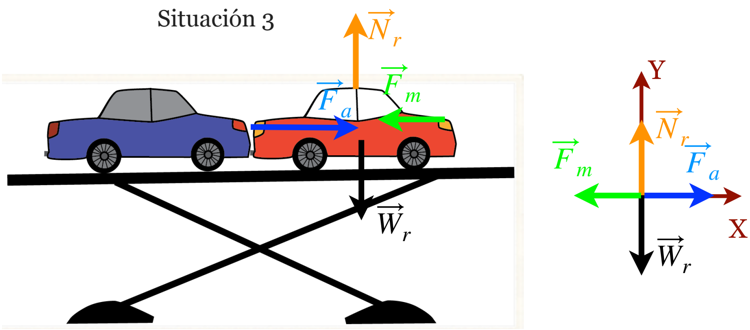
donde el signo negativo al frente de la masa proviene del signo de la aceleración, que es negativo.

Para lo que sucede en Y, debemos tener presente que la plataforma está acelerando en la dirección positiva de Y, así que los carros que están sobre ella también aceleran en la misma dirección. En Y la segunda ley de Newton para el carro azul queda

$$N_a\hat{y} - W_a\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{7}$$

Ahora realicemos el diagrama de fuerzas para el carro rojo.

Sobre este carro actúan dos fuerzas en X, una es la fuerza que el carro azul le hace, pues según la tercera ley de Newton si el carro rojo le hace una fuerza al azul, el azul también le hace una fuerza al rojo pero en dirección contraria. La otra es la fuerza que el motor debe hacer para que el carro dé reversa. Esta fuerza del motor va en la dirección negativa de X. Por supuesto, también tenemos la fuerza normal que hace la plataforma y el peso del carro. El diagrama de fuerzas del carro rojo quedaría así:



Sobre el carro rojo actúan cuatro fuerzas; la fuerza $\vec{F}_a$ que hace el carro azul y que apunta en la dirección positiva de X, la fuerza $\vec{F}_m$ del motor del carro rojo que apunta en la dirección negativa de X, el peso $\vec{W}_r$ que apunta en la dirección negativa de Y y la normal $\vec{N}_r$ de la plataforma que apunta en la dirección positiva de Y (los subíndices "r" son para aclarar que hablamos del carro rojo).

Según el diagrama de fuerza, la segunda ley de Newton en X para el carro rojo se debería escribir así:

$$F_a\hat{x} - F_m\hat{x} = -ma_x\hat{x}, \tag{8}$$

donde el signo negativo al frente de la masa representa la dirección de la aceleración, que es negativa.

Por su parte, en Y hay sólo dos fuerzas sobre el carro rojo, la normal de la plataforma, que se da hacia arriba, y el peso, que se da en la dirección negativa de Y. Además, nos dicen que el carro acelera hacia arriba por culpa de la plataforma. Así que en Y la segunda ley de Newton queda

$$N_r\hat{y} - W_r\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{9}$$

Es bueno anotar que la aceleración de ambos carros en X y en Y es la misma, así que no hemos usado un subíndice para distinguir a_x o a_y en la ecuación de cada carro.

Problema 4.9.

Palabras clave: fricción dinámica, segunda ley.

Suponga la misma situación de Camilo empujando su biblioteca de 12 kilogramos de masa (problema 4.7). La diferencia ahora es que hay un coeficiente de fricción dinámico de 0.4 entre el piso y la biblioteca. Encuentre la fuerza que hace Camilo para que la biblioteca se mueva con una aceleración de magnitud de 1 m/s^2.

Solución

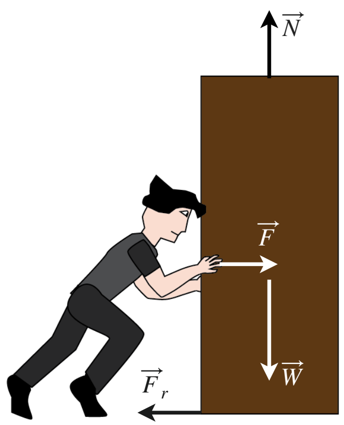
¿Qué información nos dan?

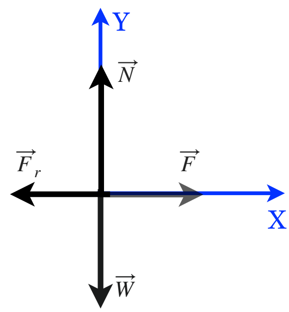
La masa m de la biblioteca es de 12 kilogramos, el coeficiente de fricción entre el piso y la biblioteca es de 0.4, y la aceleración a de la biblioteca es de 1 m/s^2.

¿Qué nos piden?

La fuerza que ejerce Camilo sobre la biblioteca.

(a) Como ya sabemos, en los problemas de fuerzas debemos comenzar por realizar un diagrama de fuerzas. Esta vez el diagrama es muy similar al del problema 4.7, pero con la diferencia que ahora hay fricción entre el piso y la biblioteca. Recordemos que la dirección de la fuerza de fricción dinámica es contraria al movimiento del objeto. Como la biblioteca se mueve en la dirección positiva del eje X entonces la dirección de la fuerza de fricción ocurre en la dirección negativa del eje X:





Notemos que la fuerza de fricción se opone al movimiento de la biblioteca; como la biblioteca se mueve en el sentido positivo del eje X, la fuerza de fricción apunta en el sentido negativo de este eje.

Para hallar la fuerza que le hace Camilo a la biblioteca, debemos usar la segunda ley de Newton. Primero realicemos el análisis en X. Es claro que en X hay dos fuerzas, la fuerza aplicada por Camilo y la fuerza de fricción que se opone al movimiento de la biblioteca. La fuerza de fricción apunta en el sentido negativo de X mientras que la fuerza que hace Camilo apunta en el sentido positivo de X. Además, la biblioteca acelera en la dirección positiva de X. Por lo tanto, la segunda ley de Newton para el movimiento en X queda:

$$-F_r\hat{x} + F\hat{x} = ma_x\hat{x}, \tag{1}$$

donde hemos llamado F a la magnitud de la fuerza que hace Camilo, y F_r a la magnitud de la fuerza de fricción. Si pasamos la fuerza de fricción al otro lado de la igualdad, esta ecuación queda

$$F\hat{x} = ma_x\hat{x} + F_r\hat{x}. \tag{2}$$

Ahora recordemos, como se dijo en la nota 4.8, que la magnitud de la fuerza de fricción dinámica es $\mu_d N$. Por lo tanto, podemos escribir la ecuación (2) así:

$$F\hat{x} = ma\hat{x} + \underbrace{\mu_d N}_{F_r}\hat{x}. \tag{3}$$

De esta ecuación lo único que no conocemos es la magnitud de la fuerza normal. Esta magnitud la podemos hallar con la segunda ley de Newton a lo largo del eje Y. En Y hay dos fuerzas: el peso $\vec{W}$ y la fuerza normal $\vec{N}$. El peso tiene dirección negativa en Y y su magnitud está dada por mg, mientras que la fuerza normal apunta en la dirección positiva y a su magnitud la llamamos simplemente N. Así, la segunda ley de Newton para el eje Y es la siguiente:

$$-mg\hat{y} + N\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{4}$$

Como la biblioteca no se mueve a lo largo del eje Y, su aceleración a_y es cero:

$$-mg\hat{y} + N\hat{y} = 0. \tag{5}$$

Si aplicamos la regla de oro y despejamos el peso, obtenemos la magnitud de la fuerza normal:

$$N = mg. \tag{6}$$

Si usamos esto en la ecuación (3), obtenemos

$$F\hat{x} = ma\hat{x} + \mu_d \underbrace{mg}_{N}\hat{x}. \tag{7}$$

Antes de reemplazar los valores conocidos, saquemos factor común de m:

$$F\hat{x} = m(\mu_d g\hat{x} + a\hat{x}). \tag{8}$$

Notemos que la magnitud de la fuerza que hace Camilo es proporcional al coeficiente de fricción, lo cual tiene sentido pues cuanta más sea la fricción, más difícil será que Camilo empuje la biblioteca así que más fuerza tiene que hacer. Si ahora reemplazamos los valores, obtenemos

$$F\hat{x} = 12\ \text{kg}((0.4)(9.8\ \text{m/s}^2)\hat{x} + (1\ \text{m/s}^2)\hat{x}) = (59.04\ \text{N})\hat{x}. \tag{9}$$

Problema de repaso 4.10.

Palabras clave: diagrama de fuerzas, segunda ley de Newton, diferencia entre normal y peso.

Responda falso o verdadero y justifique respuesta:

(1) En muchos casos la fuerza normal es igual al peso.

(2) El peso y la masa tienen la misma dirección.

(3) Si un objeto A está encima de un objeto B, no debemos indicar el peso de A en el diagrama de fuerzas de B.

(4) En los diagramas de fuerza no debemos indicar las fuerzas que hace el objeto.

(5) Si un tren frena y una persona se cae hacia adelante, podemos decir que una fuerza empujó a la persona hacia delante.

Solución

(1) Falso. Como dice la nota 4.13, la fuerza normal nunca es igual al peso. A veces la magnitud de la fuerza normal sí es igual al peso, pero ambas fuerzas son diferentes; una se debe a la repulsión electromagnética entre superficies, la otra se debe a la atracción gravitacional de la Tierra.

(2) Falso. La masa no es un vector y entonces no tiene dirección, es una cantidad escalar que mide la resistencia de un cuerpo para cambiar su estado de movimiento.

(3) Verdadero. El peso de A sólo actúa sobre A, así que no debe aparecer en el diagrama de fuerzas de B (nota 4.13).

(4) Verdadero. En los diagramas de fuerza de un objeto sólo se indican las fuerzas que actúan sobre el objeto, no las fuerzas que hace el objeto (nota 4.12).

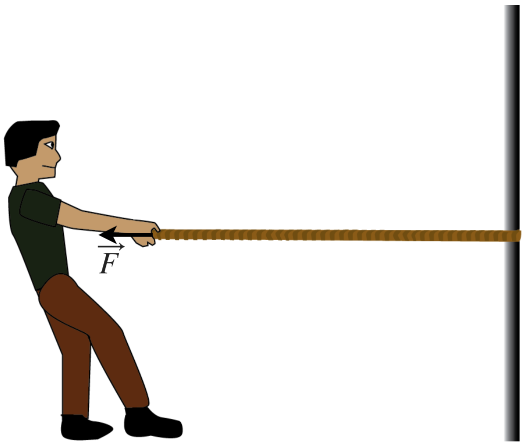
(5) Falso. La persona se cae hacia adelante porque tiende a seguir en su estado de movimiento por la primera ley de Newton, y como el tren frena y no hay nada que ayude a la persona a frenar, entonces ella sigue con su velocidad inicial y se cae (nota 4.11).

Problema (teórico) 4.11.

Palabras clave: fuerza de tensión, cuerda ideal, aceleración en los extremos de una cuerda ideal.

(a) Supongamos que Juan amarra un extremo de una cuerda a un poste y comienza a halar el otro extremo con una fuerza de magnitud F, como se ilustra en el dibujo. A partir de esta situación, explique qué es la tensión de una cuerda.

(b) Explique las características de una cuerda ideal con respecto a los siguientes puntos: (1) la magnitud de la fuerza de tensión que ambos extremos de la cuerda ideal realizan; (2) la variación de la longitud de la cuerda ideal; (3) la rapidez y la magnitud de la aceleración de ambos extremos de la cuerda ideal; (4) la masa de la cuerda ideal.

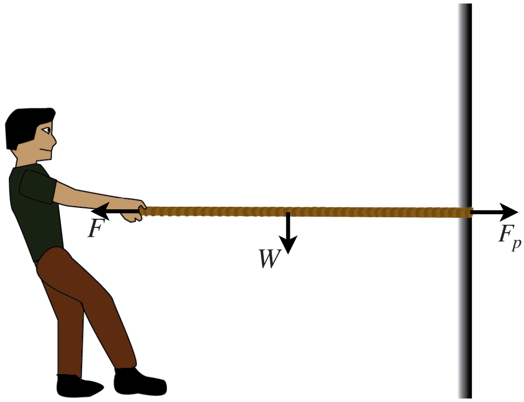


Juan amarra una cuerda a un poste y comienza a halar el extremo izquierdo con una fuerza $\vec{F}$.

Solución

(a) Cuando Juan hala el extremo izquierdo de la cuerda, la cuerda responde haciendo una fuerza contraria a la que Juan hace; cuanto más duro hale Juan, más grande será la fuerza con la que responderá la cuerda. *Esta fuerza que hace la cuerda como reacción al estiramiento al que está sometida es lo que se conoce como fuerza de tensión*. La fuerza de tensión sólo aparece si la cuerda está templada y para eso debe estar sujetada de ambos extremos. La magnitud de la tensión va a depender de la fuerza hecha en ambos extremos; si la fuerza con la que se hala la cuerda en alguno de los extremo crece, la tensión crecerá.

Notemos que el poste también le está haciendo una fuerza a la cuerda, pues el poste impide que la cuerda se mueva cuando Juan la hala. Por lo tanto, si hiciéramos el diagrama de fuerzas de la cuerda, este sería:



La tensión es la fuerza con la que la cuerda hala la mano de Juan y con la que hala el poste. La tensión en cada extremo apunta en sentido opuesto a la fuerza aplicada en el extremo; en el extremo izquierdo la tensión $\vec{T}_1$ es contraria a la fuerza $\vec{F}$ que le hace Juan, y en el derecho la tensión $\vec{T}_2$ es contraria a la fuerza $\vec{F}_p$ que le hace el poste. Las magnitudes de $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ son la misma.

Cuidado: la fuerza de tensión no actúa sobre la cuerda (por eso no la pusimos en el diagrama de fuerzas de la cuerda), sino que actúa sobre los objetos que la halan. Por otro lado, la fuerza realizada sobre ambos extremos de la cuerda no siempre es igual, por ejemplo, podría pasar que la fuerza que hace Juan fuera mayor que la que hace el poste, y entonces el poste se doblaría y la cuerda tendría cierta aceleración. Pero si la cuerda está en reposo la fuerza que se hace sobre ambos extremos debe ser la misma según la segunda ley de Newton.

(b) Una cuerda ideal es una cuerda que cumple las siguientes características:

(1) Los dos extremos de una cuerda ideal generan una fuerza de tensión de la de la misma magnitud.

(2) La longitud de las cuerdas ideales permanece constante, así que si halamos una cuerda ideal después de que ya está templada, la cuerda no se va a estirar.

(3) Como la longitud de la cuerda es constante, ambos extremos de la cuerda y todos los puntos de la cuerda se mueven con la misma rapidez y con la misma magnitud de la aceleración (obviamente, esto sucede cuando la cuerda está templada. Si no está templada cada extremo se puede mover con rapidez distinta al otro).

Por ejemplo, si el extremo izquierdo se mueve con una rapidez de 1 kilometro por hora, entonces el extremo derecho se moverá exactamente a 1 kilometro por hora, y así también se moverán todos los demás puntos que hay entre ambos extremos. O si un extremo tiene una magnitud de aceleración de 1 metro por segundo cuadrado, entonces el otro extremo también tendrá una aceleración de magnitud de 1 metro por segundo cuadrado. Para entender mejor esto podemos usar una analogía. Cuando halamos un resorte de un extremo y el otro extremo está fijo (pegado a algo), es claro que el extremo que estamos halando se está moviendo mientras que el extremo que está fijo no puede moverse. En cambio, si halamos el extremo de una barra rígida, por ejemplo una varilla, y si suponemos que el otro extremo de la varilla está fijo, no hay forma de que logremos mover el extremo que halamos a menos de que se despegue la varilla o se rompa. Si un extremo permanece fijo, el otro también, si uno se mueve con cierta rapidez o con cierta aceleración, el otro también lo hace de la misma forma. La cuerda ideal, cuando está templada, es como una varilla: no se puede estirar y por lo tanto sus dos extremos y todos sus puntos se mueven con igual rapidez o con la misma magnitud de la aceleración[4].

(4) La masa de las cuerdas ideales se desprecia.

Nota 4.14. Fuerza de tensión y cuerdas ideales

La fuerza de tensión es la fuerza con la cual una cuerda hala a los objetos que la están halando de los extremos.

(1) Los dos extremos de una cuerda ideal generan una fuerza de tensión con la misma magnitud, y estas tensiones tienen sentido contrario a la fuerza que se le hace a la cuerda en cada extremo.

(2) La longitud de las cuerdas ideales permanece constante.

(3) Cuando la cuerda está templada, ambos extremos de la cuerda y todos los puntos de la cuerda se mueven con la misma rapidez y con la misma magnitud de la aceleración.

(4) La masa de las cuerdas ideales se desprecia.

[4] Estrictamente hablando una varilla se puede estirar si es halada con suficiente fuerza, pero en condiciones normales esto no sucede. El punto importante es que una cuerda ideal se comporta como una varilla más que como un resorte en cuanto a la longitud se refiere.

Problema 4.12.

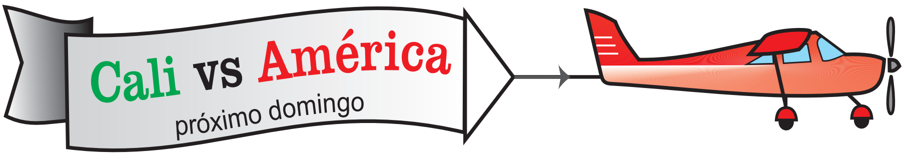
Palabras clave: fuerza de tensión, cuerda ideal, objetos ligados por una cuerda ideal.

Una avioneta de 8000 kg arrastra con una cuerda ideal un letrero publicitando el próximo clásico de fútbol caleño (ver dibujo). La avioneta vuela con aceleración constante horizontal de 10 m/s^2 de magnitud y el letrero tiene masa de 70 kilogramos.

(a) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de tensión en la cuerda? ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que tiene que hacer el motor de la avioneta? Ignore la fricción del viento sobre la avioneta y sobre el letrero. Al realizar los diagramas de fuerza, suponga que hay una fuerza de sustentación vertical que sostiene al letrero y a la avioneta.

(b) Suponga ahora que hay una fuerza de fricción horizontal del viento sobre el letrero, que se opone a su movimiento. ¿Cuál es la magnitud de esta fuerza de fricción si la aceleración inicial de la avioneta es tres cuartos la aceleración original y si la tensión ahora es un cuarto la tensión hallada en (a)?

(c) Explique si la magnitud de la tensión que la cuerda le hace a la avioneta y al letrero es igual a la magnitud de la fuerza que hacen la avioneta y el letrero sobre la cuerda (tenga en cuenta que la cuerda también acelera).



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) Conocemos la masa del letrero, que es 70 kg, y la aceleración de la avioneta, que es de 10 m/s^2. También conocemos la masa de la avioneta, que es 8000 kg. Hay una fuerza de sustentación vertical que sostiene al letrero y a la avioneta que debemos considerar en el diagrama de fuerzas.

(b) La aceleración de la avioneta es tres cuartos la aceleración en (a) y la magnitud de la tensión es un cuarto de la hallada en (a).

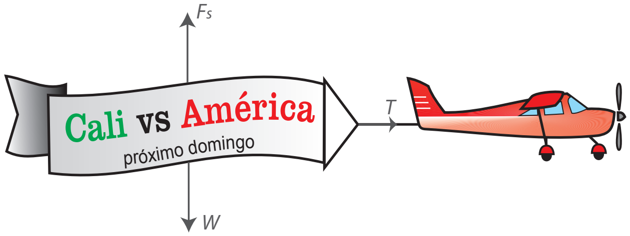
¿Qué nos piden?

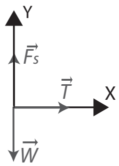
(a) La magnitud de la tensión en la cuerda. La magnitud de la fuerza del motor.

(b) La magnitud de la fuerza de fricción del viento.

(c) Debemos decir si la magnitud de la tensión que la cuerda le hace a la avioneta y al letrero es igual a la magnitud de la fuerza que hacen la avioneta y el letrero sobre la cuerda.

(a) Para determinar la magnitud de la tensión en la cuerda sólo es necesario analizar el movimiento del letrero a lo largo del eje X. Empezamos por escoger un sistema de coordenadas con el eje Y apuntando hacia arriba y el X hacia la derecha, y por realizar un diagrama de fuerzas del letrero teniendo en cuenta dicho sistema:





Sobre el letrero actúan tres fuerzas: la tensión de la cuerda, el peso y la fuerza de sustentación, que es vertical y que hemos llamado $\vec{F}_S$. Recordemos de la nota 4.14 que la tensión en un extremo apunta en sentido contrario a la fuerza ejercida sobre la cuerda en dicho extremo. Como el letrero le hace una fuerza a la cuerda en el sentido negativo de X, la tensión apunta en el sentido positivo de X.

En X sólo hay una fuerza sobre el letrero, a saber, la tensión. La dirección de esta fuerza es en el sentido positivo de X. Así, según la segunda ley de Newton, tenemos para el letrero:

$$T\hat{x} = ma_x\hat{x}, \tag{1}$$

donde a_x es la aceleración del letrero en la dirección positiva de X. Ahora es importante usar la condición de que la cuerda se mantiene templada. Cuando una cuerda ideal está templada, los extremos de la cuerda se mueven de la misma forma (característica 3 de la nota 4.14). Por lo tanto, como el letrero está sujetado a la cuerda, la magnitud de su aceleración debe ser la misma que la del extremo derecho de la cuerda, que está sujetada de la avioneta. Por lo tanto, la magnitud de la aceleración de la avioneta es la misma que la del letrero; $a_c = a_x$ (vamos usar el subíndice c para referirnos a todas las variables que tienen que ver con la avioneta). Esto puede parecer obvio, pero sólo sucede cuando hablamos de cuerdas ideales.

Nota 4.15. Movimiento de los objetos sujetados de los extremos de una cuerda ideal

Si un objeto A está sujetado de uno de los extremos de una cuerda ideal y un objeto B está sujetado del otro extremo de la cuerda, y si la cuerda está templada, entonces la magnitud de la velocidad y la magnitud de la aceleración de ambos objetos es igual (esto es una consecuencia del punto 3 de la nota 4.14).

Como la magnitud de la aceleración del letrero es igual que la magnitud de la aceleración de la avioneta a_c, entonces la ecuación (1) queda así:

$$T\hat{x} = ma_c\hat{x}. \tag{2}$$

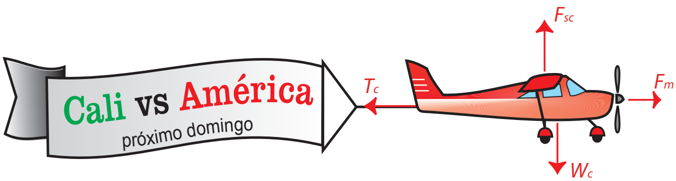
Por lo tanto, al aplicar la regla de oro encontramos que la magnitud de la tensión es

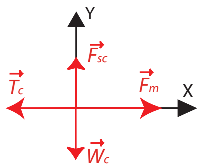
$$T = ma_c. \tag{3}$$

Si reemplazamos en esta ecuación el valor de la masa del letrero y el valor de la aceleración de la avioneta, obtenemos que la magnitud de la tensión es

$$T = \underbrace{(70\text{ kg})}_{m}\underbrace{(10\text{ m/s}^2)}_{a_c} = 700\text{ N}. \tag{4}$$

Ahora debemos hallar la magnitud de la fuerza que hace el motor. Para hacer esto debemos realizar el diagrama de fuerzas sobre la avioneta:





Sobre la avioneta actúan cuatro fuerzas; la tensión $\vec{T}_c$ de la cuerda, el peso $\vec{W}_c$, la sustentación $\vec{F}_{sc}$ y la fuerza $\vec{F}_m$ del motor. La avioneta le hace una fuerza a la cuerda en el sentido positivo de X, por lo tanto, la tensión sobre la avioneta apunta en el sentido negativo de X.

Esta vez la tensión tiene dirección opuesta a la tensión que la cuerda le hace al letrero.

Como la fuerza del motor tiene dirección positiva de X y la tensión para la avioneta tiene dirección negativa de X, y como la aceleración es positiva, la segunda ley de Newton en X para la avioneta queda así:

$$-T_c\hat{x} + F_m\hat{x} = m_c a_c \hat{x}. \tag{5}$$

Si pasamos la tensión al otro lado de la igualdad y aplicamos la regla de oro, obtenemos

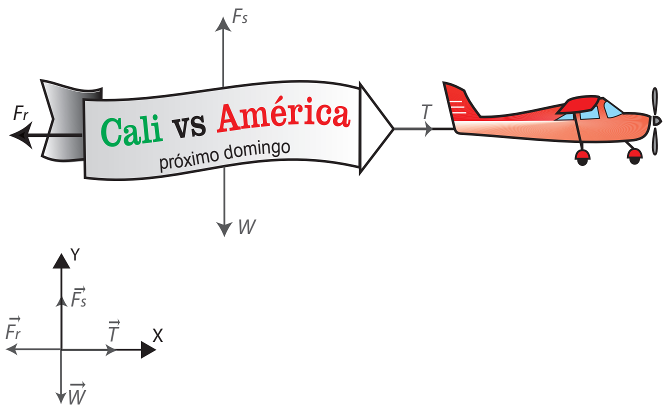
$$F_m = m_c a_c + T_c. \tag{6}$$

Además, como es una cuerda ideal, la magnitud de la tensión que la cuerda le hace a la avioneta es la misma que la magnitud de la tensión que la cuerda le hace al letrero (nota 4.14), es decir, $\|\vec{T}_c\| = \|\vec{T}\|$.

Finalmente, usamos los valores que ya conocemos:

$$F_m = \underbrace{(8000\ \text{kg})}_{m_c}\underbrace{(10\ \text{m/s}^2)}_{a} + \underbrace{700\ \text{N}}_{T_c} = 80700\ \text{N}. \tag{7}$$

(b) Ahora nos dicen que consideremos una fuerza de fricción del viento que se opone al movimiento del letrero. Empecemos por realizar el diagrama de fuerzas en este nuevo caso:



El diagrama de fuerzas es casi igual al de antes, sólo que ahora debemos considerar una fuerza de fricción del viento. La fuerza de fricción se opone al movimiento del letrero así que tiene dirección negativa a lo largo del eje X.

Para el letrero tenemos entonces dos fuerzas en X: la tensión que es positiva en X y la fuerza de fricción que es negativa en X. Por lo tanto, la ecuación de fuerzas en X para el letrero es

$$T_n\hat{x} - F_r\hat{x} = ma_n\hat{x}, \tag{8}$$

donde hemos denominado T_n a la nueva tensión y hemos llamado a_n a la nueva aceleración (la cual sigue siendo en la dirección positiva de X). Nos dicen que la magnitud de la aceleración de la avioneta, que es la misma del letrero, es tres cuartos la aceleración en (a), y la magnitud de la tensión es un cuarto la de (a). Es decir, la nueva aceleración es $a_n = (3/4)a_c$ y la nueva tensión es $T_n = (1/4)T$. Por lo tanto, usando los valores conocidos, la ecuación (8) queda así:

$$(1/4)\underbrace{(700\ \mathrm{N})}_{T}\hat{x} - F_r\hat{x} = \underbrace{(70\ \mathrm{kg})}_{m}(3/4)\underbrace{(10\ \mathrm{m/s^2})}_{a}\hat{x}. \tag{9}$$

Si despejamos la fuerza de fricción, esto nos da

$$F_r\hat{x} = -(350\ \mathrm{N})\hat{x}. \tag{10}$$

La magnitud de la fricción, que es lo que nos piden, es entonces de 350 N (el signo menos indica que la fricción apunta en el sentido negativo del eje X, como ya sabíamos).

(c) Ya sabemos que la magnitud de la tensión que la cuerda hace sobre el letrero y sobre la avioneta debe ser la misma, pues la cuerda es ideal. Ahora, la única forma de que la cuerda acelere en el sentido positivo de X es si la avioneta le hace más fuerza a la cuerda que la que puede hacer el letrero. Entonces no puede ser cierto que la magnitud de la tensión sea igual a la fuerza con la que el letrero y la avioneta halan, pues ya dijimos que para que la cuerda acelere la avioneta y el letrero halan con fuerzas de diferente magnitud mientras que la cuerda hala con una tensión de igual magnitud en sus extremos. Aunque muchos estarían tentados a decir que por la tercera ley de Newton la fuerza con la que halamos un extremo de una cuerda es igual en magnitud a la fuerza con la que el extremo nos hala a nosotros, ¡acabamos de comprobar que esto no siempre sucede con la tensión!

Problema 4.13.

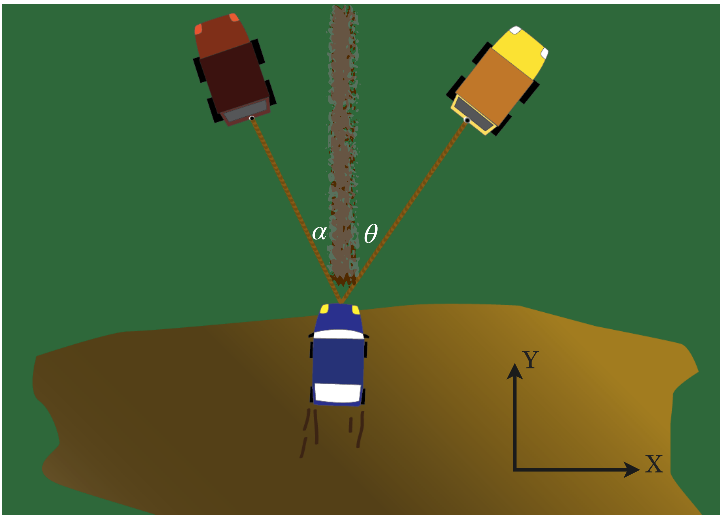
Palabras clave: fuerza de tensión, dos cuerdas halando un objeto, aceleración en dos dimensiones, magnitud y dirección de la aceleración neta.

Dos *jeeps* están halando a un carro azul de masa m que se quedó atrapado en un lodo muy denso. Suponga que conocemos la magnitud de la tensión ejercida por ambas cuerdas: T_1 para la cuerda izquierda y T_2 para la cuerda derecha. Además, conocemos los ángulos α y θ que hacen las cuerdas con respecto al camino de tierra y piedras indicado en el dibujo. También conocemos la magnitud de la fuerza de fricción dinámica del carro azul con el lodo, que es F_r y vamos a suponer que la fricción sólo actúa en el sentido negativo del eje Y usado en la figura.

(a) Escriba una expresión para la magnitud de la aceleración del carro azul en términos de las tensiones, los ángulos indicados, la masa del carro y la magnitud de la fricción.

(b) Si F_r es 1700 N, si T_1 es 1000 N, T_2 es 1500 N, α es 60 grados, θ es 30 grados y m es 2000 kg, ¿cuál es la magnitud y dirección de la aceleración del carro azul?

Ayuda: en este problema sólo necesitamos considerar las fuerzas que ocurren en el plano X-Y, es decir, puede ignorar el peso y la normal de los carros.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) Conocemos la masa m del carro azul, conocemos T_1, que es la magnitud de la tensión de la cuerda izquierda, y T_2, que es la magnitud de la tensión de la cuerda derecha. Conocemos la magnitud de la fuerza de fricción F_r dinámica entre el lodo y el carro. También conocemos los ángulos α y θ. Debemos suponer que la fricción sólo actúa a lo largo del eje Y. Para el problema nos dicen que consideremos sólo lo que ocurre en el plano X-Y.

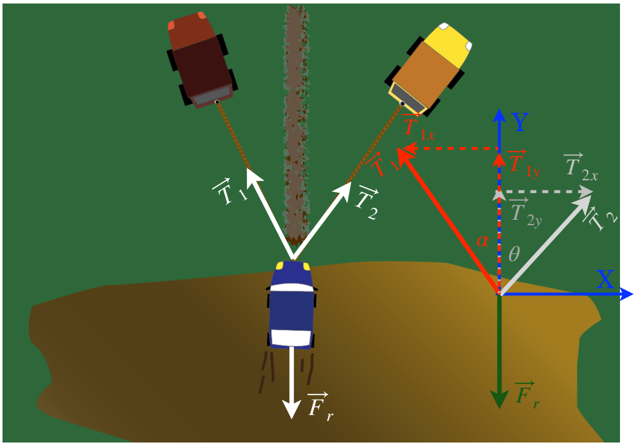
(b) F_r es 1700 N, T_1 es 1000 N, T_2 es 1500 N, α es 60 grados, θ es 30 grados y la masa del carro es 2000 kilogramos.

¿Qué nos piden?

(a) Una expresión para la magnitud de la aceleración del carro azul, en término de las tensiones, los ángulos, la magnitud de la fricción y la masa del carro azul.

(b) Magnitud y dirección de la aceleración del carro azul.

(a) Como ya es costumbre, comencemos por realizar un diagrama de fuerzas del objeto que vamos a analizar, que en este caso es el carro azul. Tengamos en cuenta que la fuerza de fricción dinámica sobre el carro sólo actúa en la dirección negativa del eje Y, como nos dicen en el enunciado. Al hacer el diagrama tengamos en cuenta que debemos descomponer las fuerzas de tensión (en X y Y):



Sobre el carro actúan dos fuerzas de tensión y la fuerza de fricción que va en el sentido negativo de Y (sobre el carro también hay una fuerza normal y un peso, pero estas dos fuerzas no nos interesan porque sólo vamos a analizar lo que sucede en el plano X-Y). Descomponemos las dos tensiones (las componentes están con líneas punteadas). La fuerza de fricción no hay que descomponerla.

Para hallar la magnitud de la aceleración debemos encontrar sus componentes (es decir, debemos encontrar la aceleración en X y la aceleración en Y), pues recordemos que la magnitud de un vector es la raíz cuadrada de la suma de la magnitud de cada componente al cuadrado:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\|\vec{a}_x\|^2 + \|\vec{a}_y\|^2}. \tag{1}$$

El lector puede preguntarse por qué no fue necesario aplicar esta ecuación en los problemas anteriores del presente capítulo. La razón es que antes la aceleración era sólo en X o en Y, no en X y Y *a la vez* como en este caso.

Empecemos por hallar una expresión para la magnitud de la aceleración en X. En X tenemos dos fuerzas: la componente $\vec{T}_{1x}$ y la componente $\vec{T}_{2x}$. La primera apunta en la dirección negativa de X mientras que la segunda apunta en la dirección positiva. Por lo tanto, en X tenemos la siguiente ecuación:

$$-\vec{T}_{1x}\hat{x} + \vec{T}_{2x}\hat{x} = ma_x\hat{x}, \tag{2}$$

donde a_x es la magnitud de la aceleración del carro azul a lo largo del eje X que no conocemos. Tampoco conocemos la dirección de la aceleración; al escribir la ecuación (2) hemos supuesto que es positiva pero después, cuando reemplacemos los valores, vamos a averiguar si esta suposición es correcta o no. Además, en el diagrama de fuerzas podemos ver que las magnitudes T_{1x} y T_{2x} están dadas por $T_1 \sin\alpha$ y $T_2 \sin\theta$ respectivamente. Por lo tanto, la ecuación (2) queda

$$-\underbrace{(T_1 \sin\alpha)}_{T_{1x}}\hat{x} + \underbrace{(T_2 \sin\theta)}_{T_{2x}}\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{3}$$

Si dividimos por la masa obtenemos:

$$\frac{-T_1 \sin\alpha\,\hat{x} + T_2 \sin\theta\,\hat{x}}{m} = a_x\hat{x}. \tag{4}$$

Así que la magnitud de la aceleración en X es

$$\left\|\left(\frac{-T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\theta}{m}\right)\hat{x}\right\| = \|a_x\hat{x}\|, \tag{5}$$

donde a la izquierda hemos usado que $a\hat{x} + b\hat{x} = (a+b)\hat{x}$ (nota 1.19). Note que como en este caso no sabemos si la dirección de la aceleración es positiva o negativa, debemos usar valor absoluto[5].

[5] Cuando estamos seguros de las direcciones de los vectores, la regla de oro nos da directamente las magnitudes, sin necesidad de aplicar valor absoluto. Por ejemplo, si la ecuación $-(T_1 \sin\alpha)\hat{x} + (T_2 \sin\theta) = ma_x\hat{x}$ tuviera los signos correctos, al aplicar la regla de oro a la derecha obtendríamos ma_x, de donde podemos inferir la magnitud de la aceleración en X sin necesidad de aplicar valor absoluto. Pero en el caso actual no estamos seguros de los signos, así que al aplicar la regla de oro a_x podría ser negativo y la magnitud no puede ser negativa. Por eso, cuando no estamos seguros de los signos y buscamos la magnitud de un vector, debemos aplicar el valor absoluto.

Ahora debemos hallar la magnitud de la aceleración Y. En Y tenemos tres fuerzas actuando sobre el carro azul: las componentes en Y de ambas tensiones ($\vec{T}_{1y}$ y $\vec{T}_{2y}$) y la fuerza $\vec{F}_r$ de fricción. Ambas componentes Y de la tensión apuntan en la dirección positiva del eje Y, mientras que la fricción apunta en la dirección negativa de Y. Además, la dirección de movimiento es positiva en Y (pues los *jeeps* están halando al carro azul). Por lo tanto, la ecuación de fuerzas en Y es

$$T_{1y}\hat{y} + T_{2y}\hat{y} - F_r\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{6}$$

Del diagrama de fuerzas podemos notar que T_{1y} es igual a $T_1\cos\alpha$ y T_{2y} es igual a $T_2\cos\theta$. Así, la ecuación (6) queda

$$\underbrace{(T_1\cos\alpha)}_{T_{1y}}\hat{y} + \underbrace{(T_2\cos\theta)}_{T_{2y}}\hat{y} - F_r\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{7}$$

Dividimos por la masa para obtener $a_y\hat{y}$:

$$\frac{T_1\cos\alpha\,\hat{y} + T_2\cos\theta\,\hat{y} - F_r\hat{y}}{m} = a_y\hat{y}. \tag{8}$$

Así, la magnitud de la componente Y de la aceleración es

$$\left\|\left(\frac{T_1\cos\alpha + T_2\cos\theta - F_r}{m}\right)\hat{y}\right\| = \|a_y\hat{y}\|. \tag{9}$$

Ya que conocemos la magnitud de ambas componentes podemos escribir una expresión para la magnitud del vector de aceleración usando la ecuación (1):

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\left\|\underbrace{\left(\frac{-T_1\sin\alpha + T_2\sin\theta}{m}\right)\hat{x}}_{\|\vec{a}_x\|}\right\|^2 + \left\|\underbrace{\left(\frac{T_1\cos\alpha + T_2\cos\theta - F_r}{m}\right)\hat{y}}_{\|\vec{a}_y\|}\right\|^2}. \tag{10}$$

Como los términos dentro de la raíz están al cuadrado darán un número positivo, así que podemos ignorar las barras de valor absoluto y podemos aplicar la regla de oro para eliminar los vectores unitarios:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{-T_1\sin\alpha + T_2\sin\theta}{m}\right)^2 + \left(\frac{T_1\cos\alpha + T_2\cos\theta - F_r}{m}\right)^2}. \tag{11}$$

(b) Ahora nos dan unos valores numéricos para las tensiones, la fuerza de fricción y la masa del carro y con ellos debemos decir la dirección y la magnitud de la aceleración del carro. Podemos usar la ecuación (11) directamente pero es más sencillo si primero calculamos la magnitud de la aceleración en X usando la ecuación (5), después calculamos la magnitud de la aceleración en Y usando la ecuación (9), y al final usamos la ecuación (11) con los resultados que acabamos de hallar. Si reemplazamos los valores en la ecuación (5), obtenemos

$$\left\| \frac{-\overbrace{(1000\text{ N})}^{T_1}\sin\overbrace{60^\circ}^{\alpha}+\overbrace{(1500\text{ N})}^{T_2}\sin\overbrace{30^\circ}^{\theta}}{\underbrace{2000\text{ kg}}_{m}}\hat{x}\right\| = \left\|-(0.058\text{ m/s}^2)\hat{x}\right\|. \tag{12}$$

Notemos el signo negativo dentro del valor absoluto, lo que señala que la aceleración X era de hecho negativa, contrario a lo que supusimos al escribir la ecuación (2). Aquí se ve que la magnitud de la aceleración en X es

$$\|\vec{a}_x\| = (0.058\text{ m/s}^2). \tag{13}$$

La magnitud de la aceleración en Y la calculamos con la ecuación (9):

$$\left\| \frac{\overbrace{(1000\text{ N})}^{T_1}\cos\overbrace{60^\circ}^{\alpha}+\overbrace{(1500\text{ N})}^{T_2}\cos\overbrace{30^\circ}^{\theta}-\overbrace{1700\text{ N}}^{F_r}}{\underbrace{2000\text{ kg}}_{m}}\hat{y}\right\| = \left\|-(0.05\text{ m/s}^2)\hat{y}\right\|. \tag{14}$$

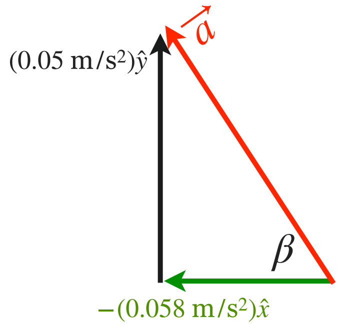
Así que la magnitud de esta aceleración Y es

$$\left\|\vec{a}_y\right\| = (0.05\text{ m/s}^2). \tag{15}$$

Una vez conocemos la magnitud de ambas aceleraciones podemos calcular la magnitud de la aceleración total del carro, usando la ecuación (11):

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(\underbrace{0.058\text{ m/s}^2}_{\|\vec{a}_x\|})^2+(\underbrace{0.05\text{ m/s}^2}_{\|\vec{a}_y\|})^2} = 0.08\text{ m/s}^2. \tag{16}$$

Para hallar la dirección de la aceleración podemos usar las componentes de la aceleración. La aceleración total es el vector que resulta de sumar la aceleración X con la aceleración Y:



La flecha roja se refiere al vector de la aceleración $\vec{a}$ del carro. Los vectores negro y verde corresponden a las componentes Y y X del vector de aceleración. β indica la dirección de la aceleración con respecto al eje X negativo en el sentido de las manecillas del reloj.

Para indicar la dirección de la aceleración del carro sólo hace falta determinar el ángulo β del dibujo. Notemos que tangente de β es igual a la magnitud del cateto opuesto 0.05 m/s^2, sobre la magnitud del cateto adyacente 0.058 m/s^2:

$$\tan\beta = \frac{\|\vec{a}_y\|}{\|\vec{a}_x\|} = \frac{(0.05\ \mathrm{m/s}^2)}{(0.058\ \mathrm{m/s}^2)} = 0.86. \tag{17}$$

Así que arcotangente de 15.34 nos da el ángulo β:

$$\arctan 0.86 = 40.70^\circ. \tag{18}$$

En palabras, el carro se mueve con una aceleración que tiene dirección de 40.70 grados medidos en el sentido de las manecillas del reloj del eje X negativo.

Problema 4.14.

Palabras clave: plano inclinado, dos sistemas de coordenadas en plano inclinado, aceleración de un objeto en un plano inclinado.

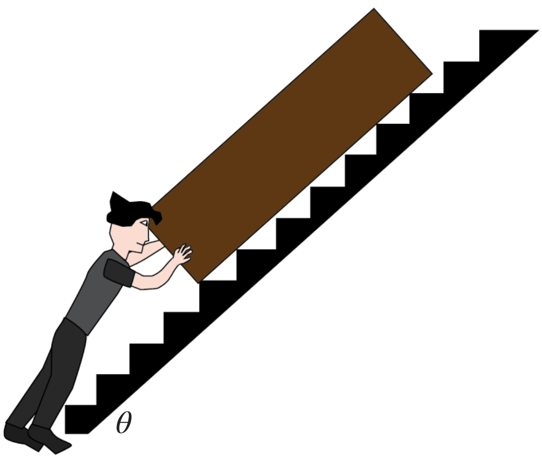
Otra vez Camilo empuja su biblioteca pero esta vez la debe subir por unas empinadas escaleras, como se ve en el dibujo. Suponga que la biblioteca tiene masa m, que el ángulo de inclinación de las escaleras es θ y que no hay fricción entre las escaleras y la biblioteca.

(a) Escriba una expresión para la magnitud de la fuerza que debe hacer Camilo para sostener la biblioteca. Use un sistema de coordenadas en el cual el eje Y apunte de forma vertical hacia arriba de la página y el eje X apunte hacia la derecha.

(b) Vuelva a resolver (a) pero usando un sistema de coordenadas inclinado en el cual el eje X sea paralelo al plano de las escaleras (paralelo a la dirección en que Camilo empuja) y el eje Y sea perpendicular a dicho plano.

(c) Si Camilo hiciera el doble de la fuerza hallada en (a), dé una expresión para la aceleración de la biblioteca en ese caso, usando el segundo sistema de coordenadas.

(d) Suponga que Camilo deja caer la biblioteca. Con base en lo hallado antes, dé una expresión para la aceleración de la biblioteca.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) En ningún caso hay fricción entre la biblioteca y las escaleras. Tenemos la masa m de la biblioteca y la inclinación de las escaleras que es θ. Debemos usar un sistema de coordenadas en el cual el eje Y apunte de forma vertical y el eje X lo haga hacia la derecha.
(b) Nos dan la misma información pero debemos usar un sistema en el cual el eje X sea paralelo a las escaleras.
(c) Suponga que Camilo duplica la fuerza calculada en (a) y (b).
(d) Suponga que Camilo libera la biblioteca.

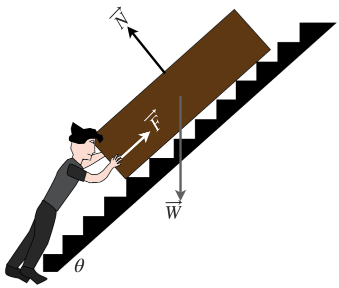
¿Qué nos piden?

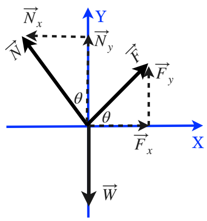
(a) y (b) Una expresión para la magnitud de la fuerza que debe hacer Camilo para sostener la biblioteca usando los dos sistemas de coordenadas explicados anteriormente.

(c) Una expresión para la aceleración de la biblioteca para el segundo sistema de coordenadas —el usado en (b)—.

(d) La aceleración de la biblioteca si Camilo la deja caer.

(a) Comenzamos por realizar un diagrama de fuerzas de la biblioteca. Nos piden que usemos un sistema de coordenadas con el eje Y apuntando hacia arriba y el eje X hacia la derecha.





Sobre la biblioteca actúan tres fuerzas; la fuerza que hace Camilo que es paralela a la pendiente de las escaleras; el peso que siempre apunta hacia el piso; y la normal que es perpendicular a las escaleras. Si usamos un sistema de coordenadas con el eje Y vertical, entonces tenemos que descomponer la fuerza normal y la fuerza que hace Camilo, pero no tenemos que descomponer el peso. Notemos que el ángulo θ es el mismo que hace la fuerza de Camilo con el eje X. Además, el lector puede comprobar que tiene que ser el mismo ángulo que se forma entre la normal y su componente Y (note que entre la normal y la fuerza que hace Camilo se forma un ángulo de 90 grados, y entre la componente X de la fuerza de Camilo y la componente Y de la normal también hay 90 grados).

Debemos encontrar una expresión para la magnitud de la fuerza que debe hacer Camilo para sostener a la biblioteca, es decir, para que la biblioteca se mantenga en reposo (aceleración cero). Esta fuerza tiene componentes X y Y, como se aprecia del diagrama de fuerzas. Comencemos por analizar lo que sucede en Y.

Como se aprecia en el diagrama de fuerzas, tanto la componente Y de la normal como la componente Y de la fuerza que hace Camilo son positivas, mientras que el peso es negativo. Por lo tanto, la segunda ley de Newton en Y queda así:

$$N_y\hat{y} + F_y\hat{y} - W\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{1}$$

Además, la aceleración de la biblioteca es cero (Camilo sólo la sostiene). Como la aceleración es cero, la aceleración X y Y tienen que ser cero, pues cuando un vector es cero todas sus componentes tienen que ser cero. Teniendo en cuenta esto, la ecuación (2) queda así:

$$N_y\hat{y} + F_y\hat{y} - W\hat{y} = 0\hat{y}. \tag{2}$$

Si dejamos sola la componente de la fuerza en Y que hace Camilo, y tenemos en cuenta que la magnitud del peso es mg, esto da

$$F_y\hat{y} = mg\hat{y} - N_y\hat{y}. \tag{3}$$

Notemos que la componente Y de la fuerza nos queda en términos de la fuerza normal en Y que desconocemos. Pero la normal en Y y la normal en X se pueden escribir en términos de la normal total y del ángulo θ, y a este último sí lo conocemos. En el diagrama de fuerzas es claro que la magnitud de la normal en Y es $N\cos\theta$. Si usamos esto en la ecuación (3) obtenemos

$$F_y\hat{y} = mg\hat{y} - \underbrace{N\cos\theta}_{N_y}\hat{y}. \tag{4}$$

Esta ecuación nos da la fuerza en Y que hace Camilo pero en términos de la magnitud de la normal, que tampoco conocemos. Sin embargo, si planteamos las ecuaciones en X podemos encontrar una forma de relacionar la magnitud de la normal con otras variables conocidas.

En X hay dos fuerzas, la componente X de la fuerza que hace Camilo, que es positiva según nuestro sistema, y la componente X de la normal, que es negativa según nuestro sistema. Así, la segunda ley de Newton en X es

$$-N_x\hat{x} + F_x\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{5}$$

Pero en X tampoco hay aceleración, así que esto queda

$$-N_x\hat{x} + F_x\hat{x} = 0\hat{x}. \tag{6}$$

Ahora podemos despejar la componente X de la fuerza que hace Camilo y de una vez podemos usar el hecho de que la magnitud de la componente X de la normal es $N\sin\theta$ (como se aprecia en el diagrama de fuerzas):

$$F_x\hat{x} = \underbrace{N\sin\theta}_{N_x}\hat{x}. \tag{7}$$

Esta ecuación nos da F_x en términos de la normal y la ecuación (4) nos da F_y también en términos de la normal. Para poder relacionar ambas ecuaciones, debemos ponerlas en términos de las mismas variables, pues por ahora una se refiere a F_x y la otra a F_y (así que por ahora tenemos tres incógnitas: N, F_x y F_y).

Notemos en el diagrama de fuerzas que F_y es $F\sin\theta$ y F_x es $F\cos\theta$. Si usamos esto en la ecuación (4) y en la (7) respectivamente, obtenemos

$$\underbrace{F\sin\theta}_{F_y}\hat{y} = mg\hat{y} - N\cos\theta\hat{y}, \tag{8}$$

$$\underbrace{F\cos\theta}_{F_x}\hat{x} = N\sin\theta\hat{x}. \tag{9}$$

Ahora sí podemos relacionar ambas ecuaciones porque ambas están escritas en términos de F. Usando estas ecuaciones podemos despejar la fuerza F de una ecuación y usar el resultado en la otra, o también podemos despejar la normal N de una ecuación y usarla en la otra. Despejemos F de la ecuación (9) y luego usemos el resultado en la ecuación (8). Si dividimos la ecuación (9) por el coseno de θ y aplicamos la regla de oro, obtenemos

$$F = \frac{N\sin\theta}{\cos\theta}. \tag{10}$$

Si usamos esto para reemplazar F en la ecuación (8) y aplicamos la regla de oro, obtenemos

$$\underbrace{\left(\frac{N\sin\theta}{\cos\theta}\right)}_{F}\sin\theta = mg - N\cos\theta. \tag{11}$$

A partir de esta ecuación podemos despejar la fuerza normal que es nuestra única incógnita. Si dejamos mg solo al lado derecho y multiplicamos los senos del primer término, esto da

$$\left(\frac{N\sin^2\theta}{\cos\theta}\right) + N\cos\theta = mg. \tag{12}$$

Ahora podemos sacar factor común de la normal:

$$N\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+\cos\theta\right)=mg. \tag{13}$$

Para simplificar más el resultado, sumemos los términos entre paréntesis:

$$N\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)=mg. \tag{14}$$

Recordemos que $\sin^2 x+\cos^2 x=1$:

$$N\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)=mg. \tag{15}$$

Finalmente, si multiplicamos por el coseno obtenemos la magnitud de la normal:

$$N=mg\cos\theta. \tag{16}$$

Ahora que conocemos la magnitud de la normal podemos usar la ecuación (10) o la ecuación (9) para obtener F. Si usamos la normal dada por la ecuación (16) en la ecuación (10), llegamos a

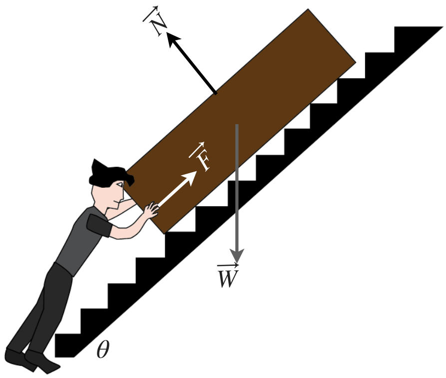
$$F=\frac{\overbrace{(mg\cos\theta)}^{N}\sin\theta}{\cos\theta}. \tag{17}$$

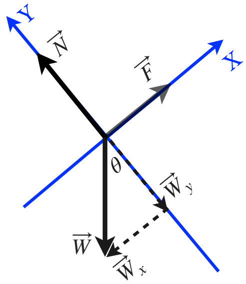
El coseno se cancela y finalmente obtenemos una expresión para F, la magnitud de la fuerza que hace Camilo:

$$F=mg\sin\theta. \tag{18}$$

Notemos que si el ángulo es cero, esta expresión nos da cero (seno de cero es cero), lo cual tiene sentido porque si no hubiera escaleras, si la biblioteca estuviera en el piso de forma horizontal, Camilo no tendría que hacer ninguna fuerza para sostenerla. Por otro lado, la fuerza es máxima cuando θ es 90 grados (en ese caso seno nos da 1 y la magnitud de la fuerza da mg). Esto tiene sentido, pues si las escaleras fueran como una pared completamente vertical, Camilo tendría que levantar por completo la biblioteca que pesa mg.

(b) Ahora debemos encontrar una expresión para la magnitud de la fuerza que tiene que hacer Camilo, usando un sistema de coordenadas inclinado cuyo eje X esté paralelo a las escaleras. Como siempre, empezamos por realizar un diagrama de fuerzas.





Como ya sabemos, sobre la biblioteca actúan la fuerza que hace Camilo, que es paralela a las escaleras, el peso que va hacia abajo y la normal que es perpendicular a las escaleras. Si usamos un sistema de coordenadas inclinado cuyo eje X apunte en la dirección de las escaleras, entonces no tenemos que descomponer la fuerza de Camilo ni la fuerza normal, sólo debemos descomponer el peso. Notemos que el ángulo que forman el peso y la componente Y es el mismo θ del plano inclinado (nota 1.16).

Como se explica en el diagrama, ahora sólo debemos descomponer una fuerza (el peso) mientras que con el sistema anterior debíamos descomponer dos fuerzas (la normal y la fuerza de Camilo). Ahora los cálculos serán más sencillos.

Planteemos la segunda ley de Newton en X. Según nuestro nuevo sistema, en X tenemos sólo la fuerza que hace Camilo y la componente X del peso, así que la segunda ley de Newton en X para este sistema queda:

$$F\hat{x} - W_x\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{19}$$

Como ya sabemos, la aceleración es cero, así que esto da:

$$F\hat{x} - W_x\hat{x} = 0\hat{x}. \tag{20}$$

Ahora, notemos del diagrama de fuerzas que $W_x = W\sin\theta$. Si usamos esto y despejamos la fuerza, obtenemos

$$F\hat{x} = W\sin\theta\hat{x}. \tag{21}$$

Finalmente, aplicamos la regla de oro y usamos el hecho de que $W = mg$:

$$F = mg\ \sin\theta. \tag{22}$$

Este es el mismo resultado que dice la ecuación (18), lo cual era de esperar porque la magnitud de un vector no depende del sistema de coordenadas usado. Notemos que usando este sistema de coordenadas ni siquiera tuvimos que considerar las ecuaciones en Y. De hecho, antes tuvimos que usar 18 ecuaciones para llegar al resultado y ahora sólo 4 ecuaciones. Esto muestra que en problemas de planos inclinados los cálculos se facilitan considerablemente si usamos un sistema inclinado en el que uno de los ejes sea paralelo a la superficie del plano inclinado.

Nota 4.16. Sistema de coordenadas en planos inclinados

Cuando tenemos un problema con objetos sobre planos inclinados es muy conveniente usar un sistema de coordenadas inclinado, que tenga uno de los ejes alineado con la superficie del plano inclinado.

(c) Ahora nos dicen que Camilo aplica una fuerza con el doble de la magnitud hallada en (a) y (b). Como la fuerza hallada en (a) y (b) era para sostener la biblioteca, si Camilo hace más fuerza entonces va a hacer que la biblioteca acelere a lo largo de las escaleras. Según el sistema de coordenadas de (b), la aceleración de la biblioteca será sólo a lo largo de X en el sentido positivo, así que podemos usar la ecuación (19) para hallarla. Si usamos en la ecuación (19) el hecho de que la magnitud de la fuerza de Camilo es el doble de la fuerza dada por la ecuación (22), obtenemos

$$\underbrace{2mg\sin\theta}_{F}\,\hat{x} - W_x\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{23}$$

Si ahora usamos el hecho de que $W_x = W\sin\theta$ y que $W = mg$, obtenemos

$$2mg\sin\theta\hat{x} - \underbrace{mg\sin\theta}_{W_x}\,\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{24}$$

Si sumamos los dos términos de la izquierda y dividimos por la masa, obtenemos una expresión para la aceleración de la biblioteca:

$$g\sin\theta\hat{x} = a_x\hat{x}. \tag{25}$$

Es decir, la aceleración de la biblioteca es de magnitud $g\sin\theta$ a lo largo de la dirección positiva de X (es decir, la biblioteca sube por las escaleras).

Notemos que si hubiéramos usado el sistema de coordenadas de (a), entonces la aceleración tendría componentes X y Y. En ese caso hubiéramos tenido que hallar la componente X de la aceleración y la componente Y y con esas componentes podríamos después hallar la aceleración total (como hicimos en el problema 4.12). Esta es otra muestra de lo conveniente que es usar un sistema de coordenadas inclinado en casos de planos inclinados.

(d) Si Camilo deja caer la biblioteca, entonces deja de hacer fuerza. Así que la ecuación (19) queda

$$-W_x\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{26}$$

Ahora la única fuerza en X es la componente X del peso. Como $W_x = W\sin\theta$, y $W = mg$, esto da:

$$-\underbrace{mg\sin\theta}_{W_x}\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{27}$$

Al simplificar la masa esto queda

$$-g\sin\theta\hat{x} = a_x\hat{x}. \tag{28}$$

Notemos el signo negativo, el cual indica que la dirección de la aceleración va en la dirección negativa del eje X, pues en esa dirección se va a resbalar la biblioteca si se deja caer. Además, si el ángulo es cero la aceleración será cero, como es de esperar, pues en ese caso la biblioteca no se va a resbalar. Y si el ángulo es de 90 grados, la aceleración será máxima y su magnitud será g. Esto también se puede intuir porque en ausencia de fricción, si el ángulo es 90 grados la biblioteca caerá como si estuviera cayendo libremente y los objetos que caen libremente tienen aceleración de magnitud g.

Nota 4.17. Aceleración de un objeto cayendo en un plano inclinado sin fricción

Un objeto que se desliza libremente sin fricción sobre un plano inclinado con pendiente θ cae con una aceleración de magnitud $g\sin\theta$.

Problema (teórico) 4.15.

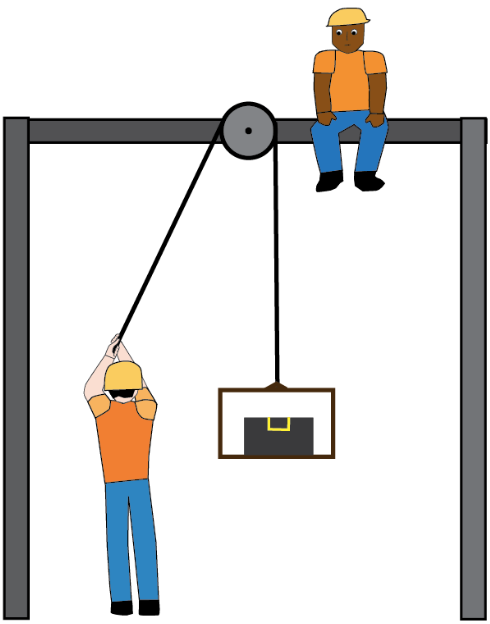
Palabras clave: poleas, polea ideal, cuerda ideal, fuerza normal en un ascensor.

En una construcción un obrero le va a pasar una caja de herramientas a su compañero. Para hacerlo, pone la caja de herramientas sobre una plataforma que está atada a una cuerda, y luego usa una polea con la que sube la plataforma, como se indica en el dibujo. La polea y la cuerda son ideales. Suponga que la plataforma tiene masa de 5 kilogramos y la caja de herramientas tiene masa de 7 kilogramos.

(a) Explique qué características tiene una polea ideal, teniendo en cuenta la relación entre las cuerdas ideales y las poleas ideales.

(b) Determine la magnitud de la fuerza normal sobre la caja de herramientas si suponemos que la cuerda hala con una tensión de magnitud de 150 newtons las manos del obrero. Para hallar la respuesta debe analizar tanto lo que sucede con la caja de herramientas como lo que sucede con la plataforma. Además, analice la relación entre la tensión y la normal.

(c) Con base en lo hecho en la pregunta (b), diga cuándo la normal sobre la caja de herramientas es cero y diga cuál es la aceleración de la caja de herramientas y de la plataforma en ese caso.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b), (c) La masa de la caja de herramientas es de 7 kilogramos y la masa de la plataforma es de 5 kilogramos. Además, nos dicen que la polea y la cuerda son ideales. La magnitud de la fuerza de tensión que la cuerda le hace a las manos del obrero es de 150 newtons.

¿Qué nos piden?

(a) Debemos explicar qué es una polea ideal.

(b) Debemos encontrar la magnitud de la fuerza normal sobre la caja de herramientas y discutir la relación entre la tensión y la normal.

(c) Debemos decir cuándo la normal sobre la caja de herramientas es cero y decir cuál es la aceleración de la caja y de la plataforma en ese caso.

(a) Es sencillo explicar las características de una polea ideal si recordamos las de una cuerda ideal. Recordemos de la nota 4.14 que una cuerda ideal cumple, entre otras cosas, estas dos condiciones: (1) los dos extremos de la cuerda se mueven con la misma rapidez o tienen la misma magnitud de la aceleración; (2) la magnitud de la tensión que la cuerda ejerce es la misma en ambos extremos. Una vez recordamos estas dos condiciones de las cuerdas ideales, podemos definir una polea ideal así: *una polea ideal es aquella que no afecta estas dos características de una cuerda ideal*. Si no tenemos una polea ideal entonces la cuerda que se pone sobre la polea, incluso si inicialmente es una cuerda ideal, deja de serlo.

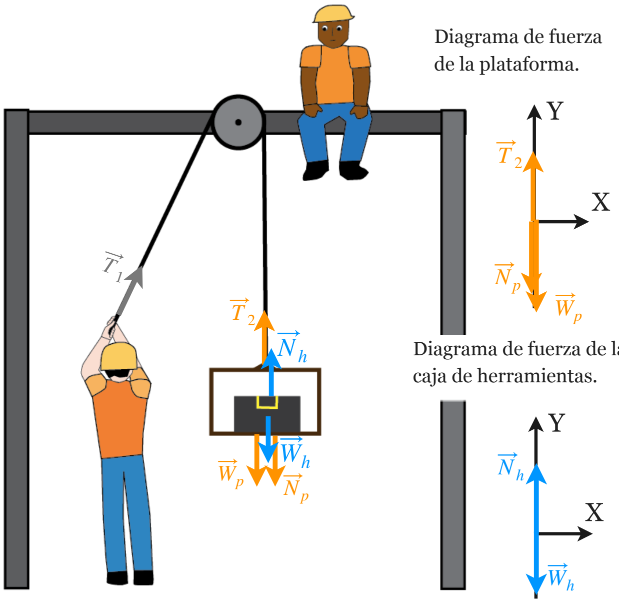
Nota 4.18. Polea ideal

Una polea ideal permite que una cuerda ideal que se pone sobre la polea mantenga las siguientes dos características:

(1) Los dos extremos de la cuerda se mueven con la misma rapidez o tienen la misma magnitud de la aceleración.

(2) La magnitud de la tensión que la cuerda ejerce es la misma en ambos extremos.

(b) Para hallar la magnitud de la fuerza normal sobre la caja de herramientas debemos analizar lo que sucede con la caja y con la plataforma, como nos dicen en el enunciado. Así que debemos realizar un diagrama de fuerzas de ambos objetos. Usaremos un sistema de coordenadas con el eje Y apuntando hacia arriba.



Sobre la caja de herramientas actúan dos fuerzas (en azul), el peso de la caja de herramientas que es $\vec{W}_h$ y la fuerza normal $\vec{N}_h$ que la base de la plataforma ejerce sobre la caja. Por su parte, sobre la plataforma actúan tres fuerzas (en naranja): el peso de la plataforma que es $\vec{W}_p$, la fuerza normal $\vec{N}_p$ que la superficie inferior de la caja de herramientas le hace a la plataforma, y la tensión $\vec{T}_2$ que la cuerda le hace a la plataforma. Notemos que la cuerda le hace una tensión $\vec{T}_1$ a las manos del obrero, y como tenemos una cuerda ideal y una polea ideal, la magnitud de esa tensión debe ser igual a la magnitud de $\vec{T}_2$.

Cuidado: es incorrecto decir que sobre la plataforma actúa el peso de la caja de herramientas. No debemos confundir el peso con la normal (nota 4.13).

Para hallar la magnitud de la fuerza normal sobre la caja de herramientas, empecemos por plantear las ecuaciones de fuerza sobre la caja de herramientas.

Sobre la caja de herramientas hay dos fuerzas, el peso que tiene dirección negativa de Y y la normal que tiene dirección positiva de Y. Por lo tanto, la ecuación de fuerzas en Y para la caja de herramientas es

$$N_h\hat{y} - W_h\hat{y} = m_h a_h \hat{y}, \tag{1}$$

donde hemos llamado a_h a la magnitud de la aceleración de la caja de herramientas (que no conocemos pero que sabemos va hacia arriba porque la plataforma sube). Si aplicamos la regla de oro y usamos que $W_h = m_h g$, obtenemos

$$N_h - \underbrace{m_h g}_{W_h} = m_h a_h. \tag{2}$$

La ecuación (2) no nos permite despejar la normal ya que desconocemos a_h. Por lo tanto, necesitamos otras ecuaciones. Planteemos la ecuación de fuerzas sobre la plataforma.

Como se ve del diagrama de fuerzas, tanto $\vec{W}_p$ como $\vec{N}_p$ tienen dirección negativa en Y, mientras que $\vec{T}_2$ apunta en la dirección positiva. Por lo tanto, la ecuación de fuerzas en Y de la plataforma es

$$T_2\hat{y} - W_p\hat{y} - N_p\hat{y} = m_p a_p \hat{y}, \tag{3}$$

donde hemos llamado a_p a la aceleración de la plataforma (que no conocemos, pero que sabemos va hacia arriba). Usando que $W_p = m_p g$ y aplicando la regla de oro, obtenemos

$$T_2 - \underbrace{m_p g}_{W_p} - N_p = m_p a_p. \tag{4}$$

A primera vista puede parecer que esta ecuación no nos sirve porque no conocemos las nuevas variables T_2, N_p ni a_p. Pero en realidad estas variables se pueden relacionar con las variables de la ecuación (2), como se explicará a continuación.

Para empezar, recordemos que la magnitud de la tensión de una cuerda ideal es la misma en ambos extremos, así que $T_1 = T_2$ y conocemos T_1 que es la fuerza con la que hala el obrero (esto no quiere decir que $\vec{T}_1 = \vec{T}_2$, pues las tensiones no son iguales ya que no tienen la misma dirección). Así, tenemos

$$\underbrace{T_1}_{T_2} - m_p g - N_p = m_p a_p. \tag{5}$$

Además, notemos que la aceleración de la plataforma es la misma que la aceleración de la caja de herramientas, pues la caja está dentro de la plataforma; si la plataforma sube con cierta aceleración, la caja sube con esa misma aceleración, si la plataforma baja, la caja también baja, etc. Es decir, $a_h = a_p$ y la ecuación (5) da

$$T_1 - m_p g - N_p = m_p \underbrace{a_h}_{a_p}. \tag{6}$$

Por último, notemos que por la tercera ley de Newton la magnitud de la fuerza normal que le hace la caja de herramientas a la plataforma es la misma que la magnitud de la fuerza normal que la plataforma le hace a la caja de herramientas. Es decir, $N_p = N_h$. Si usamos esto en la ecuación (6) obtenemos

$$T_1 - m_p g - \underbrace{N_h}_{N_p} = m_p a_h. \tag{7}$$

Esta ecuación ya está en términos de sólo dos variables desconocidas, a_h y N_h, lo cual es bueno porque la ecuación (2) está en términos de estas mismas variables. Así que de esta ecuación podemos despejar a_h y luego usar el resultado en la ecuación (2). Si dividimos por la masa de la plataforma podemos despejar a_h:

$$\frac{T_1 - m_p g - N_h}{m_p} = a_h. \tag{8}$$

Ahora podemos usar este resultado en la ecuación (2):

$$N_h - m_h g = m_h \underbrace{\left(\frac{T_1 - m_p g - N_h}{m_p}\right)}_{a_h}. \tag{9}$$

Esta ecuación ya sólo tiene como variable desconocida N_h, que es lo que queremos hallar. Multipliquemos por m_p:

$$N_h m_p - m_h g m_p = m_h T_1 - m_h m_p g - m_h N_h. \tag{10}$$

Ahora movamos los términos que tienen N_h al lado izquierdo y los demás al lado derecho de la igualdad:

$$N_h m_p + m_h N_h = m_h T_1 - m_h m_p g + m_h g m_p. \tag{11}$$

Saquemos factor común de N_h y tengamos en cuenta que $-m_h m_p g$ se cancela con $m_h g m_p$:

$$N_h(m_p + m_h) = m_h T_1. \tag{12}$$

Finalmente, despejemos la magnitud de la normal dividiendo por la suma de las masas:

$$N_h = \frac{m_h T_1}{(m_p + m_h)}. \tag{13}$$

Ahora podemos reemplazar los valores numéricos de cada variable:

$$N_h = \frac{\overbrace{(7\text{ kg})}^{m_h}\overbrace{(150\text{ kg})}^{T_1}}{(\underbrace{5\text{ kg}}_{m_p} + \underbrace{7\text{ kg}}_{m_h})} = 87.5\text{ N}. \tag{14}$$

Note que este es un caso en el que la magnitud del peso y de la normal no son iguales; la magnitud del peso de la caja de herramientas es 7 kg $\times 9.81$ m/s^2 = 68.67 N y la magnitud de la normal es 87.5 N.

Debemos analizar la relación entre la tensión y la normal. Notemos en la ecuación (13) que la magnitud de la fuerza normal sobre la caja de herramientas es directamente proporcional a la magnitud de la tensión. ¿Por qué sucede esto? Si la tensión aumenta, la aceleración de la plataforma aumenta también, lo cual es obvio a partir de la ecuación (5). Y si la aceleración de la plataforma aumenta, entonces la aceleración de la caja aumenta, así que la fuerza neta sobre la caja tiene que haber aumentado (recuerde que la fuerza y la aceleración son directamente proporcionales). Sobre la caja de herramientas sólo hay dos fuerzas: el peso y la normal. El peso es constante y además apunta hacia abajo, así que la fuerza que tiene que aumentar para que acelere más la caja es la fuerza normal. Esto explica por qué la tensión y la normal sobre la caja son directamente proporcionales.

Esto es muy similar a lo que sucede cuando estamos en un ascensor. Cuando el ascensor comienza a subir, nosotros sentimos más fuerza sobre nuestras piernas por un corto tiempo mientras el ascensor acelera. Esto sucede porque cuando el ascensor acelera hacia arriba el piso del ascensor nos hace más fuerza normal que cuando el ascensor está quieto, y esa fuerza normal adicional permite que nosotros aceleremos junto con el ascensor.

(c) Según la ecuación (13), la magnitud de la normal sobre la caja de herramientas sólo es cero si el numerador es cero. Para que el numerador sea cero, o la masa de la caja es cero o la tensión es cero. Obviamente la caja de herramientas tiene cierta masa, así que la tensión tiene que ser cero. Esto implica que la cuerda no produzca ninguna tensión sobre las manos del obrero tampoco, así que el obrero no puede estar halando la cuerda. Es decir, para que no haya fuerza normal sobre la caja, el obrero debe soltar la cuerda.

Ahora, ¿cuál es la aceleración de la caja cuando la normal sobre la caja es cero? A partir de la ecuación (1) podemos ver qué pasa con la aceleración si la normal sobre la caja es cero:

$$\underbrace{0\hat{y}}_{N_h} - m_h g\hat{y} = m_h a_h \hat{y}. \tag{15}$$

Notemos que las masas en ambos lados se cancelan y obtenemos una expresión para la aceleración:

$$-g\hat{y} = a_h \hat{y}. \tag{16}$$

En palabras, si la normal sobre la caja es cero entonces la aceleración de la caja de herramientas tiene magnitud g y dirección negativa (apunta hacia el piso). Es decir, si la normal es cero entonces la caja de herramientas cae libremente. Esto no nos debería sorprender porque si la normal es cero entonces sobre la caja de herramientas sólo actúa el peso y recordemos que cuando sobre un objeto sólo actúa el peso este cae con la aceleración de la gravedad. Esto es coherente con lo que dijimos antes: para que la normal sea cero el obrero debe soltar la cuerda y si el obrero suelta la cuerda entonces la plataforma y la caja comienzan a caer libremente.

En cuanto a la plataforma, ya habíamos dicho que la tensión tenía que ser cero para que la normal sobre la caja fuera cero. También es cero N_p porque $N_p = N_h$. Así que la ecuación (3) queda

$$\underbrace{0\hat{y}}_{T_2} - m_p g\hat{y} - \underbrace{0\hat{y}}_{N_p} = m_p a_p \hat{y}. \tag{17}$$

Así que la aceleración de la plataforma también es la de la gravedad, pues la única fuerza que actúa es el peso:

$$-g\hat{y} = a_p\hat{y}. \tag{18}$$

Por último, notemos que si la plataforma y la caja caen de forma libre, entonces el contacto entre la caja y la plataforma se pierde (la normal entre ellas es cero). Es como si estuviéramos en un ascensor y el ascensor se descolgara o como si estuviéramos en una montaña rusa y el carrito cayera por una parte muy inclinada. Nuestros pies en el caso del ascensor pierden contacto con el piso y sentimos como si flotáramos, y en el caso de la montaña rusa nuestra espalda y cola se despegan de la silla y sentimos que flotamos. Lo mismo sucede con la caja de herramientas; si la plataforma cae libremente, entonces la normal se vuelve cero, lo que indica que la plataforma pierde el contacto con la caja de herramientas.

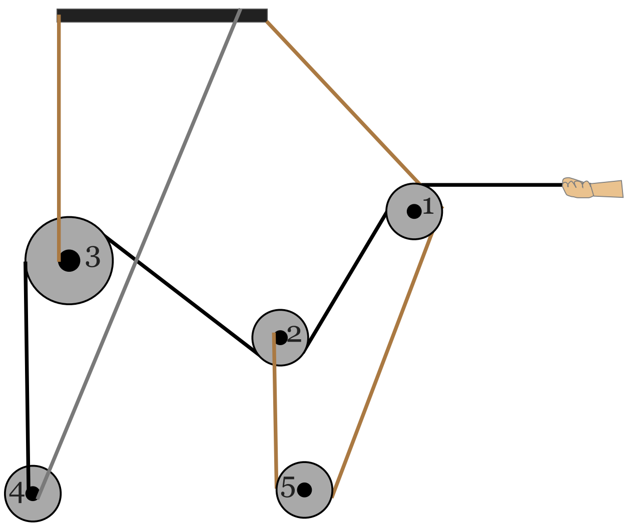
Problema 4.16.

Palabras clave: polea ideal, cuerda ideal, tensión en sistema de poleas, segunda ley.

A continuación va a encontrar un extraño sistema de poleas y cuerdas ideales en el que una persona sostiene con su mano una de las cuerdas de forma que todo está en equilibrio (es decir, todo permanece con aceleración cero). Cada cuerda ideal se identifica por un color diferente. Las poleas 1, 4 y 5 están unidas a la pared, las demás están sólo sostenidas por las diferentes cuerdas.

(a) Realice un diagrama de fuerzas para todas las poleas en el que solamente indique las fuerzas de tensión y explique, con base en su diagrama, cuáles tensiones tienen la misma magnitud.

(b) Suponga que la persona suelta la cuerda. Describa lo que le pasaría a las poleas en ese caso (no tiene que hacer cálculos, sólo describir la situación).



Solución

¿Qué información nos dan?

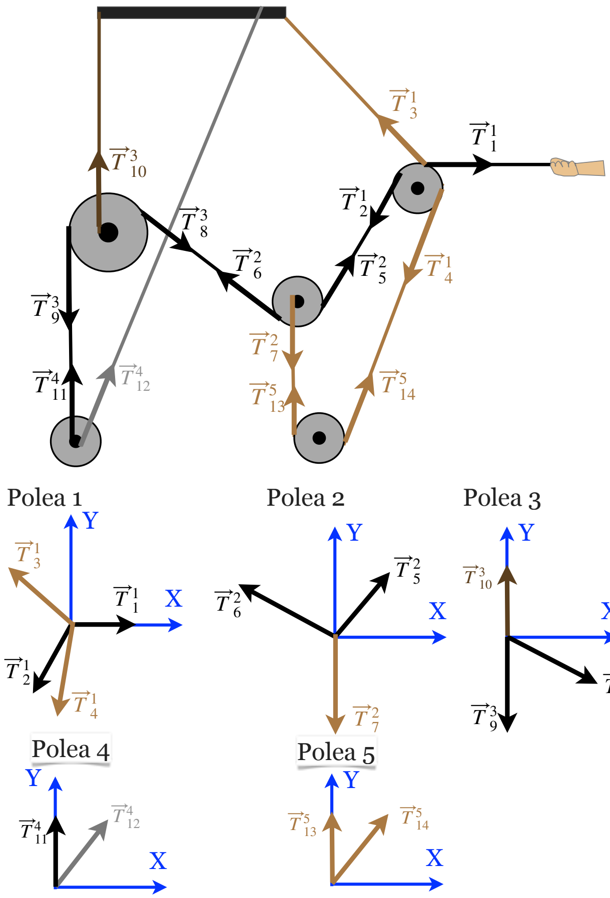
Nos muestran un sistema de poleas y cuerdas ideales en el que una persona sostiene una cuerda para que todo esté en equilibrio. Nos dicen que las poleas 1, 4 y 5 están fijadas a la pared.

¿Qué nos piden?

(a) Debemos realizar un diagrama de fuerzas para todas las poleas en el que sólo consideramos las tensiones. Además, debemos explicar cuáles tensiones tienen la misma magnitud.

(b) Debemos decir qué pasaría con las diferentes poleas en el caso en que la persona liberara la cuerda que está sosteniendo.

(a) Debemos realizar un diagrama de fuerzas de cada polea considerando únicamente las fuerzas de tensión que las cuerdas le hacen a la polea; en cada punto en que una cuerda toca una polea la cuerda le hace una fuerza de tensión a la polea. Usemos índices superiores para indicar sobre qué polea actúa la respectiva fuerza e índices inferiores para enumerar las tensiones. Por ejemplo, $\vec{T}^5_{13}$ se refiere a la tensión número 13 que actúa sobre la polea número 5. Usando esta convención, el diagrama de fuerzas queda así:



Notemos que hemos usado los colores de cada vector de forma coherente con la respectiva cuerda. Como son cuerdas ideales, la magnitud de la tensión que la cuerda hace es la misma en todos los puntos sobres los que actúa. Así que los diferentes puntos sobre los cuales actúa la cuerda negra sienten todos la misma magnitud de la tensión; $\vec{T}_1^1$, $\vec{T}_2^1$, $\vec{T}_5^2$, $\vec{T}_6^2$, $\vec{T}_8^3$, $\vec{T}_9^3$, $\vec{T}_{11}^4$ tienen la misma magnitud (pero direcciones diferentes). Por su parte, $\vec{T}_3^1$, $\vec{T}_4^1$, $\vec{T}_7^2$, $\vec{T}_{13}^5$, $\vec{T}_{14}^5$ tienen la misma magnitud.

(b) Si la persona suelta la cuerda, entonces lo primero que sucede es que la tensión $\vec{T}_1^1$ se vuelve cero, y entonces $\vec{T}_2^1$, $\vec{T}_5^2$, $\vec{T}_6^2$, $\vec{T}_8^3$, $\vec{T}_9^3$, $\vec{T}_{11}^4$ se vuelven cero. Ahora, como las poleas 1, 4 y 5 están fijas a la pared, estas polea no se moverán sin importar lo que pase con las cuerdas. Pero las otras poleas que no están fijas sí se verán afectadas.

La polea 2 dejará de sentir la tensión $\vec{T}_5^2$ y $\vec{T}_6^2$, las cuales tienen componentes Y positivos. Es lógico que si dos fuerzas que apuntan en dirección positiva de Y dejan de actuar, entonces la polea va a dejar de estar en equilibrio y va a caer. Por su parte, la polea 3 va a dejar de sentir las tensiones $\vec{T}_8^3$ y $\vec{T}_9^3$. Ambas tensiones tenían componentes Y negativas, así que ahora la fuerza en Y negativa disminuyó y la polea 3 va a subir.

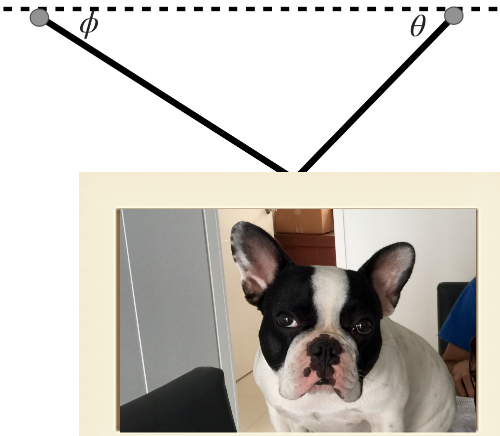
Problema 4.17.

Palabras clave: objeto suspendido de cuerdas ideales, objeto en equilibrio, tensión.

El marco de un cuadro con una foto tiene masa m, y el marco yace en equilibrio suspendido de dos hilos que se sostienen con unas puntillas, como se ilustra en el dibujo. Suponga que los hilos funcionan como cuerdas ideales. Si nos dicen que la magnitud de la tensión sobre el hilo izquierdo es T_1 y conocemos el ángulo ϕ,

(a) Escriba una expresión para el valor del ángulo θ, en términos de m, T_1 y ϕ. Con base en esta expresión, diga qué pasaría si T_1 tendiera a cero.

(b) Con base en lo hecho antes y si la masa del marco es de 1 kilogramo, si ϕ es de 30 grados y si T_1 es 8 N, ¿cuál es la magnitud y dirección de la fuerza que cada hilo hace sobre la respectiva puntilla en la que está cogido?



Solución

¿Qué información nos dan?

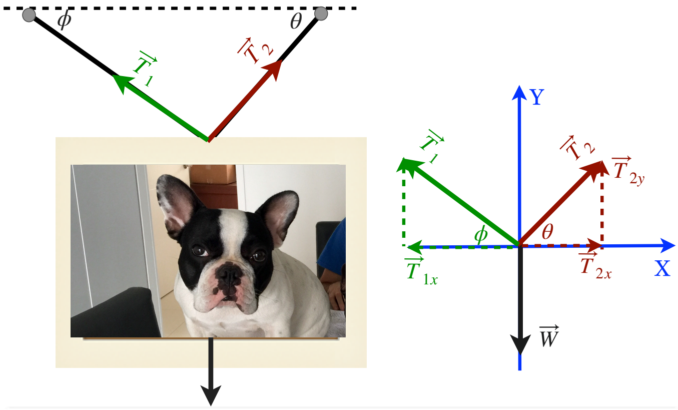
(a) Conocemos la masa m del marco, el ángulo ϕ y la magnitud de la tensión sobre el hilo izquierdo T_1. Además, nos dicen que podemos tratar los hilos como cuerdas ideales y nos dicen que el marco está en equilibrio.
(b) La masa del marco es de un kilogramo, ϕ es de 30 grados y T_1 es 8 N.

¿Qué nos piden?

(a) Debemos hallar una expresión para el ángulo θ en términos de m, T_1 y ϕ. Con base en esta expresión debemos decir qué pasaría si T_1 tendiera a cero.

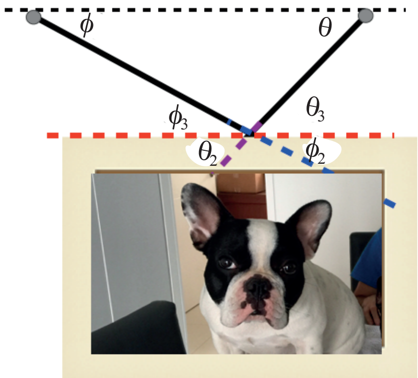
(b) Usando lo hecho en (a) debemos hallar la magnitud y dirección de la fuerza que cada hilo hace sobre la respectiva puntilla en la que está cogido.

(a) Comencemos por realizar el diagrama de fuerza usando un sistema de coordenadas con el eje Y apuntando hacia arriba:



Sobre el marco actúan tres fuerzas; las dos tensiones y el peso. Si usamos un sistema de coordenadas con el eje Y apuntando hacia arriba, entonces debemos descomponer las dos tensiones.

Notemos en el diagrama que el ángulo que se forma entre $\vec{T}_2$ y $\vec{T}_{2x}$ es igual a θ y el ángulo que se forma entre $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_{1x}$ es igual a ϕ. Esto se puede explicar con la siguiente figura:



Si trazamos una línea paralela (en rojo) a la línea negra superior, y extendemos los hilos con otras líneas (morada y azul para el hilo izquierdo y el derecho respectivamente), podemos notar que el ángulo θ_2 que se forma entre la línea roja y la morada es igual a θ, y ϕ_2 que se forma entre la línea roja y la azul es igual a ϕ. Una vez notamos esto, podemos ver que θ_3 es un ángulo opuesto a θ_2 y ϕ_3 es un ángulo opuesto a ϕ_2, y los ángulos opuestos siempre son iguales. Por lo tanto, θ_3 y θ_2 son iguales y ϕ_2 y ϕ_3 también son iguales, y como θ_2 es igual a θ y ϕ_2 es igual a ϕ, entonces por transitividad $\phi = \phi_3$ y $\theta = \theta_3$, que es lo que queríamos mostrar.

Ahora que tenemos el diagrama de fuerzas podemos plantear la segunda ley de Newton para hallar una expresión para el ángulo θ. Nos dicen que el marco está en equilibrio, esto quiere decir que el marco permanece en reposo sin aceleración, así que la aceleración en X y Y tiene que ser cero.

Nota 4.19. Sistema en equilibrio

Cuando un objeto está en equilibrio su aceleración es cero. Esto implica que todas las componentes de su aceleración son cero.

Comencemos por plantear las ecuaciones en X. En X tenemos dos fuerzas: $\vec{T}_{1x}$ y $\vec{T}_{2x}$. Como se ve en el diagrama de fuerzas, $\vec{T}_{1x}$ apunta en el sentido negativo del eje X y $\vec{T}_{2x}$ en el positivo. Por lo tanto, según la segunda ley de Newton, tenemos

$$T_{2x}\hat{x} - T_{1x}\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{1}$$

Como el marco está en equilibrio, la aceleración es cero, así que esta ecuación queda

$$T_{2x}\hat{x} - T_{1x}\hat{x} = 0\hat{x}. \tag{2}$$

Aplicando la regla de oro y pasando $\vec{T}_{1x}$ al otro lado, obtenemos

$$T_{2x} = T_{1x}. \tag{3}$$

Ahora notemos en el diagrama de fuerzas que $T_{1x} = T_1 \cos\phi$ y $T_{2x} = T_2 \cos\theta$, así que la ecuación (3) se puede escribir así:

$$\underbrace{T_2 \cos\theta}_{T_{2x}} = \underbrace{T_1 \cos\phi}_{T_{1x}}. \tag{4}$$

T_2 y θ son variables desconocidas, así que de esta ecuación no podemos despejar θ. Busquemos más ecuaciones.

Analicemos lo que sucede en Y. En Y tenemos tres fuerzas: el peso y las componentes verticales de ambas tensiones. El peso tiene signo negativo según nuestro sistema, mientras que $\vec{T}_{1y}$ y $\vec{T}_{2y}$ tienen signo positivo. Por la segunda ley de Newton tenemos

$$T_{2y}\hat{y} + T_{1y}\hat{y} - W\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{5}$$

Otra vez usamos que el sistema está en equilibrio, así que esta ecuación queda

$$T_{2y}\hat{y} + T_{1y}\hat{y} - W\hat{y} = 0\hat{y}. \tag{6}$$

Se puede ver en el diagrama de fuerzas que $T_{1y} = T_1 \sin\phi$ y que $T_{2y} = T_2 \sin\theta$. Además, $W = mg$. Así, podemos escribir la ecuación (6) del siguiente modo:

$$\underbrace{T_2 \sin\theta}_{T_{2y}}\hat{y} + \underbrace{T_1 \sin\phi}_{T_{1y}}\hat{y} - mg\hat{y} = 0. \tag{7}$$

Esta ecuación tiene dos incógnitas: T_2 y θ. Pero ya teníamos otra ecuación con esas mismas incógnitas, la ecuación (4). Así que podemos usar la ecuación (4) para despejar una de las incógnitas en términos de la otra incógnita, y usar el resultado en la ecuación (7) para despejar la otra incógnita.

Si despejamos T_2 de la ecuación (4), obtenemos

$$T_2 = \frac{T_1 \cos\phi}{\cos\theta}. \tag{8}$$

Ahora podemos usar este resultado en la ecuación (7):

$$\underbrace{\left(\frac{T_1 \cos\phi}{\cos\theta}\right)}_{T_2} \sin\theta\hat{y} + T_1 \sin\phi\hat{y} - mg\hat{y} = 0. \tag{9}$$

Esta ecuación sólo tiene una incógnita: θ. Para despejar θ, comencemos por poner todos los términos que no tienen θ al otro lado, y apliquemos la regla de oro:

$$\left(\frac{T_1 \cos\phi}{\cos\theta}\right) \sin\theta = -T_1 \sin\phi + mg. \tag{10}$$

Además, en el primer término tenemos $\sin\theta$ sobre $\cos\theta$, y eso es igual a $\tan\theta$:

$$T_1 \cos\phi \tan\theta = -T_1 \sin\phi + mg. \tag{11}$$

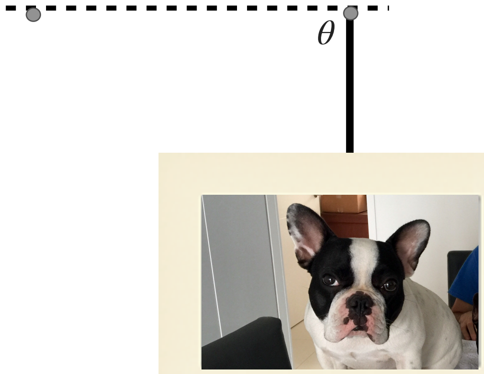
Ahora podemos dividir por $T_1 \cos\phi$ para dejar $\tan\theta$ sola:

$$\tan\theta = \frac{-T_1 \sin\phi + mg}{T_1 \cos\phi}. \tag{12}$$

Finalmente, si aplicamos arcotangente a ambos lados obtenemos la expresión para θ:

$$\theta = \arctan\left(\frac{-T_1 \sin\phi + mg}{T_1 \cos\phi}\right). \tag{13}$$

Con esta expresión debemos decir qué pasaría si T_1 tendiera a cero. Notemos en esta expresión que si T_1 tiende a cero, la división tiende a infinito y arcotangente de infinito tiende a 90 grados. Esto tiene sentido porque si T_1 es cero, es como si el marco sólo estuviera sostenido por el hilo derecho y entonces el hilo derecho va a formar un ángulo de 90 grados, como se ilustra a continuación:



Si la tensión T_1 es cero es como si el hilo izquierdo no estuviera haciendo nada y todo el peso del marco quedara sobre el hilo derecho. En ese caso, la ecuación (13) nos dice que θ será de 90 grados, como se puede apreciar en este dibujo.

(b) La fuerza que cada hilo ejerce sobre su respectiva puntilla no es otra que la fuerza de tensión que cada hilo le hace al marco. Esto es así porque nos dicen que los hilos funcionan como cuerdas ideales, así que la tensión que ejercen en un extremo debe ser igual a la tensión que ejercen en el otro extremo. Por lo tanto, si nos dicen que la tensión 1 es de magnitud de 8 N, entonces ya sabemos que el hilo izquierdo ejerce una fuerza de 8 N sobre la puntilla en la que está sostenido. La dirección de esa fuerza es simplemente 30 grados con respecto a la línea punteada negra superior, pues ese es el valor de ϕ.

La fuerza que el otro hilo hace sobre su puntilla es la fuerza de tensión que hace ese hilo. Para hallar la magnitud de esa fuerza de tensión podemos usar la ecuación (8) pero para poder usar esta ecuación necesitamos conocer el valor de θ.

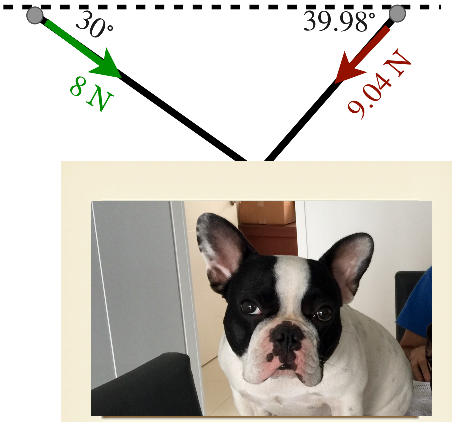
A θ lo podemos hallar si usamos la ecuación (13), teniendo en cuenta que T_1 es 8 N, que la masa es 1 kg y que ϕ es 30 grados:

$$\theta = \arctan\left(\frac{-\overbrace{(8\ \mathrm{N})}^{T_1}\sin \overbrace{30^\circ}^{\phi} + \overbrace{(1\ \mathrm{kg})}^{m}\overbrace{(9.81\ \mathrm{m/s^2})}^{g}}{\underbrace{(8\ \mathrm{N})}_{T_1}\cos \underbrace{30^\circ}_{\phi}} \right) = 39.98^\circ. \tag{14}$$

Ahora que conocemos θ podemos usar la ecuación (8) para hallar T_2:

$$T_2 = \frac{(8\ \mathrm{N})\cos 30^\circ}{\cos 39.98^\circ} = 9.04\ \mathrm{N}. \tag{15}$$

Así, el hilo derecho ejerce una fuerza de tensión de magnitud de 9.04 N en dirección de 39.98 grados. En la siguiente figura ilustramos ambas fuerzas.



Dibujamos la fuerza que cada hilo hace sobre su puntilla. Estas fuerzas no son más que la tensión que cada hilo ejerce sobre el marco porque estamos suponiendo que los hilos funcionan como cuerdas ideales. La dirección de estas fuerzas se indica con los ángulos que cada hilo marca con la línea superior.

Problema de repaso 4.18.

Palabras clave: magnitud del peso, objeto en equilibrio, fuerza de fricción dinámica, tensión, normal.

Responda falso o verdadero y justifique su respuesta.

(1) La magnitud del peso siempre es igual a mg.

(2) Cuando un objeto está en equilibrio la suma neta de fuerzas sobre este es cero.

(3) La fuerza de fricción dinámica depende de la normal que la superficie le hace al objeto.

(4) Supongamos que una cuerda está cogida en su extremo izquierdo de un objeto A y en el extremo derecho de un objeto B. Suponga además que B hala de tal forma que la cuerda y A aceleran hacia la derecha. ¿Es verdadero o es falso que la magnitud de la fuerza que A y B hacen sobre la cuerda es la misma?

(5) Si un carro acelera y arrastra al carro que tiene al frente, entonces sobre el carro de enfrente hay dos fuerzas causadas por el carro de atrás: la fuerza del motor del carro de atrás, sin la cual ninguno de los dos carros aceleraría, y la normal en el punto de contacto entre ambos carros.

Solución

(1) Falso. Generalmente para alturas no muy grandes en la Tierra el peso es mg, pero para grandes alturas debemos usar la ley de gravitación universal, como estudiamos en el problema 4.4 (nota 4.10).

(2) Verdadero. Si un objeto está en equilibrio entonces su aceleración es cero, y para que esto ocurra la suma neta de fuerzas sobre el cuerpo debe ser cero.

(3) Verdadero. Recordemos que la fuerza de fricción dinámica está dada por μN, así que esta fuerza depende de la magnitud de la normal que la superficie ejerce sobre el objeto.

(4) Es falso. Como se explicó en la última pregunta del problema 4.11, si una cuerda tiene aceleración entonces la magnitud de la fuerza que se le hace en un extremo debe ser diferente a la magnitud de la fuerza que se le hace en el otro extremo, de forma que la fuerza neta sea diferente de cero (y entonces la cuerda acelere). Podríamos confundirnos y creer que la fuerza que A y B hacen son iguales en magnitud ya que la magnitud de la tensión que la cuerda hace en ambos extremos es la misma. Pero la confusión surge al creer que la

magnitud de la tensión es igual a la magnitud de la fuerza que se hace en el respectivo extremo. Eso sólo es verdad cuando la cuerda está en reposo o se mueve con velocidad constante.

(5) Falso. Sobre el carro del frente sólo hay una fuerza causada por el carro de atrás, que es la fuerza normal entre ambos carros (en el punto en que se tocan los carros) y es esta la única fuerza que acelera al carro del frente. Es fácil confundirse porque la fuerza del motor acelera al carro de atrás y, al acelerar, este carro hace que acelere el de enfrente debido a que la normal entre ambos aumenta.

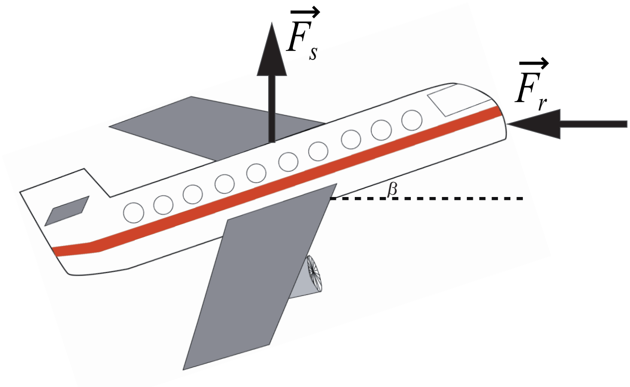
Problema 4.19.

Palabras clave: aceleración en X y Y, fuerza de sustentación.

Mientras despega, un avión de masa m tiene una aceleración de magnitud a en la dirección β ilustrada en el dibujo. Suponga que el avión se enfrenta a una fuerza de fricción del viento de magnitud F_r que es completamente horizontal, como se ve en el dibujo. Suponga además que hay una fuerza de sustentación $\vec{F}_s$ (la que le permite volar) completamente vertical, como se indica en la figura, y esta fuerza tiene magnitud desconocida.

(a) Escriba una expresión en términos de F_r, m y β para la fuerza que tienen que hacer los motores del avión para mantener la aceleración mencionada anteriormente. Tenga en cuenta que la fuerza de los motores apunta en la dirección en que se mueve el avión.

(b) Con base en lo hallado en (a), escriba una expresión para la magnitud de la fuerza de sustentación.



Solución

¿Qué información nos dan?

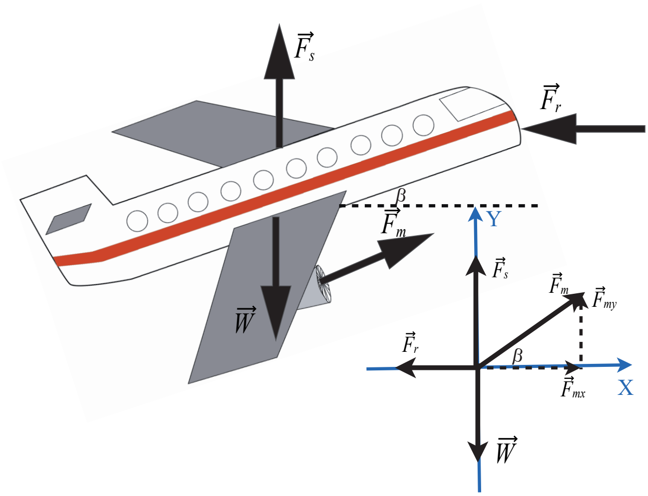
(a) y (b) El avión tiene masa m, tiene una aceleración de magnitud a en la dirección β ilustrada en el dibujo y se enfrenta a una fuerza de fricción del viento que es completamente horizontal y de magnitud F_r. Además, hay una fuerza de sustentación que es completamente vertical y de magnitud desconocida.

¿Qué nos piden?

(a) Una expresión para la fuerza que hacen los motores. Esta expresión debe quedar en términos de F_r, m y β.

(b) Una expresión para la magnitud de la fuerza de sustentación.

(a) Como es costumbre, comenzamos por realizar el diagrama de fuerzas y por escoger un sistema de coordenadas. Aunque este no es un problema de plano inclinado, es muy similar a uno, pues tenemos un objeto que se mueve con cierta inclinación con respecto al piso. Sin embargo, esta vez no sería buena idea usar un sistema inclinado porque tenemos una fuerza que es horizontal (la fricción del viento) y dos fuerzas verticales (el peso y la fuerza de sustentación), y sólo tenemos una fuerza en la dirección inclinada (la fuerza de los motores). Así que es mejor usar un sistema de coordenadas no inclinado[6]:



Sobre el avión actúan en total cuatro fuerzas: el peso hacia abajo, la fuerza de sustentación hacia arriba, la fuerza de fricción en dirección negativa de X y la fuerza de los motores que apunta en dirección β (hemos descompuesto esta fuerza).

Notemos que si hubiéramos usado un sistema inclinado, hubiéramos tenido que descomponer el peso, la fuerza de sustentación y la fuerza de fricción.

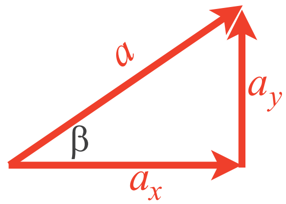
Para hallar una expresión para la fuerza de los motores debemos hallar la magnitud de la fuerza de los motores porque la dirección ya la conocemos (es simplemente el ángulo β de inclinación del avión).

Ahora que tenemos nuestro diagrama de fuerzas, podemos plantear la segunda ley de Newton para las fuerzas en X (como veremos, no es necesario en este momento plantear las ecuaciones en Y). En X hay dos fuerzas: la componente X de la fuerza de los motores, que no conocemos y llamaremos $F_{mx}\hat{x}$, y la fricción del viento, que sí conocemos y que es negativa en X. Además, la aceleración en X es positiva, así que la segunda ley de Newton en X queda así:

$$F_{mx}\hat{x} - F_r\hat{x} = ma_x\hat{x}. \qquad (1)$$

[6] Por supuesto, el lector podría usar un sistema inclinado y en ese caso debería llegar a la misma respuesta.

No nos dan la aceleración en X pero sí sabemos la magnitud de la aceleración total a y conocemos el ángulo β que marca la dirección de esta aceleración. Con ese ángulo y con a podemos obtener una expresión para la magnitud de la aceleración en X:



Podemos descomponer la magnitud de la aceleración que sí conocemos en sus componentes X y Y que no conocemos. Es claro de esta figura que $a_x = a\cos\beta$ y que $a_y = a\sin\beta$.

Entonces podemos escribir la ecuación (1) así:

$$F_{mx}\hat{x} - F_r\hat{x} = m\underbrace{(a\cos\beta)}_{a_x}\hat{x}. \tag{2}$$

Ahora, lo que queremos averiguar es la magnitud de la fuerza de los motores, que es F_m y no F_{mx}. Pero si atendemos el diagrama de fuerzas, podemos ver que la magnitud de la fuerza de los motores en X es $F_m\cos\beta$, así que podemos reescribir la ecuación (2) así:

$$\underbrace{F_m\cos\beta}_{F_{mx}}\hat{x} - F_r\hat{x} = m(a\cos\beta)\hat{x}. \tag{3}$$

Esta ecuación relaciona F_m con la fuerza de fricción del viento, con la aceleración del avión, con el ángulo β y con la masa del avión, todas estas variables conocidas. Si pasamos la fuerza de fricción del viento al otro lado de la igualdad y dividimos por coseno de β, obtenemos

$$F_m\hat{x} = \frac{F_r\hat{x} + m(a\cos\beta)\hat{x}}{\cos\beta}. \tag{4}$$

Finalmente, si aplicamos la regla de oro, esto queda

$$F_m = \frac{F_r + m(a\cos\beta)}{\cos\beta}. \tag{5}$$

Esta expresión nos da la magnitud de la fuerza de los motores, y la dirección de la fuerza está dada por el ángulo β como ya habíamos dicho antes.

Notemos que la expresión tiene sentido porque si la magnitud de la fuerza de fricción aumenta, aumenta también la magnitud de la fuerza de los motores para que el avión mantenga su aceleración. Además, esta fuerza es proporcional a la masa del avión y a la aceleración, como es de esperar según la segunda ley de Newton.

(b) Para hallar una expresión para la magnitud de la fuerza de sustentación debemos considerar la segunda ley de Newton en Y. En Y hay tres fuerzas: la fuerza de sustentación, la componente Y de la fuerza de los motores y el peso. Además, la aceleración en Y es positiva porque el avión está subiendo. La segunda ley de Newton en Y queda así:

$$F_{my}\hat{y} + F_s\hat{y} - W\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{6}$$

Si usamos el hecho de que $F_{my} = F_m \sin\beta$ (como se ve del diagrama de fuerzas), que la aceleración en Y es $a\sin\beta$ y que $W = mg$, esta ecuación queda

$$\underbrace{F_m \sin\beta}_{F_{my}}\,\hat{y} + F_s\hat{y} - \underbrace{mg}_{W}\,\hat{y} = m\underbrace{(a\sin\beta)}_{a_y}\,\hat{y}. \tag{7}$$

Si despejamos la fuerza de sustentación esto da

$$F_s\hat{y} = mg\hat{y} + m(a\sin\beta)\hat{y} - F_m \sin\beta\hat{y}. \tag{8}$$

Si usamos ahora la ecuación (5) que nos da la magnitud de la fuerza de los motores, obtenemos

$$F_s\hat{y} = mg\hat{y} + m(a\sin\beta)\hat{y} - \underbrace{\left(\frac{F_r + m(a\cos\beta)}{\cos\beta}\right)}_{F_m}\sin\beta\hat{y}. \tag{9}$$

Finalmente podemos aplicar la regla de oro:

$$F_s = mg + m(a\sin\beta) - \left(\frac{F_r + m(a\cos\beta)}{\cos\beta}\right)\sin\beta. \tag{10}$$

Esta expresión nos da la magnitud de la fuerza de sustentación en términos de la masa, el ángulo de inclinación, la aceleración y la fuerza de fricción, como nos pedían.

Problema 4.20.

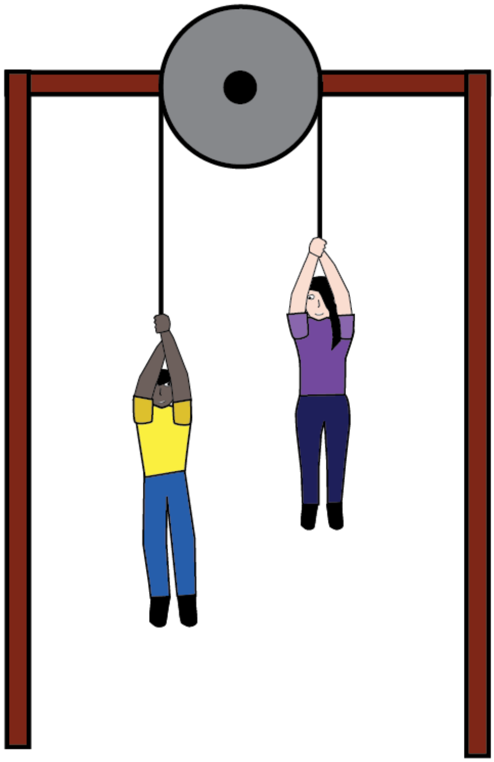
Palabras clave: máquina de Atwood, polea ideal.

En un parque, Daniela, de 60 kilogramos, y Carlos, de 70 kilogramos, se encuentran con una rara y muy divertida atracción que consiste de una cuerda que pasa por una polea grande (el nombre técnico de este sistema de una polea con dos objetos es máquina de Atwood). Si suponemos que la polea es una polea ideal y la cuerda también es ideal,

(a) Explique cómo se relaciona la aceleración de Carlos con la aceleración de Daniela (no las tiene que calcular, sólo explicar la relación entre las aceleraciones).

(b) Calcule la aceleración de Carlos y la aceleración de Daniela.

(c) Con base en lo hecho en (b), diga qué habría tenido que pasar para que la aceleraciones halladas tuvieran direcciones opuestas y qué habría tenido que pasar para que fueran cero.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b) y (c). La masa de Daniela es de 60 kilogramos y la de Carlos es de 70 kilogramos. Sabemos que la polea y la cuerda son ideales.

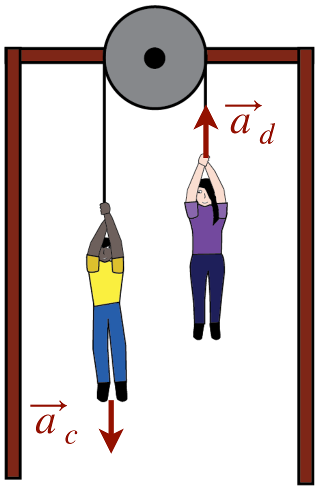
¿Qué nos piden?

(a) Explicar la relación entre la aceleración de Carlos y de Daniela.

(b) Calcular la aceleración de Carlos y de Daniela.

(c) Debemos explicar qué hubiera tenido que cumplirse para que las aceleraciones halladas en (b) tuvieran dirección contraria a la que tuvieron, y qué habría tenido que pasar para que fueran cero.

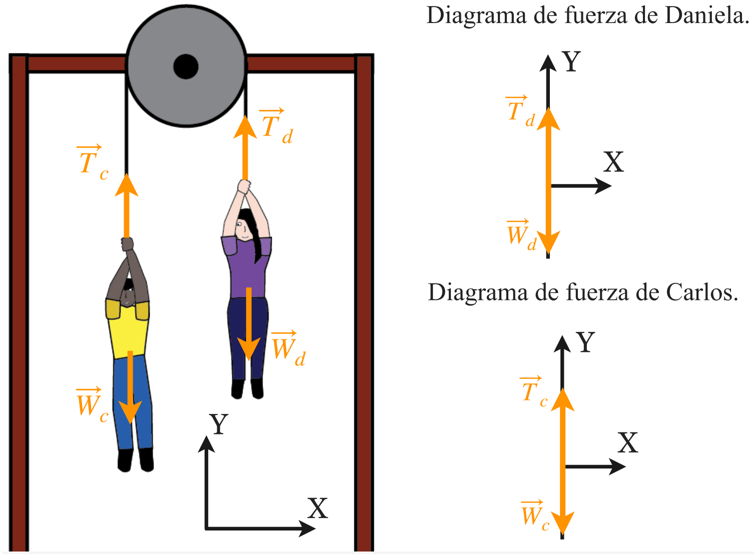
(a) Notemos que si Carlos baja, entonces Daniela tiene que subir, o si Daniela baja, entonces Carlos tiene que subir, pues ambos están sujetos de la misma cuerda. Esto quiere decir que la dirección de la aceleración de Daniela es *opuesta* a la dirección de la aceleración de Carlos. Además, como es una cuerda ideal, la magnitud de la aceleración en un extremo es igual a la magnitud de la aceleración en el otro extremo (nota 4.15). Así que en resumen, *si la aceleración de Daniela es* $-a\hat{y}$, *la de Carlos es* $a\hat{y}$ (de igual magnitud pero signo opuesto) o viceversa.



La aceleración de Daniela $\vec{a}_d$ tiene la misma magnitud que la aceleración de Carlos, que es $\vec{a}_c$. Además, tienen direcciones opuestas (si una apunta hacia arriba, la otra apunta hacia abajo).

Note que en este momento no sabemos quién sube o baja, así que no importa a quién le ponemos el signo negativo en la aceleración. Lo único que es importante es que las aceleraciones tienen signos opuestos.

(b) Para calcular las aceleraciones, comencemos por plantear el diagrama de fuerzas:



Sobre Carlos y Daniela actúan dos fuerzas; una fuerza de tensión que la cuerda les hace a sus manos y el peso de cada uno. Hemos escogido un sistema de coordenadas con el eje Y apuntando hacia arriba y el eje X hacia la derecha. Notemos que ambas tensiones apuntan en la misma dirección (en la dirección positiva de Y).

Sobre Carlos actúa una fuerza de tensión que apunta en el sentido positivo de Y y el peso que tiene dirección negativa, así que la ecuación de fuerzas en Y para Carlos es

$$T_c\hat{y} - W_c\hat{y} = m_c a\hat{y}, \tag{1}$$

donde hemos llamado m_c a la masa de Carlos, T_c a la magnitud de la tensión sobre Carlos y W_c a su peso. Además, hemos supuesto una aceleración positiva, pero al final nos daremos cuenta si esta suposición es o no correcta. Si usamos que $W_c = m_c g$, la anterior ecuación queda

$$T_c\hat{y} - \underbrace{m_c g}_{W_c}\,\hat{y} = m_c a\hat{y}. \tag{2}$$

La única variable que no conocemos, además de la aceleración, es la tensión. Para hallar la tensión podemos usar la ecuación de fuerzas de Daniela. Sobre Daniela también actúa una fuerza de tensión y el peso así que su ecuación de fuerzas es

$$T_d\hat{y} - W_d\hat{y} = m_d a_d\hat{y}, \tag{3}$$

donde hemos llamado m_d a la masa de Daniela, T_d a la magnitud de la tensión sobre ella y W_d a su peso. En la ecuación (3) no hemos usado el hecho de que la aceleración de Daniela es igual en magnitud y opuesta en dirección a la de Carlos. Si usamos eso y usamos el hecho de que $W_d = m_d g$, esta ecuación queda

$$T_d\hat{y} - \underbrace{m_d g}_{W_d}\hat{y} = -m_d a\hat{y}, \tag{4}$$

Además, como es una cuerda ideal, $T_d = T_c$, así que podemos escribir esta ecuación así:

$$\underbrace{T_c}_{T_c}\hat{y} - m_d g\hat{y} = -m_d a\hat{y}, \tag{5}$$

Si despejamos la tensión, esto nos da

$$T_c\hat{y} = m_d g\hat{y} - m_d a\hat{y}. \tag{6}$$

Si ahora usamos este resultado en la ecuación (2), obtenemos

$$\underbrace{m_d g\hat{y} - m_d a\hat{y}}_{T_c} - m_c g\hat{y} = m_c a\hat{y}. \tag{7}$$

Si pasamos el término con aceleración al otro lado, y usamos el hecho de que $f\hat{y} + e\hat{y} = (f+e)\hat{y}$, llegamos a

$$(m_d g - m_c g)\hat{y} = (m_c a + m_d a)\hat{y}. \tag{8}$$

Saquemos ahora factor común de a:

$$(m_d g - m_c g)\hat{y} = a(m_c + m_d)\hat{y}. \tag{9}$$

Finalmente, dividamos por la suma de las masas y saquemos factor común de g:

$$g\frac{(m_d - m_c)}{(m_c + m_d)}\hat{y} = a\hat{y}. \tag{10}$$

Esta expresión nos dice la aceleración de Carlos en términos de las masas de Carlos y Daniela (sabemos que es la aceleración de Carlos porque estamos despejando la ecuación (2), que es acerca de Carlos). Si reemplazamos los valores de las masas, esto nos da

$$(9.81\ \mathrm{m/s^2})\frac{(\overbrace{60\ \mathrm{kg}}^{m_d} - \overbrace{70\ \mathrm{kg}}^{m_c})}{(\underbrace{60\ \mathrm{kg}}_{m_d} + \underbrace{70\ \mathrm{kg}}_{m_c})}\hat{y} = -(0.75\ \mathrm{m/s^2})\hat{y}. \tag{11}$$

Es decir, Carlos tiene una aceleración de magnitud de 0.75 metros por segundo cuadrado negativa. El signo negativo indica que Carlos está cayendo, así que nuestra suposición inicial acerca de su aceleración era incorrecta.

Como la aceleración de Daniela es de la misma magnitud pero en sentido contrario, entonces su aceleración es

$$\vec{a}_d = (0.75\ \mathrm{m/s^2})\hat{y}. \tag{12}$$

(c) Con la ecuación (10) podemos decir qué se hubiera tenido que cumplir para que la aceleración de Daniela y Carlos tuvieran dirección opuesta a la que tienen. Notemos que en el numerador tenemos la resta de la masa de Daniela con la de Carlos. Si esa resta es positiva, entonces todo el lado izquierdo de la igualdad será positivo y la aceleración de Carlos será positiva, lo que quiere decir que Carlos sube. Para que esta resta sea positiva, la masa de Daniela tiene que ser mayor que la de Carlos. Es decir, para que Carlos tenga aceleración positiva, Daniela tiene que tener más masa que Carlos, lo cual se intuye fácilmente.

Por otro lado, note que si ambos tienen la misma masa la resta en el numerador es cero y entonces la aceleración es cero. Esto tiene sentido porque si tienen la misma masa esperamos que la polea permanezca en equilibrio[7].

Nota 4.20. Dos objetos en una polea (máquina de Atwood)

Cuando tenemos problemas de poleas, debemos tener en cuenta que la magnitud de la aceleración de todos los objetos que están unidos a la cuerda que pasa por la polea es igual. Y además, si es una polea en la que un objeto sube y el otro baja (no todas son así), debemos tener en cuenta que la aceleración de un objeto tiene dirección contraria a la del otro, así que en la ecuación de fuerzas de un objeto debemos poner una aceleración con signo negativo y en la ecuación del otro objeto una aceleración positiva.

[7] Esto no quiere decir que ni Daniela ni Carlos suben, sólo quiere decir que si alguno sube y el otro baja lo hacen con velocidad constante (la velocidad de cada uno no tiene que ser cero si la polea está en equilibrio).

Problema 4.21.

Palabras clave: dirección de fricción dinámica, dirección de fricción estática, mínima fuerza para sostener a un objeto a punto de deslizarse.

Suponga que en pleno vuelo Óscar decide cambiarse de silla. Óscar arrastra su vieja maleta de ruedas por el corredor del avión, hacia la parte trasera del avión, como se ilustra en el dibujo (la maleta es tan vieja que las ruedas ya no giran). Suponga que Óscar arrastra la maleta con velocidad constante sobre el corredor, y note el ángulo de 30° de inclinación de la maleta. Considere que hay un coeficiente de fricción dinámico entre el corredor y la maleta de magnitud 0.4. Además, la maleta tiene masa de 5 kilogramos. El avión tiene velocidad constante y vuela a poca altura, así que podemos suponer que el peso de los objetos es mg.

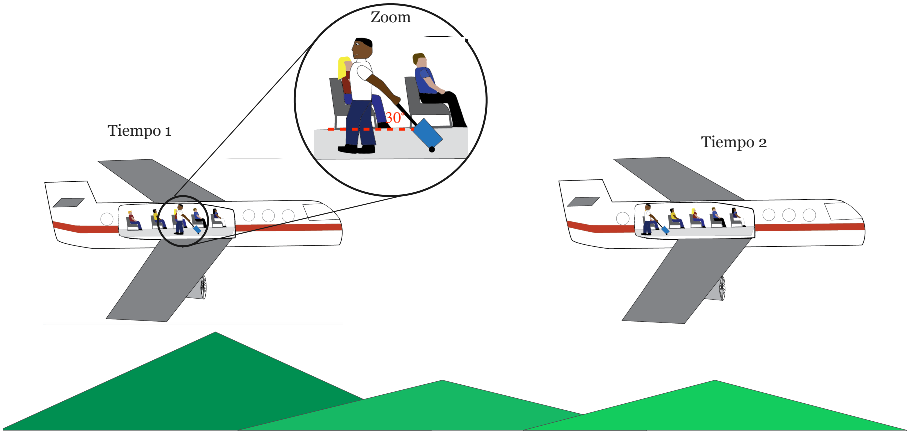
(a) Lina opina que la dirección de la fricción dinámica sobre la maleta apunta en el sentido en que se mueve el avión porque la maleta se mueve hacia la parte de atrás del avión. Por su parte, Mateo opina que la fricción apunta en la dirección contraria a la que se mueve el avión porque, según él, para alguien que estuviera afuera del avión, por ejemplo en las montañas, la maleta se movería junto con el avión hacia adelante, así que la fricción debe ir hacia atrás. ¿Quién y por qué tiene razón?

(b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza con la que Óscar hala la maleta?

Suponga ahora que Óscar se detiene cuando siente que hay turbulencia. Suponga que la turbulencia hace que el avión sufra una aceleración negativa de magnitud de 30 m/s^2. A pesar de la desaceleración, Óscar hace la fuerza mínima necesaria para lograr sostener a la maleta donde está.

(c) ¿Tiene o no tiene aceleración la maleta?

(d) Si el coeficiente de fricción estático entre la maleta y el corredor es $\mu_e = 0.5$, ¿de cuánto tendría que ser la magnitud de la mínima fuerza que tiene que hacer Óscar para sostener la maleta justo donde está mientras el avión desacelera?



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) y (b) La maleta tiene masa de 5 kilogramos, el coeficiente de fricción dinámico es de 0.4, la maleta se mueve con velocidad constante hacia la parte trasera del avión. Además, la maleta está inclinada 30° como se ve en el dibujo. El avión tiene velocidad constante y no vuela muy alto así que podemos decir que el peso es mg.

(c) y (d) El avión tiene una desaceleración de 30 m/s^2 de magnitud. Óscar ejerce la mínima fuerza suficiente para que la maleta no se deslice sobre el corredor. El coeficiente de fricción estático es $\mu_e = 0.5$.

¿Qué nos piden?

(a) Debemos decir si Lina o Mateo tiene razón sobre la dirección de la fuerza de fricción dinámica.

(b) Debemos calcular la magnitud de la fuerza con la que Óscar hala la maleta.

(c) Debemos responder si la maleta tiene o no tiene aceleración mientras el avión desacelera.

(d) Debemos encontrar la magnitud de la mínima fuerza que Óscar le hace a la maleta.

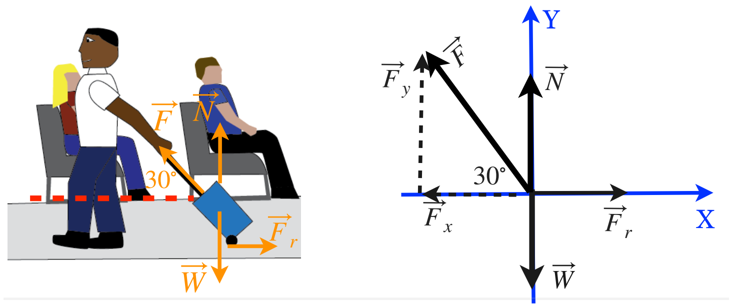
(a) Debemos decir si Lina o Mateo tienen razón acerca de la dirección de la fuerza de fricción dinámica de la maleta. Lina dice que, como la maleta es arrastrada hacia la parte de atrás del avión, la dirección de la fricción debe ser hacia adelante, en la dirección en que se mueve el avión. Mateo, en cambio, dice que para alguien que estuviera por fuera del avión la dirección de la fricción debería ir hacia atrás porque la maleta, junto con el avión (y junto con todos los objetos que hay adentro del avión), se mueve hacia adelante.

Lo que debemos tener en cuenta para determinar la dirección de la fricción dinámica es hacia dónde se mueve el objeto con respecto a la superficie que genera la fricción. Con respecto al corredor, que es la superficie sobre la que está la maleta, la maleta se mueve hacia atrás del avión, así que la fricción dinámica debe ir hacia delante, como dice Lina. Con respecto a una persona que ve desde las montañas, la maleta se mueve hacia adelante, pero eso no tiene importancia porque no son las montañas las que están ejerciendo la fricción sobre la maleta. Así que Lina tiene razón.

Nota 4.21. Dirección de la fuerza de fricción dinámica

La dirección de la fuerza de fricción que una superficie le hace a un objeto sólo depende de la dirección en la que se mueve el objeto con respecto a la superficie. No importa cómo se mueve el objeto o cómo se mueve la superficie con respecto a otros objetos.

(b) Para calcular la magnitud de la fuerza con la que Óscar arrastra la maleta empecemos, como es costumbre, por realizar un diagrama de fuerzas de la maleta. Escogeremos un sistema de coordenadas con el eje Y apuntando hacia arriba y el eje X apuntando en la dirección en la que se mueve el avión:



Sobre la maleta actúan cuatro fuerzas; la fuerza normal, el peso, la fuerza que hace Óscar y la fuerza de fricción dinámica. Notemos que como Óscar mueve la maleta en el sentido negativo de X, la fricción dinámica apunta en el sentido positivo de X. Con el sistema escogido debemos descomponer la fuerza de Óscar.

En X hay dos fuerzas sobre la maleta: la componente X de la fuerza que hace Óscar y que apunta en el sentido negativo de X, y la fricción dinámica, que le hace el corredor a la maleta y que apunta en el sentido positivo de X. Así, la segunda ley de Newton en X dice lo siguiente:

$$F_r\hat{x} - F_x\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{1}$$

Nos dicen que Óscar mueve la maleta con velocidad constante, así que la aceleración de la maleta debe ser cero:

$$F_r\hat{x} - F_x\hat{x} = 0\hat{x}. \tag{2}$$

Así que

$$F_r\hat{x} = F_x\hat{x}. \tag{3}$$

Ahora, la magnitud de la fricción dinámica es μN y la componente X de la fuerza que hace Óscar es $F\cos 30°$ como se aprecia en el diagrama de fuerzas. Al usar esto en la ecuación (3) obtenemos

$$\underbrace{\mu N}_{F_r}\,\hat{x} = \underbrace{F\cos 30°}_{F_x}\,\hat{x}. \tag{4}$$

El coeficiente de fricción lo conocemos pero la normal no, así que sólo con esta ecuación no podemos despejar F. Para buscar más ecuaciones analicemos lo que sucede en Y.

En Y hay tres fuerzas: la componente Y de la fuerza que hace Óscar, la normal y el peso. La segunda ley de Newton en Y queda así:

$$N\hat{y} + F_y\hat{y} - W\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{5}$$

Así como en X, en Y la maleta no tiene aceleración. Además, $W = mg$[8] y la fuerza en Y que hace Óscar es $F\sin 30°$, como se aprecia en el diagrama de fuerzas. Por lo tanto, la ecuación (5) queda

$$N\hat{y} + \underbrace{F\sin 30°}_{F_y}\,\hat{y} - \underbrace{mg}_{W}\,\hat{y} = 0\hat{y}. \tag{6}$$

De esta ecuación podemos despejar la fuerza normal y luego podemos usar ese resultado en la ecuación (4):

$$N\hat{y} = -F\sin 30°\hat{y} + mg\hat{y}. \tag{7}$$

Si aplicamos la regla de oro, esto queda

$$N = -F\sin 30° + mg. \tag{8}$$

Si usamos esto en la ecuación (4), obtenemos

$$\mu\underbrace{(-F\sin 30° + mg)}_{N}\,\hat{x} = F\cos 30°\hat{x}. \tag{9}$$

Esta ecuación ya sólo tiene una incógnita, que es F. Apliquemos la regla de oro y dejemos los términos con F en el lado derecho:

$$\mu mg = F\cos 30° + \mu F\sin 30°, \tag{10}$$

[8] Aquí podemos decir que el peso es mg porque el avión no vuela muy alto, pero si volara muy alto tendríamos que usar la fuerza de gravitación universal (nota 4.10).

donde distribuimos el primer paréntesis del lado izquierdo de la ecuación (9). Si sacamos factor común de F al lado derecho, esto da

$$\mu mg = F(\cos 30^\circ + \mu \sin 30^\circ). \tag{11}$$

Finalmente, dividimos por el término que acompaña a F:

$$\frac{\mu mg}{(\cos 30^\circ + \mu \sin 30^\circ)} = F. \tag{12}$$

Esta ecuación nos da F en términos de variables conocidas. Sólo nos falta poner el valor de estas variables. La masa es de 5 kilogramos y μ es de 0.4:

$$\frac{\overbrace{(0.4)}^{\mu}\overbrace{(5\ \text{kg})}^{m}\overbrace{(9.81\ \text{m/s}^2)}^{g}}{(\cos 30^\circ + \underbrace{(0.4)}_{\mu}\sin 30^\circ)} = 18.40\ \text{N} = F. \tag{13}$$

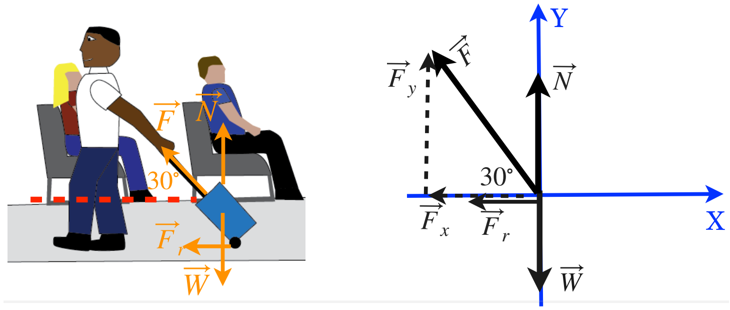
En palabras, la magnitud de la fuerza que hace Óscar es de 18.40 newtons.

(c) Ahora el avión desacelera pero Óscar logra sostener a la maleta para que no se deslice. En esta sección debemos responder si la maleta tiene o no tiene aceleración. Para responder esto, pensemos en las partes del avión. Las alas, las ventanas, las sillas y todas las partes del avión se mueven de la misma forma que se mueve el avión. Si el avión tiene rapidez de 800 kilómetros por hora, entonces todas sus partes fijas tienen una rapidez de 800 kilómetros por hora; si el avión tiene aceleración de magnitud de 10 m/s^2, entonces todas sus partes fijas tienen aceleración de magnitud de 10 m/s^2, etc. De hecho, si las sillas del avión tuvieran una aceleración diferente a la del avión, entonces las sillas no se quedarían fijas en su puesto y montar en avión sería muy peligroso. Así mismo, si Óscar logra que la maleta se quede en el mismo sitio del corredor del avión, entonces podemos inferir que Óscar y la maleta tienen la misma desaceleración que la del avión, que es 30 m/s^2 (obviamente, la desaceleración del corredor y del avión son la misma).

Nota 4.22. Un objeto A fijo sobre un objeto B cuando B acelera

Si un objeto A se queda fijo sobre un objeto B, entonces la aceleración de A es igual a la aceleración de B. Si no fueran iguales, el objeto A se deslizaría hacia atrás o hacia adelante del objeto B.

(d) Mientras el avión desacelera, sobre la maleta actúan el mismo número de fuerzas que en (a): el peso, la normal, la fuerza que hace Óscar y una fuerza de fricción. Sin embargo, esta fuerza de fricción es estática, no dinámica, pues la maleta no se desliza sobre el corredor. Además, esta fuerza de fricción es *máxima* porque Óscar hace la mínima fuerza necesaria para sostenerla, lo que quiere decir que la maleta está a punto de deslizarse (si Óscar hiciera un poquito menos fuerza, la maleta se deslizaría). Como dice la nota 4.8, cuando un objeto está a punto de deslizarse, la fricción estática es máxima. Además, cuando el avión desacelera la maleta va a tender a irse hacia adelante, en el sentido positivo de X, así que la fricción estática sobre la maleta va a ser en el sentido negativo de X. El nuevo diagrama de fuerzas de la maleta sería



La única diferencia con el diagrama anterior es que ahora tenemos una fuerza de fricción estática en la dirección negativa de X.

Adicionalmente, en este caso la aceleración es negativa como la del avión. Teniendo en cuenta todo esto, la segunda ley de Newton en X para la maleta queda así:

$$-F_r\hat{x} - F_x\hat{x} = -m(30\ \mathrm{m/s^2})\hat{x}, \tag{14}$$

donde el signo menos delante de la masa indica que la aceleración es negativa y donde hemos tenido en cuenta que la fricción es ahora negativa[9]. Si usamos el hecho de que la magnitud de la fuerza de fricción estática cuando es máxima es $\mu_e N$ y usamos que $F_x \cos 30°$, la ecuación (14) queda

$$-\underbrace{\mu_e N}_{F_r}\,\hat{x} - \underbrace{F\cos 30°}_{F_x}\,\hat{x} = -m(30\ \mathrm{m/s^2})\hat{x}. \tag{15}$$

Con esta ecuación no podemos despejar F porque no conocemos la normal. Sin embargo, el análisis en Y sigue siendo exactamente el mismo que antes: el peso hacia abajo, la normal hacia arriba, la fuerza Y de Óscar hacia arriba y la

[9] Si ambas fuerzas en X son negativas, ¿qué fuerza es la que empuja a la maleta en la dirección positiva de X? ¡Ninguna! Esto debió quedar claro después de la nota 4.11.

aceleración Y cero (la desaceleración sólo es en X). Por lo tanto, la ecuación (8) sigue siendo válida. Si usamos esa ecuación en la ecuación (15), obtenemos

$$-\mu_e \underbrace{(-F\sin 30^\circ + mg)}_{N}\hat{x} - F\cos 30^\circ\hat{x} = -m(30\ \mathrm{m/s^2})\hat{x}. \tag{16}$$

Si distribuimos el primer paréntesis y aplicamos la regla de oro, esto queda

$$\mu_e F\sin 30^\circ - \mu_e mg - F\cos 30^\circ = -m(30\ \mathrm{m/s^2}). \tag{17}$$

Si sacamos factor común de F y pasamos el término con mg al otro lado, obtenemos

$$F(\mu_e \sin 30^\circ - \cos 30^\circ) = -m(30\ \mathrm{m/s^2}) + \mu_e mg. \tag{18}$$

Finalmente, si dividimos por el término que acompaña a F, esto da

$$F = \frac{-m(30\ \mathrm{m/s^2}) + \mu_e mg}{(\mu_e \sin 30^\circ - \cos 30^\circ)}. \tag{19}$$

Si reemplazamos los valores numéricos obtenemos la magnitud de la mínima fuerza que tiene que hacer Óscar:

$$F = \frac{-\overbrace{(5\ \mathrm{kg})}^{m}\overbrace{(30\ \mathrm{m/s^2})}^{a_x} + \overbrace{(0.5)}^{\mu_e}(5\ \mathrm{kg})\overbrace{(9.81\ \mathrm{m/s^2})}^{g}}{(\underbrace{(0.5)}_{\mu_e}\sin 30^\circ - \cos 30^\circ)} = 203.68\ \mathrm{N}. \tag{20}$$

Notemos que esta es una fuerza mucho mayor que la que tenía que hacer Óscar en (a), de hecho, es aproximadamente once veces la fuerza que hizo Óscar en (a). ¿Por qué esta fuerza es mayor? Porque, para que la maleta no se deslice, Óscar tiene que darle a la maleta la misma aceleración que del avión y la aceleración del avión es considerable.

Problema 4.22.

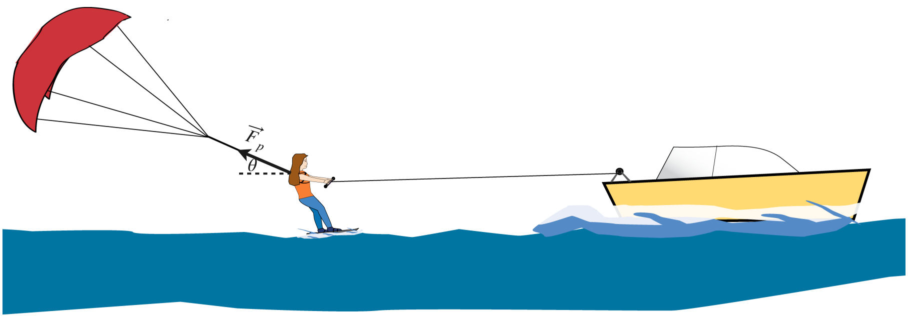
Palabras clave: normal cuando un objeto se despega del piso, fuerza de fricción dinámica.

Verónica, quien tiene una cometa atada a la espalda (como un paracaídas), está surfeando mientras una lancha la impulsa (ver dibujo). Suponga que el paracaídas ejerce una fuerza de magnitud F_p, que el ángulo θ es conocido y que la tensión de la cuerda con la que la lancha arrastra a Verónica es de magnitud T. Además, suponga que la cuerda que une a Verónica con la lancha es totalmente horizontal (paralela al eje X).

(a) Escriba una expresión en términos de T, F_p y θ para la fuerza de fricción que ejerce el mar sobre los esquís de Verónica si suponemos que Verónica va con velocidad constante.

(b) Suponga ahora que sólo conocemos θ y la masa m de Verónica, y no sabemos si Verónica tiene aceleración o no. Explique qué condición debe cumplir la magnitud de la fuerza $\vec{F}_p$ del paracaídas para que Verónica se comience a elevar sobre el mar.

(c) Responda (b) si la masa de Verónica es de 55 kilogramos y el ángulo θ es de 40 grados.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) Conocemos la magnitud F_p de la fuerza que ejerce el paracaídas sobre Verónica, el ángulo θ que hace la fuerza del paracaídas, la tensión T de la cuerda que une a Verónica con la lancha y la condición de que Verónica anda con velocidad constante.

(b) Conocemos la masa m de Verónica y el ángulo θ de la fuerza del paracaídas (las otras variables dadas en (a) son ahora desconocidas).

(c) La masa de Verónica es de 55 kilogramos y el ángulo θ es de 40 grados.

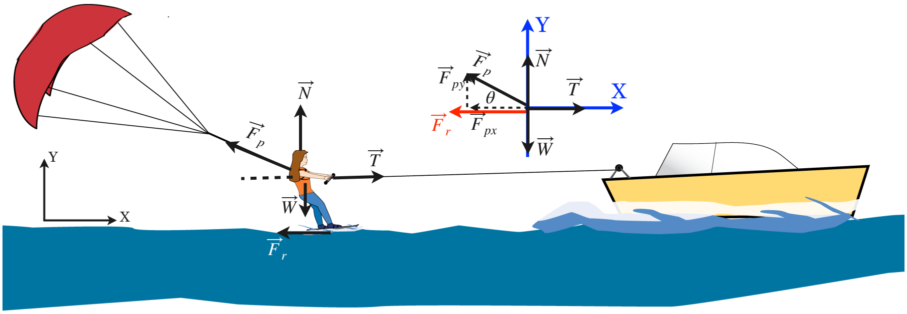
¿Qué nos piden?

(a) Debemos hallar una expresión para la fuerza de fricción que ejerce el mar sobre los esquís de Verónica en termino de F_p, T y θ.

(b) Debemos explicar la condición que tiene que cumplir F_p para que Verónica se comience a elevar sobre el mar.

(c) Lo mismo que en (b) pero ahora con valores numéricos.

(a) Para hallar una expresión para la fuerza de fricción del mar empecemos, como es común, por realizar el diagrama de fuerzas para Verónica. Usaremos un sistema de coordenadas con el eje Y apuntando hacia arriba y el eje X apuntando a la derecha:



Sobre Verónica actúan cinco fuerzas. El peso, la normal, la tensión, la fuerza que hace el paracaídas y la fricción que se opone al movimiento. Notemos que hemos descompuesto la fuerza que hace el paracaídas.

Para hallar una expresión para la fuerza de fricción escribamos las ecuaciones de fuerzas en X. Como se ve en el diagrama de fuerzas, en X hay tres fuerzas sobre Verónica: la tensión, que es positiva, la fricción, que es negativa, y la componente X de la fuerza que hace el paracaídas, que es negativa también. Teniendo en cuenta esto, la ecuación de fuerzas en X queda

$$T\hat{x} - F_r\hat{x} - F_{px}\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{1}$$

Como nos dicen que Verónica anda a velocidad constante, entonces su ecuación de fuerzas en X es

$$T\hat{x} - F_r\hat{x} - F_{px}\hat{x} = 0. \tag{2}$$

De esta ecuación podemos despejar la fuerza de fricción:

$$T\hat{x} - F_{px}\hat{x} = F_r\hat{x}. \tag{3}$$

De aquí conocemos T pero no F_{px}. Notemos del diagrama de fuerzas que $F_{px} = F_p \cos\theta$, así que la ecuación (3) queda:

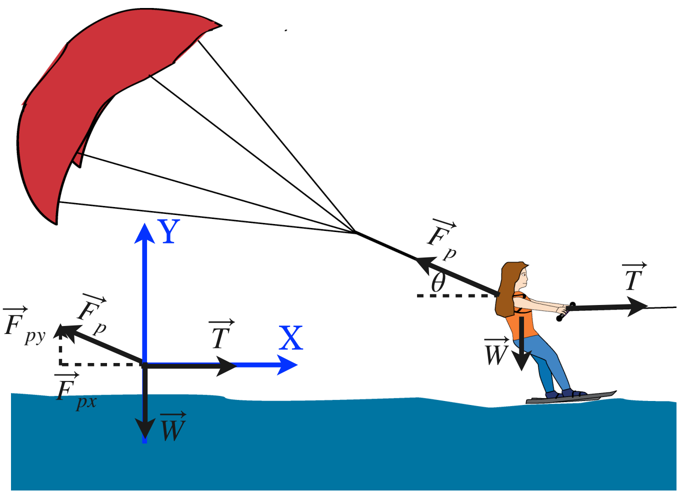
$$T\hat{x} - \underbrace{F_p \cos\theta\,\hat{x}}_{F_{px}} = F_r\hat{x}. \tag{4}$$

Finalmente, si aplicamos la regla de oro, obtenemos la magnitud de la fuerza de fricción en términos de variables conocidas:

$$T - F_p \cos\theta = F_r. \tag{5}$$

(b) Ahora debemos hallar la condición que debe cumplir F_p para que Verónica se comience a elevar sobre el mar. Es claro que Verónica se eleva a lo largo del eje Y, así que debemos comenzar por plantear la ecuación de fuerzas en Y.

Según el diagrama de fuerzas, en Y hay tres fuerzas: la normal, el peso y la componente Y de F_p. Sin embargo, en el instante justo en que Verónica se comienza a elevar, los esquís pierden contacto con el mar. *Esto quiere decir que la fuerza normal que el mar ejerce sobre Verónica desaparece porque Verónica deja de estar en contacto con la superficie del mar*. Por la misma razón, la fuerza de fricción desaparece. Por lo tanto, el diagrama de fuerzas modificado para el caso en que Verónica se comienza a elevar por encima del mar es:



Así, en Y sólo tenemos dos fuerzas, $\vec{F}_{py}$ que apunta en el sentido positivo de Y, y $\vec{W}$ que apunta en el sentido negativo de Y. La ecuación de fuerzas en Y queda entonces

$$F_{py}\hat{y} - W\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{6}$$

Para entender cuál es la condición que debe cumplir F_p para que Verónica se comience a elevar, podemos hacer el siguiente análisis: es claro que si el peso es mayor que F_{py}, entonces Verónica no se va a elevar sino que va a caer. Esto se puede ver también de la ecuación (6); si W es mayor que F_{py}, entonces $F_{py}\hat{y} - W\hat{y}$ da como resultado un vector negativo, lo cual quiere decir que $a_y\hat{y}$ debe ser negativo, así que Verónica está cayendo. Si W es igual a F_{py}, entonces $F_{py}\hat{y} - W\hat{y}$ da cero, lo cual indicaría, según la ecuación (6), que Verónica no tendría aceleración a lo largo de Y; ella ni caería ni subiría. Por lo tanto, la condición para que Verónica comience a elevarse es que F_{py} sea mayor que W. En tal caso, $F_{py}\hat{y} - W\hat{y}$ da un vector positivo, lo que implica, de acuerdo a la ecuación (6), que Verónica tiene una aceleración en el sentido positivo del eje Y.

Matemáticamente, decir que F_{py} es mayor que W se puede escribir así:

$$F_{py} > W. \tag{7}$$

Ahora, la desigualdad (7) no está en términos de las variables conocidas, como la masa y el ángulo θ. Pero sabemos que $W = mg$ y además, en el diagrama de fuerzas es claro que $F_{py} = F_p \sin\theta$, por lo que la desigualdad (7) quedaría así:

$$\underbrace{F_p \sin\theta}_{F_{py}} > mg. \tag{8}$$

Dividiendo todo por $\sin\theta$, obtenemos finalmente la condición que debe cumplir F_p para que Verónica se eleve:

$$F_p > \frac{mg}{\sin\theta}. \tag{9}$$

Notemos que si $\sin\theta$ es igual a cero, entonces la expresión (9) no está definida. Esto es fácil de entender si tenemos en cuenta que $\sin\theta$ es cero cuando θ es igual a cero. Según el diagrama de fuerzas, si θ es cero entonces la dirección de $\vec{F}_p$ sería solamente en el sentido negativo del eje X, es decir, no tendría componente Y. Pero si $\vec{F}_p$ no tiene componente Y, entonces no habrá ninguna fuerza que pueda elevar a Verónica, lo cual contradice la suposición inicial (según la cual el paracaídas le permite elevarse).

(c) Ahora sólo debemos reemplazar en la ecuación (9) los valores numéricos que nos dan. Nos dicen que la masa de Verónica es de 55 kilogramos y el ángulo θ es de 40 grados. Así, obtenemos:

$$F_p > \frac{\overbrace{(55\ \text{kg})}^{m}\overbrace{(9.81\ \text{m/s}^2)}^{g}}{\sin\underbrace{40^\circ}_{\theta}} = 839.39\ \text{N}. \tag{10}$$

En palabras, para que Verónica se comience a elevar la magnitud de la fuerza del paracaídas debe ser mayor que 839.39 N.

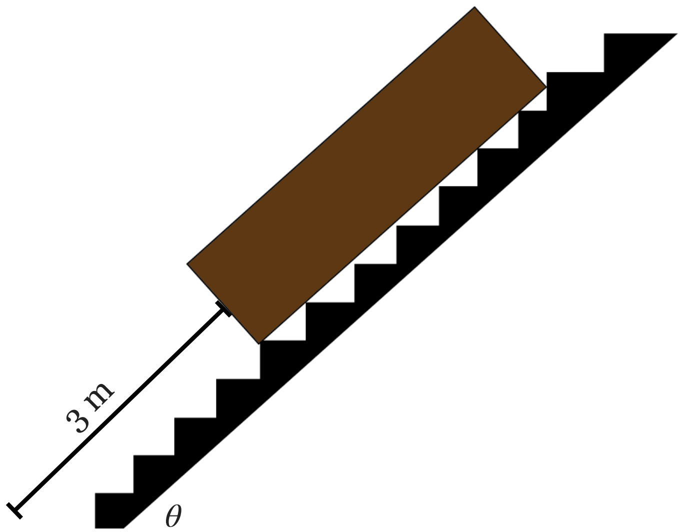
Problema 4.23.

Palabras clave: ángulo crítico en plano inclinado, fricción estática, tiempo de deslizamiento en plano inclinado, movimiento con aceleración uniforme.

Supongamos ahora que Camilo se tuvo que ir y dejó la biblioteca de masa m sobre las escaleras.

(a) Si hay un coeficiente de fricción estático μ_e entre las escaleras y la biblioteca, escriba una expresión para el máximo ángulo θ que puede haber de forma que la biblioteca no se deslice. La expresión debe quedar en términos de μ_e y m.

(b) Suponga ahora que la biblioteca se desliza y que hay un coeficiente de fricción dinámico $\mu_d = 0.3$. Además, suponga que el ángulo θ es de 30 grados y que la masa de la biblioteca es de 20 kilogramos. Si en el momento en que se comienza a deslizar la parte inferior de la biblioteca está a 3 metros del piso (ver dibujo), ¿cuánto se demorará la biblioteca en caer esos 3 metros?



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) Tenemos la masa m de la biblioteca y el coeficiente de fricción estático μ_e.

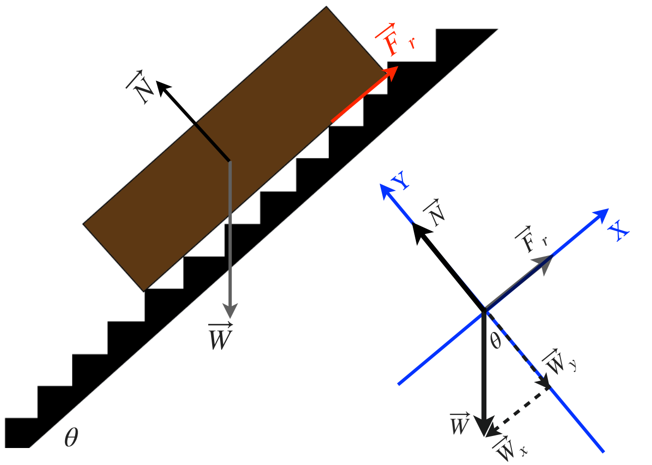
(b) Nos dicen que la biblioteca se desliza. Además, la biblioteca tiene masa de 20 kg, hay un coeficiente de fricción dinámico de 0.3 y la parte inferior de la biblioteca está a 3 metros del piso. El ángulo θ es de 30 grados.

¿Qué nos piden?

(a) Una expresión para el ángulo θ máximo que puede haber para que la biblioteca no se deslice. La expresión debe quedar en términos de μ_e y m.

(b) El tiempo que se demorará la biblioteca en caer hasta el piso.

(a) Como este es un problema con un plano inclinado, seguiremos la recomendación de la nota 4.16 y usaremos un sistema de coordenadas inclinado. Si usamos un sistema así, el diagrama de fuerzas es el siguiente:



Sobre la biblioteca actúan tres fuerzas, el peso, la normal y la fuerza de fricción estática. Notemos que la fricción estática apunta hacia arriba, en el sentido positivo del eje X, porque está fuerza se opone a la dirección en la cual el objeto tiende a moverse. Es claro que la biblioteca tiende a moverse en la dirección negativa de X, así que la fricción apunta en el sentido contrario.

Empecemos por notar que en el ángulo máximo de inclinación la biblioteca está a punto de moverse (por eso es máximo, porque si lo incrementamos sólo un poco más, la biblioteca caerá). Nosotros sabemos que cuando un objeto está a punto de deslizarse, como en este caso, la fricción estática es máxima y su magnitud es $\mu_e N$ (nota 4.8). Esto será importante en lo que sigue.

En X tenemos dos fuerzas: la fricción F_r y la componente X del peso, W_x. La fricción tiene dirección X positiva mientras que la componente W_x

apunta en la dirección negativa. Por lo tanto, la ecuación de fuerzas en X es

$$F_r\hat{x} - W_x\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{1}$$

Como nos están pidiendo el ángulo máximo para que no se deslice la biblioteca, debemos usar el hecho de que la aceleración es cero. Además, la magnitud de la fuerza de fricción estática máxima es $F_r = \mu_e N$ así que la ecuación (1) queda

$$\underbrace{\mu_e N}_{F_r}\hat{x} - W_x\hat{x} = 0. \tag{2}$$

Aplicando la regla de oro y dejando un término a cada lado de la igualdad, tenemos

$$\mu_e N = W_x. \tag{3}$$

Ahora podemos usar que W_x es igual a $W\sin\theta$, como se aprecia del diagrama de fuerzas:

$$\mu_e N = \underbrace{W\sin\theta}_{W_x}. \tag{4}$$

De aquí no podemos despejar el ángulo θ que buscamos porque no conocemos la normal, así que debemos buscar otras ecuaciones. Realicemos ahora el análisis de fuerzas en Y.

En Y hay dos fuerzas, la fuerza normal que va en el sentido positivo del eje Y y la componente W_y del peso, que va en el sentido negativo:

$$N\hat{y} - W_y\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{5}$$

Como la biblioteca está en reposo, la aceleración Y es cero, así que la ecuación (5) queda de la siguiente manera:

$$N\hat{y} - W_y\hat{y} = 0\hat{y}. \tag{6}$$

Si aplicamos la regla de oro y pasamos la componente Y del peso al otro lado, llegamos a

$$N = W_y. \tag{7}$$

Finalmente, usemos el hecho de que $W_y = W\cos\theta$ (como se ve en el diagrama de fuerzas):

$$N = \underbrace{W\cos\theta}_{W_y}. \tag{8}$$

Esta es una ecuación que también relaciona la magnitud de la normal con el ángulo θ. Como ya tenemos dos ecuaciones con las mismas dos incógnitas, podemos despejar una de las variables de una de las ecuaciones y luego usar ese resultado en la otra ecuación. Por ejemplo, podemos usar la magnitud de la normal que nos da la ecuación (8) en la ecuación (4):

$$\mu_e\underbrace{(W\cos\theta)}_{N} = W\sin\theta. \tag{9}$$

Si cancelamos W en ambos lados y dividimos por coseno obtenemos

$$\mu_e = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}. \tag{10}$$

Esto es lo mismo que tangente del ángulo:

$$\mu_e = \tan\theta. \tag{11}$$

Finalmente, si aplicamos arcotangente a ambos lados, podemos obtener una expresión para el ángulo θ:

$$\arctan\mu_e = \theta. \tag{12}$$

Notemos que el ángulo máximo depende del coeficiente de fricción estático. Cuanto mayor sea este coeficiente, mayor es el ángulo máximo, como dice la ecuación (11) (si θ está entre cero y noventa grados, cuanto mayor sea θ mayor es $\tan\theta$). Esto se intuye, pues si la fricción es muy grande, el plano inclinado puede tener un gran ángulo de inclinación sin que el objeto que está en el plano se deslice. El ángulo máximo también se conoce como "ángulo crítico". Por supuesto, ese ángulo sólo es un *límite máximo*, para cualquier otro ángulo menor al dado por la expresión (12) la biblioteca no se va a deslizar.

El lector podría preguntarse: ¿en qué momento en los cálculos usamos el hecho de que ese ángulo fuera máximo? La respuesta es sencilla: cuando usamos el hecho de que la magnitud de la fricción fuera máxima impusimos la condición de que ese ángulo fuera máximo.

(b) Ahora la biblioteca se desliza así que dejamos de tener un caso de fricción estático y pasamos a tener un caso de fricción dinámico. El diagrama de fuerzas es exactamente el mismo, sólo que ahora estamos considerando una fricción dinámica y no estática. Notemos que la fricción dinámica apuntará en el mismo sentido que la fricción estática, pues la biblioteca va a moverse a lo largo de nuestro eje X negativo, así que la fricción tendrá que ser a lo largo de nuestro eje X positivo.

Para calcular el tiempo que se demora en caer la biblioteca debemos primero determinar cuál es la aceleración de la biblioteca, y para determinar la aceleración necesitamos usar la segunda ley de Newton. La ecuación (1) nos dice la aceleración de la biblioteca en X (sólo que la fricción que aparece ahora es dinámica y antes era estática):

$$F_r\hat{x} - W_x\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{13}$$

Ahora, como ya dijimos antes, W_x es igual a $W\sin\theta$, W es mg, ahora la magnitud de la fuerza de fricción dinámica es $\mu_d N$ y además, la aceleración en X es negativa porque la biblioteca cae en el sentido negativo del eje X. Usando todo esto, la ecuación (13) queda

$$\underbrace{\mu_d N}_{F_r}\hat{x} - \underbrace{mg\sin\theta}_{W_x}\hat{x} = -ma_x\hat{x}. \tag{14}$$

Del lado izquierdo de esta ecuación lo único que no conocemos es la magnitud de la normal. Esta magnitud es fácil de hallar usando la segunda ley de Newton en Y.

Notemos que en Y la aceleración de la biblioteca es cero, pues la biblioteca sólo se mueve a lo largo del eje X que nosotros escogimos. Así que en Y la suma de fuerzas nos da cero, como dice la ecuación (6). Como esa ecuación sigue siendo válida, podemos usar la ecuación (8) que obtuvimos a partir de la ecuación (6). Si usamos la ecuación (8) en la ecuación (14), obtenemos

$$\mu_d \underbrace{W\cos\theta}_{N}\hat{x} - mg\sin\theta\hat{x} = -ma_x\hat{x}. \tag{15}$$

Si usamos el hecho de que W es mg, cancelamos todas las masas y aplicamos la regla de oro, llegamos a

$$\mu_d g\cos\theta - g\sin\theta = -a_x. \tag{16}$$

Esta ecuación nos da la aceleración en términos de variables conocidas (notemos que la aceleración no depende de la masa). Si reemplazamos los valores numéricos para g, μ_d y θ, obtenemos:

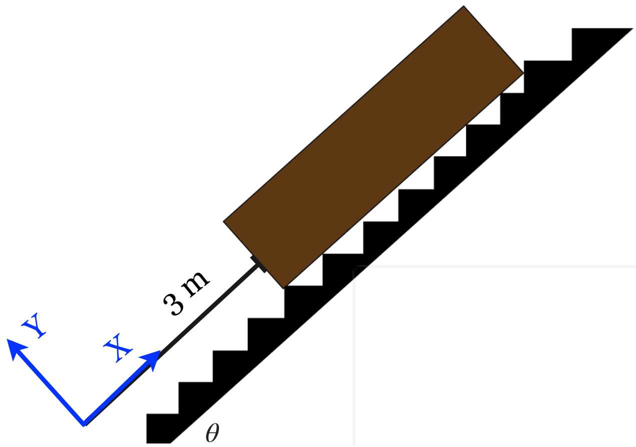
$$\underbrace{0.3}_{\mu_d}\underbrace{(9.81\ \mathrm{m/s^2})}_{g}\cos\underbrace{30^\circ}_{\theta} - \underbrace{(9.81\ \mathrm{m/s^2})}_{g}\sin\underbrace{30^\circ}_{\theta} = -(2.36\ \mathrm{m/s^2})\hat{x} = -a_x. \tag{17}$$

Los signos negativos a ambos lados se cancelan y finalmente vemos que la aceleración es de magnitud de 2.36 metros por segundo al cuadrado.

Una vez conocemos la aceleración podemos hallar el tiempo que le toma a la biblioteca llegar al suelo usando cinemática. Recordemos que la ecuación de movimiento de un objeto que se mueve con aceleración constante es de la forma

$$\vec{x}_f = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_i t + \vec{x}_i. \tag{18}$$

Aunque nosotros ya escogimos un sistema de coordenadas, debemos escoger un origen para poder plantear la ecuación de movimiento de la biblioteca (para hacer el diagrama de fuerzas no interesa cuál es el origen, sólo interesa escoger la dirección de los ejes y es por eso que no habíamos escogido un origen). Pongamos el origen en el piso, donde comienzan las escaleras:



Aunque ya habíamos escogido un sistema de coordenadas, no habíamos decidido el origen del mismo. Para los diagramas de fuerza no es muy relevante cuál es el origen del sistema (por eso nunca lo especificamos) pero para los problemas de cinemática sí lo es. Hemos escogido un origen en el piso, de modo que la parte inferior de la biblioteca esté inicialmente a tres metros de distancia del origen.

Según el origen que escogimos, la posición inicial de la parte inferior de la biblioteca es $(3\text{ m})\hat{x}$. Además, la rapidez inicial es cero porque la biblioteca se desliza desde el reposo. Teniendo en cuenta esto y que la aceleración es negativa y su magnitud está dada por la ecuación (17), la ecuación de movimiento queda así:

$$\vec{x}_f = -\frac{1}{2}\underbrace{(2.36\text{ m/s}^2)}_{a_x} t^2\hat{x} + \underbrace{(3\text{ m})\hat{x}}_{\vec{x}_i}. \tag{19}$$

Cuando la biblioteca llega al piso la posición final de la biblioteca es cero, así que si usamos esta información podemos encontrar el tiempo t_c de caída:

$$0\hat{x} = -\frac{1}{2}(2.36\text{ m/s}^2)t_c^2\hat{x} + (3\text{ m})\hat{x}. \tag{20}$$

Si aplicamos la regla de oro y pasamos el término con el tiempo al lado izquierdo, obtenemos

$$\frac{1}{2}(2.36\ \mathrm{m/s^2})t_c^2 = (3\ \mathrm{m}). \tag{21}$$

Si multiplicamos por 2 en ambos lados y dividimos por 2.36 metros por segundo cuadrado en ambos lados, obtenemos

$$t_c^2 = \frac{2(3\ \mathrm{m})}{(2.36\ \mathrm{m/s^2})} = 2.54\ \mathrm{s}^2. \tag{22}$$

Así que el tiempo de caída es la raíz cuadrada del resultado anterior:

$$t_c = \sqrt{2.54\ \mathrm{s}^2} = 1.59\ \mathrm{s}. \tag{23}$$

Problema 4.24.

Palabras clave: objeto en una mesa halando dos objetos que cuelgan, aceleración en X y en Y.

Alejandro, que tiene una masa de 54 kilogramos, se puso a jugar con dos de sus maletas en el barco en el que viaja. Alejandro tomó con sus manos dos cuerdas (ideales) y las amarró a cada una de las maletas, como se ve en el dibujo. Entre las cuerdas y las barandas del barco no hay fricción pero entre los zapatos de Alejandro y el barco hay un coeficiente de fricción dinámico de 0.1. La maleta verde tiene una masa de 22 kilogramos y la roja tiene una masa desconocida.

(a) Si la aceleración de Alejandro es de 1 metro por segundo cuadrado hacia su frente (hacia la derecha de la página), ¿cuál es la masa de la maleta roja?

(b) ¿Cuál es la magnitud de la tensión hecha por cada cuerda?

Solución

¿Qué información nos dan?

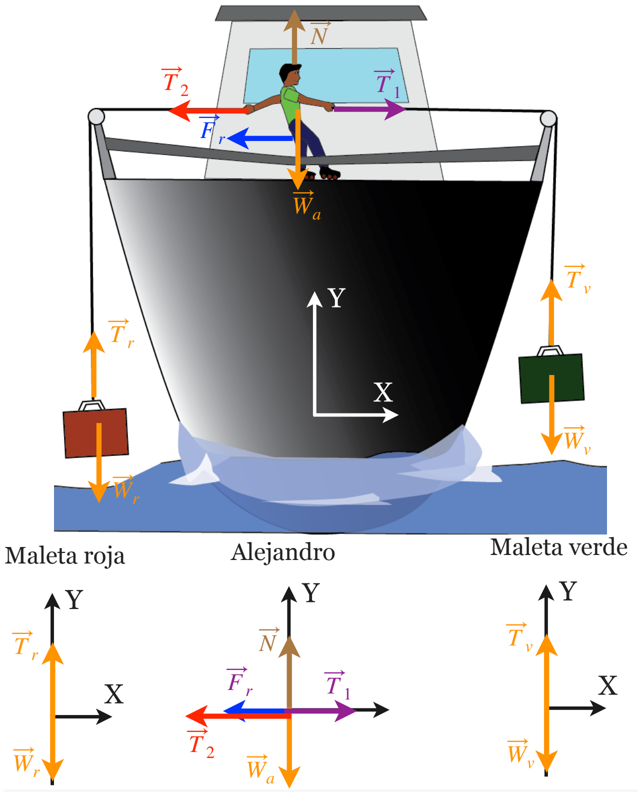
(a) y (b) Alejandro tiene una masa de 54 kilogramos y la maleta verde tiene una masa de 22 kilogramos. Hay un coeficiente de fricción dinámico de 0.1 entre los zapatos y el barco. La aceleración de Alejandro es de 1 metro por segundo cuadrado hacia su frente. Las cuerdas son ideales y las barandas del barco no generan ninguna fricción.

¿Qué nos piden?

(a) Debemos encontrar la masa de la maleta roja.

(b) Debemos hallar la magnitud de la tensión hecha por cada cuerda.

(a) Para hallar la masa de la maleta roja empecemos por realizar un diagrama de fuerzas. Notemos que no sólo necesitamos un diagrama de la maleta roja, sino también de Alejandro y de la maleta verde, pues necesitamos usar toda la información que nos dan en el enunciado. Usaremos un sistema de coordenadas con el eje Y apuntando hacia arriba y el eje X apuntando hacia la derecha (con un sistema así no debemos descomponer ninguna de las fuerzas):



Sobre la maleta roja y sobre la maleta verde actúan sólo dos fuerzas, la tensión sobre cada una ($\vec{T}_r$ y $\vec{T}_v$ respectivamente) que apunta en la dirección positiva de Y y el peso que apunta hacia abajo. Sobre Alejandro actúan cinco fuerzas: el peso, la normal, la fuerza de fricción dinámica que apunta en la dirección negativa de X y dos tensiones. La tensión $\vec{T}_1$ apunta en la dirección positiva de X y la tensión $\vec{T}_2$ que apunta en la dirección negativa de X.

Ahora que conocemos el diagrama de fuerzas podemos plantear la segunda ley de Newton para los diferentes objetos. Antes de hacer esto, es importante tener clara la dirección en que se mueven los diferentes objetos. Nos dicen que Alejandro se mueve hacia la derecha, en la dirección positiva de X según nuestro sistema. Esto implica que la maleta roja tiene que subir y la maleta verde tiene que bajar, así que la aceleración de la maleta roja es en Y positivo y la de la maleta verde es en Y negativo (notemos que las maletas se comportan de forma similar a dos objetos en una máquina de Atwood, como se explicó en la nota 4.20). Una vez entendemos esto, podemos escribir las diferentes ecuaciones de fuerzas.

Como queremos hallar la masa de la maleta roja, comencemos por la ecuación de fuerzas de esta maleta. En X no hay fuerzas y en Y hay dos, el peso y la tensión, y la aceleración es positiva en Y;

$$T_r\hat{y} - W_r\hat{y} = m_r a_{yr}\hat{y}. \tag{1}$$

Si escribimos el peso de la maleta roja como $m_r g$, la anterior ecuación queda

$$T_r\hat{y} - \underbrace{m_r g}_{W_r}\,\hat{y} = m_r a_{yr}\hat{y}. \tag{2}$$

De esta ecuación no podemos todavía despejar m_r porque no conocemos ni la aceleración Y de la maleta roja ni la tensión en la cuerda. Sin embargo, notemos que como están unidos con cuerdas ideales, la magnitud de la aceleración de la maleta roja tiene que ser igual que la magnitud de la aceleración de Alejandro que sí conocemos (la dirección de la aceleración es diferente pues Alejandro se mueve en X y la maleta roja en Y). Así que podemos cambiar a_{yr} por a_a que es la magnitud de la aceleración de Alejandro;

$$T_r\hat{y} - m_r g\hat{y} = m_r a_a\hat{y}. \tag{3}$$

De esta manera la única variable que nos falta para determinar la masa de la maleta roja es la magnitud de la tensión, y para hallarla debemos buscar nuevas ecuaciones. Planteemos ahora las ecuaciones de fuerza de Alejandro.

En X sobre Alejandro actúan tres fuerzas: la tensión $\vec{T}_2$, que es negativa en X, la tensión $\vec{T}_1$, positiva en X, y la fricción $\vec{F}_r$, que también es negativa en X. Además, la aceleración de Alejandro es positiva en X. Por lo tanto, la ecuación de fuerzas en X para Alejandro queda

$$T_1\hat{x} - T_2\hat{x} - F_r\hat{x} = m_a a_a\hat{x}. \tag{4}$$

Si despejamos $T_2\hat{x}$ y luego aplicamos la regla de oro, esta ecuación se convierte en

$$T_2 = T_1 - F_r - m_a a_a. \tag{5}$$

Esta ecuación nos da T_2, que es igual a T_r (la magnitud de la tensión de la maleta roja), pero en términos de otras variables desconocidas: T_1 y F_r. Empecemos por hallar F_r. La magnitud de la fricción dinámica es μN;

$$T_2 = T_1 - \underbrace{\mu N}_{F_r} - m_a a_a. \tag{6}$$

Para hallar la magnitud de la normal planteemos las ecuaciones de Alejandro en Y. En Y hay dos fuerzas: el peso y la normal. Además, la aceleración Y de Alejandro es cero:

$$N\hat{y} - W_a\hat{y} = 0\hat{y}. \tag{7}$$

Si aplicamos la regla de oro y usamos que $W_a = m_a g$, podemos despejar la magnitud de la normal:

$$N = m_a g. \tag{8}$$

Si usamos esto en la ecuación (6), obtenemos

$$T_2 = T_1 - \mu \underbrace{m_a g}_{N} - m_a a_a. \tag{9}$$

Sólo nos falta despejar T_1. Ya no hay más ecuaciones de fuerza para Alejandro, así que para hallar nuevas ecuaciones debemos analizar la maleta verde.

La ecuación de fuerza de esta maleta es como la ecuación de la maleta roja, pues sobre esta maleta sólo actúan el peso y la tensión (ambas fuerzas en Y). Sin embargo, la aceleración de la maleta verde es negativa como se explicó al comienzo, así que obtenemos

$$T_v\hat{y} - W_v\hat{y} = -m_v a_{yv}\hat{y}. \tag{10}$$

Además, notemos dos cosas: T_v tiene que ser igual a T_1 porque es la misma cuerda, así que la magnitud de la tensión realizada por los extremos es la misma. Y además, a_{yv} tiene que ser igual a a_a, pues la magnitud de la aceleración de Alejandro debe ser igual a la de la maleta verde ya que están unidos por una cuerda ideal. Teniendo en cuenta esto, y que $W_v = m_v g$, la ecuación (10) queda

$$\underbrace{T_1}_{T_v}\hat{y} - \underbrace{m_v g}_{W_v}\hat{y} = -m_v \underbrace{a_a}_{a_{yv}}\hat{y}. \tag{11}$$

Si aplicamos la regla de oro y despejamos T_1, esta ecuación queda

$$T_1 = -m_v a_a + m_v g. \tag{12}$$

Finalmente hemos encontrado una ecuación que nos da T_1 en términos de variables conocidas. Podemos usar este resultado en la ecuación (9) para así hallar T_2:

$$T_2 = \underbrace{-m_v a_a + m_v g}_{T_1} - \mu m_a g - m_a a_a. \tag{13}$$

Antes de usar este resultado en la ecuación (3), podemos simplificarlo un poco si sacamos factor común de g y de a_a:

$$T_2 = g(m_v - \mu m_a) - a_a(m_v + m_a). \tag{14}$$

Ahora sí usemos esto en la ecuación (3) (recuerde que $T_r = T_2$ porque es la misma cuerda):

$$\underbrace{\left(g(m_v - \mu m_a) - a_a(m_v + m_a)\right)}_{T_2}\hat{y} - m_r g\hat{y} = m_r a_a \hat{y}. \tag{15}$$

Si aplicamos la regla de oro y pasamos los términos con la masa de la maleta roja al lado derecho de la igualdad, esto nos queda

$$g(m_v - \mu m_a) - a_a(m_v + m_a) = m_r a_a + m_r g. \tag{16}$$

Ahora saquemos factor común de m_r:

$$g(m_v - \mu m_a) - a_a(m_v + m_a) = m_r(a_a + g). \tag{17}$$

Finalmente, dividamos por $a_a + g$:

$$\frac{g(m_v - \mu m_a) - a_a(m_v + m_a)}{a_a + g} = m_r. \tag{18}$$

Esta ecuación nos da la masa de la maleta roja en términos de variables conocidas. Sólo nos queda reemplazar los valores de cada variable:

$$\frac{9.81\ \text{m/s}^2(\overbrace{22\ \text{kg}}^{m_v} - \overbrace{(0.1)}^{\mu}\overbrace{54\ \text{kg}}^{m_a}) - \overbrace{1\ \text{m/s}^2}^{a_a}(\overbrace{22\ \text{kg}}^{m_v} + \overbrace{54\ \text{kg}}^{m_a})}{\underbrace{1\ \text{m/s}^2}_{a_a} + 9.81\ \text{m/s}^2} = 8.03\ \text{kg}. \tag{19}$$

Notemos que tiene sentido que la masa de la maleta roja sea menor que la masa de la maleta verde, pues la maleta roja está subiendo mientras que la verde cayendo, así que la verde debe pesar más que la roja, y es suficiente para arrastrar a Alejandro hacia al frente.

(b) Para hallar la magnitud de la tensión en cada cuerda podemos usar la ecuación (12), que nos da T_1, y podemos usar la ecuación (14), que nos da T_2. Si reemplazamos los valores de las variables en dichas ecuaciones obtenemos

$$T_1 = -\underbrace{22\ \text{kg}}_{m_v}\underbrace{(1\ \text{m/s}^2)}_{a_a} + \underbrace{(22\ \text{kg})}_{m_v}(9.81\ \text{m/s}^2) = 193.82\ \text{N} \tag{20}$$

y

$$\begin{aligned} T_2 &= (9.81\ \text{m/s}^2)(\underbrace{22\ \text{kg}}_{m_v} - \underbrace{(0.1)}_{\mu}\underbrace{(54\ \text{kg})}_{m_a}) - \underbrace{(1\ \text{m/s}^2)}_{a_a}(\underbrace{22\ \text{kg}}_{m_v} + \underbrace{54\ \text{kg}}_{m_a}) \\ &= 86.85\ \text{N}, \end{aligned} \tag{21}$$

respectivamente.

Problema 4.25.

Palabras clave: fuerza de fricción entre tres objetos (uno encima del otro), tercera ley de Newton, dirección de la fuerza de fricción.

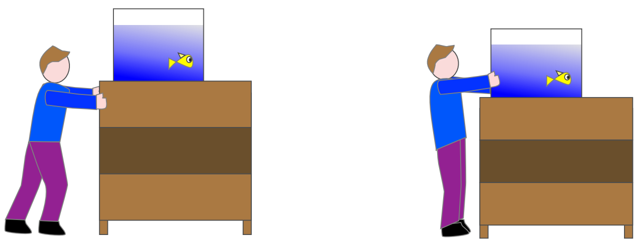
Considere las dos situaciones ilustradas en el dibujo. Para ambas situaciones, entre la pecera y el mueble hay un coeficiente de fricción μ_{d1} dinámico. En la primera situación Manuel empuja hacia adelante el mueble sobre el que se apoya la pecera, y la pecera se desliza un poco hacia atrás (a pesar de esto, con respecto al piso la pecera se mueve hacia delante también). En este caso entre el mueble y el piso hay un coeficiente de fricción dinámico μ_{d2}. En la segunda situación Manuel hala la pecera y mientras hace esto el mueble permanece fijo, así que en este caso el coeficiente de fricción entre el mueble y el piso es estático y es μ_e.

(a) Dibuje un diagrama de fuerzas para el mueble en la primera situación.

(b) Usando lo hecho en (a) y usando la tercera ley de Newton, realice un diagrama de fuerzas para la pecera en la primera situación.

(c) Realice un diagrama de fuerzas para la pecera en la segunda situación y después, usando la tercera ley de Newton, realice el diagrama de fuerzas para el mueble en esa misma situación.

Situación 1 | Situación 2



Manuel empuja el mueve hacia delante. El mueble se mueve y la pecera se desliza hacia atrás.	Manuel hala la pecera hacia atrás. La pecera se mueve pero el mueble permanece fijo.

Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b) y (c) Entre la pecera y el mueble hay un coeficiente de fricción μ_{d1} dinámico. En la primera situación la pecera se mueve hacia delante pero se alcanza a deslizar sobre el mueble. En la primera situación, entre el mueble y el piso hay un coeficiente de fricción dinámico μ_{d2}. En la segunda situación, entre el mueble y el piso hay un coeficiente de fricción estático μ_e. En esta situación la mesa permanece fija con respecto al piso.

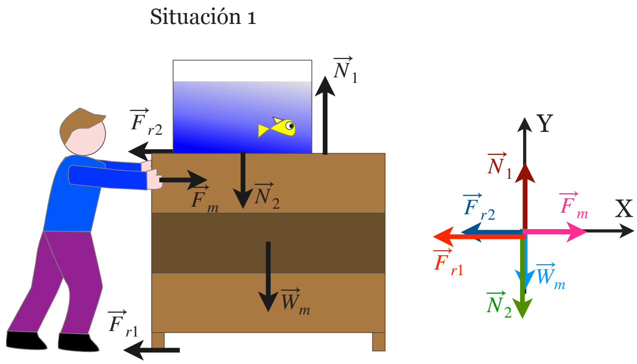
¿Qué nos piden?

(a) Dibujar un diagrama de fuerzas para el mueble en la primera situación.

(b) Usando lo hecho en (a), y usando la tercera ley de Newton debemos realizar un diagrama de fuerzas para la pecera en la primera situación.

(c) Debemos hacer un diagrama de fuerzas para la pecera en la segunda situación y después, usando la tercera ley de Newton, un diagrama de fuerzas para el mueble.

(a) Para realizar un diagrama de fuerzas para el mueble en la primera situación necesitamos identificar qué fuerzas actúan sobre el mueble. Primero, es claro que sobre el mueble actúa el peso, que apunta hacia el piso, y la fuerza normal que el piso le hace al mueble, que apunta hacia arriba. Sobre el mueble también actúa la fuerza normal que la parte inferior de la pecera le hace, y esa fuerza normal apunta hacia abajo. Además, como el mueble se mueve hacia delante, el piso le hace una fuerza de fricción hacia atrás. Sobre el mueble también actúa la fuerza de fricción que la pecera le hace. Esta fuerza también apunta hacia atrás, pues el mueble se mueve hacia delante de la pecera[10]. Teniendo en cuenta esto, el diagrama de fuerzas para el mueble es así:



Sobre el mueble actúan en total 6 fuerzas. La fuerza $\vec{F}_m$ que ejerce Manuel. El peso $\vec{W}_m$ del mueble que apunta hacia abajo. La fuerza normal $\vec{N}_1$ que el piso le hace al mueble y la fuerza normal $\vec{N}_2$ que la pecera le hace al mueble. Y dos fuerzas de fricción hacia atrás, $\vec{F}_{r1}$ que es la fricción que el piso le hace al mueble y $\vec{F}_{r1}$ que es la fricción que la superficie de la pecera le hace al mueble.

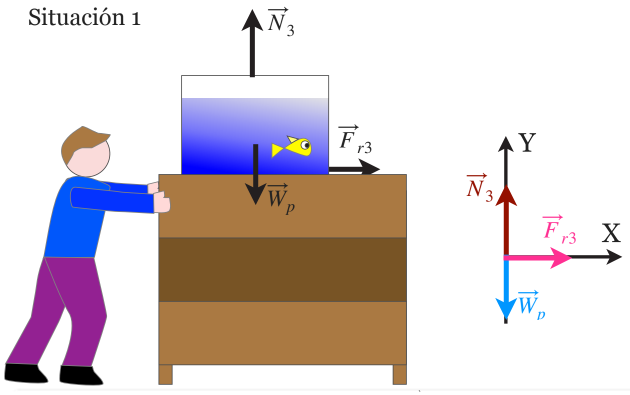
(b) Ahora debemos hacer un diagrama de fuerzas para la pecera en la primera situación. Es claro que sobre la pecera actúa el peso y la fuerza normal que el mueble le hace a la pecera. Por la tercera ley de Newton, esta fuerza normal es igual en magnitud pero contraria en dirección a la fuerza normal $\vec{N}_2$ que la pecera le hace al mueble. Pero también hay una fuerza de fricción dinámica que actúa sobre la pecera, pues la pecera se desliza sobre el mueble. ¿Hacia dónde apunta esta fuerza de fricción que el mueble le hace a la pecera?

[10] Esto se intuye con facilidad; la superficie inferior de la pecera hace que sea aún más difícil para Manuel mover el mueble hacia delante.

Podríamos estar tentados a decir que apunta hacia atrás como la fuerza de fricción que la pecera le hace al mueble, pero eso sería un error según la tercera ley de Newton. Si la pecera le hace una fuerza de fricción hacia atrás al mueble, entonces el mueble le debe hacer una fuerza de fricción hacia delante a la pecera (y de igual magnitud). De hecho, como la única fuerza en X sobre la pecera es la fricción, si la pecera se mueve un poco hacia delante (con respecto al piso) mientras Manuel empuja el mueble tiene que ser porque la fricción apunta hacia delante.

El lector puede estar confundido: si la pecera se mueve hacia delante, ¿la fricción no debería ir hacia atrás? No, porque lo que nos interesa para determinar la dirección de la fuerza de fricción es el movimiento del objeto con respecto a la superficie que le produce fricción y en este caso esa superficie es el mueble y no el piso (nota 4.21). Mientras el mueble avanza hacia adelante la pecera se desliza un poco hacia *atrás* del mueble así que la fricción que le hace el mueble es hacia adelante[11].

Una vez entendemos la dirección de la fricción que el mueble le hace a la pecera, podemos hacer el diagrama de fuerzas de la pecera:



Sobre la pecera actúan en total tres fuerzas. $\vec{W}_p$ que es el peso de la pecera. La fuerza normal $\vec{N}_3$ que el mueble le hace a la pecera y la fuerza de fricción $\vec{F}_{r3}$ que el mueble le hace a la pecera. Por la tercera ley de Newton, esta fuerza es de la misma magnitud y de dirección contraria a la fuerza de fricción $\vec{F}_{r2}$ que la pecera le hacía al mueble (esa apuntaba hacia atrás).

[11] Notemos que este es un caso similar al del problema 4.20 en el que alguien arrastra hacia la parte de atrás del avión una maleta; con respecto a la Tierra, la maleta se está moviendo hacia adelante porque el avión se está moviendo hacia adelante. Sin embargo, la fricción es hacia adelante porque la maleta se mueve hacia atrás del corredor del avión, y es el movimiento de la maleta con respecto al corredor el que es importante para determinar la dirección de la fricción. Lo mismo sucede aquí; la pecera se mueve hacia adelante del piso pero lo importante es que la maleta se mueve hacia atrás del mueble.

Nota 4.23. Dos formas de encontrar la dirección de la fricción que A le hace a B

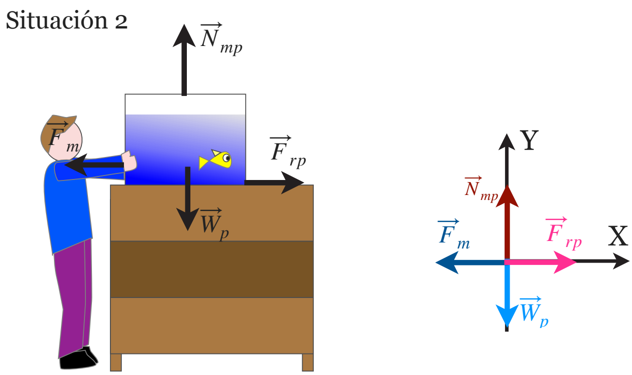
Hay dos formas de determinar la dirección de la fuerza de fricción que un objeto A le hace a un objeto B:

(1) Si conocemos la dirección de la fuerza de fricción que B le hace a A, entonces según la tercera ley de Newton la fricción que A le hace a B tiene dirección opuesta.

(2) Como dice la nota 4.21, podemos analizar el movimiento de B con respecto a A; si B se mueve hacia adelante de A, entonces A le hace una fricción hacia atrás, y si B se mueve hacia atrás de A, entonces A le hace una fricción hacia adelante a B.

Esto mismo aplica para casos de fricción estática. En estos casos, lo que nos debemos preguntar es hacia dónde *tiende a moverse* B con respecto a la superficie de A.

(c) En la segunda situación Manuel hala la pecera. En este caso, Manuel le hace una fuerza hacia atrás a la pecera. Sobre la pecera también actúan el peso y la normal que le hace el mueble. Y otra vez tenemos una fuerza de fricción entre la pecera y el mueble. Cuando Manuel hala la pecera, la arrastra hacia la parte de atrás del mueble así que la fricción que el mueble le hace es hacia adelante. Teniendo en cuenta esto, el diagrama de fuerzas para la pecera es

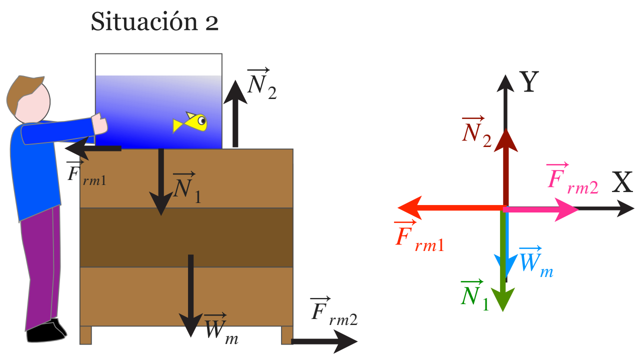


Sobre la pecera actúan en total cuatro fuerzas; $\vec{W}_p$ que es el peso de la pecera; la fuerza normal $\vec{N}_{mp}$ que el mueble le hace a la pecera; la fuerza de fricción $\vec{F}_{rp}$ que el mueble le hace a la pecera (que es hacia adelante); la fuerza $\vec{F}_m$ que le hace Manuel a la pecera.

Ahora debemos hacer el diagrama de fuerzas sobre el mueble. Sobre el mueble tenemos el peso del mueble, que va hacia abajo, la normal que el piso le hace al mueble, que apunta hacia arriba, la normal que la pecera le hace al mueble, que apunta hacia abajo (hasta aquí todo es igual que antes), la fricción que la pecera le hace al mueble y la fricción que el piso le hace al mueble. Por la tercera ley de Newton, la fricción que la pecera le hace el mueble debe apuntar hacia atrás, pues ya vimos que la fricción que el mueble le hace a la pecera apunta hacia adelante. Por otra parte, la fricción que el piso le hace al mueble es estática porque en la situación 2 el mueble no se mueve. ¿Hacia dónde apunta esta fricción estática?

Ya dijimos que la fricción que la pecera le hace al mueble es hacia atrás, así que la fricción que el piso le hace al mueble es hacia adelante, pues necesitamos que las fuerzas en X se cancelen para que el mueble permanezca en reposo (sin aceleración). Otra forma simple de entender la dirección de la fricción del piso es esta: cuando Manuel hala la pecera hacia atrás, la pecera trata de mover el mueble hacia atrás a través de la fricción, pero el piso trata de oponerse a este movimiento hacia atrás y produce una fuerza hacia adelante.

El diagrama de fuerzas del mueble queda así:



Sobre el mueble actúan en total cinco fuerzas. $\vec{W}_m$ que es el peso del mueble. La fuerza normal $\vec{N}_1$ que la pecera le hace al mueble (esta fuerza es contraria en dirección y tiene la misma magnitud que $\vec{N}_{mp}$). $\vec{N}_2$ que es la fuerza normal que el piso le hace al mueble. La fuerza de fricción $\vec{F}_{rm1}$ que la pecera le hace al mueble (esta fuerza tiene la misma magnitud y dirección contraria que $\vec{F}_{rp}$). Y la fuerza de fricción estática $\vec{F}_{rm2}$ que el piso le hace al mueble.

Problema 4.26.

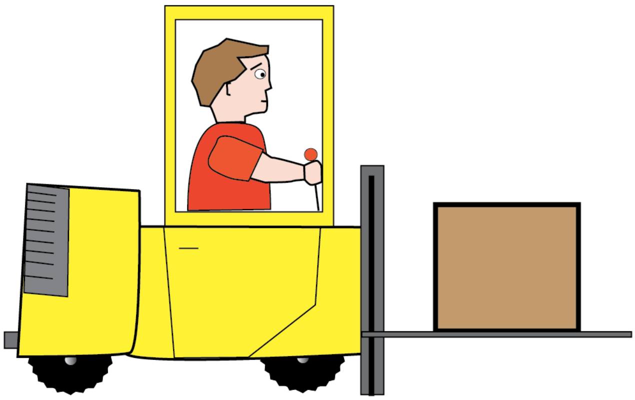
Palabras clave: determinar si un objeto se desliza o no, fuerza total que un objeto ejerce sobre el que está debajo.

Un pequeño camión que tiene aceleración de magnitud de 5 m/s^2 lleva una caja de 50 kilogramos de masa sobre un soporte en su parte delantera, como se ve en el dibujo. Entre la caja y el soporte del camión hay un coeficiente de fricción estático de 0.4 y un coeficiente de fricción dinámico de 0.2.

(a) ¿Se desliza o no se desliza la caja?

(b) Con base en (a), ¿cuál es la aceleración de la caja?

(c) ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza total que la caja ejerce sobre el soporte del camión?



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b) y (c) La masa de la caja es de 50 kilogramos, el coeficiente de fricción estático es 0.4, el coeficiente de fricción dinámico es 0.2 y la magnitud de la aceleración del camión es de 5 m/s^2.

¿Qué nos piden?

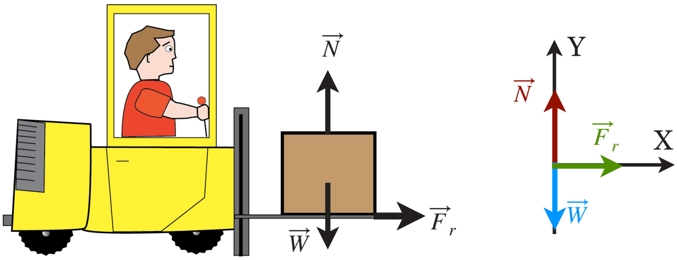
(a) Decir si se desliza o no se desliza la caja.

(b) Determinar la aceleración de la caja.

(c) Hallar la magnitud y dirección de la fuerza total que la caja ejerce sobre el soporte del camión.

(a) Para saber si la caja se desliza podemos razonar de la siguiente forma: si no se desliza, entonces inferimos que entre el soporte y la caja hay una fuerza de fricción estática y que esa fuerza de fricción estática tiene que ser capaz de darle a la caja la misma aceleración que tiene el camión. Si la aceleración de la caja es menor que la aceleración del camión la caja se desliza. Así que para saber si esta se desliza sólo debemos calcular la aceleración que la fuerza de fricción estática le da a la caja y ver si esa aceleración es igual a la del camión. Si vemos que esa fuerza no le da la aceleración suficiente a la caja, entonces podemos inferir que la caja se desliza y la fuerza de fricción es dinámica.

Realicemos un diagrama de fuerzas de la caja. Sobre la caja actúa el peso de la caja, la normal que le hace el soporte y la fricción que por ahora vamos a suponer que es estática. Mientras el camión acelera, la caja tiende a deslizarse, es decir, tiende a moverse hacia la parte de atrás del soporte (si nosotros fuéramos la caja, tenderíamos a caernos hacia atrás). Como la dirección de la fricción estática es opuesta a la dirección en la que el objeto tiende a deslizarse, podemos inferir que la fricción estática apunta hacia adelante. De hecho, la única fuerza en X sobre la caja es esta fricción así que la única forma de que la caja acelere igual que el camión es si esta fricción apunta hacia adelante:



Sobre la caja actúa el peso, la normal que le hace el soporte y la fricción que le hace el soporte, la cual apunta hacia adelante (por ahora suponemos que esta fricción es estática).

En X sólo actúa una fuerza sobre la caja, a saber, la fricción estática que le hace el soporte. Además, la aceleración en X es positiva, así que en X la ecuación de fuerza de la caja es

$$F_r\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{1}$$

Si aplicamos la regla de oro y dividimos por la masa la ecuación (1) queda así:

$$\frac{F_r}{m} = a_x. \tag{2}$$

Queremos hallar la máxima aceleración que la fricción le hace a la caja para saber si es suficiente para que la caja acelere igual que el camión. Como es la máxima aceleración, la fricción estática debe ser máxima, así que la magnitud de esta fuerza es $\mu_e N$:

$$\frac{\mu_e N}{m} = a_x. \tag{3}$$

De la anterior ecuación no conocemos la normal N. Para hallar N debemos usar la ecuación de fuerzas en Y. En Y hay dos fuerzas, el peso y la normal:

$$N\hat{y} - W\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{4}$$

Como $W = mg$, y como en Y la caja no tiene aceleración, esta ecuación queda

$$N\hat{y} - mg\hat{y} = 0\hat{y}. \tag{5}$$

Si aplicamos la regla de oro y despejamos la normal, obtenemos

$$N = mg. \tag{6}$$

Finalmente, usamos este resultado en la ecuación (3):

$$\frac{\mu_e \overbrace{(mg)}^{N}}{m} = a_x. \tag{7}$$

Si cancelamos las masas obtenemos finalmente una expresión para la aceleración de la caja:

$$\mu_e g = a_x. \tag{8}$$

Usemos ahora el valor de las variables:

$$\overbrace{(0.4)}^{\mu_e}(9.81\ \text{m/s}^2) = 3.92\ \text{m/s}^2 = a_x. \tag{9}$$

Como la aceleración máxima que la fuerza de fricción estática le da a la caja es menor que la del camión, que es 5 m/s^2, podemos inferir que la caja se desliza.

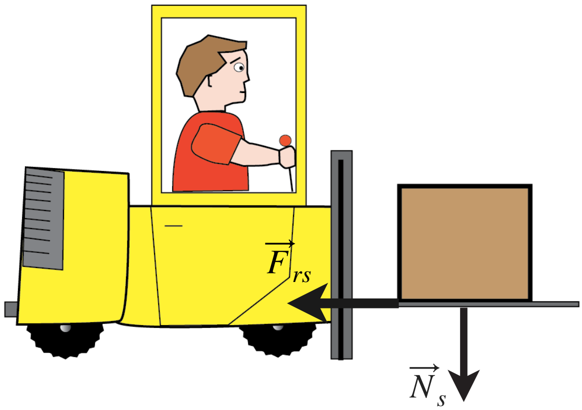
(b) Podríamos creer que la aceleración de la caja es la calculada en la sección anterior con la ecuación (9). Sin embargo, la aceleración dada por la ecuación (9) fue calculada suponiendo que la fricción es estática y ya sabemos que la caja se desliza, así que la fricción no es estática. Pero la única diferencia que surge en las ecuaciones de la pregunta (a) en el caso en que la fricción es dinámica es que el coeficiente de fricción es dinámico y este coeficiente es 0.2. Note que la dirección de la fricción dinámica es igual que la estática, pues al deslizarse la caja se mueve hacia la parte de atrás del soporte, así que el soporte le hace una fuerza de fricción hacia adelante.

Como el diagrama de fuerzas no cambia con respecto al numeral anterior, podemos volver a usar la ecuación (9), sólo que ahora debemos usar el coeficiente de fricción dinámico:

$$\overbrace{(0.2)}^{\mu_d}(9.81 \text{ m/s}^2) = 1.96 \text{ m/s}^2 = a_x. \tag{10}$$

Notemos que la aceleración de la caja es bastante menor que la aceleración del camión.

(c) Para hallar la magnitud de la fuerza total que la caja ejerce sobre el soporte del camión podemos usar la tercera ley de Newton. Como el soporte le hace una fuerza normal a la caja, por la tercera ley de Newton la caja le hace una fuerza normal al soporte de igual magnitud pero dirección contraria. Además, como el soporte le hace una fuerza de fricción dinámica a la caja que apunta hacia adelante, la caja le hace una fuerza de fricción dinámica al soporte que apunta hacia atrás, y que tiene la misma magnitud:



La caja ejerce dos fuerzas sobre el soporte; una fuerza de fricción que apunta hacia atrás y una fuerza normal que apunta hacia abajo. Notemos que les hemos puesto un subíndice "*s*" a las fuerzas para distinguirlas de las fuerzas sobre la caja. Tenga en cuenta que este no es un diagrama de fuerzas completo del soporte.

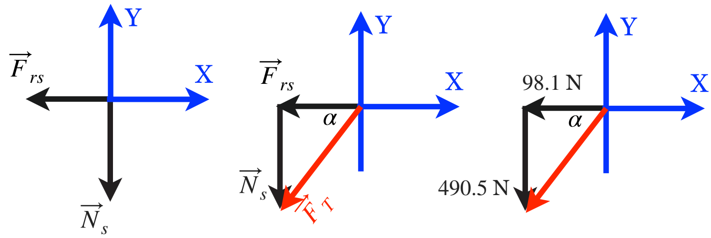
La magnitud de la normal que la caja le hace al soporte es la misma que el soporte le hace a la caja, la cual está dada por la ecuación (6). Si usamos el hecho de que la masa de la caja es de 50 kilogramos, esta magnitud de la normal nos da

$$N = \underbrace{(50 \text{ kg})}_{m}(9.81 \text{ m/s}^2) = 490.5 \text{ N}. \tag{11}$$

La fricción que la caja le hace al soporte es de la misma magnitud que la fricción que el soporte le hace a la caja y se calcula usando:

$$F_r = \mu_d N = (0.2)(490.5 \text{ N}) = 98.1 \text{ N}. \tag{12}$$

Notemos que la fuerza normal es en Y y la de fricción es en X, así que la fuerza total que la caja ejerce sobre el soporte se puede calcular usando el teorema de Pitágoras:



Primero pusimos las dos fuerzas que hace la caja sobre el soporte en el origen del sistema de coordenadas. Después trazamos el vector de la fuerza total (en rojo), donde se puede ver claramente que la fuerza de fricción es la componente X y la fuerza normal es la componente Y de esta fuerza total. Además, el ángulo α nos servirá para indicar la dirección de la fuerza. Finalmente, indicamos la magnitud de cada una de estas fuerzas.

Como se puede apreciar de la figura anterior, la magnitud de la fuerza total que la caja hace sobre el soporte es

$$\left\|\vec{F}_T\right\| = \sqrt{(\underbrace{98.1\ \mathrm{N}}_{F_{rs}})^2 + (\underbrace{490.5\ \mathrm{N}}_{N})^2} = 500.21\ \mathrm{N}. \tag{13}$$

Finalmente, la dirección de esta fuerza se puede dar en términos del ángulo α. Notemos que el cateto opuesto es de 490.5 N y el cateto adyacente es de 98.1 N así que la tangente de α nos da

$$\tan\alpha = \frac{\overbrace{490.5\ \mathrm{N}}^{N}}{\underbrace{98.1\ \mathrm{N}}_{F_r}} = 5. \tag{14}$$

Así que α es igual a

$$\alpha = \arctan 5 = 78.69^\circ. \tag{15}$$

Es decir, la fuerza total que la caja ejerce sobre el soporte tiene dirección de 78.69 grados en el sentido contrario de las manecillas del reloj con respecto a la parte negativa del eje X. La magnitud de esta fuerza es de 500.21 newtons.

Problema de repaso 4.27.

Palabras clave: cuerda ideal, máquina de Atwood, dirección de la fuerza de fricción entre varios objetos, aceleración relativa.

Responda falso o verdadero y justifique respuesta:

(1) Si dos objetos están sujetos de los extremos de la misma cuerda ideal (que está templada), entonces podemos estar seguros de que sus aceleraciones son la misma.

(2) Si en un caso de poleas un objeto sube y el otro baja, entonces debemos indicar en la ecuación de fuerzas que la aceleración de un objeto tiene el signo opuesto de la aceleración del otro objeto.

(3) Si A está encima de B y B está encima de C, la dirección de la fuerza de fricción que B le hace a A depende del movimiento de A con respecto a C.

(4) Si A está encima de B y se queda en el mismo punto de B mientras B acelera, entonces A tiene la misma aceleración que B.

(5) Incluso si conocemos la fuerza de fricción que A le hace a B, no podemos con esa información determinar la fuerza de fricción que B le hace a A.

Solución

(1) Falso. Podemos estar seguros de que la magnitud de la aceleración de dos objetos sujetos de la misma cuerda es la misma, pero no podemos estar seguros de que la dirección sea la misma.

(2) Verdadero. Si un objeto sube y el otro baja debemos indicarlo con el signo de la aceleración de los objetos (somos libres de escoger el sistema de coordenadas que deseemos, pero una aceleración tiene que tener el signo positivo y el otro negativo, como dice la nota 4.20).

(3) Falso. La dirección de la fricción que B le hace a A depende del movimiento de A con respecto a B, pero no depende del movimiento de A con respecto a C (ver notas 4.21 y 4.23).

(4) Verdadero. Si A está encima de B y se queda en el mismo punto, entonces podemos inferir que A tiene exactamente la misma aceleración que B, de lo contrario A se deslizaría (nota 4.22).

(5) Falso. Si conocemos la fuerza de fricción que A le hace a B, con la tercera ley de Newton podemos determinar la fuerza que B le hace a A (nota 4.23).

Problema 4.28.

Palabras clave: comportamiento de la tensión de cuatro objetos unidos por cuerdas ideales.

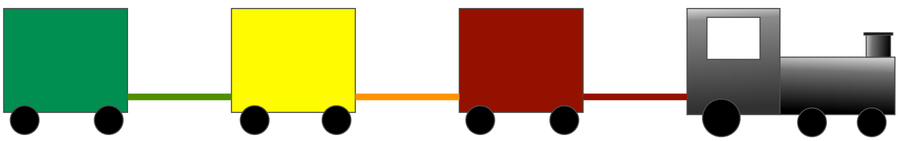
Un tren de juguete tiene tres vagones, como se puede ver en el dibujo. Los vagones están unidos con cuerdas ideales. La masa de la locomotora es m_l, la masa del vagón rojo es m_r, la masa del vagón amarillo es m_a y la masa del vagón verde es m_v. Además, el tren tiene una aceleración de magnitud a.

(a) Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y justifique la respuesta: (1) La fuerza de tensión que la cuerda roja le hace a la locomotora es igual a la fuerza de tensión que la cuerda roja le hace al vagón rojo. (2) La magnitud de la tensión que la cuerda naranja le hace al vagón amarillo es la misma que la magnitud de la tensión que la cuerda naranja le hace al vagón rojo. (3) Como todas son cuerdas ideales, podemos inferir que la magnitud de la tensión que la cuerda verde ejerce sobre el vagón amarillo y sobre el vagón verde es la misma que la magnitud de la tensión que la cuerda naranja ejerce sobre el vagón amarillo y el rojo. (4) Si la aceleración del vagón verde fuera cero, la magnitud de la tensión producida por todas las cuerdas sería cero.

(b) Escriba una expresión para la magnitud de la tensión que cada cuerda hace en términos de la masa de los vagones y la aceleración del tren.

(c) Escriba una expresión para la magnitud de la fuerza que hace el motor de la locomotora en términos de la masa de los vagones y la aceleración del tren.

(d) Con base en (b) y si el tren tuviera 10 vagones, todos con masa conocida (que puede llamar como quiera), dé una expresión para la magnitud de la tensión que la primera cuerda produciría en términos de todas las masas y de la aceleración del tren. También dé una expresión para la magnitud de la tensión que la quinta cuerda (contada desde la locomotora hacia atrás) produciría. Para resolver este problema apóyese en lo realizado en (b).



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b) y (c) Un tren con aceleración de magnitud a tiene tres vagones. La masa de la locomotora es m_l, la masa del vagón rojo es m_r, la masa del vagón amarillo es m_a y la masa del vagón verde es m_v. Todas las cuerdas son ideales.

(d) Suponemos que el tren tiene 10 vagones con masas conocidas.

¿Qué nos piden?

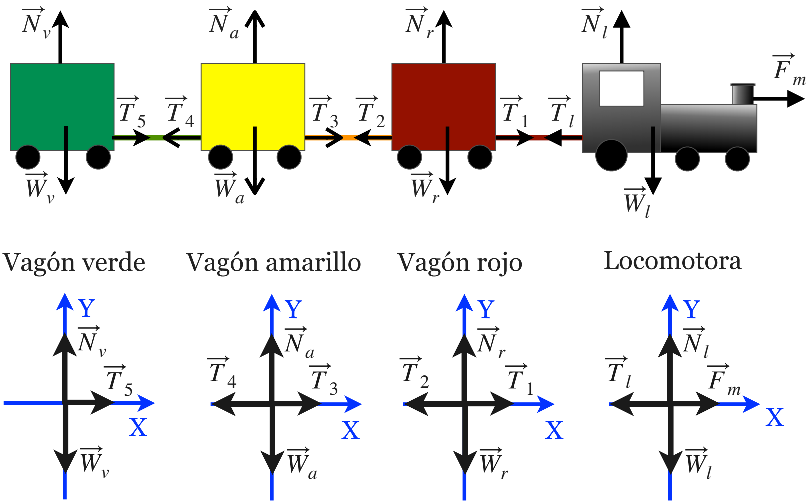
(a) Decir si las afirmaciones (1) a (4) son verdaderas o falsas, y justificar la respuesta.

(b) Hallar una expresión para la magnitud de la tensión que cada cuerda hace en términos de la masa de los vagones y la aceleración del tren.

(c) Hallar una expresión para la magnitud de la fuerza que hace el motor de la locomotora en términos de la masa de los vagones y la aceleración del tren.

(d) Debemos encontrar una expresión para la magnitud de la tensión que la primera cuerda produciría si el tren tuviera 10 vagones, y esta expresión debe estar en términos de la aceleración y las masas de los vagones. Debemos hacer lo mismo para la magnitud de la tensión de la quinta cuerda. Para hacer esto debemos apoyarnos en lo hecho en los numerales anteriores.

(a) Antes de determinar si las afirmaciones son verdaderas o falsas es útil comenzar por hacer el diagrama de fuerzas. Vamos a hacer un diagrama para los diferentes vagones ya que en algunos numerales debemos determinar las diferentes tensiones.



Hacemos un diagrama de fuerzas sobre cada vagón y sobre la locomotora. Sobre la locomotora actúa la fuerza del motor $\vec{F}_m$, la fuerza normal, el peso y una fuerza de tensión. Sobre el vagón rojo y el vagón amarillo actúan cuatro fuerzas; dos fuerzas de tensión, el peso de cada vagón y la normal de cada vagón. Finalmente, sobre el vagón verde actúa el peso, la normal y una fuerza de tensión. Notemos que con el sistema de coordenadas usado no es necesario descomponer ninguna fuerza.

Ahora que tenemos el diagrama de fuerzas, vamos a decir si las afirmaciones son verdaderas o falsas:

(1) La fuerza de tensión que la cuerda roja le hace a la locomotora es igual a la fuerza de tensión que la cuerda roja le hace al vagón rojo.

Esta afirmación es falsa. $\vec{T}_l$ no es igual a $\vec{T}_1$ porque tienen direcciones opuestas. Lo que sí es cierto es que $\|\vec{T}_l\|$ es igual a $\|\vec{T}_1\|$.

(2) La magnitud que la tensión de la cuerda naranja le hace al vagón amarillo es la misma que la magnitud que la tensión de la cuerda naranja le hace al vagón rojo.

Esto es verdad porque la cuerda naranja es ideal, así que la magnitud de la tensión que hace en sus dos extremos es la misma. Es decir, según nuestro diagrama, $\|\vec{T}_3\|$ y $\|\vec{T}_2\|$ son iguales.

(3) Como todas son cuerdas ideales, podemos inferir que la magnitud de la tensión que la cuerda verde ejerce sobre el vagón amarillo y sobre el vagón verde es la misma que la magnitud de la tensión que la cuerda naranja ejerce sobre el vagón amarillo y el rojo.

Esta afirmación es falsa. Que todas sean cuerdas ideales no quiere decir que la magnitud de la tensión que una cuerda hace sea la misma que la magnitud de la tensión que *otra cuerda diferente* hace. Que sean cuerdas ideales sólo implica que la magnitud de la tensión que cada extremo de cada cuerda hace es la misma, pero no podemos comparar diferentes cuerdas.

(4) Si la aceleración del vagón verde fuera cero, la magnitud de la tensión producida por todas las cuerdas sería cero.

Esta afirmación es verdadera. Sobre el vagón verde sólo hay una fuerza en X que mueve al vagón, a saber, la fuerza de tensión $\vec{T}_5$. Por lo tanto, la única forma de que este vagón no tenga aceleración en X es si $\|\vec{T}_5\|$ es cero. Pero si $\|\vec{T}_5\|$ es cero, entonces $\|\vec{T}_4\|$ tiene que ser cero, porque ambas tensiones son producidas por la misma cuerda (la cuerda verde). Ahora, el vagón amarillo está unido al verde por una cuerda ideal, así que la magnitud de sus aceleraciones tiene que ser la misma (nota 4.15). Como el vagón verde no tiene aceleración, el amarillo tampoco. Sobre el vagón amarillo actúan dos fuerzas en X, $\vec{T}_4$ y $\vec{T}_3$. Como $\|\vec{T}_4\|$ es cero, $\|\vec{T}_3\|$ tiene que ser cero para que este vagón no tenga aceleración en X. Como la cuerda naranja es ideal, entonces podemos inferir que $\|\vec{T}_2\|$ también es cero. Finalmente, aplicamos el mismo análisis para el vagón rojo. Este no puede acelerar porque está unido al amarillo, así que $\vec{T}_2 + \vec{T}_1$ tiene que ser cero para este vagón. Como $\|\vec{T}_2\|$ es cero, inferimos que $\|\vec{T}_1\|$ es cero, y como la cuerda roja es ideal, entonces inferimos que $\|\vec{T}_l\|$ también es cero.

(b) Ahora debemos hallar una expresión para la magnitud de la tensión de todas las cuerdas. Para hacer esto debemos plantear la segunda ley de Newton para cada uno de los vagones y también para la locomotora. Comencemos por la locomotora.

Sobre la locomotora actúan dos fuerzas en X: la fuerza del motor, que apunta en la dirección positiva de X, y la fuerza de tensión $\vec{T}_l$, que apunta en la dirección negativa de X. Además, la aceleración de la locomotora es positiva en X. Por lo tanto, la segunda ley de Newton en X para la locomotora queda

$$F_m\hat{x} - T_l\hat{x} = m_l a\hat{x}, \tag{1}$$

donde a es la magnitud de la aceleración de la locomotora. Con esta ecuación no podemos despejar T_l porque no conocemos la fuerza del motor. Así que necesitamos otras ecuaciones.

Analicemos el vagón rojo. Sobre este vagón actúan dos fuerzas de tensión: $\vec{T}_1$, que apunta en la dirección positiva de X, y $\vec{T}_2$, que apunta en la dirección negativa. Además, el vagón se mueve en la dirección positiva de X, así que la segunda ley de Newton para este vagón queda

$$T_1\hat{x} - T_2\hat{x} = m_r a_r \hat{x}, \tag{2}$$

donde hemos llamado "a_r" a la magnitud de la aceleración del vagón rojo. Ahora tengamos en cuenta que, como todos los vagones están unidos por cuerdas ideales, la magnitud de la aceleración de cada vagón y de la locomotora son la misma, así que de ahora en adelante vamos a llamar a a todas las aceleraciones. Además, como la cuerda roja es ideal, T_l tiene que ser igual a T_1 así que podemos escribir la ecuación (2) así:

$$\underbrace{T_l}_{T_1}\hat{x} - T_2\hat{x} = m_r \underbrace{a}_{a_r}\hat{x}. \tag{3}$$

De aquí no podemos despejar T_l porque no conocemos T_2 y tampoco podemos usar la ecuación (1) porque no conocemos F_m. Así que debemos seguir buscando ecuaciones.

Analicemos ahora el vagón amarillo. El análisis es muy similar al del vagón rojo; hay dos fuerzas de tensión actuando sobre el vagón amarillo, $\vec{T}_3$ y $\vec{T}_4$. $\vec{T}_3$ es positiva y $\vec{T}_4$ es negativa, así que en X la segunda ley de Newton para el vagón amarillo queda así:

$$T_3\hat{x} - T_4\hat{x} = m_a a\hat{x}. \tag{4}$$

Notemos que como la cuerda naranja es ideal, T_3 tiene que ser igual a T_2, así que podemos escribir la ecuación (4) así:

$$\underbrace{T_2}_{T_3}\hat{x} - T_4\hat{x} = m_a a\hat{x}. \tag{5}$$

No podemos despejar T_2 aquí porque no conocemos T_4 (notemos que cada que escribimos la ecuación de un nuevo vagón, aparece una nueva incógnita).

Sólo nos falta analizar el vagón verde. Sobre el vagón verde sólo actúa una fuerza en X, a saber, $\vec{T}_5$. Esta fuerza tiene dirección positiva de X así que, según la segunda ley de Newton, para este vagón tenemos

$$T_5\hat{x} = m_v a\hat{x}. \tag{6}$$

Pero como la cuerda es ideal, podemos usar el hecho de que T_5 es igual a T_4:

$$\underbrace{T_4}_{T_5}\ \hat{x} = m_v a\hat{x}. \tag{7}$$

Esta ecuación nos permite despejar T_4, la magnitud de la tensión en la cuerda verde, porque conocemos la masa del vagón y su aceleración. Si aplicamos la regla de oro, obtenemos

$$T_4 = m_v a. \tag{8}$$

Ahora sí, con esta ecuación podemos usar las otras ecuaciones que teníamos. Por ejemplo, si usamos la ecuación (8) en la ecuación (5), obtenemos

$$T_2\hat{x} - \underbrace{(m_v a)}_{T_4}\hat{x} = m_a a\hat{x}. \tag{9}$$

Si aplicamos la regla de oro y pasamos el término con m_v al otro lado, obtenemos

$$T_2 = (m_v a) + m_a a. \tag{10}$$

Si sacamos factor común de a esto nos da la magnitud de la tensión de la cuerda naranja:

$$T_2 = a(m_v + m_a). \tag{11}$$

Finalmente, si usamos este resultado en la ecuación (3) podemos obtener una expresión para T_l, la magnitud de la tensión en la cuerda roja:

$$T_l\hat{x} - \underbrace{(a(m_v + m_a))}_{T_2}\hat{x} = m_r a\hat{x}. \tag{12}$$

Si aplicamos la regla de oro y pasamos el término con la masa del vagón verde y el vagón amarillo al otro lado, obtenemos

$$T_l = a(m_v + m_a) + m_r a. \tag{13}$$

Si sacamos factor común de a, esto queda

$$T_l = a(m_v + m_a + m_r). \tag{14}$$

Notemos que la tensión de esta cuerda depende de la masa de los tres vagones, lo cual es intuitivo porque esta cuerda tiene que halar el vagón rojo que está unido al amarillo y al verde. En cambio, la tensión de la cuerda sobre el vagón verde, dada por la ecuación (8), sólo tiene que halar al vagón verde y sólo depende de la masa de ese vagón. Esto corrobora nuestra respuesta a la afirmación (3): la tensión que las diferentes cuerdas ideales producen no es la misma.

(c) Ahora debemos hallar una expresión para la magnitud de la fuerza producida por el motor. Esto es fácil si usamos el resultado de la ecuación (14) en la ecuación (1):

$$F_m\hat{x} - (a(m_v + m_a + m_r))\hat{x} = m_l a\hat{x}. \tag{15}$$

Si aplicamos la regla de oro y pasamos el término con a del lado izquierdo al derecho, esto queda:

$$F_m = a(m_v + m_a + m_r) + m_l a. \tag{16}$$

Finalmente, si factorizamos a obtenemos

$$F_m = a(m_v + m_a + m_r + m_l). \tag{17}$$

Notemos que se puede llegar al resultado intuitivamente, pues nos dice que la fuerza que hace el motor es igual a la magnitud de la aceleración multiplicada por la masa total del tren. Cuantos más vagones tenga, mayor fuerza tendrá que tener la locomotora para acelerar.

(d) Suponemos ahora que el tren tiene 10 vagones y debemos hallar la magnitud de la tensión de la primera cuerda y de la quinta cuerda. Para hacer esto nos basamos en lo que hicimos en (b). Notemos en la ecuación (14) que la magnitud de la tensión de la primera cuerda es simplemente la magnitud de la aceleración multiplicada por la suma de las masas de los tres vagones. Así que si el tren tuviera 10 vagones, podemos inferir que la magnitud de la tensión de la primera cuerda sería la magnitud de la aceleración multiplicada por la suma de la masa de los diez vagones:

$$T_1 = a(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10}). \tag{18}$$

Esto mismo se puede escribir de forma mucho más compacta así:

$$T_1 = a\left(\sum_{i=1}^{i=10} m_i\right), \tag{19}$$

donde $i = 1$ e $i = 10$ indican que sumamos las masas desde la primera masa hasta la masa número 10.

Para determinar la magnitud de la tensión que la cuerda número 5 haría podemos volver a apoyarnos en lo hecho en (b). Notemos el siguiente patrón: la cuerda roja tiene tres vagones atrás y la magnitud de la tensión producida es igual a a por la suma de las masas de los tres vagones —ecuación (14)—; la cuerda naranja tiene dos vagones atrás y la magnitud de la tensión que produce es a por la suma de las masas de esos dos vagones —ecuación (11)—; la cuerda verde tiene un vagón atrás y la magnitud de la tensión que produce es a por la masa del vagón.

Sigamos dicho patrón. Si el tren tuviera diez vagones la primera cuerda tendría una tensión que dependería de la suma de las masas de los 10 vagones, como mostramos con la ecuación (19). La segunda cuerda tendría 9 vagones atrás, la tercera cuerda tendría 8 vagones atrás, la cuarta cuerda tendría 7 vagones atrás y la quinta cuerda tendría 6 vagones atrás. Así que la magnitud de la tensión que la quinta cuerda haría sería la suma de las masas de esos 6 vagones:

$$T_5 = a(m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10}). \tag{20}$$

Usando la notación explicada antes, esto se podría escribir así:

$$T_5 = a\left(\sum_{i=5}^{i=10} m_i\right). \tag{21}$$

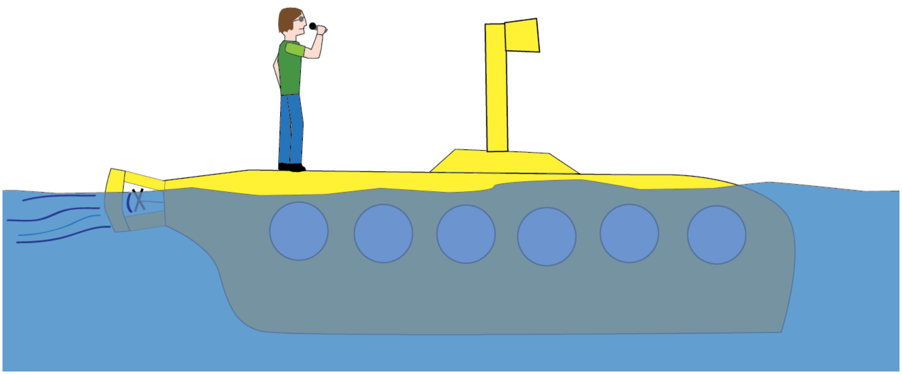
Problema 4.29.

Palabras clave: máxima aceleración de un objeto para que otro objeto que está encima no se resbale, velocidad después de un tiempo.

John tiene una masa de 70 kilogramos y está cantando en la cubierta de un submarino amarillo de 30 000 kilogramos de masa, como se ilustra en el dibujo. Suponga que el agua produce una fuerza de fricción dinámica de 2000 N de magnitud sobre el submarino (esta fuerza es completamente horizontal y se opone al movimiento del submarino). El agua también produce una fuerza de empuje que es completamente vertical. Además, suponga que entre los pies de John y la cubierta del submarino hay un coeficiente de fricción estático de 0.5.

(a) Calcule la máxima fuerza con la que los motores pueden impulsar al submarino para que John no se resbale sobre la cubierta.

(b) Si la rapidez del submarino es de 5 metros por segundo en cierto instante, ¿cuánto será la rapidez después de seis segundos si el submarino mantiene la aceleración máxima que permite que John no se resbale?



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) La masa de John es de 70 kilogramos, la del submarino es de 30 000 kilogramos. Además, el agua produce una fuerza de fricción dinámica de magnitud de 2000 N. El coeficiente de fricción estático entre la cubierta del submarino y los pies de John es de 0.5.

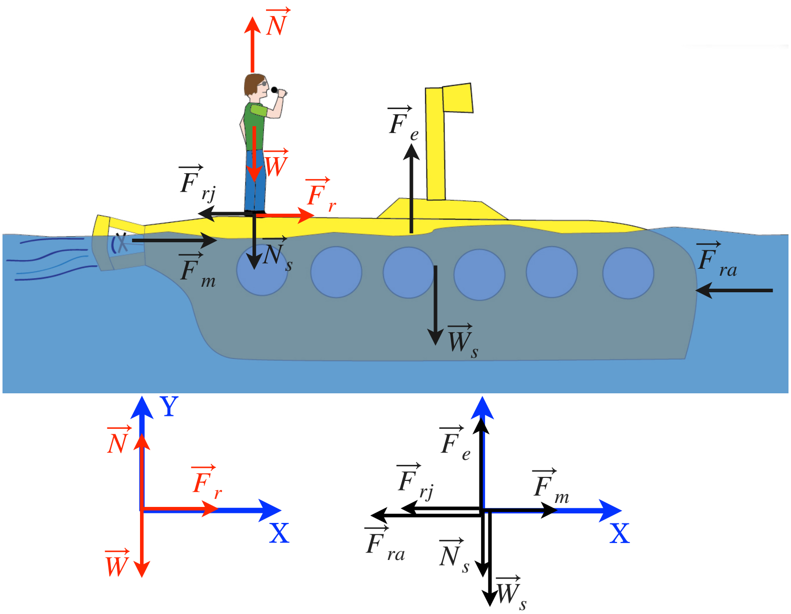
(b) En cierto instante el submarino tiene una rapidez de 5 metros por segundo.

¿Qué nos piden?

(a) Debemos calcular la máxima fuerza con la que los motores pueden impulsar al submarino sin que John se resbale sobre la cubierta.

(b) Debemos hallar la rapidez del submarino al cabo de seis segundos a partir del instante en que tenía rapidez de 5 metros por segundo.

(a) Comencemos, como siempre, por realizar el diagrama de fuerzas. Debemos hacer un diagrama de fuerzas para John y uno para el submarino, pues debemos analizar a John y al submarino. La fuerza de fricción estática que el submarino ejerce sobre John apunta en la dirección en que se mueve el submarino, pues cuando el submarino avanza, John tiende a deslizarse hacia la parte de atrás del mismo. Por lo tanto, la fricción debe ir hacia delante. Según la tercera ley de Newton, los pies de John le hacen una fuerza de fricción al submarino de dirección opuesta. Además, como el submarino ejerce una fuerza normal sobre John, según la tercera ley de Newton John debe ejercer una fuerza normal sobre el submarino con dirección contraria y con la misma magnitud. Sobre el submarino también tenemos una fuerza de los motores, una fuerza de fricción del agua, una fuerza de empuje que es la fuerza que el mar le hace al submarino (que sería similar a una fuerza normal que el mar le hace al submarino) y el peso. Teniendo en cuenta esto, el diagrama de fuerzas para John y para el submarino queda así:



Notemos que en negro se han pintado las fuerzas sobre el submarino y en rojo las fuerzas sobre John. $\vec{F}_m$ es la fuerza que los motores le transmiten al submarino y $\vec{F}_{ra}$ es la fuerza de fricción debido al agua que siente el submarino. Además, $\vec{F}_e$ es la fuerza de empuje que el mar le hace al submarino. $\vec{F}_r$ es la fuerza de fricción que el submarino le hace a John y apunta hacia adelante. $\vec{F}_{rj}$ es la fuerza de fricción que el submarino siente debido a los pies de John (es opuesta en dirección y de la misma magnitud que $\vec{F}_r$). $\vec{N}$ es la normal que el submarino ejerce sobre John mientras que $\vec{N}_s$ es la normal que John ejerce sobre el submarino (ambas normales tienen la misma magnitud pero dirección opuesta). Finalmente, $\vec{W}$ es el peso de John y $\vec{W}_s$ es el peso del submarino.

Nos piden hallar la máxima fuerza con la que los motores pueden impulsar al submarino para que John no se resbale sobre la cubierta. Para empezar, tratemos de entender la pregunta. Si los motores ejercen una fuerza muy grande, entonces el submarino va a acelerar mucho. Y si el submarino acelera mucho es más fácil que John se resbale. La pregunta por la máxima fuerza que pueden hacer los motores es entonces una pregunta por *la máxima aceleración que puede tener el submarino sin que John se resbale*.

Recordemos de la nota 4.22 que si un objeto A se queda en la misma posición de un objeto B, entonces A y B deben tener la misma aceleración. En este caso, para que John no se resbale sobre el submarino la aceleración de John y del submarino deben ser iguales.

En X hay tres fuerzas sobre el submarino; $\vec{F}_{ra}$ y $\vec{F}_{rj}$ (la fricción del agua y de John respectivamente), que apuntan en el sentido negativo de X, y $\vec{F}_m$ (la fuerza de los motores), que apunta en el sentido positivo. Por lo tanto, la ecuación de fuerzas del submarino en X es

$$F_m\hat{x} - F_{ra}\hat{x} - F_{rj}\hat{x} = m_a a_s \hat{x}, \tag{1}$$

donde hemos llamado a_s a la magnitud de la aceleración del submarino (la aceleración es positiva). Queremos encontrar F_m pero no conocemos a_s ni F_{rj} así que debemos buscar nuevas ecuaciones.

Planteemos la ecuación de fuerzas en X para John. En X hay sólo una fuerza sobre John, $\vec{F}_r$, la cual tiene signo positivo. Por lo tanto, la ecuación de fuerzas en X de John es

$$F_r\hat{x} = m_j a_j \hat{x}, \tag{2}$$

donde hemos llamado a_j a la magnitud de la aceleración de John. Para que John no se resbale el submarino y John deben tener la misma aceleración así que podemos escribir la ecuación (2) así:

$$F_r\hat{x} = m_j \underbrace{a_s}_{a_j} \hat{x}. \tag{3}$$

Aquí no sale en ninguna parte la fuerza de los motores, pero sí sale a_s que desconocíamos en la ecuación (1). Vamos entonces a tratar de encontrar a_s y F_r a partir de la ecuación (3), y luego podemos volver a usar la ecuación (1).

A nosotros nos interesa el caso en que el submarino tiene la *máxima* aceleración posible para que John no se resbale. Notemos que la única fuerza que le da a John aceleración es la fuerza de fricción estática F_r. Por lo tanto, la máxima aceleración posible para John requiere que sobre él actúe la máxima fuerza de fricción estática posible. Como ya sabemos, la máxima fuerza de fricción estática posible tiene magnitud $F_r = \mu_e N$. Si usamos el hecho de que $F_r = \mu_e N$ en la ecuación (3), obtenemos

$$\underbrace{\mu_e N}_{F_r} \hat{x} = m_j a_s \hat{x}. \tag{4}$$

De aquí podemos despejar a_s en términos de la normal, la masa y μ_e:

$$\frac{\mu_e N}{m_j} \hat{x} = a_s \hat{x}. \tag{5}$$

Esta ecuación nos permite escribir la aceleración en términos de una sola variable desconocida, que es N. A N la podemos encontrar con la ecuación de fuerzas en Y para John.

En Y hay dos fuerzas sobre John: el peso que tiene dirección negativa en Y y la fuerza normal que tiene dirección positiva en Y. Además, John no tiene aceleración en Y. Por lo tanto, su ecuación de fuerzas en Y es

$$-W\hat{y} + N\hat{y} = 0. \tag{6}$$

Usando el hecho de que $W = m_j g$ y aplicando la regla de oro, la ecuación (6) se puede escribir así:

$$N = m_j g. \tag{7}$$

Ahora que conocemos la magnitud de la normal podemos escribir la ecuación (5) así:

$$\frac{\mu_e \overbrace{m_j g}^{N}}{m_j} \hat{x} = \mu_e g \hat{x} = a_s \hat{x}, \tag{8}$$

donde hemos usado el hecho de que la masa de John se cancela porque está en el numerador y en el denominador. Ahora que tenemos la aceleración en término de variables conocidas, podemos usar este resultado en la ecuación (1):

$$F_m \hat{x} - F_{ra} \hat{x} - F_{rj} \hat{x} = m_s \overbrace{(\mu_e g \hat{x})}^{a_s \hat{x}}. \tag{9}$$

Ahora usemos algo que no hemos tenido en cuenta y es que F_{rj} (la magnitud de la fricción que John le hace al submarino) es igual a F_r (la magnitud de la fricción que el submarino le hace a John). Si usamos en la ecuación (9) que $F_r = F_{rj}$, que $F_r = \mu_e N$ y que $N = m_j g$, obtenemos

$$F_m\hat{x} - F_{ra}\hat{x} - \overbrace{\mu_e m_j g}^{F_{rj}}\hat{x} = m_s(\mu_e g\hat{x}). \tag{10}$$

Si aplicamos la regla de oro y dejamos al lado izquierdo sólo la fuerza del motor, obtenemos

$$F_m = m_s\mu_e g + F_{ra} + \mu_e m_j g. \tag{11}$$

Podemos simplificar un poco la ecuación si factorizamos $\mu_e g$:

$$F_m = \mu_e g(m_s + m_j) + F_{ra}. \tag{12}$$

Finalmente, si usamos los valores de las variables, podemos calcular la magnitud de la fuerza que buscamos:

$$F_m = \underbrace{(0.5)}_{\mu_e}(9.81\text{ m/s}^2)(\underbrace{30000\text{ kg}}_{m_s} + \underbrace{70\text{ kg}}_{m_j}) + \underbrace{2000\text{ N}}_{F_{ra}} = 149493.35\text{ N}. \tag{13}$$

Nota 4.24. Máxima aceleración de A para que B no se resbale

Suponga que un objeto B está sobre un objeto A. Cuando nos piden hallar la máxima aceleración que A puede tener de forma que B no se deslice, nos están pidiendo dos cosas:

(1) Que la aceleración de A y B sean la misma.

(2) Que la fuerza de fricción estática que A le hace a B sea máxima, así que $F_r = \mu_e N$.

(b) Para hallar la rapidez del submarino seis segundos después de que tenía rapidez de 5 metros por segundo, usemos la siguiente ecuación de cinemática:

$$\vec{v}_f = \vec{a}t + \vec{v}_i. \tag{14}$$

Si tenemos en cuenta que la rapidez inicial, la rapidez final y la aceleración tienen dirección positiva de X, podemos escribir esta misma ecuación así:

$$v_f\hat{x} = at\hat{x} + v_i\hat{x}. \tag{15}$$

El tiempo que nos interesa es de 6 segundos y la rapidez inicial es de 5 metros por segundo. Sólo debemos calcular la magnitud de la aceleración y para hacer eso podemos usar la ecuación (8). Si usamos esa ecuación en la ecuación (15), obtenemos

$$v_f \hat{x} = \underbrace{\mu_e g}_{a} t\hat{x} + v_i \hat{x}. \tag{16}$$

Apliquemos la regla de oro y reemplacemos los valores de las variables:

$$\vec{v}_f = \underbrace{(0.5)}_{\mu_e} \underbrace{(9.81 \text{ m/s}^2)}_{a} \underbrace{(6 \text{ s})}_{t} + \underbrace{5 \text{ m/s}}_{v_i} = 34.43 \text{ m/s}. \tag{17}$$

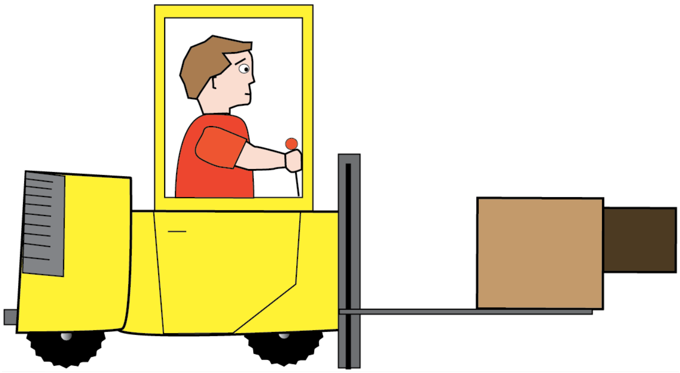
Problema 4.30.

Palabras clave: fricción requerida por una pared para evitar que un objeto caiga.

El pequeño camión del problema 4.25 ahora está cargando dos cajas. En cierto momento una de las cajas se desacomodó y quedó enfrente de la caja grande, como se ve en el dibujo. Suponga que la caja grande no se resbala sobre los soportes del camión (está fija) y que entre ambas cajas hay un coeficiente de fricción estático μ_e. Además, la caja pequeña tiene masa m.

(a) Escriba una expresión para la magnitud de la aceleración del camión para que la caja pequeña no se resbale, es decir, para que no se caiga sino que se mantenga en la posición en que se ve en el dibujo. Escriba esta expresión en términos de la masa de la caja pequeña y de μ_e.

(b) Demuestre usando lo hecho en (a) que de ninguna manera la masa pequeña puede subir.



Solución

¿Qué información nos dan?

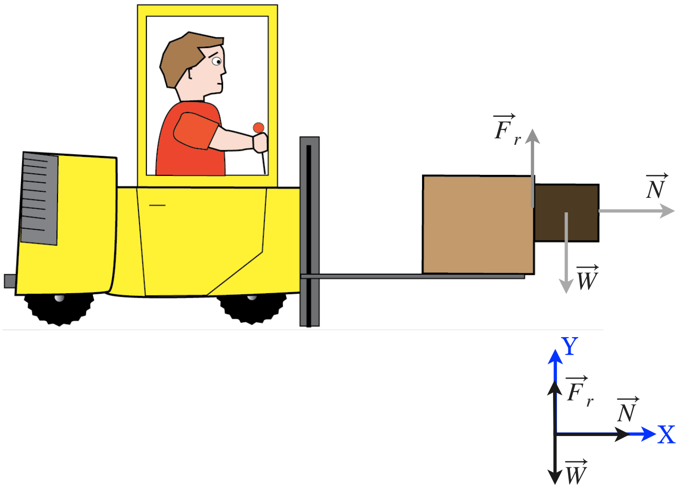
(a) y (b) Tenemos la masa m de la caja pequeña y el coeficiente de fricción estático μ_e entre ambas cajas. Además, la caja grande no se desliza.

¿Qué nos piden?

(a) Una expresión para la magnitud de la aceleración del camión en X para que la caja pequeña no se resbale (no se caiga).

(b) Debemos demostrar que la caja pequeña no puede subir.

(a) Comencemos por realizar el diagrama de fuerzas para la caja pequeña, que es la queremos analizar:



Sobre la caja pequeña actúan tres fuerzas; una fuerza de fricción estática que apunta hacia arriba (pues la caja tiende a caer), el peso que apunta hacia el piso, y la normal que la caja grande le hace a la caja pequeña (esa normal apunta hacia adelante).

Notemos que la caja grande le hace una fuerza normal a la caja pequeña que apunta en la dirección positiva de X. Esta es la única fuerza en X que actúa sobre la caja pequeña, así que esta fuerza es la responsable de que la caja pequeña acelere en la dirección positiva de X. Por otra parte, notemos que la fuerza de fricción estática trata de oponerse al movimiento en Y de la caja pequeña. Como es claro, la caja pequeña va a tender a caerse, por lo que la fricción se encarga de resistirse a esa caída y apuntará en el sentido positivo de Y. Esta fuerza de fricción debe ser lo suficientemente grande como para que la caja no se resbale.

Como la aceleración en X es positiva, la ecuación de fuerzas en X para la caja pequeña es

$$N\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{1}$$

Como en X la caja grande empuja a la pequeña, la caja pequeña se mueve con la misma aceleración en X que la que tiene la caja grande y la aceleración de la caja grande es la misma que la del camión (pues la caja grande está fija sobre el soporte del camión). Por lo tanto, en la ecuación (1) a_x es la magnitud de la aceleración del camión, de la caja grande y de la caja pequeña.

Con la ecuación (1) todavía no podemos decir de cuánto es la aceleración del camión para que la caja no se deslice porque no conocemos la normal. Para hallar una expresión para la normal, usemos la suma de fuerzas en Y.

En Y hay dos fuerzas: la fricción que apunta en el sentido positivo de Y y el peso que apunta en el sentido negativo de Y;

$$F_r\hat{y} - W\hat{y} = ma_y\hat{y}. \tag{2}$$

Recordemos que nos piden la aceleración del camión para que la caja pequeña no se resbale, así que su aceleración a_y debe ser cero:

$$F_r\hat{y} - W\hat{y} = 0. \tag{3}$$

Podemos despejar la magnitud de la fricción de la anterior ecuación si pasamos el peso al otro lado y usamos la regla de oro:

$$F_r = W. \tag{4}$$

En el punto preciso en que la caja está a punto de resbalar y caerse, la magnitud de la fuerza de fricción estática es máxima y cuando eso sucede la magnitud de tal fuerza es $F_r = \mu_e N$. Si usamos esto y el hecho de que $W = mg$, la ecuación (4) queda

$$\underbrace{\mu_e N}_{F_r} = \underbrace{mg}_{W}. \tag{5}$$

Con esta ecuación podemos despejar la magnitud de la fuerza normal dividiendo por μ_e:

$$N = \frac{mg}{\mu_e}. \tag{6}$$

Ahora podemos usar la magnitud de la normal hallada en la ecuación anterior en la ecuación (1):

$$\underbrace{\frac{mg}{\mu_e}}_{N}\hat{x} = ma_x\hat{x}. \tag{7}$$

Si aplicamos la regla de oro y cancelamos la masa en ambos lados obtenemos

$$\frac{g}{\mu_e} = a_x. \tag{8}$$

Esta es la (mínima) magnitud de la aceleración de la caja, que es la misma que la del camión, para que la masa pequeña no se deslice. Notemos que según esta ecuación, la aceleración a_x es inversamente proporcional al coeficiente de fricción estático μ_e. Esto tiene sentido porque muestra que cuanto mayor sea el coeficiente de fricción, menos aceleración es requerida para que la caja pequeña no se resbale. Y al revés: cuanto menor sea el coeficiente de fricción, mayor tiene que ser la aceleración del camión.

Esto es similar a lo que sucede en un carro. Si el carro acelera mucho, nuestra espalda se va a pegar fuertemente contra el respaldar de la silla y nuestra espalda sólo se deslizara si el coeficiente de fricción es pequeño. Si por el contrario la aceleración del carro es muy pequeña, entonces nuestra espalda no se va a pegar tan fuerte contra el respaldar y se va a deslizar a menos de que haya un coeficiente de fricción grande.

(b) Según la ecuación (2), la única forma de que la masa suba es si la fuerza de fricción es mayor que el peso, pues en ese caso $F_r\hat{y} - \vec{W}\hat{y}$ dará positivo. Esta condición se puede escribir así:

$$F_r\hat{y} > W\hat{y}. \tag{9}$$

Si usamos el hecho de que la magnitud de la fricción es $\mu_e N$ y que la magnitud del peso es mg, y si aplicamos la regla de oro, la desigualdad (9) queda así:

$$\underbrace{\mu_e N}_{F_r} > mg. \tag{10}$$

Finalmente, si usamos la ecuación (6) que nos dice la magnitud de la normal obtenemos

$$\underbrace{\mu_e\left(\frac{mg}{\mu_e}\right)}_{F_r} > mg. \tag{11}$$

De aquí todo se cancela y nos queda que uno es mayor que uno:

$$1 > 1. \tag{12}$$

¡Pero la ecuación (12) es una contradicción, pues 1 no puede ser mayor que 1! Esto implica que no hay forma alguna de que la caja pequeña pueda comenzar a subir y entonces la desigualdad (9) contiene un error, lo cual se intuye fácilmente; ¿qué fuerza haría que la caja comenzara a subir? La fricción no puede ganarle a las otras fuerzas que tratan de mover al objeto, la fricción sólo se puede oponer a estas fuerzas pero no superarlas.

Problema 4.31.

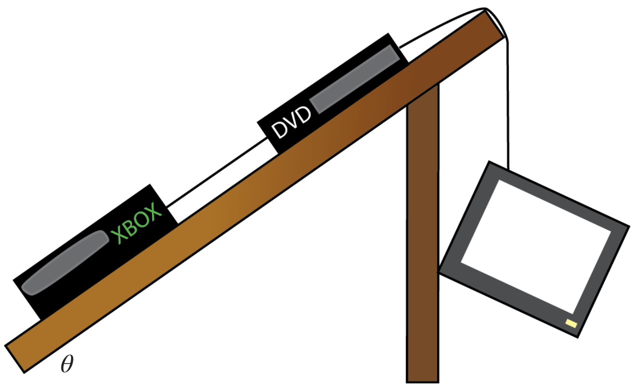
Palabras clave: objetos en plano inclinado unidos a un objeto cayendo verticalmente.

Después de un fuerte temblor dos de las patas de una mesa en la que estaba un televisor, un reproductor de DVD y un Xbox se quebraron, y por lo tanto la mesa quedó inclinada sobre el piso con un ángulo θ. Tanto el televisor como el Xbox quedaron sujetados al reproductor de DVD por cables, como se ve en el dibujo. El reproductor de DVD tiene masa m_d y el Xbox tiene masa m_B.

(a) Si no se considera ninguna fuerza de fricción, consideramos que los cables que sujetan al televisor y al Xbox actúan como cuerdas ideales y suponemos que el televisor cae con aceleración de la décima parte de la aceleración de la gravedad, escriba una expresión para la masa del televisor en términos de la masa del Xbox, del DVD, de θ y de g.

(b) Con base en la expresión del problema anterior, ¿cuál sería el ángulo θ para el que la masa del televisor sería máxima?

(c) Usando lo realizado en a), calcule la masa del televisor y la magnitud de la tensión de la cuerda que une al DVD con el Xbox suponiendo que θ es de 68.21 grados, que la masa del Xbox es de 5 kilogramos y que el DVD tiene masa de 2 kilogramos.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) y (b) Nos dicen que la masa del reproductor de DVD es m_d, la masa del Xbox es m_B, la inclinación de la mesa es θ y la aceleración del televisor al caer es de un décimo g. Los cables funcionan como cuerdas ideales y no hay fricción.

(c) y (d) θ es de 68.21 grados, la masa del Xbox es de 5 kilogramos y la del reproductor de DVD es de 2 kilogramos.

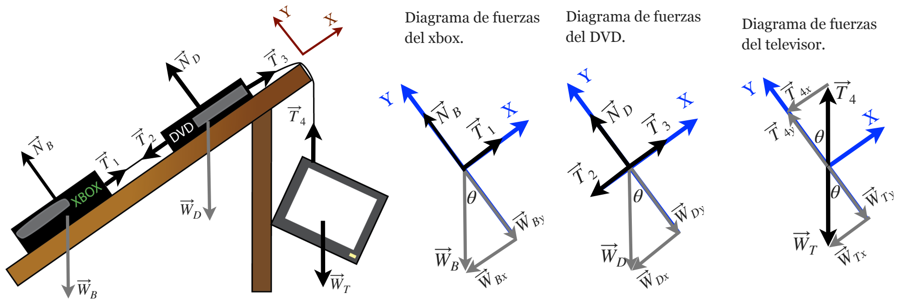
¿Qué nos piden?

(a) Escribir una expresión para la masa del televisor en término de la masa del Xbox, del reproductor de DVD, de θ y de g.

(b) Encontrar el ángulo para el que la masa del televisor sería máxima.

(c) Calcular la masa del televisor y la magnitud de la tensión del cable que conecta al Xbox con el DVD.

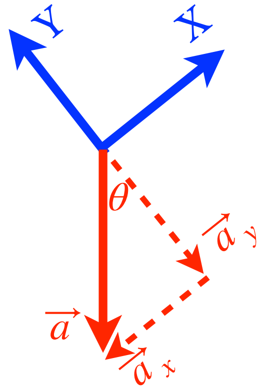
(a) Comencemos por realizar un diagrama de fuerzas de todos los cuerpos. Antes de continuar, recordemos que en casos de planos inclinados es mucho más sencillo usar un sistema de coordenadas inclinado, con el eje X paralelo a la mesa y el eje Y perpendicular a la mesa (nota 4.16). Si usamos un sistema así, el diagrama de fuerzas para los diferentes cuerpos queda de la siguiente manera:



Hemos descompuesto las fuerzas de los diferentes objetos usando un sistema de coordenadas inclinado. Las fuerzas con subíndice "B" se refieren al Xbox, las fuerzas con subíndice "D" al DVD y la única con subíndice "T" se refiere al televisor (hemos enumerado a las tensiones). Notemos que al usar este sistema debemos descomponer la tensión que actúa sobre el televisor y el peso del televisor.

Ahora que tenemos los diagramas de fuerzas podemos escribir las diferentes ecuaciones de fuerzas para los diferentes objetos. Empecemos precisamente con las ecuaciones del televisor ya que lo que queremos buscar es una expresión para su masa. Antes de continuar, tengamos presente que la aceleración del televisor tiene componentes X y Y según el sistema elegido, como se ilustra a continuación[12]:

[12] El lector podría creer que el televisor sólo tiene aceleración en Y porque cae de forma vertical, pero notemos que no estamos usando un sistema de coordenadas con el eje Y vertical. Es común encontrar físicos que usan un sistema de coordenadas inclinado para los objetos en el plano y uno vertical (no inclinado) para los objetos que no están en el plano, como el televisor. Al hacer eso no hay que descomponer las fuerzas sobre el objeto que no está en el plano, y la respuesta va a ser igual porque al final sólo nos interesan las magnitudes. Sin embargo, conceptualmente es más claro y consistente usar un solo sistema de coordenadas para todos los objetos de un mismo sistema físico (o de una misma situación física). Si usamos diferentes sistemas para diferentes objetos, estamos implícitamente aplicando transformaciones de coordenadas y eso requiere conceptos más avanzados que los aprendidos en primer semestre de universidad o en últimos años de bachillerato.



Según el sistema usado, la aceleración del televisor tiene componentes X y Y. Notemos que según este sistema, tanto la componente X como la componente Y son negativas.

En Y tenemos dos fuerzas sobre el televisor: la componente $\vec{T}_{4y}$ de la tensión, que es positiva, y la componente $\vec{W}_{Ty}$ del peso, que es negativa. Además, como explicamos en la figura previa, la aceleración en Y es negativa. Teniendo en cuenta esto, la ecuación de fuerzas en Y queda

$$-W_{Ty}\hat{y} + T_{4y}\hat{y} = -m_T a_{Ty}\hat{y}. \tag{1}$$

Ahora, en el diagrama de fuerzas podemos ver que W_{Ty} es igual a $W_T \cos\theta$ y T_{4y} es igual a $T_4 \cos\theta$. Además, de la figura anterior se aprecia que $a_{Ty} = a_T \cos\theta$. Teniendo en cuenta todo esto, la ecuación (1) queda:

$$-\underbrace{W_T \cos\theta}_{W_{Ty}}\hat{y} + \underbrace{T_4 \cos\theta}_{T_{4y}}\hat{y} = -m_T \underbrace{a_T \cos\theta}_{a_{Ty}}\hat{y}. \tag{2}$$

Notemos que $\cos\theta$ aparece en todos los términos, así que podemos simplificarlo. Además, usemos de una vez que W_T es igual a $m_T g$:

$$-m_T g\hat{y} + T_4\hat{y} = -m_T a_T\hat{y}. \tag{3}$$

Con esta ecuación no podríamos despejar m_T todavía porque no conocemos T_4 (la magnitud de la aceleración sí la conocemos, es 0.1g). Debemos entonces buscar otras ecuaciones.

El lector puede comprobar que si escribe las ecuaciones en X del televisor obtiene otra vez la ecuación (3), así que no habremos avanzado nada. Escribamos las ecuaciones del reproductor de DVD.

En X hay tres fuerzas sobre el DVD: $\vec{W}_{Dx}$, que es la componente X del peso, la tensión $\vec{T}_2$ y la tensión $\vec{T}_3$. Según nuestro sistema, $\vec{W}_{Dx}$ y $\vec{T}_2$ van en la dirección negativa del eje X, por lo que sus signos serán negativos. Por el contrario, $\vec{T}_3$ va en sentido opuesto. Además, según el sistema inclinado, el reproductor de DVD se mueve en el sentido positivo de X porque el DVD sube por la mesa mientras el televisor cae. Así que la aceleración debe tener dirección positiva. Por la segunda ley de Newton tenemos que

$$-T_2\hat{x} - \vec{W}_{Dx}\hat{x} + T_3\hat{x} = m_D a_{Dx}\hat{x}, \tag{4}$$

donde hemos llamado a_{Dx} a la aceleración del reproductor de DVD. Usando que $\vec{W}_{Dx} = W_D \sin\theta$ (esto se aprecia del diagrama de fuerzas) y que $W = mg$, esta ecuación queda

$$-T_2\hat{x} - \underbrace{m_D g \sin\theta}_{\vec{W}_{Dx}}\hat{x} + T_3\hat{x} = m_D a_{Dx}\hat{x}. \tag{5}$$

Aunque aquí nos aparecen nuevas variables desconocidas, no hemos usado el hecho de que los cables funcionan como cuerdas ideales. Como el cable que conecta el DVD al televisor es una cuerda ideal, la magnitud de la tensión que cada extremo del cable produce es igual. Esto quiere decir que T_4 es igual a T_3. Además, cuando tenemos cuerdas ideales la magnitud de la aceleración de cada extremo es igual. Por lo tanto, a_{Dx} es igual a a_T:

$$-T_2\hat{x} - m_D g \sin\theta\hat{x} + \underbrace{T_4}_{T_3}\hat{x} = m_D \underbrace{a_T}_{a_{Dx}}\hat{x}, \tag{6}$$

De aquí podríamos despejar T_4 pero el problema es que no conocemos T_2. Así que primero necesitamos encontrar una expresión para T_2 y después sí podemos usar ese resultado en la ecuación (7) para despejar T_4.

Para buscar una nueva ecuación que contenga a T_2 debemos usar la ecuación de fuerzas en X del Xbox. En X hay dos fuerzas sobre el Xbox: la componente X del peso $\vec{W}_{Bx}$ y la tensión $\vec{T}_1$. Según nuestro sistema, $\vec{W}_{Bx}$ va en la dirección negativa del eje X y $\vec{T}_1$ va en sentido positivo. Así como pasaba con la aceleración del reproductor DVD, la aceleración del Xbox es positiva según el sistema elegido. La ecuación de fuerzas en X para el DVD queda así:

$$-W_{Bx}\hat{x} + T_1\hat{x} = m_B a_{Bx}\hat{x}. \tag{7}$$

Del diagrama de fuerzas se puede notar que $\vec{W}_{Bx} = W_B \sin\theta$ y sabemos que $W_B = m_B g$:

$$-\underbrace{m_B g \sin\theta}_{W_{Bx}}\hat{x} + T_1\hat{x} = m_B a_{Bx}\hat{x}. \tag{8}$$

Como el cable que conecta el reproductor de DVD con el Xbox es una cuerda ideal, entonces podemos usar el hecho de que T_1 es igual a T_2. Además, la aceleración del Xbox tiene la misma magnitud que la aceleración del DVD (que es la misma que la del televisor) pues el Xbox está conectado con una cuerda ideal al DVD. Así que la ecuación (8) queda así:

$$-m_B g \sin\theta \hat{x} + \underbrace{T_2}_{T_1} \hat{x} = m_B \underbrace{a_T}_{a_{Bx}} \hat{x}. \tag{9}$$

Si aplicamos la regla de oro y despejamos T_2, obtenemos;

$$T_2 = m_B g \sin\theta + m_B a_T. \tag{10}$$

Ahora podemos usar este resultado en la ecuación (6):

$$-\underbrace{(m_B g \sin\theta + m_B a_T)}_{T_2} \hat{x} - m_D g \sin\theta \hat{x} + T_4 \hat{x} = m_D a_T \hat{x}. \tag{11}$$

Si aplicamos la regla de oro y dejamos T_4 sólo al lado izquierdo, obtenemos

$$T_4 = m_D a_T + m_B g \sin\theta + m_B a_T + m_D g \sin\theta. \tag{12}$$

A este resultado lo podemos simplificar más si factorizamos $g \sin\theta$ y a_T al lado derecho:

$$T_4 = g \sin\theta (m_B + m_D) + a_T (m_B + m_D). \tag{13}$$

Y esto lo podemos simplificar aún más si factorizamos $m_B + m_D$ al lado derecho:

$$T_4 = (m_B + m_D)(g \sin\theta + a_T). \tag{14}$$

Ahora que ya tenemos una expresión para T_4 podemos usar la ecuación (3) para despejar m_T:

$$-m_T g \hat{y} + \underbrace{(m_B + m_D)(g \sin\theta + a_T)}_{T_4} \hat{y} = -m_T a_T \hat{y}. \tag{15}$$

Si aplicamos la regla de oro y pasamos el término $-m_T g$ al otro lado, obtenemos

$$(m_B + m_D)(g \sin\theta + a_T) = -m_T a_T + m_T g. \tag{16}$$

Saquemos factor común de m_T:

$$(m_B + m_D)(g \sin\theta + a_T) = m_T (g - a_T). \tag{17}$$

Dividamos por $g - a_T$:

$$\frac{(m_B + m_D)(g \sin\theta + a_T)}{(g - a_T)} = m_T. \tag{18}$$

Sólo nos queda faltando usar el hecho de que a_T es un décimo de g, es decir, que $a_T = 0.1\ g$:

$$\frac{(m_B + m_D)(g\sin\theta + 0.1g)}{(g - 0.1\ \mathrm{g})} = m_T. \tag{19}$$

Si sacamos factor común de g arriba y abajo las g se cancelan y llegamos a

$$\frac{(m_B + m_D)g(\sin\theta + 0.1g)}{g(1 - 0.1)} = \frac{(m_B + m_D)(\sin\theta + 0.1g)}{0.9} = m_T. \tag{20}$$

(b) Según la ecuación (20), cuanto mayor sea $\sin\theta$, mayor será la masa m_T porque $\sin\theta$ está en el numerador. Y $\sin\theta$ es máximo cuando θ es noventa grados (en ese caso es igual a 1). Es decir, si θ fuera de noventa grados, la masa del televisor sería máxima. Pero, ¿por qué la masa del televisor sería máxima en ese caso?

Recordemos que el televisor cae con aceleración fija de 0.1 g. Si la pendiente de la mesa es mayor, es más difícil para el televisor halar el reproductor de DVD y el Xbox, pues los tiene que hacer subir por una pendiente mayor. Para que el televisor pueda hacer subir a los objetos sobre la mesa con esa aceleración y con una inclinación de 90 grados, el televisor tendría que tener la mayor masa posible. Por eso, cuando θ es noventa grados la masa del televisor tiene que ser máxima.

(c) Para calcular la masa del televisor sólo hace falta aplicar la ecuación (20) que obtuvimos en a) y reemplazar los valores de cada variable:

$$\frac{(\overbrace{5\ \mathrm{kg}}^{m_B} + \overbrace{2\ \mathrm{kg}}^{m_D})(\sin \overbrace{68.21^\circ}^{\theta} + 0.1)}{0.9} = 8\ \mathrm{kg}. \tag{21}$$

Para calcular la tensión sobre la cuerda que une al Xbox con el DVD podemos usar la ecuación (12):

$$(\underbrace{5\ \mathrm{kg}}_{m_B})(9.81\ \mathrm{m/s^2})(\sin \underbrace{68.21^\circ}_{\theta}) + (\underbrace{5\ \mathrm{kg}}_{m_B})(0.1)(9.81\ \mathrm{m/s^2}) = 50.45\ \mathrm{N}. \tag{22}$$

4.1 Notas del capítulo

Nota 4.1: Primera ley de Newton.

Un cuerpo que tiene velocidad constante va a seguir teniéndola a menos que una fuerza actúe sobre él.

Nota 4.2: La masa mide la resistencia para cambiar la velocidad.

La masa es una medida de la resistencia que ejerce un cuerpo para cambiar su velocidad (ya sea para cambiar la magnitud de la velocidad o la dirección). Cuanto mayor sea la masa, más difícil es cambiar la velocidad del objeto.

Nota 4.3: Tercera ley de Newton.

La fuerza $\vec{F}_a$ que le hace un objeto A a un objeto B es igual en magnitud, pero tiene sentido contrario, a la fuerza $\vec{F}_b$ de reacción que le hace el objeto B al objeto A: $\vec{F}_a = -\vec{F}_b$.

Nota 4.4: Segunda ley de Newton.

La segunda ley de Newton dice que la sumatoria total de fuerzas (la fuerza neta) sobre un cuerpo es igual a la masa por la aceleración del cuerpo: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$.

La segunda ley de Newton se puede escribir en términos de las componentes X y Y de las fuerzas y de la aceleración. Esta ley dice que la suma de fuerzas en X es igual a la masa por la aceleración X: $\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x$. Y dice que la suma de fuerzas en Y es igual a la masa por la aceleración en Y: $\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y$.

Nota 4.5: La aceleración de un objeto no depende de las fuerzas que hace el objeto.

La aceleración de un objeto sólo depende de las fuerzas que actúan sobre ese objeto. En nada afecta la aceleración del objeto las fuerzas que este hace.

Nota 4.6: Peso y masa.

El peso es la fuerza que la Tierra le hace a los objetos y es consecuencia de la atracción gravitacional. Esta fuerza apunta en dirección del centro de la Tierra y tiene magnitud de mg, donde m es la masa del objeto y g es la aceleración gravitacional.

La masa no es lo mismo que el peso. La masa es una medida de la resistencia a cambiar el estado de movimiento y es una cantidad escalar, no vectorial como el peso.

Nota 4.7: Fuerza normal.

Cuando un objeto está en contacto con una superficie, la superficie le ejerce una *fuerza normal* al objeto. Esta fuerza es perpendicular a la superficie y apunta desde esta hacia el objeto. Si un objeto A le hace una fuerza normal a un objeto B, entonces según la tercera ley de Newton el objeto B le hace una fuerza normal al objeto A. Ambas fuerzas normales tienen la misma magnitud pero direcciones opuestas.

Nota 4.8: Fuerza de fricción dinámica y estática.

Cuando un objeto está en contacto con una superficie se da una fuerza de fricción entre la superficie y el objeto. Si el objeto se está moviendo sobre la superficie entonces la fuerza de fricción es *dinámica* y apunta en la dirección contraria al movimiento del objeto sobre la superficie.

La magnitud de la fuerza de fricción dinámica es $F_r = \mu_d N$, donde N es la magnitud de la fuerza normal que le hace la superficie al objeto y μ_d es el coeficiente de fricción dinámico (que depende de los materiales).

Si el objeto está en reposo sobre la superficie y otras fuerzas intentan moverlo, aparece una fuerza de fricción estática que apunta en la dirección contraria a la dirección en la que las fuerzas intentan mover el objeto.

Esta fuerza es variable; cuanto mayor sea la magnitud de las fuerzas que intentan mover el objeto, mayor será la fuerza de fricción estática oponiéndose a las fuerzas. En el caso en que la fuerza de fricción estática es máxima (cuando las otras fuerzas ya están a punto de mover al objeto), la magnitud de la fuerza de fricción estática es

$$F_r = \mu_e N,$$

donde μ_e es el coeficiente de fricción estático (que depende de los materiales).

Nota 4.9: Todos los objetos tienen la misma aceleración gravitacional.

Si sobre dos objetos actúa sólo la fuerza de gravedad, y ambos están a la misma altura, los objetos tienen la misma aceleración, sin importar su masa.

Nota 4.10: Dependencia de g y mg de la altura sobre el nivel del mar.

Para los casos en que la altura a la que está un objeto sobre el nivel del mar no es muy grande (por ejemplo, no es más de 5000 metros), está justificado usar el hecho que la magnitud de la fuerza con la que la Tierra atrae al objeto es el peso mg. Además, la aceleración del objeto, si sólo actúa la atracción de la Tierra sobre él, es g, que tiene un valor aproximado de 9.81 m/s^2 y apunta hacia el centro de la Tierra.

En casos en los que la altura del objeto es muy considerable (como 30 000 metros), no debemos aproximar el peso a mg, sino que debemos usar

$$\left\|\vec{F}_g\right\| = G\frac{m_0 m_T}{(R_T + h)^2},$$

donde h es la altura del objeto con respecto al nivel del mar. De forma similar, para alturas muy grandes no debemos usar el hecho que la aceleración es g

sino que debemos calcular la aceleración usando

$$G\frac{m_T}{(R_T+h)^2}\hat{r}=\vec{a}.$$

En este libro, a menos que se diga lo contrario, siempre estará justificado usar el hecho que el peso es mg y la aceleración producida por la Tierra sobre un objeto es $\vec{g}$.

Nota 4.11: ¿Por qué nos vamos hacia adelante o hacia atrás cuando un vehículo frena o acelera?

Cuando estamos dentro de un vehículo y este frena, tendemos a movernos hacia adelante o nos movemos hacia adelante como si nos estuvieran empujando. Esto no sucede como resultado de una fuerza que nos empuje sino porque según la primera ley de Newton todo objeto tiende a seguir moviéndose con la velocidad que tiene. De forma similar, cuando el vehículo acelera, sentimos que nos vamos hacia atrás o, de hecho, nos vamos hacia atrás. De nuevo, no hay ninguna fuerza que nos empuje hacia atrás sino que, según la primera ley, tendemos a seguir con nuestra velocidad inicial que era menor a la que el vehículo tiene después.

Nota 4.12: Pasos para realizar un diagrama de fuerzas.

(1) Dibujamos las fuerzas que actúan sobre este objeto sin tener en cuenta las fuerzas que el objeto hace (esas no las dibujamos).

(2) Volvemos a dibujar esas fuerzas pero sobre el sistema de coordenadas que hemos elegido, y en ese mismo sistema las descomponemos.

Nota 4.13: Diferencias entre el peso y la fuerza normal.

Aunque muchas veces la magnitud del peso y de la normal son iguales (mg), el peso no es igual a la normal. Hay tres diferencias fundamentales:

- El peso siempre apunta hacia el centro de la Tierra mientras que la normal, salvo en casos muy especiales, no lo hace. De hecho, cuando tienen la misma magnitud la normal suele tener dirección contraria al peso.
- La fuerza normal resulta de la interacción de dos superficies y proviene de la fuerza electromagnética, mientras que el peso resulta de la interacción del objeto con la Tierra y proviene de la fuerza de gravedad.
- Un objeto A puede ejercer una fuerza normal sobre un objeto B, pero A nunca podrá ejercer su peso sobre B porque el peso de A sólo actúa sobre A.

Nota 4.14: Fuerza de tensión y cuerdas ideales.

La fuerza de tensión es la fuerza con la cual una cuerda hala a los objetos que la están halando de los extremos.

(1) Los dos extremos de una cuerda ideal generan una fuerza de tensión con la misma magnitud, y estas fuerzas tienen sentido contrario a la fuerza que se le hace a la cuerda en cada extremo.

(2) La longitud de las cuerdas ideales permanece constante.

(3) Cuando la cuerda está templada, ambos extremos de la cuerda y todos los puntos de la cuerda se mueven con la misma rapidez y con la misma magnitud de la aceleración.

(4) La masa de las cuerdas ideales se desprecia.

Nota 4.15: Movimiento de los objetos sujetados de los extremos de una cuerda ideal.

Si un objeto A está sujetado de uno de los extremos de una cuerda ideal y un objeto B está sujetado del otro extremo de la cuerda, y si la cuerda está templada, entonces la magnitud de la velocidad y la magnitud de la aceleración de ambos objetos es igual (esto es una consecuencia del punto 3 de la nota 4.14).

Nota 4.16: Sistema de coordenadas en planos inclinados.

Cuando tenemos un problema con objetos sobre planos inclinados es muy conveniente usar un sistema de coordenadas inclinado, que tenga uno de los ejes alineado con la superficie del plano inclinado.

Nota 4.17: Aceleración de un objeto cayendo en un plano inclinado sin fricción.

Un objeto que se desliza libremente sin fricción sobre un plano inclinado con pendiente θ cae con una aceleración de magnitud $g \sin\theta$.

Nota 4.18: Polea ideal.

Una polea ideal permite que una cuerda ideal que se pone sobre la polea mantenga las siguientes dos características:

(1) Los dos extremos de la cuerda se mueven con la misma rapidez o tienen la misma magnitud de la aceleración.

(2) La magnitud de la tensión que la cuerda ejerce es la misma en ambos extremos.

Nota 4.19: Sistema en equilibrio.

Cuando un objeto está en equilibrio, su aceleración es cero. Esto implica que todas las componentes de su aceleración son cero.

Nota 4.20: Dos objetos en una polea (máquina de Atwood).

Cuando tenemos problemas de poleas, debemos tener en cuenta que la magnitud de la aceleración de todos los objetos que están unidos a la cuerda que pasa por la polea es igual. Y además, si es una polea en la que un objeto sube y el otro baja (no todas son así), debemos tener en cuenta que la aceleración de un objeto tiene dirección contraria a la del otro, así que en la ecuación de fuerzas de un objeto debemos poner una aceleración con signo negativo y en la ecuación del otro objeto una aceleración positiva.

Nota 4.21: Dirección de la fuerza de fricción dinámica.

La dirección de la fuerza de fricción que una superficie le hace a un objeto sólo depende de la dirección en la que se mueve el objeto con respecto a la superficie. No importa cómo se mueve el objeto o cómo se mueve la superficie con respecto a otros objetos.

Nota 4.22: Un objeto A fijo sobre un objeto B cuando B acelera.

Si un objeto A se queda fijo sobre un objeto B, entonces la aceleración de A es igual a la aceleración de B. Si no fueran iguales, el objeto A se deslizaría hacia atrás o hacia adelante del objeto B.

Nota 4.23: Dos formas de encontrar la dirección de la fricción que A le hace a B.

Hay dos formas de determinar la dirección de la fuerza de fricción que un objeto A le hace a un objeto B:

(1) Si conocemos la dirección de la fuerza de fricción que B le hace a A, entonces según la tercera ley de Newton la fricción que A le hace a B tiene dirección opuesta.

(2) Como dice la nota 4.21, podemos analizar el movimiento de B con respecto a A; si B se mueve hacia adelante de A, entonces A le hace una fricción hacia atrás, y si B se mueve hacia atrás de A, entonces A le hace una fricción hacia adelante a B.

Esto mismo aplica para casos de fricción estática. En estos casos, lo que nos debemos preguntar es hacia dónde *tiende a moverse* B con respecto a la superficie de A.

Nota 4.24: Máxima aceleración de A para que B no se resbale.

Suponga que un objeto B está sobre un objeto A. Cuando nos piden hallar la máxima aceleración que A puede tener de forma que B no se deslice, nos están pidiendo dos cosas:

(1) Que la aceleración de A y B sean la misma.

(2) Que la fuerza de fricción estática que A le hace a B sea máxima, así que $F_r = \mu_e N$.

4.2 Problemas sin solucionar

1.

(a) Halle la razón entre la magnitud de la fuerza gravitacional que le hace la Tierra a la Luna sobre la magnitud de la fuerza gravitacional que le hace la Tierra al Sol. La masa del Sol es 1.989×10^{30} kg, la distancia media del Sol a la Tierra es 149597870700 m, la distancia media de la Luna a la Tierra es 384 400 000 m, y la masa de la Luna es 7.349×10^{22} kg. Además, recuerde que $G = 6.67384 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

(b) ¿Cuál es la aceleración que sentiría un astronauta al saltar en la superficie de la Luna si el diámetro de la Luna es 3 474 000 m? Compare esta aceleración con g.

Problemas similares: 4.3, 4.4.

2. Responda falso o verdadero y justifique su respuesta.

(a) Si un cuerpo se mueve con velocidad constante, no hay fuerzas actuando sobre él.

(b) Si un objeto A se mueve con una rapidez de 100 kilómetros por hora y un objeto B se mueve con una rapidez de 50 kilómetros por hora, las fuerzas sobre A tienen que ser mayores que las fuerzas sobre B.

(c) Si un cuerpo A le hace una fuerza $\vec{F}$ a un cuerpo B, entonces B le hace una fuerza $\vec{F}$ al cuerpo A.

(d) Incluso si no hay fuerzas actuando sobre un objeto, el objeto va a ir disminuyendo su rapidez con el paso del tiempo hasta que se detenga por completo.

(e) Si la fuerza que le hace un cuerpo A a un cuerpo B se duplica y si la masa de A se duplica, la aceleración de B permanece constante.

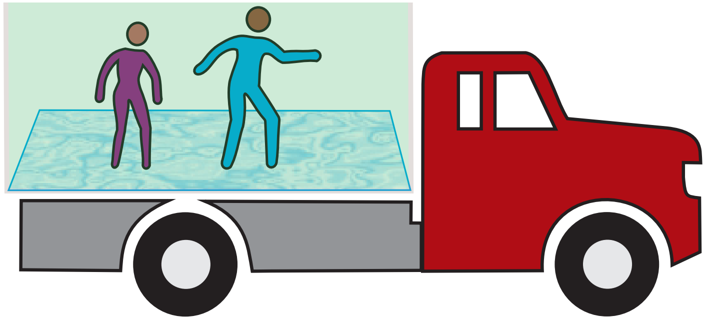
Problema similar: 4.2.

3. Helena y Hernán están dentro de un camión cuyo piso interior es de hielo. El camión frena de repente. Suponiendo que la fricción es cero,

(a) Explique si Helena y Hernán mantienen su velocidad, o si no.

(b) ¿Cambiaría en algo su respuesta en (a) si Helena y Hernán tuvieran masas diferentes?

(c) Suponga ahora que la fricción es pequeña pero no cero, y suponga que Helena tiene menos masa que Hernán. Explique quién tendrá mayor magnitud de la aceleración al frenar; ¿el camión, Hernán o Helena?



Problema similar: 4.5.

4. Dos personas en el Ártico están tratando de empujar una carreta. Suponga que entre la carreta y el hielo no hay fricción. La magnitud de la aceleración de la carreta es de 5 m/s^2, y la fuerza total ejercida por las personas es de 300 N en total.

(a) ¿Cuál es la masa de la carreta?

(b) Suponga ahora que a la carreta le ponen un bulto de 5 kilogramos, y que las personas siguen haciendo la misma fuerza, ¿cuál será la razón entre la nueva aceleración y la aceleración original?

Problema similar: 4.7.

5. Una persona reposa plácidamente sobre una silla cargando un libro en su estomago, como se indica en el dibujo.

(a) Realice un diagrama de fuerzas de la silla.

(b) Realice un diagrama de fuerzas de la persona. En ambos casos ignore la fricción.

(c) Si hubiera fricción entre persona y el libro, ¿hacia dónde apuntaría en el caso del libro?

Problemas similares: 4.3, 4.6, 4.8.

6. Considere la caja marcada "delicado" que está rodeada por seis cajas en un camión de trasteo (ver dibujo).

(a) Realice un diagrama de fuerzas sobre la caja (ignore la fricción).

(b) Si el camión acelera hacia el frente, ¿qué fuerzas normales sobre la caja serán mayores en magnitud que las otras?

(c) Escriba una expresión para la aceleración de la caja en términos de las fuerzas que contribuyen a esa aceleración (puede llamar a las fuerzas como quiera).

(c) Vuelva a responder (a) y (b) pero mientras el camión frena.

Problemas similares: 4.6, 4.8.

7. Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(a) La fuerza normal nunca es igual al peso.

(b) La fuerza de fricción estática puede variar.

(c) Si un objeto A está encima de un objeto B, debemos indicar el peso de A en el diagrama de fuerzas de B.

(c) En los diagramas de fuerza debemos indicar las fuerzas que hace el objeto.

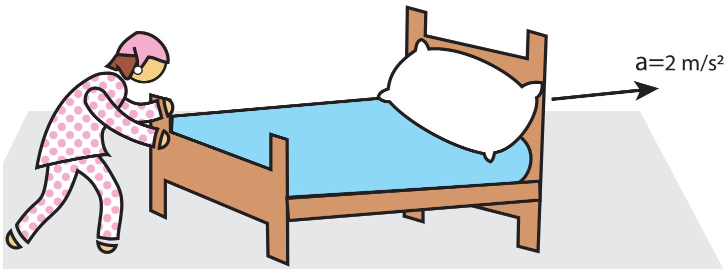
(e) Si un tren frena y una persona se cae hacia adelante, podemos decir que la fuerza neta sobre la persona apunta hacia adelante.

Problema similar: 4.10.

8. Carla empuja la cama con una fuerza de 300 N. La cama tiene una aceleración de 2 m/s^2, y un peso de 600 N.

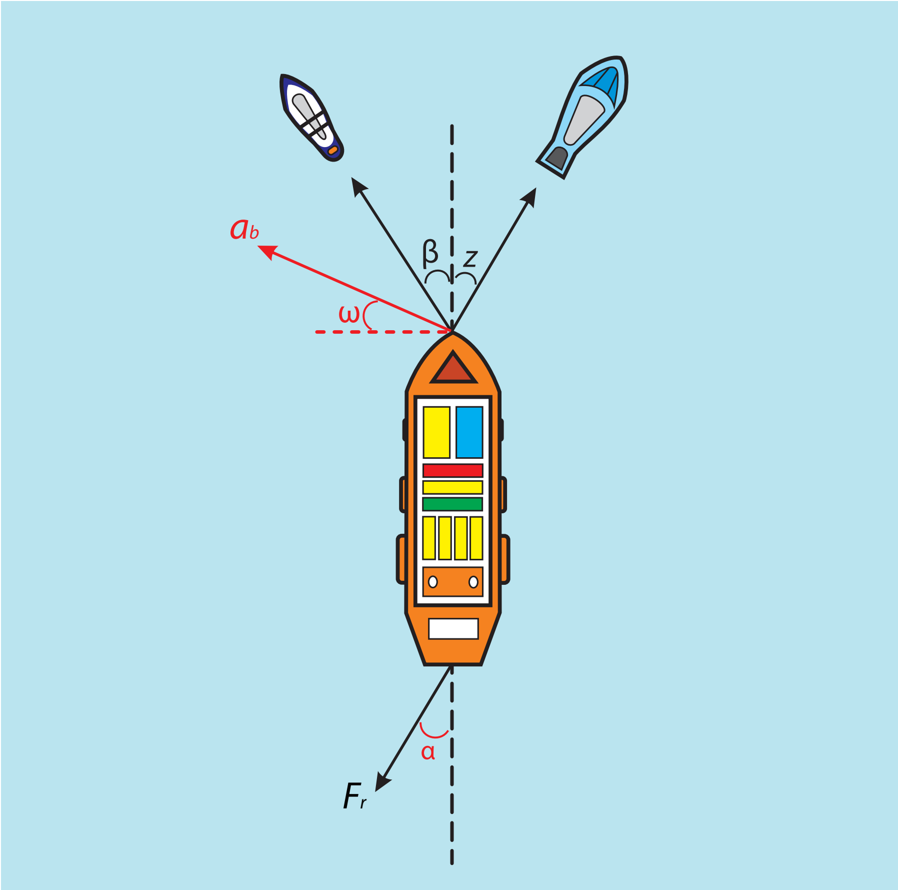
(a) ¿Cuál es el coeficiente de fricción dinámico entre la cama y el suelo?

(b) Si el coeficiente fuera el doble del hallado en (a), ¿cuál sería la nueva aceleración de la cama?



Problema similar: 4.9.

9. Dos pequeños barcos arrastran a un gran buque de masa m_b, como se ilustra en el dibujo. La fuerza de la corriente entre el agua y el buque es de magnitud F_r, y marca un ángulo α con respecto a la línea indicada en la figura. El buque se mueve con una aceleración de magnitud a_b, marcando un ángulo ω. Además, conocemos los ángulo β y z marcados por las cuerdas usadas que arrastran al buque. La tensión que ejerce la cuerda derecha (en el dibujo) es 1.2 veces la tensión que ejerce la cuerda izquierda. Con base en esto, escriba una expresión para la tensión ejercida por cada una de las cuerdas en términos de las variables conocidas.



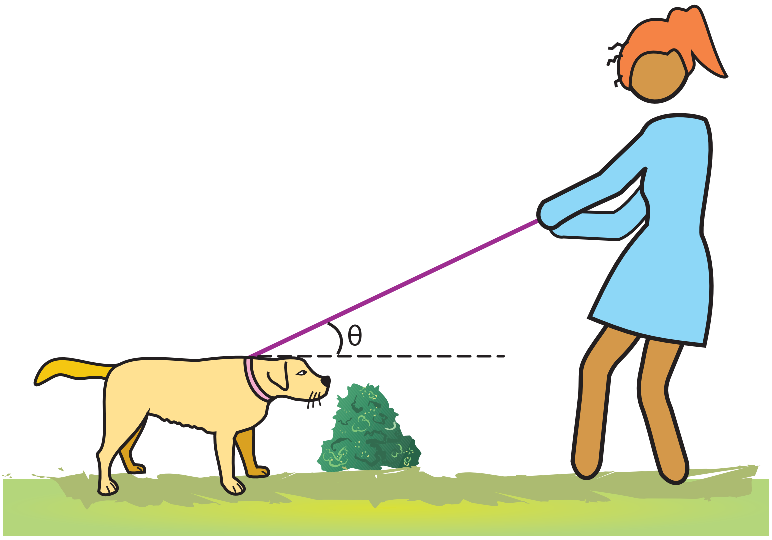
Problemas similares: 4.10, 4.12.

10. Carolina lleva a su perra, Dina, a caminar. En un momento Dina se quiere quedar oliendo un arbusto y no se deja mover a pesar de que Carolina la hala con fuerza con el lazo (el lazo es una cuerda ideal). El coeficiente de fricción estático entre el prado y las patas de Dina es μ_e, la fuerza con la que Carolina hala el lazo es de magnitud F_c, y la masa de Dina es m_d.

(a) ¿ Está relacionada la fuerza con la que el perro hala el collar con la fuerza de fricción sobre el perro? Explique.

(b) Escriba una expresión para el ángulo θ indicado en la figura, que se forma entre el lazo y el prado. Suponga que la fuerza de fricción estática es máxima. Para resolver esto, discuta si debe tener en cuenta en el diagrama de fuerzas de Dina la fuerza con la que Carolina hala el lazo.

(c) Suponga que Carolina logra arrastrar a Dina, con una aceleración a_d. Usando lo encontrado en (b), escriba una expresión para el coeficiente de fricción dinámico entre el prado y las patas de Dina.



Problemas similares: 4.11, 4.12, 4.18.

11. Considere el ascensor del siguiente dibujo, que funciona con una polea ideal y una cuerda ideal que está conectada a unas pesas, cada una de 200 kilos. Dos personas, una de 60 kilogramos y la otra de 75 kilogramos, entran en el ascensor que, vacío, tiene masa de 200 kilogramos.

(a) Si el ascensor sube con una aceleración de 6 m/s^2 con las dos personas, ¿cuántas pesas están conectadas al ascensor?

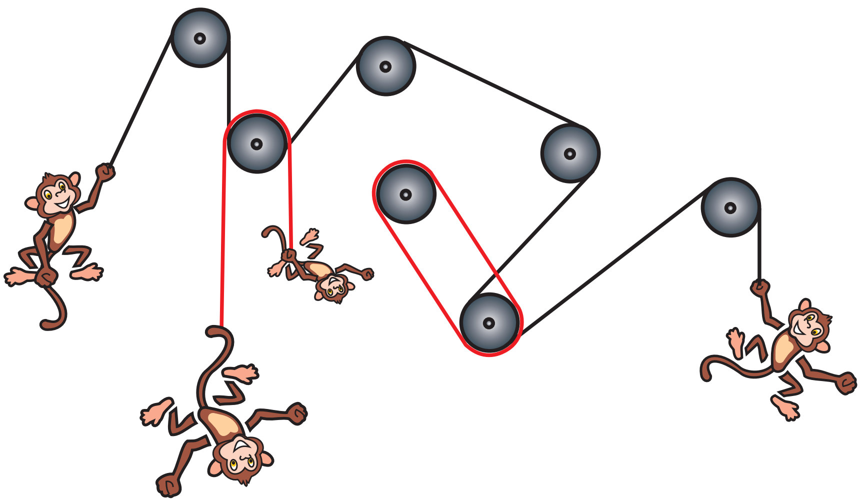
(b) ¿Cuál es la tensión realizada por la cuerda en ambos extremos?

(c) ¿Cuál es fuerza normal que siente cada una de las personas? ¿Es mayor o menor que el peso?

(c) Suponga que sólo la persona de 60 kilogramos se queda, y el ascensor baja con una aceleración de 4 m/s^2. ¿Cuál es la normal sobre la persona ahora?

Problema similar: 4.14.

12. En un zoológico se ha diseñado un sistema de poleas (ideales) para que los micos se diviertan, como se aprecia en el dibujo. Realice un diagrama de fuerzas para cada una de las poleas, indicando solamente las fuerzas de tensión sobre cada polea (sobre algunas poleas puede haber más de una cuerda, como se indica con el color).



Problemas similares: 4.14, 4.15.

13. Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(a) La aceleración gravitacional a alturas muy grandes o muy pequeñas es siempre g.

(b) Si la suma neta de fuerzas sobre el objeto es constante, el objeto está en equilibrio.

(c) La máxima fuerza de fricción estática depende de la normal que la superficie le hace al objeto.

(c) La aceleración del extremo de una cuerda ideal que está templada es igual a la aceleración en el otro extremo.

(e) Cuanto mayor sea la fuerza normal que A le hace a B, mayor es el peso de B.

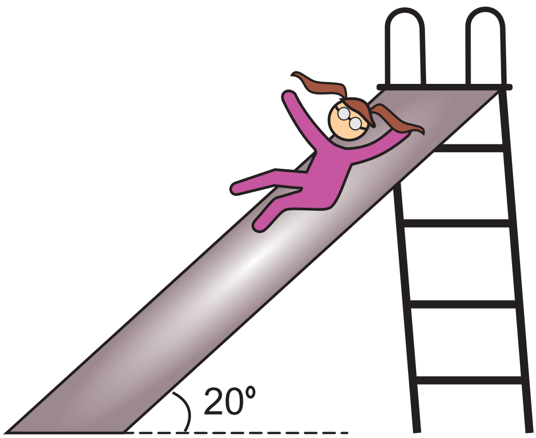
Problema similar: 4.17.

14. Juliana, de masa de 55 kilogramos, se desliza en un tobogán de pendiente de 20 grados, como se ve en la figura. El coeficiente de fricción dinámico es 0.2.

(a) ¿Cuál es la aceleración de Juliana?

(b) ¿Cuál es la velocidad de Juliana al cabo de dos segundos?

(c) Si la pendiente fuera el doble, ¿cuál sería la razón entre la nueva velocidad al cabo de dos segundos y la velocidad hallada en (a)?

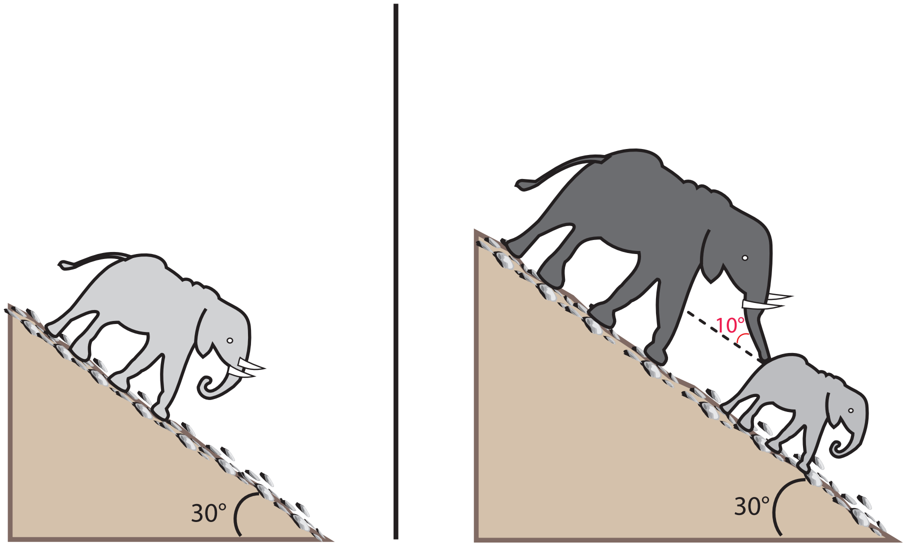


Problemas similares: 4.13, 4.22.

15. Un elefante se desliza por una ladera de tierra, como se ve en el dibujo. Suponga que el coeficiente de fricción dinámico entre las patas del elefante y la ladera es de 0.4, y suponga que el elefante tiene una masa de 800 kilogramos. Además, la inclinación de la ladera es de 30 grados.

(a) ¿En cuánto tiempo el elefante se desliza 10 metros?

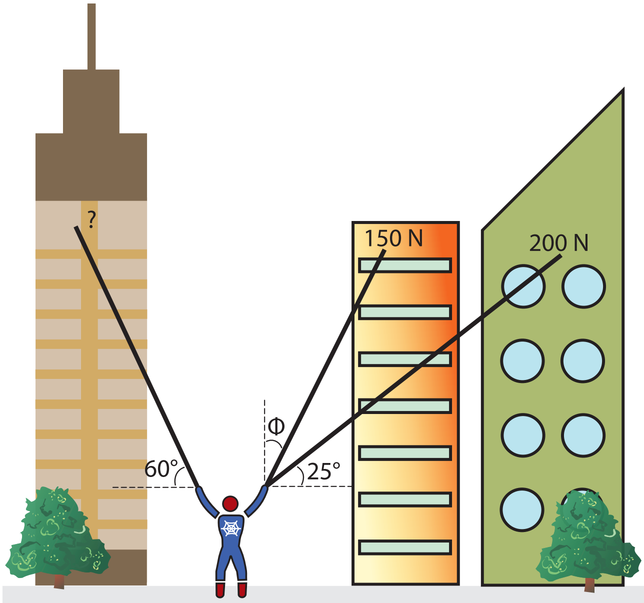
(b) Ahora suponga que el papá elefante usa su trompa para ayudar al hijo a deslizar con la mitad de la aceleración que tenía antes (ver la segunda figura). Entre la trompa y la ladera hay ángulo de 10 grados, como se ilustra en el dibujo. En este caso, ¿cuál es la fuerza con la que papá elefante hala al hijo?



(Figura 1) (Figura 2)

Problema similar: 4.22.

16. Un hombre loco que se cree el Hombre Araña, de masa de 65 kilogramos, yace en reposo colgado con tres cuerdas, como se aprecia en la figura. Teniendo en cuenta los ángulos, y las tensiones indicadas en el dibujo, halle el ángulo ϕ que no conoce. Tenga en cuenta que todas las cuerdas están sobre el mismo plano.

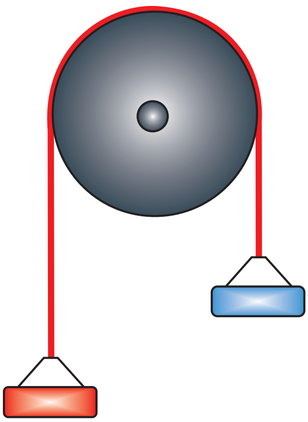


Problema similar: 4.16.

17. Considere una atracción en un parque de diversiones, en la que una polea ideal gigante conecta una cuerda, que sostiene a dos plataformas. El sistema parte desde el reposo, pero justo después la plataforma roja tiene una aceleración hacia abajo de la mitad de la gravedad.

(a) ¿Cuál es la razón entre la masa de la plataforma roja, y la masa de la plataforma azul?

(b) ¿Cuál es la velocidad de la plataforma roja cuando ha bajado 5 metros?

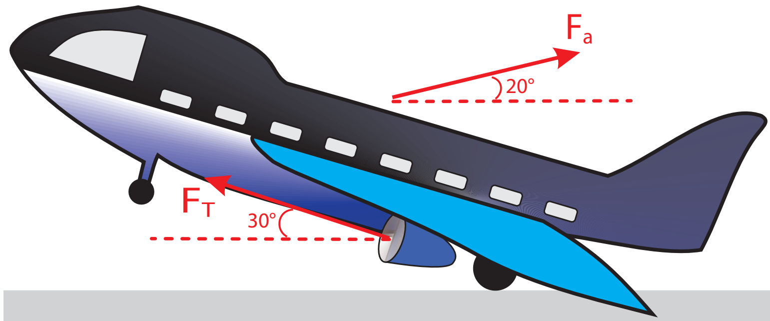


Problemas similares: 4.14, 4.19.

18. Un avión de carga está despegando, como se ve en el dibujo. La masa del avión es de 100 000 kilogramos. El aire ejerce una fuerza de sustentación de 40 000 N, marcando un ángulo de 20 grados con respecto a la pista. Suponga que la fuerza de la turbina marca un ángulo de 30 grados con respecto a la pista, como se ve en el dibujo.

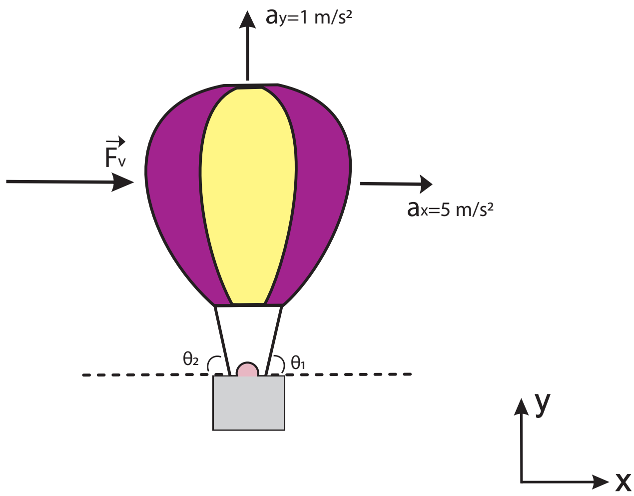
(a) ¿Cuál tiene que ser la magnitud de la mínima fuerza ejercida por la turbina para que el avión se comience a elevar?

(b) Si hay una falla técnica y la turbina disminuye la fuerza hallada en (a) por la mitad, y por lo tanto el avión no puede elevarse, ¿cuál es la fuerza normal entre la pista y el avión?



Problema similar: 4.21

19. Juan Pablo viaja en un globo, como se ilustra en el dibujo. La base cuadrada del globo es soportada por dos cuerdas, una en cada lado (tenga en cuenta que son cuerdas ideales). Además, hay una fuerza de viento de magnitud de 200 N en la dirección X indicada en el dibujo (esta fuerza actúa sobre el globo y la canasta por igual). El globo sube con aceleración vertical de magnitud 1 m/s^2, se mueve con aceleración de magnitud 5 m/s^2 en la dirección positiva de X, la masa de Juan Pablo es de 70 kilogramos y la masa de la base del globo es de 10 kilogramos. Además, el ángulo θ_1 es de 12 grados, y la tensión realizada por la cuerda derecha es de 5000 N. ¿Cuál es la tensión realizada por la otra cuerda?



Problemas similares: 4.12, 4.14, 4.16.

20. Responda falso o verdadero y justifique respuesta:

(a) Si dos objetos están sujetos de los extremos de la misma cuerda ideal, entonces podemos estar seguros de que sus rapideces son la misma.

(b) Si en un caso de poleas un objeto sube y el otro baja, entonces no es necesario indicar en la ecuación de fuerzas que la aceleración de un objeto tiene el signo opuesto de la aceleración del otro objeto.

(c) Suponga que un tanque de guerra está dentro de un avión militar, y el avión militar se mueve sobre la pista. ¿Es falso o verdadero que la dirección de la fricción entre el tanque de guerra y el piso del avión depende de la dirección en la que el avión se mueve con respecto a la pista?

(d) Suponga que un cuaderno está en una mesa, y al mover la mesa con cierta aceleración, el cuaderno se desliza un poco. ¿Es falso o verdadero que la aceleración de la mesa es diferente a la del cuaderno?

(e) La tercera ley de Newton nos permite hallar la fuerza de fricción que A le hace a B si conocemos la fricción que B le hace a A.

Problema similar: 4.26

21. Gabriela está sosteniendo un televisor de 10 kilogramos dentro de un camión de mudanza, como se aprecia en el dibujo. El televisor está apoyado sobre un escritorio de 50 kilogramos de masa, y entre el escritorio y el televisor

hay un coeficiente de fricción estático de 0.5 y de fricción dinámico de 0.3. Por su parte, entre el escritorio y el piso del camión hay un coeficiente de fricción estático de 0.4, y dinámico de 0.2. Primero, suponga que el camión acelera con aceleración de 10 m/s^2 y Gabriela hace la mínima fuerza necesaria para mantener el televisor sin que se resbale sobre el escritorio.

(a) Realice un diagrama de fuerzas para el televisor.

(b) ¿Qué podemos inferir de la fuerza de fricción estática si sabemos que Gabriela hace la mínima fuerza posible?

(c) Halle la fuerza ejercida por Gabriela.

(c) Realice un diagrama de fuerzas del televisor. Ahora suponga que el camión frena de repente, el televisor se desliza con una aceleración negativa de 4 m/s^2 (es decir, con una desaceleración), y el escritorio se desliza sobre el piso del camión con una aceleración desconocida.

(e) Encuentre la fuerza que Gabriela hace sobre el televisor para tratar de retenerlo.

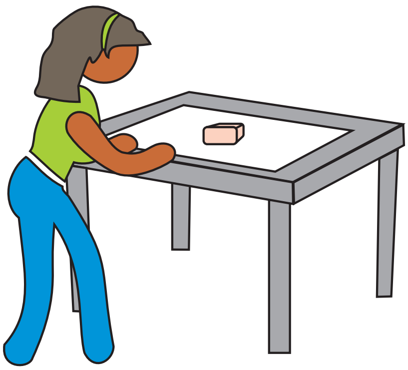
(f) Encuentre la aceleración del televisor.

Problemas similares: 4.24, 4.28.

22. Un borrador de tablero yace sobre una cartulina. El coeficiente de fricción estático entre la cartulina y el borrador es de 0.6, y el dinámico es de 0.2. Camilo hala la cartulina y esta adquiere una aceleración de magnitud de 4 m/s^2.

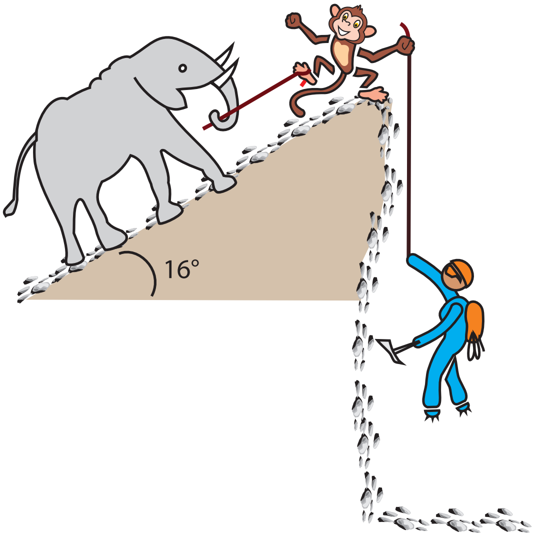
(a) ¿Se desliza el borrador?

(b) ¿Cuál es la dirección y la magnitud de la fuerza total ejercida sobre el borrador?



Problema similar: 4.25.

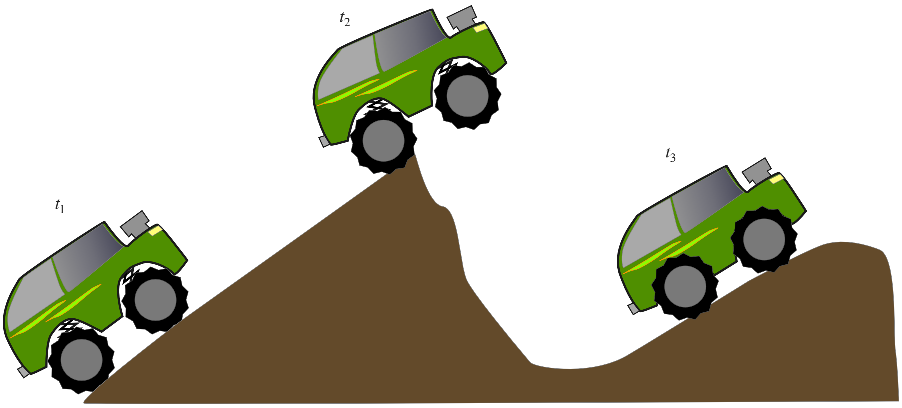
23. Teresa, de masa de 60 kilogramos, estuvo a punto de caer en un precipicio, pero por fortuna se pudo agarrar de una cuerda. La cuerda está sostenida por un mico, y el mico está sostenido de una de sus patas por otra cuerda sostenida por un elefante, como se aprecia en el dibujo (suponga que estas cuerdas son ideales). Note que la inclinación de la ladera donde están el mico y el elefante es de 16 grados. Entre el mico y el elefante le logran dar una aceleración vertical hacia arriba a Teresa de 2 m/s^2. La masa del elefante es de 800 kilogramos. Además, hay un coeficiente de fricción dinámico entre el mico y el piso, y entre el elefante y el piso, de 0.25. Suponga que en todo momento las cuerdas se mantienen templadas mientras Teresa sube. ¿Cuál es la masa del mico?



Problema similar: 4.31.

Capítulo 5

Energía



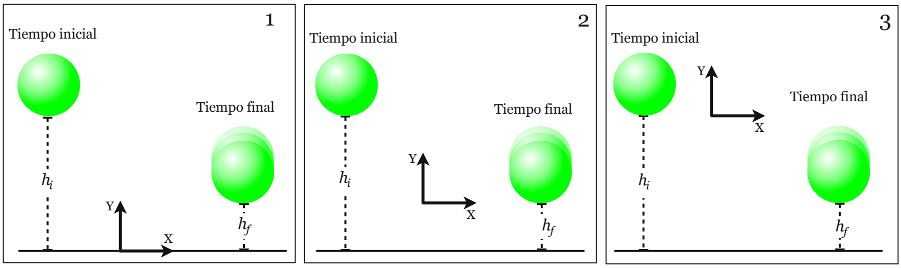
Problema (teórico) 5.1.

Palabras clave: energía potencial gravitacional, escogencia del sistema de referencia, cambio de energía potencial gravitacional.

(a) Explique de qué variables depende la energía potencial gravitacional y cuál es la ecuación de este tipo de energía cerca de la superficie de la Tierra.

(b) Una pelota de masa m se deja caer desde una altura inicial h_i. En el tiempo final la pelota está a una altura h_f (ver dibujo) con respecto al piso. Escriba, para los tres casos que se ilustran en el dibujo, la energía potencial gravitacional tanto para el tiempo inicial como para el tiempo final (note que en cada caso el sistema de coordenadas está en una altura diferente). Además, para cada caso, diga si la energía potencial gravitacional final es mayor o menor que la inicial.

(c) Teniendo en cuenta lo realizado en (b), escriba la diferencia entre la energía potencial gravitacional del tiempo final y la del tiempo inicial, para los tres casos. Compare los resultados.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) Es una pregunta teórica.

(b) Conocemos la masa m de la pelota, la altura h_i del tiempo inicial y la altura h_f del tiempo final. Además, en el dibujo nos muestran los sistemas de coordenadas que debemos usar.

(c) Conocemos lo mismo que en (b) y además debemos usar lo *hallado* en (b).

¿Qué nos piden?

(a) Responder la pregunta teórica.

(b) Para los tres casos de la figura, debemos hallar la energía potencial gravitacional para el tiempo inicial y para el tiempo final. Debemos decir, para los tres casos, si la energía potencial gravitacional final es mayor o menor que la inicial.

(c) Debemos decir la diferencia entre la energía potencial gravitacional final y la inicial para los tres casos y comparar los resultados.

(a) La energía potencial gravitacional depende de la *altura* del objeto con respecto a un nivel de referencia arbitrario (generalmente se escoge el piso), la masa del objeto y la constante gravitacional g. Aunque la altura casi siempre la medimos con referencia al piso, somos libres de escoger un sistema de referencia cualquiera para medir esta altura, así como ocurría en los problemas de lanzamiento vertical en los cuales éramos libres de escoger el sistema de coordenadas. La energía potencial gravitacional será representada en este libro como U_g. La fórmula matemática de esta energía cuando el objeto está cerca de la superficie de la Tierra[1] es

$$U_g = mgh, \tag{1}$$

donde h es la altura del objeto. El nombre *energía potencial gravitacional* indica que es una energía asociada con la gravedad (más adelante veremos que ese nombre indica que la Tierra tiene la capacidad de realizar un trabajo sobre los objetos que tienen energía potencial gravitacional).

La energía potencial gravitacional, como cualquier energía, es una cantidad escalar. Las unidades de la energía son joules.

(b) Vamos a dividir el análisis para los tres casos de la figura.

Caso 1

Como se aprecia de la figura del caso 1, en el tiempo inicial la altura del objeto con respecto al sistema de coordenadas es h_i. Por lo tanto, según la ecuación (1) su energía potencial gravitacional es

$$U_{gi} = mgh_i. \tag{2}$$

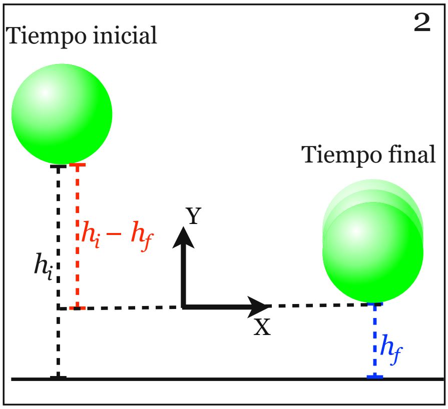
Notemos que el subíndice "i" que aparece en U_{gi} sirve para indicar que es el tiempo inicial. En el tiempo final la altura del objeto es h_f así que su energía potencial será

$$U_{gf} = mgh_f. \tag{3}$$

[1] Cuando el objeto no está cerca de la superficie de la Tierra no podemos usar el hecho de que el peso es mg, sino que debemos usar la magnitud de la fuerza de atracción gravitacional (nota 4.10). Esto modifica la ecuación (1). En este capítulo no nos vamos a preocupar por alturas en las que debemos modificar mg.

Caso 2

Notemos que en el segundo caso el sistema de coordenadas no está situado en el piso sino que está a una altura h_f. Por lo tanto, para este nuevo sistema, la altura de la pelota, tanto en el tiempo inicial como en el final, es una altura diferente, como se explica a continuación:



Notemos que la longitud de la línea roja, que es la altura inicial para el nuevo sistema de coordenadas, es igual a $h_i - h_f$. Además, la altura final de la pelota para el nuevo sistema de coordenadas es cero porque la pelota está en el origen de Y.

Como la altura en el tiempo inicial es $h_i - h_f$, entonces la energía potencial gravitacional de la pelota inicialmente es

$$U_{gi} = mg\underbrace{(h_i - h_f)}_{\substack{\text{La altura}\\ \text{inicial para}\\ \text{el caso 2}}}. \tag{4}$$

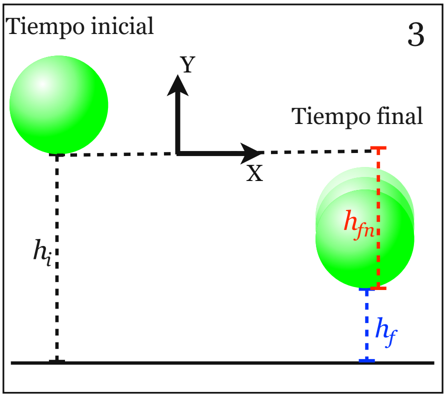
Notemos que esta no es la misma energía potencial gravitacional que en el caso 1, lo que sugiere que la energía potencial gravitacional es una *cantidad relativa* porque depende del sistema de coordenadas usado.

La altura final de la pelota es cero, como se explicó en la figura anterior, porque en ese tiempo la pelota está en el origen del eje Y según este nuevo sistema. Como la altura es cero, la energía potencial gravitacional es cero:

$$U_{gf} = 0. \tag{5}$$

Caso 3

Ahora vamos a usar otro sistema de coordenadas, esta vez uno que está a una altura h_i con respecto al piso. Como en el caso previo, la altura inicial y final de la pelota es distinta porque nuestra forma de medir esta altura cambia:



Para este sistema de coordenadas la altura inicial es cero porque la pelota está en el origen del eje Y. La nueva altura final la hemos llamado h_{fn}.

Como la altura de la pelota para el tiempo inicial es cero (la pelota está en el origen en Y), la energía potencial gravitacional para el tiempo inicial es cero:

$$U_{gi} = 0. \tag{6}$$

La posición final de la pelota está a una distancia de $h_i - h_f$ del origen (la línea roja de la figura anterior), y además, en el sentido negativo del eje Y. Es decir, la posición final de la pelota es $\vec{y}_i = -(h_i - h_f)\hat{y}$ ($h_i - h_f$ es la magnitud de la posición y el signo menos indica la dirección negativa de esta posición). Como la altura final del objeto es una "altura negativa", entonces debemos poner un signo menos:

$$h_{fn} = -(h_i - h_f). \tag{7}$$

Por lo tanto, la energía potencial gravitacional para el tiempo final del caso 3 es

$$U_{gf} = -mg(h_i - h_f). \tag{8}$$

Nota 5.1. Un sistema de coordenadas conveniente para la energía potencial gravitacional

Es conveniente usar, cuando sea posible, un sistema de coordenadas para el cual la energía potencial gravitacional inicial o final sea cero. Al hacer esto podemos simplificar un poco los cálculos.

Notemos que aunque la energía potencial gravitacional nos dio diferente de acuerdo a los diferentes sistemas de coordenadas usados, en todos los casos la energía potencial gravitacional del tiempo inicial fue mayor que la energía potencial gravitacional del tiempo final. Por ejemplo, en el caso 1 la energía potencial gravitacional inicial era mgh_i —ecuación (2)—, mientras que la final era $mg(h_i - h_f)$ —ecuación (3)—. Claramente, $mg(h_i - h_f)$ es menor que mgh_i. En el caso 2, es evidente que $mg(h_i - h_f)$ (la energía potencial gravitacional inicial) es mayor que cero (energía en el tiempo final), así que de nuevo, la energía potencial gravitacional para el tiempo final fue menor que la del tiempo inicial. Por último, la energía potencial gravitacional final del caso 3 era $-mg(h_i - h_f)$, que es un número negativo, mientras que la energía potencial gravitacional inicial era cero. De nuevo, esta energía es menor en el tiempo final que en el tiempo inicial.

Lo anterior revela algo fundamental de este tipo de energía: *si un objeto se acerca al centro de la Tierra su energía potencial gravitacional disminuye*. En el problema estudiado, la pelota en el tiempo final estaba más cerca del piso que la pelota en el tiempo inicial y, por lo tanto, más cerca del centro de la Tierra. Por ello su energía potencial gravitacional era menor a la que tenía en el tiempo inicial cuando estaba más alejada del piso (más alejada del centro de la Tierra). Eso lo comprobamos en todos los casos, sin importar el sistema de coordenadas usado[2].

(c) Ahora debemos realizar la resta entre la energía potencial gravitacional del tiempo final y la del tiempo inicial para los tres casos anteriores:

Caso 1

A la ecuación (3) le debemos restar la ecuación (2):

$$\Delta U_g = \underbrace{mgh_f}_{U_{gf}} - \underbrace{mgh_i}_{U_{gi}} = mg(h_f - h_i), \tag{9}$$

donde ΔU_g significa "cambio" o "diferencia" de la energía potencial ($\Delta U_g = U_{gf} - U_{gi}$).

Notemos que hemos sacado factor común del término mg.

Caso 2

Ahora, a la ecuación (5) le debemos restar la (4):

$$\Delta U_g = \underbrace{0}_{U_{gf}} - \underbrace{mg(h_i - h_f)}_{U_{gi}} = -mg(h_i - h_f). \tag{10}$$

[2] Alguien podría usar un sistema con el eje Y apuntando hacia abajo, y en ese caso sucedería lo contrario; cuanto más se acerque el objeto al centro de la Tierra, mayor será su energía. Sin embargo, lo normal en estos problemas es usar un sistema de coordenadas con Y apuntando hacia arriba.

Caso 3

En este caso, debemos restarle la ecuación (6) a la (8):

$$\Delta U_g = -mg(h_i - h_f) - 0 = -mg(h_i - h_f). \qquad (11)$$

Si el lector presta atención a los resultados obtenidos, notará que el cambio de energía potencial gravitacional es exactamente el mismo en los tres casos: $-mg(h_i - h_f)$ —en la ecuación (9) obtuvimos $mg(h_f - h_i)$ que es lo mismo que $-mg(h_i - h_f)$—. Por lo tanto, a pesar de que la energía potencial gravitacional depende del sistema de coordenadas usado, *el cambio de energía potencial gravitacional no depende del sistema de coordenadas usado*.

Además, notemos que $-mg(h_i - h_f)$ es una cantidad negativa porque el término "$h_i - h_f$" es un número positivo. Esto tiene sentido porque, como vimos en la sección (b), la energía potencial gravitacional final del objeto es menor que la inicial así que si restamos la final con la inicial debemos de obtener un número negativo. Como el cambio de energía potencial gravitacional nos dio negativo, podemos decir que entre el tiempo inicial y final la pelota pierde energía potencial gravitacional. Si en cambio la pelota hubiera subido (no caído), hubiera aumentado su energía potencial gravitacional y el cambio de su energía potencial gravitacional nos hubiera dado positivo.

Nota 5.2. Energía potencial gravitacional

La energía potencial gravitacional de un objeto está dada por mgh, donde h es la altura a la que está el objeto según nuestro sistema de coordenadas. Como la altura cambia de acuerdo al sistema elegido, la energía potencial gravitacional va a depender de la escogencia del sistema. Además, la altura puede ser negativa si la posición final del objeto apunta en la dirección negativa de Y.

El cambio de energía potencial gravitacional no depende del sistema de coordenadas y siempre está dado por $mg(h_f - h_i)$ que es lo mismo que $-mg(h_i - h_f)$.

Si un objeto se acerca al centro de la Tierra, su energía potencial gravitacional disminuye y, si se aleja, aumenta.

Problema (teórico) 5.2.

Palabras clave: energía cinética, cambio de energía cinética, energía mecánica, conservación de energía mecánica.

Consideremos la misma pelota de masa m del problema anterior, que en el tiempo inicial se suelta desde el reposo y desde una altura h_i y en el tiempo final está a una altura h_f.

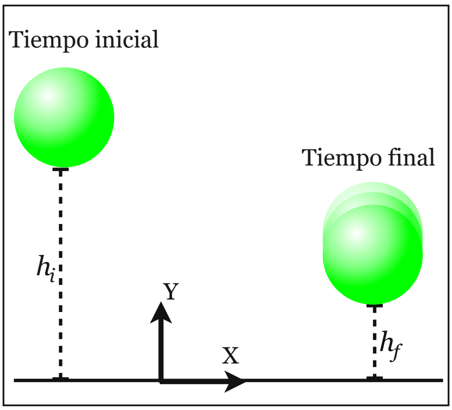
(a) Explique brevemente qué es la energía cinética.

(b) Escriba una expresión en términos de la masa, la altura y g para el cambio de energía cinética de la pelota entre el tiempo final e inicial usando ecuaciones de caída libre (use el sistema de coordenadas indicado en el dibujo).

(c) Compare este cambio de energía cinética con el cambio de energía potencial gravitacional hallado en la sección (c) del problema anterior y comente.

(d) Explique qué es la energía mecánica de un objeto.

(e) Escriba una expresión para la energía mecánica para el tiempo inicial y para el tiempo final, usando los resultados de este problema y del problema anterior. Explique cuándo esta energía se conserva.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) Es una pregunta teórica.

(b) Conocemos la masa m de la pelota, su altura h_i en el tiempo inicial y la altura h_f en el tiempo final. La pelota se suelta desde el reposo. El sistema de coordenadas que debemos usar se indica en el dibujo. Debemos usar ecuaciones de cinemática.

(c) Debemos usar el resultado (b) y el cambio de energía potencial gravitacional hallado en la sección (c) del problema anterior.

(d) y (e) Conocemos toda la información anterior y, además, los resultados hallados tanto en la sección (b) del presente problema como los de la sección (b) del problema anterior.

¿Qué nos piden?

(a) Responder la pregunta teórica.

(b) Escribir una expresión para la diferencia entre la energía cinética final y la inicial, en términos de la masa, las alturas y g.

(c) Comparar el resultado hallado en (b) con el cambio de energía potencial gravitacional hallado en la sección (c) del problema anterior.

(d) Explicar qué es la energía mecánica de un objeto.

(e) Dar una expresión para la energía mecánica inicial y final de la pelota. Decir cuándo esta energía se conserva.

(a) La energía cinética es una energía que se asocia con el movimiento de los objetos; cuando un objeto se mueve este tiene cierta energía cinética que depende de la rapidez con que se mueva. Más precisamente, esta energía depende de la masa y de la rapidez del objeto. El símbolo que vamos a usar para referirnos a esta energía es K (K se refiere a “cinética”, que en inglés se dice *kinetic*. Otro símbolo para esta energía es E_k). La fórmula de la energía cinética es

$$k = \frac{1}{2}mv^2. \tag{1}$$

En la fórmula anterior se ve claramente que esta energía es directamente proporcional a la masa m y es directamente proporcional a v^2, el cuadrado de la rapidez. Cuidado, v no es la velocidad sino la rapidez. La energía cinética, como cualquier energía, es una cantidad escalar. Recordemos que las unidades de la energía son joules.

Nota 5.3. Energía cinética

La energía cinética de un objeto es una energía que depende de la masa y de la rapidez al cuadrado del objeto:

$$k = \frac{1}{2}mv^2.$$

(b) La energía cinética de la pelota en el tiempo inicial es cero porque la rapidez inicial de la pelota es cero (nos dicen que es liberada desde el reposo);

$$k_i = 0, \tag{2}$$

donde el subíndice "i" sirve para indicar que esta es la energía cinética en el tiempo inicial.

Para escribir la energía cinética en el tiempo final debemos calcular la rapidez de la pelota (que no nos dan) cuando ha caído desde la posición inicial hasta la final y para ello necesitamos usar cinemática. Recordemos del capítulo "Caída libre, lanzamiento vertical y lanzamiento parabólico" que cuando un objeto cae libremente su rapidez final es

$$v_f = \sqrt{2g(h_i - h_f)}. \tag{3}$$

Ahora que conocemos la rapidez en el tiempo final en términos de las alturas y de g, podemos usar la ecuación (1) para hallar una expresión para la energía cinética final:

$$k_f = \frac{1}{2}m\Big(\underbrace{\sqrt{2g(h_i - h_f)}}_{v}\Big)^2. \tag{4}$$

La raíz cuadrada desaparece porque está elevada al cuadrado;

$$K_f = \frac{1}{2}m(2g(h_i - h_f)). \tag{5}$$

El 2 se cancela, así que al final obtenemos

$$K_f = mg(h_i - h_f). \tag{6}$$

Ahora que conocemos la energía cinética inicial y final en términos de variables conocidas, podemos calcular el cambio de energía cinética con

$$\Delta K = \underbrace{mg(h_i - h_f)}_{K_f} - \underbrace{0}_{K_i} = mg(h_i - h_f), \tag{7}$$

donde ΔK representa el cambio de energía cinética ($\Delta K = K_f - K_i$).

(c) Comparemos este resultado con el cambio de energía potencial gravitacional hallado en la sección (c) del problema anterior. El cambio de la energía potencial gravitacional había dado

$$\Delta U_g = -mg(h_i - h_f). \tag{8}$$

¡Este es exactamente el cambio de energía cinética hallado con la ecuación (7) pero con un signo negativo! Matemáticamente, podemos escribir la relación entre estos cambios de energía así:

$$-\Delta U_g = \Delta K. \tag{9}$$

En palabras, esta ecuación dice que el cambio de la energía potencial gravitacional es el mismo cambio, con un signo negativo, de la energía cinética[3]. El signo negativo indica que *la energía cinética que gana el objeto es exactamente igual a la energía potencial gravitacional que pierde*. Por ejemplo, si la energía potencial gravitacional aumentó $12J$ $(\Delta U_g = 12J)$, entonces la energía cinética disminuyó exactamente $12J$ $(\Delta K = -12J)$.

(d) La energía mecánica de un objeto es la suma de la energía potencial con la energía cinética. Como veremos más adelante, un objeto puede tener diferentes energías potenciales (gravitacional, elástica, eléctrica). La energía mecánica es la suma de las diferentes energías potenciales con la energía cinética. Por ahora, ya que sólo consideramos la energía potencial gravitacional, la energía mecánica es simplemente

$$E_m = K + U_g, \tag{10}$$

donde representamos esta energía con el símbolo E_m.

(e) En el tiempo inicial la pelota no tiene energía cinética porque su rapidez es cero —ecuación (2)—. La energía potencial gravitacional inicial es mgh_i porque la pelota se encuentra a una altura h_i con respecto al sistema de coordenadas usado. Por lo tanto, la energía mecánica inicial es

$$E_{mi} = K_i + U_{gi} = \underbrace{0}_{K_i} + \underbrace{mgh_i}_{U_{gi}} = mgh_i. \tag{11}$$

En el tiempo final la pelota tiene una energía cinética de $mg(h_i - h_f)$ como indica la ecuación (6). Además, la energía potencial gravitacional de la pelota en el tiempo final es mgh_f, porque la pelota se encuentra a una altura h_f según el sistema de coordenadas. Así, la energía mecánica final es

$$E_{mf} = K_f + U_{gf} = \underbrace{mg(h_i - h_f)}_{K_f} + \underbrace{mgh_f}_{U_{gf}} = mgh_i. \tag{12}$$

Notemos que el término mgh_f se canceló y sólo quedó mgh_i. Si comparamos esta energía mecánica con la del tiempo inicial —ecuación (11)—, nos damos

[3] Esto es sólo cierto cuando sobre el objeto actúan fuerzas conservativas, como en el caso de la pelota que cae libremente. Más adelante se explicarán qué son estas fuerzas.

cuenta de que son iguales. Esto quiere decir que *la energía mecánica de la pelota se conservó entre ambos tiempos*.

Cuidado: La energía cinética cambió, como ya habíamos explicado en la sección (c), porque en el tiempo inicial la pelota no tenía energía cinética y en el final sí. Lo que no cambió fue la energía mecánica, que es la suma de la energía cinética con la potencial.

Que la energía mecánica no haya cambiado mientras la pelota caía no es coincidencia sino que es algo que todos los objetos que están en caída libre, en un lanzamiento vertical o en un movimiento parabólico, cumplen (más adelante veremos por qué). Los objetos que están en caída libre, lanzamiento vertical o movimiento parabólico tienen en común que la única fuerza que actúa sobre ellos es el peso. Por lo tanto, podemos decir que *la energía mecánica se conserva siempre que la única fuerza que actúe sobre un objeto sea el peso*.

Nota 5.4. Energía mecánica

La energía mecánica de un objeto es la suma de la energía potencial con la energía cinética. En el caso en el que la única energía potencial es la gravitacional, la energía mecánica se puede escribir así: $E_m = K + U_g$.

Cuando sobre un objeto la única fuerza que actúa es el peso, la energía mecánica del objeto se conserva; $E_{m_1} = E_{m_2}$. Esto quiere decir que la suma de la energía cinética con la potencial gravitacional del objeto en un tiempo t_1 es igual a la suma de ambas energías en otro tiempo t_2: $K_1 + U_{g1} = K_2 + U_{g2}$, donde el subíndice "1" se refiere al tiempo t_1 y el subíndice "2" al tiempo t_2.

Problema de repaso 5.3.

Palabras clave: energía cinética, cambio de energía cinética, energía mecánica, conservación de la energía mecánica.

Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta:

(1) La energía mecánica siempre se conserva.

(2) Si la energía mecánica de un objeto se conserva, entonces la energía cinética del objeto no aumenta.

(3) El cambio de energía potencial gravitacional no depende del sistema de coordenadas elegido.

(4) Si la energía potencial gravitacional de un objeto aumenta (y esta es la única energía potencial del objeto) y la energía cinética de ese objeto también aumenta, entonces la energía mecánica no se conserva.

(5) Si sobre un objeto sólo actúa el peso, y nos dicen que la energía potencial aumenta, entonces la energía cinética del objeto disminuye.

Solución

(1) Falso. Como dice la nota 5.4, la energía mecánica se conserva si sobre el objeto actúa sólo el peso, pero no dice que esta energía *siempre* se conserve (como veremos después, hay muchas fuerzas que no conservan esta energía).

(2) Falso. Si la energía mecánica se conserva, entonces sabemos que la suma de la energía potencial con la cinética es constante, pero eso no quiere decir que la cinética no puede aumentar (la cinética puede aumentar y la potencial disminuir, por ejemplo).

(3) Verdadero. Como vimos en el problema 5.1, el cambio de energía potencial gravitacional no depende del sistema elegido.

(4) Verdadero. Si la energía cinética y la potencial gravitacional aumentan y si esa es la única energía potencial, entonces la suma de ambas energías tiene que aumentar. Y como la suma de ambas energías es igual a la energía mecánica, entonces esto quiere decir que la energía mecánica tiene que aumentar y entonces no se conserva.

(5) Verdadero. Si sobre el objeto sólo actúa el peso, la energía mecánica se conserva, es decir, la suma de la energía potencial con la energía cinética permanece constante. Si la energía potencial gravitacional aumenta, la única forma de que la suma de esta energía con la cinética se conserve es si la cinética disminuye.

Problema 5.4.

Palabras clave: conservación de energía mecánica, movimiento parábolico, altura máxima, energía cinética.

Caterine Ibargüen, con una masa de 70 kg, realiza un salto como se muestra en el dibujo. Suponga que su rapidez inicial al comenzar el salto es de 10 m/s y suponga que el salto describe un movimiento parabólico.

(a) Si la rapidez en el punto de altura máxima es de 8 m/s, ¿cuál es la altura máxima?

(b) ¿Cuál es la energía cinética de Caterine cuando ha pasado medio segundo? (Para responder esta pregunta debe usar ecuaciones de cinemática).

Solución

¿Qué información nos dan?

(a) y (b) Caterine Ibargüen tiene masa de 70 kg, su rapidez inicial al comenzar el salto es de 10 m/s y el salto describe un movimiento parabólico. La rapidez en el punto de altura máxima es de 8 m/s. Debemos usar ecuaciones de cinemática para el punto (b).

¿Qué nos piden?

(a) Hallar la altura máxima.

(b) Encontrar la energía cinética cuando ha pasado medio segundo.

(a) Primero, démonos cuenta de que la única fuerza que actúa sobre Caterine es el peso (si no fuera así no seguiría un movimiento parabólico). Por lo tanto, la energía mecánica de Caterine se conserva (nota 5.3). Para hallar la altura máxima no podemos usar ecuaciones de movimiento parabólico porque no conocemos el ángulo inicial, así que no conocemos la rapidez en Y. Pero como la energía mecánica depende de la energía potencial, y esta última depende de la altura, podemos hallar la altura usando el hecho que la energía mecánica se conserva.

Notemos que nos dicen la rapidez inicial del salto y la rapidez en el punto de altura máxima. Así que podemos hallar la energía cinética inicial y la energía cinética en el punto de altura máxima. Además, como somos libres de elegir el sistema de coordenadas, vamos a poner uno cuyo origen esté en el piso para que la altura inicial de Caterine sea cero:

Como conocemos la energía cinética inicial y la potencial gravitacional inicial (que es cero porque la altura inicial es cero), conocemos la energía mecánica inicial:

$$E_{mi} = \frac{1}{2}mv_i^2. \tag{1}$$

En el punto de altura máxima también conocemos la energía cinética porque conocemos la rapidez en ese punto, pero no conocemos la altura (eso es lo que debemos hallar). Por lo tanto, la energía mecánica en ese punto es

$$E_{mf} = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh, \tag{2}$$

donde lo único que no conocemos es h. Como la energía mecánica se conserva, podemos igualar la energía mecánica inicial con la final (nota 5.3):

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_i^2}_{E_{mi}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_f^2 + mgh}_{E_{mf}}. \tag{3}$$

De esta ecuación podemos despejar h. Primero, dividamos por la masa en todas partes:

$$\frac{1}{2}v_i^2 = \frac{1}{2}v_f^2 + gh. \tag{4}$$

Ahora pasemos el término con la rapidez final al otro lado y dividamos por g:

$$\frac{1}{2g}v_i^2 - \frac{1}{2g}v_f^2 = h. \tag{5}$$

Finalmente, podemos sacar factor común de $1/2g$:

$$\frac{1}{2g}(v_i^2 - v_f^2) = h. \tag{6}$$

Si reemplazamos los valores numéricos, esto da

$$\frac{1}{2(9.81\ \mathrm{m/s^2})}((10\ \mathrm{m/s})^2 - (8\ \mathrm{m/s})^2) = 1.83\ \mathrm{m} = h. \tag{7}$$

Es útil anotar que en los problemas de movimiento parabólico es necesario conocer el ángulo inicial del trayecto o la velocidad inicial en Y para determinar la altura del objeto. Al usar la conservación de la energía mecánica no es necesario conocer dicho ángulo, pero necesitamos conocer la *rapidez total* (no en Y) en dos puntos y una de las dos alturas.

(b) Para hallar la energía cinética de Caterine cuando ha pasado medio segundo debemos averiguar la rapidez de Caterine cuando ha pasado este tiempo. Pero con ecuaciones de conservación de energía no podemos hallar esa rapidez porque en estas ecuaciones no aparece el tiempo. Por lo tanto, necesitamos usar ecuaciones de cinemática.

Empecemos por anotar que conocemos la rapidez en X porque conocemos la rapidez de Caterine en su punto de altura máxima y en este punto la única rapidez que hay es la rapidez en X. Además, la rapidez en X siempre es la misma en un movimiento parabólico así que también sabemos la rapidez X después de medio segundo. Lo único que nos falta para hallar la rapidez total en 0.5 segundos es encontrar la rapidez en Y en ese tiempo.

Recordemos que la rapidez en Y en un movimiento parabólico está dada por

$$v_y = -gt + v_{iy}, \tag{8}$$

donde v_{iy} es la rapidez inicial en Y. Para poder usar esta ecuación necesitamos encontrar precisamente v_{iy}. A esta rapidez inicial en Y la podemos hallar con la altura máxima usando la siguiente ecuación[4]:

$$y_{\text{máx}} = y_i + \frac{v_{iy}^2}{2g}. \tag{9}$$

[4] En el capítulo 3 esta ecuación fue presentada usando h_m en vez de $y_{\text{máx}}$ y h_i en vez de y_i.

Como la altura inicial es cero y la altura máxima es h —que hallamos con la ecuación (7)—, esta ecuación queda

$$h = \frac{v_{iy}^2}{2g}. \tag{10}$$

Finalmente, si multiplicamos por $2g$ y sacamos raíz cuadrada, obtenemos la rapidez inicial en Y:

$$\sqrt{2gh} = v_{iy}. \tag{11}$$

Si usamos esto en la ecuación (8), obtenemos

$$v_y = -gt + \underbrace{\sqrt{2gh}}_{v_{iy}}. \tag{12}$$

Si reemplazamos los valores conocidos, esto nos da

$$v_y = -(9.81\ \mathrm{m/s^2})\underbrace{(0.5\ \mathrm{s})}_{t} + \sqrt{2(9.81\ \mathrm{m/s^2})\underbrace{(1.83\ \mathrm{m})}_{h}} = 1.09\ \mathrm{m/s}. \tag{13}$$

Ahora que conocemos la rapidez en Y y en X podemos calcular la rapidez total. Esta rapidez se puede calcular usando el teorema de Pitágoras:

$$v_t = \sqrt{(\underbrace{8\ \mathrm{m/s}}_{v_x})^2 + (\underbrace{1.09\ \mathrm{m/s}}_{v_y})^2} = 8.07\ \mathrm{m/s}. \tag{14}$$

Finalmente, la energía cinética después de medio segundo será

$$K_{(0.5\ \mathrm{s})} = \frac{1}{2}(\underbrace{70\ \mathrm{kg}}_{m})(\underbrace{8.07\ \mathrm{m/s}}_{v_t})^2 = 2279.37\ \mathrm{J}. \tag{15}$$

Problema 5.5.

Palabras clave: energía mecánica, altura inicial, rapidez en cierta altura, uso de distintos sistemas de coordenadas.

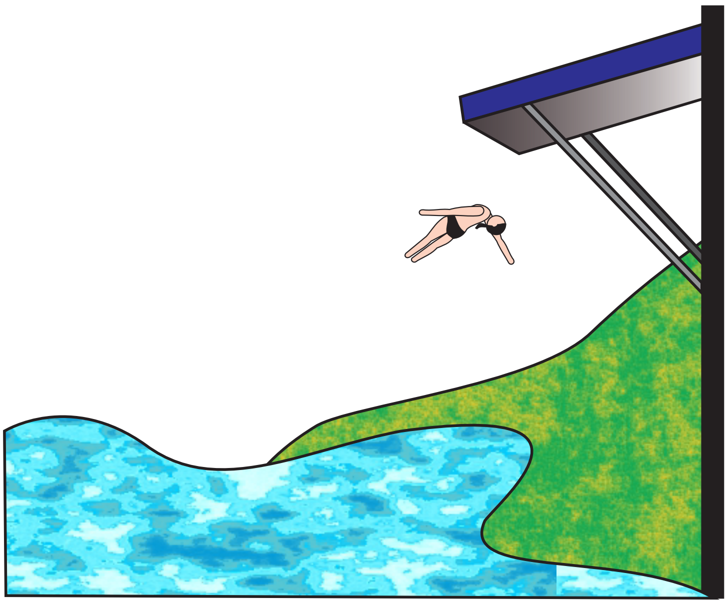
El clavadista caleño Orlando Duque se lanzó desde una plataforma de altura desconocida como se muestra en el dibujo. Suponga que se lanzó desde el reposo, que cae libremente y que cuando tocó el agua su rapidez fue de 23 metros por segundo.

(a) ¿Cuál era la altura de la plataforma?

(b) ¿Cuál fue su rapidez cuando estaba a 10 metros del agua?

(c) Vuelva a hacer (a) y (b) pero usando un sistema de coordenadas cuyo origen esté a 5 metros sobre el nivel de agua.

(d) Demuestre con el principio de la conservación de la energía que si Orlando se hubiera lanzado con cierta rapidez inicial distinta de cero, su rapidez al tocar el agua hubiera sido mayor.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) y (b) Orlando se lanza desde el reposo. Su rapidez al tocar el agua es de 23 metros por segundo.

(c) Debemos usar un sistema cuyo origen esté a 5 metros del agua.

(d) Orlando se lanza con cierta rapidez inicial.

¿Qué nos piden?

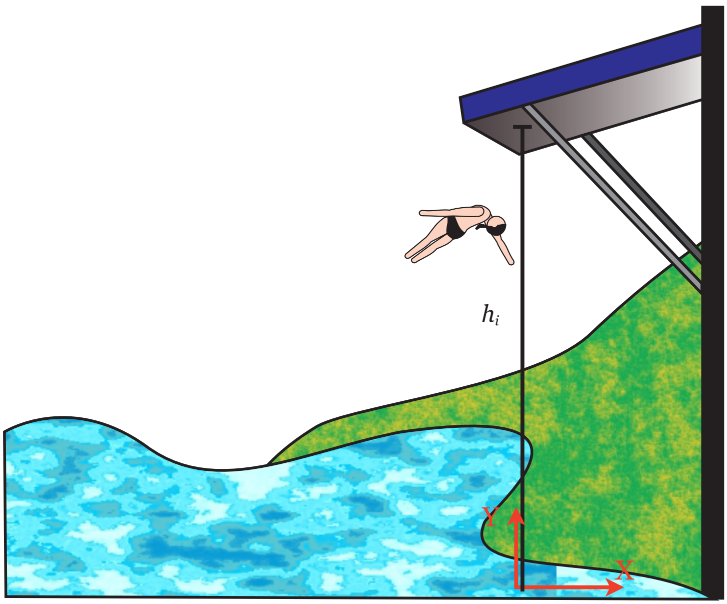
(a) La altura de la plataforma desde la que se lanzó Orlando.

(b) La rapidez de Orlando cuando está a 10 metros del agua.

(c) Debemos responder (a) y (b) con un sistema de coordenadas cuyo origen esté a 5 metros del piso.

(d) Demostrar con la conservación de energía que si Orlando se hubiera lanzado con cierta rapidez inicial, su rapidez al tocar el agua hubiera sido mayor.

(a) Para hallar la altura de la plataforma desde la que se lanzó Orlando sólo debemos aplicar la conservación de la energía mecánica. Notemos que sobre Orlando sólo actúa el peso así que su energía mecánica se conserva (nota 5.3). Pondremos un sistema de coordenadas en el nivel del mar y llamáremos h_i a la altura de la plataforma:



Al poner el sistema en ese punto, la altura de Orlando al llegar al mar será cero, así que su energía potencial gravitacional en ese momento será cero. Como Orlando se lanza desde el reposo, su energía cinética inicial es cero así que su energía mecánica inicial sólo es energía potencial gravitacional:

$$E_{mi} = mgh_i. \tag{1}$$

Notemos que no conocemos h_i ni la masa de Orlando. Cuando Orlando llega al agua su energía mecánica es sólo cinética porque su energía potencial gravitacional en ese momento es cero porque su altura es cero:

$$E_{mf} = \frac{1}{2}mv_f^2. \tag{2}$$

En esta ecuación conocemos la rapidez de Orlando cuando llega al agua pero no conocemos la masa. Ahora, como la energía mecánica se conserva, la energía mecánica inicial debe ser igual a la energía mecánica final:

$$\underbrace{mgh_i}_{E_{mi}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_f^2}_{E_{mif}}. \tag{3}$$

Finalmente podemos despejar h_i. Primero, notemos que la masa se cancela en ambos lados. Si dividimos por g obtenemos una expresión para h_i:

$$h_i = \frac{1}{2g}v_f^2. \tag{4}$$

Si ahora reemplazamos los valores conocidos, esta ecuación da

$$h_i = \frac{1}{2(9.81\ \mathrm{m/s^2})}(\underbrace{23\ \mathrm{m/s}}_{v_f})^2 = 26.96\ \mathrm{m}. \tag{5}$$

(b) Para hallar la rapidez de Orlando cuando está a 10 metros del agua podemos otra vez usar la conservación de energía. Cuando está a 10 metros del agua Orlando tiene energía potencial gravitacional y energía cinética, así que podemos escribir su energía mecánica en ese momento de la siguiente forma:

$$E_{mb} = \frac{1}{2}mv_b^2 + mgh_b, \tag{6}$$

donde hemos llamado E_{mb} a la energía mecánica a los 10 metros de altura, v_b a la rapidez en ese punto y donde h_b es 10 metros —la “b” es porque este es el punto (b)—. En esta ecuación no conocemos la rapidez (que es lo que buscamos) ni la masa. Como la energía mecánica se conserva, la energía mecánica a los 10 metros debe ser igual a la energía mecánica en cualquier otro punto, así que podemos igualar la energía mecánica a los 10 metros con la energía mecánica inicial:

$$\underbrace{mgh_i}_{E_{mi}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_b^2 + mgh_b}_{E_{mb}}. \tag{7}$$

Si pasamos el término con la energía potencial gravitacional a los 10 metros al otro lado de la igualdad, y cancelamos las masas, obtenemos

$$gh_i - gh_b = \frac{1}{2}v_b^2. \tag{8}$$

Si multiplicamos por 2 y sacamos factor común de g, esto da

$$2g(h_i - h_b) = v_b^2. \tag{9}$$

Si aplicamos raíz cuadrada obtenemos

$$\sqrt{2g(h_i - h_b)} = v_b. \tag{10}$$

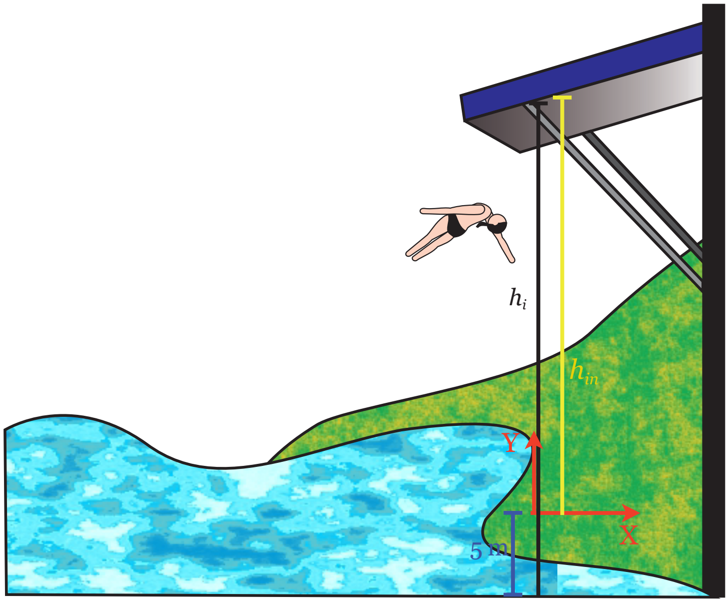
Ahora sólo debemos reemplazar los valores numéricos:

$$\sqrt{2(9.81\ \mathrm{m/s^2})(\underbrace{26.96\ \mathrm{m}}_{h_i} - \underbrace{10\ \mathrm{m}}_{h_b})} = 18.24\ \mathrm{m/s} = v_b. \tag{11}$$

(c) Si usamos un sistema de coordenadas cuyo origen esté a 5 metros de altura, entonces la altura inicial de Orlando es diferente a la hallada en (a). De hecho, la nueva altura de Orlando comparada con h_i será

$$h_{in} = h_i - 5\ \mathrm{m}, \tag{12}$$

como se aprecia de la siguiente figura:



Como se aprecia de esta figura, si ponemos el sistema de coordenadas a cinco metros sobre el nivel del mar, la nueva altura inicial de Orlando es de $h_{in} = h_i - 5$ m.

Por lo tanto, la nueva energía mecánica inicial (que sólo es potencial) es

$$E_{mi} = mg(h_i - 5 \text{ m}). \tag{13}$$

Por su parte, cuando Orlando llega al agua tiene energía cinética pero también tiene energía potencial gravitacional porque su altura en ese punto con respecto al sistema de coordenadas no es cero como ocurría en (a) y (b). De hecho, cuando llega al agua Orlando tendrá una altura negativa de 5 metros, así que la energía mecánica de Orlando en ese punto es

$$E_{mf} = \frac{1}{2}mv_f^2 - mg(5 \text{ m}). \tag{14}$$

Si aplicamos la conservación de la energía mecánica entre el momento inicial y final, obtenemos

$$\underbrace{mg(h_i - 5 \text{ m})}_{E_{mi}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_f^2 - mg(5 \text{ m})}_{E_{mf}}. \tag{15}$$

Si distribuimos el paréntesis de la izquierda esto da

$$mgh_i - mg5 \text{ m} = \frac{1}{2}mv_f^2 - mg(5 \text{ m}). \tag{16}$$

Si cancelamos el término mg(5 m) en ambos lados, obtenemos

$$mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2. \tag{17}$$

Notemos que esto es exactamente igual a la ecuación (3). Por lo tanto, volveremos a obtener el mismo resultado que obtuvimos en (a) para la altura de la plataforma con respecto al agua (26.96 m). ¡Esto es lo que esperamos porque la altura de la plataforma h_i con respecto al mar no va a cambiar si cambiamos el sistema de coordenadas!

Ahora debemos responder (b) con el nuevo sistema de coordenadas. Cuando Orlando está a 10 metros del agua, está a 5 metros de altura con respecto al sistema de coordenadas usado. Así que su energía potencial gravitacional en ese punto será mg(5 m). Por lo tanto, su energía mecánica en ese momento será

$$E_{mb} = \frac{1}{2}mv_b^2 + mg(5\text{ m}). \tag{18}$$

Como la energía mecánica se conserva, podemos igualar esta energía con la energía mecánica inicial de Orlando:

$$mg(h_i - 5\text{ m}) = \frac{1}{2}mv_b^2 + mg(5\text{ m}). \tag{19}$$

Si distribuimos el paréntesis izquierdo esto da

$$mgh_i - mg(5\text{ m}) = \frac{1}{2}mv_b^2 + mg(5\text{ m}). \tag{20}$$

Si pasamos el término mg(5 m) del lado derecho de la igualdad al otro lado, esto da

$$mgh_i - mg(5\text{ m}) - mg(5\text{ m}) = \frac{1}{2}mv_b^2. \tag{21}$$

Si sumamos, dividimos por m y sacamos factor común de g obtenemos

$$g(h_i - 10\text{ m}) = \frac{1}{2}v_b^2. \tag{22}$$

Esta es igual a la ecuación (8) (sólo que aquí escribimos explícitamente h_b), así que los resultados que obtendremos ahora serán los mismos que antes; volveremos a llegar a la ecuación (11) y la rapidez nos volverá a dar 18.24 metros por segundo. Esto no nos sorprende porque la rapidez es la magnitud de un vector y no debería depender del sistema de coordenadas (como vimos varias veces en el capítulo 2).

Hemos comprobado que la respuesta a los problemas de energía no varían según el sistema, así que podemos siempre escoger un sistema que simplifique los cálculos, como el escogido en (a) y (b) (nota 5.1).

(d) Encontremos una expresión para la rapidez final de Orlando en caso de que se hubiera lanzado con cierta rapidez inicial, y con ella digamos si la rapidez al tocar el agua hubiera sido mayor que cuando se lanza sin rapidez inicial. Como antes, usaremos la conservación de la energía mecánica.

Si Orlando se hubiera lanzado con rapidez inicial, su energía mecánica inicial sería potencial y cinética:

$$E_{mi} = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i. \tag{23}$$

Si volvemos a usar el sistema de coordenadas usado en (a) y en (b), la energía mecánica de Orlando cuando llega al agua sería sólo cinética:

$$E_{mf} = \frac{1}{2}mv_f^2. \tag{24}$$

Si igualamos esta energía con la energía dada por la ecuación (23), obtenemos

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_f^2}_{E_{mf}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i}_{E_{mi}}. \tag{25}$$

Si multiplicamos por 2 y dividimos por las masas, esto nos da

$$v_f^2 = v_i^2 + 2gh_i. \tag{26}$$

Si sacamos la raíz cuadrada, esto nos da

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2gh_i}. \tag{27}$$

Notemos que cuanto mayor sea la rapidez inicial, mayor será el término dentro de la raíz cuadrada y entonces mayor será la rapidez final. Es decir, la rapidez final es proporcional a la rapidez inicial, así que si Orlando se hubiera lanzado con cierta rapidez inicial (mayor que cero), la rapidez final hubiera sido mayor que si no se hubiera lanzado con rapidez inicial.

Problema (teórico) 5.6.

Palabras clave: energía potencial elástica, resorte ideal, sistema resorte-objeto.

(a) Explique qué es un resorte ideal.

(b) Explique cuál es la energía potencial elástica de un resorte ideal.

(c) Explique qué pasa con la energía mecánica de un objeto que interactúa con un resorte ideal.

Solución

(a) Un resorte ideal es aquel que al ser comprimido o elongado una distancia x realiza una fuerza que es directamente proporcional a la distancia que fue elongado o comprimido. Es decir, la fuerza realizada por un resorte ideal es de la forma $F \propto x$ (el símbolo $\propto$ indica "proporcional"). La proporcionalidad que hay entre la fuerza y x dependerá de una constante k característica del resorte (puede cambiar de acuerdo al resorte). En términos de esta constante, la magnitud de la fuerza ejercida por un resorte ideal es $F = kx$.

Las unidades de k tienen que ser de kilogramo sobre segundo cuadrado para que k multiplicada por una distancia x (que está en metros) nos dé unidades de newtons. Además, esta fuerza tiene dirección contraria a la dirección de estiramiento o compresión; si lo comprimimos el resorte trata de estirase, y si lo estiramos el resorte trata de comprimirse.

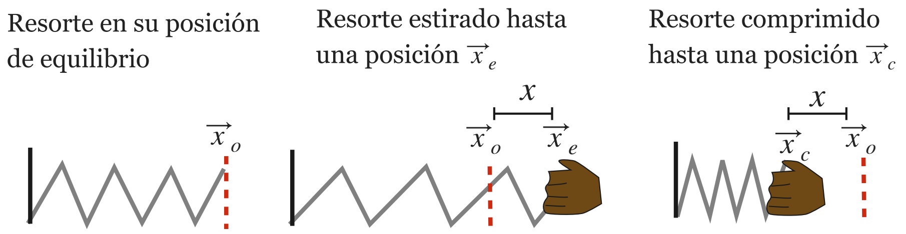
La masa del resorte ideal es cero (lo cual es una buena aproximación si la masa de los demás objetos que estamos analizando es mucho mayor que la masa del resorte). La razón por la cual necesitamos que la masa del resorte ideal sea cero será clara pronto.

(b) Además de la energía potencial gravitacional existe otro tipo de energía potencial que es la energía que un objeto almacena cuando se deforma. Esta energía depende de cuánto se haya deformado el objeto y se denomina *energía potencial elástica*. La energía potencial elástica para un resorte ideal de constante k es

$$U_e = \frac{1}{2}kx^2, \tag{1}$$

donde U_e es el símbolo usado para representar la energía potencial elástica y x es cuánto se ha comprimido o elongado el resorte.

Es importante entender que la energía potencial elástica del resorte se calcula de igual manera si se comprime el resorte o si se estira, lo único que importa es que el resorte se *deforme*. Más precisamente, cuando el resorte no está sujeto a ninguna fuerza, entonces su extremo libre (el extremo que podemos estirar o comprimir) está en su posición de equilibrio, que podemos llamar $\vec{x}_o$. Si después estiramos el resorte hasta una posición $\vec{x}_e$, la x será la distancia que hay entre el punto de equilibrio $\vec{x}_o$ y $\vec{x}_e$, como se ilustra en la siguiente figura:



Si estiramos o comprimimos el resorte, estamos moviendo el extremo libre del resorte de su posición de equilibrio $\vec{x}_0$ a una posición diferente. x es la distancia a la que está el extremo del resorte de su posición de equilibrio (no interesa si esa distancia se debe a que comprimimos o estiramos el resorte).

Por ejemplo, si la constante del resorte es de 2 kilogramos sobre segundo cuadrado y si comprimimos el resorte 0.1 metros, entonces la energía potencial elástica del resorte será

$$\frac{1}{2}\underbrace{(2\ \mathrm{kg/s^2})}_{k}(\underbrace{0.1\ \mathrm{m}}_{x})^2 = 0.01\ \mathrm{J}. \tag{2}$$

Si en cambio hubiéramos estirado el resorte 0.1 centímetros, nada habría cambiado en la anterior ecuación, pues x es una distancia que no tiene en cuenta la dirección de deformación.

(c) Una característica muy importante de los resortes ideales es que si un objeto interactúa con un resorte de estos, entonces la energía mecánica del objeto se convierte en energía potencial elástica del resorte y la energía potencial elástica del resorte se convierte en energía mecánica del objeto. Esta transformación de una energía del objeto en energía elástica del resorte ideal es perfecta, de forma que la energía mecánica total del sistema (del objeto más el resorte) siempre se conserva.

Notemos que es importante suponer que la masa del resorte es cero para que el resorte no tenga energía cinética en ningún momento y tampoco tenga energía potencial gravitacional. Como la masa es cero, la única energía mecánica que puede tener el resorte es la potencial elástica.

Por ejemplo, si una pelota que inicialmente tiene energía mecánica E_1 choca contra un resorte, la pelota va a perder parte de su energía mecánica inicial. Supongamos que su energía mecánica después de chocar con el resorte es E_2. La energía que perdió se transfiere al resorte en forma de energía potencial elástica, de manera que la suma de la nueva energía potencial del resorte más la energía mecánica E_2 nos dé igual a la energía mecánica inicial[5] que era E_1: $E_1 = E_2 + U_e$. En otras palabras, la energía mecánica perdida por la pelota, que es igual a $E_1 - E_2$, debe ser igual a la energía ganada por el resorte, que es U_e.

Antes habíamos dicho que si el peso era la única fuerza que actuaba sobre un objeto entonces la energía mecánica del objeto se conservaba. Ahora podemos extender ese principio y decir que si sobre el objeto actúa el peso y la fuerza de un resorte ideal, entonces la energía mecánica total del sistema (donde el sistema incluye el objeto y el resorte) se conserva.

Nota 5.5. Energía mecánica del sistema objeto-resorte

La energía mecánica de un sistema compuesto por un objeto y un resorte ideal es la suma de la energía mecánica del objeto con la energía mecánica del resorte. La energía mecánica del objeto es la suma de la energía cinética del objeto con la energía potencial gravitacional del objeto, mientras que la energía mecánica del resorte es igual a la energía potencial elástica del resorte. Por lo tanto, la energía mecánica total del sistema es $E_{m_{sistema}} = E_{m_{objeto}} + E_{m_{resorte}} = K + U_g + U_e = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx^2$.

Cuando sobre un objeto las únicas fuerzas que actúan son el peso y la fuerza de un resorte ideal, entonces la energía mecánica del sistema total se conserva: $E_{m_1} = E_{m_2}$. Esto quiere decir que la suma de la energía cinética con la potencial gravitacional y la potencial elástica en un tiempo t_1 es igual a la suma de estas energías en otro tiempo t_2: $K_1 + U_{g1} + U_{e1} = K_2 + U_{g2} + U_{e2}$, donde el subíndice "1" se refiere al tiempo t_1 y el subíndice "2" al tiempo t_2.

[5] En muchos libros y en las clases de física no se suele distinguir la energía del resorte de la energía del objeto, sino que se habla sólo de la energía del sistema objeto-resorte. Sin embargo, es importante entender que el objeto no tiene energía potencial elástica (a menos que nos digan eso), es sólo el resorte el que tiene esa energía. Así mismo, el resorte no tiene energía cinética y potencial gravitacional, mientras que el objeto sí. Es por esto que es recomendable distinguir las energías del resorte de las del objeto aunque la energía mecánica del sistema total sea la suma de ambas energías.

Problema de repaso 5.7.

Palabras clave: energía potencial elástica, resorte ideal, sistema resorte-objeto, energía mecánica.

Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta:

(1) Si tenemos un objeto que interactúa con un resorte ideal, y si sobre el objeto actúa el peso además de la fuerza del resorte, entonces la energía mecánica del objeto se conserva.

(2) Si un resorte ideal interactúa con un objeto y se deforma, entonces la energía mecánica del resorte no se conserva.

(3) Si Pedro hala un resorte de constante k una distancia d, y si María comprime un resorte con el doble de k una distancia 0.5 d, entonces la energía elástica de ambos resortes es la misma.

(4) Si la energía elástica de un resorte ideal disminuye mientras empuja a un objeto, y si la altura del objeto permanece constante, entonces la rapidez del objeto debe aumentar.

Solución

(1) Falso. La energía mecánica total (la suma de la energía mecánica del resorte y del objeto) se conserva, pero no necesariamente la energía mecánica del objeto.

(2) Verdadero. Si el resorte se comprime o se estira entonces su energía potencial elástica cambia, y esa es la única energía del resorte. Así, la energía mecánica del resorte cambia.

(3) Falso. La energía potencial elástica del resorte que hala Pedro se puede escribir así: $\frac{1}{2}kd^2$. Si la constante del resorte de María es el doble y la distancia d es la mitad, entonces la energía potencial elástica del resorte de María será $\frac{1}{2}(2k)(0.5d)^2 = \frac{kd^2}{4}$, que no es igual a $\frac{1}{2}kd^2$.

(4) Verdadero. Si la energía elástica disminuye mientras el resorte empuja un objeto, como la energía mecánica total se debe conservar, entonces alguna energía del objeto debe aumentar. Pero la única energía del objeto que puede aumentar es la cinética porque la potencial permanece fija ya que la altura permanece fija. Y para que aumente la energía cinética, la rapidez del objeto debe aumentar.

Problema 5.8.

Palabras clave: energía potencial elástica, sistema resorte-objeto, gráfica de energía en función del tiempo.

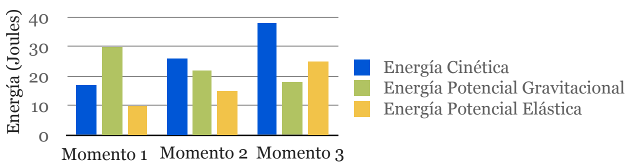
Considere que el arco que sostiene Alejandra (ver dibujo) funciona como un resorte ideal y que le podemos asociar una constante k de valor de 1681.6 kg/s^2. La flecha tiene masa de 0.05 kilogramos. Suponga que Alejandra logra que la flecha llegue a la manzana y que el estiramiento máximo del arco es de 0.3 metros. Cuando la flecha alcanza la manzana su energía cinética es de 75.46 joules. Además, la altura de la flecha con respecto al piso justo cuando el arco está estirado a su máximo es de 1.4 metros y la altura de la flecha justo cuando sale disparada es de 1.5 metros.

(a) Determine la rapidez con la que va a salir disparada la flecha. Tenga en cuenta que cuando la flecha sale disparada, el arco deja de estar estirado.

(b) ¿Cuál es la altura de la manzana con respecto al piso?

(c) Si Alejandra hubiera estirado el arco el doble de lo que lo hizo inicialmente, ¿cuánto habría aumentado la rapidez de la flecha cuando salió disparada?

(d) Realice un gráfico como el indicado en el dibujo, en el cual la barra azul indique la energía cinética, la barra verde indique la energía potencial gravitacional y la barra amarilla indique la energía potencial elástica. Tenga en cuenta que debe completar esta gráfica para tres momentos: el momento 1 es cuando el arco está estirado, el momento 2 es cuando la flecha sale disparada, y el momento 3 es cuando la flecha llega a la manzana. Comente el gráfico obtenido.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b) y (c) El arco funciona como un resorte ideal de constante k igual a 1681.6 kg/s^2. La masa de la flecha es de 0.05 kilogramos. El estiramiento del arco es de 0.3 metros. La altura de la flecha cuando el arco está estirado es de 1.4 metros y su altura justo cuando sale disparada es de 1.5 metros. Cuando la flecha alcanza la manzana su energía cinética es de 75.46 joules. Debemos tener en cuenta que cuando la flecha sale disparada, el arco deja de estar estirado.

(d) Nos dan un gráfico de energía que debemos completar para tres momentos diferentes: cuando está estirado el arco, cuando sale disparada la flecha y cuando la flecha llega a la manzana.

¿Qué nos piden?

(a) Hallar la rapidez con la que sale disparada la flecha.

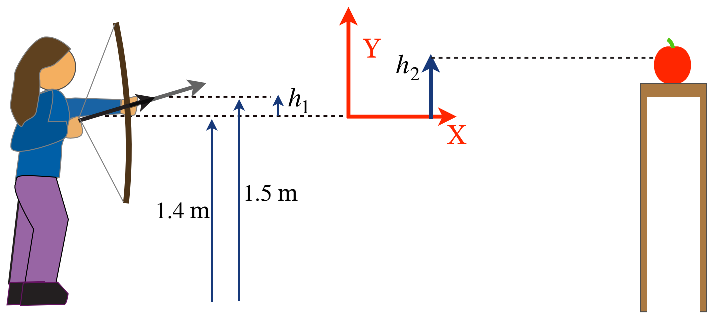
(b) Decir cuál es la altura de la manzana con respecto al piso.

(c) Decir cuánto hubiera aumentado la rapidez de la flecha al salir disparada si el estiramiento hubiera sido el doble.

(d) Completar el gráfico de energías de la figura y comentar.

(a) Dado que las únicas fuerzas que actúan sobre la flecha en este caso son el peso y la fuerza elástica, la energía mecánica total del sistema flecha-arco se conserva. Podemos usar la conservación de la energía para hallar la energía cinética de la flecha cuando sale disparada, y con la energía cinética podemos hallar la rapidez.

Empecemos por poner un sistema de coordenadas desde el cual podamos medir la altura. Si medimos la altura desde el punto en el que el arco está comprimido al máximo, entonces la energía potencial gravitacional inicial será cero, como se ilustra a continuación:



Escogemos un sistema de coordenadas con el origen a la altura inicial de la flecha (a 1.4 metros del piso). Con este sistema la altura inicial de la flecha es cero y la altura de la manzana la podemos llamar h_2 (es desconocida). Además, la altura de la flecha cuando sale disparada la podemos llamar h_1 (la flecha disparada está en gris), y se puede ver de la figura que $h_1 = 1.5\text{ m} - 1.4\text{ m} = 0.1\text{ m}$.

En el momento inicial el arco está comprimido así que tiene energía potencial elástica. Además, en ese momento la flecha está en reposo así que no tiene energía cinética y tampoco tiene energía potencial gravitacional debido al sistema que hemos elegido. Por lo tanto, la energía mecánica inicial del sistema será sólo la energía potencial elástica del arco:

$$E_{m1} = \frac{1}{2}kx^2, \tag{1}$$

donde x es el estiramiento del arco que es conocido. Nos dicen que en el punto en el que la flecha sale disparada el arco no está estirado, así que la energía potencial elástica es cero. Además, en ese momento la energía potencial gravitacional es mgh_1, donde h_1 es 0.1 metros (como se explica en la última figura). Además, en ese momento la flecha tiene una energía cinética de $\frac{1}{2}mv_1^2$, donde v_1 es la rapidez de la flecha que queremos averiguar. Así, la energía mecánica total del sistema en ese momento será

$$E_{m2} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1. \tag{2}$$

Como la energía mecánica se conserva, podemos igualar esta energía con la energía mecánica inicial, que era sólo potencial elástica:

$$\underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{E_{m1}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1}_{E_{m2}}. \tag{3}$$

Aquí conocemos todas las variables excepto la rapidez v_1 de la flecha. Podemos despejar esa rapidez si primero pasamos la energía potencial gravitacional al otro lado:

$$\frac{1}{2}kx^2 - mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2. \tag{4}$$

Y ahora multiplicamos todos los términos por $2/m$:

$$\frac{1}{m}kx^2 - 2gh_1 = v_1^2. \tag{5}$$

Finalmente, sacamos raíz cuadrada:

$$\sqrt{\frac{1}{m}kx^2 - 2gh_1} = v_1. \tag{6}$$

Si reemplazamos los valores numéricos, obtenemos la rapidez:

$$\sqrt{\frac{1}{\underbrace{(0.05\ \mathrm{kg})}_{m}}\underbrace{(1681.6\ \mathrm{kg/s^2})}_{k}\underbrace{(0.3\ \mathrm{m})}_{x}^2 - 2(9.81\ \mathrm{m/s^2})\underbrace{(0.1\ \mathrm{m})}_{h_1}} = 55.00\ \mathrm{m/s} \tag{7}$$

$$= v_1.$$

(b) Para determinar la altura de la manzana podemos usar de nuevo la conservación de la energía mecánica. Para hallar la altura necesitamos conocer la energía potencial gravitacional de la flecha cuando alcanza la manzana.

Cuando la flecha alcanza la manzana, la flecha tiene energía cinética y potencial gravitacional y el arco no tiene energía potencial elástica (no está estirado ni comprimido). Así, la energía mecánica del sistema en ese momento es

$$E_{m3} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2, \tag{8}$$

donde h_2 es la altura que deseamos averiguar. Como la energía mecánica se conserva, la energía E_{m3} es igual a la energía E_{m2} e igual a la energía E_{m1}. Así que podemos igualar la ecuación (8) con la ecuación (1) o con la ecuación (2). Como E_{m1} es más sencilla que E_{m2}, es más conveniente igualar E_{m3} con E_{m1}:

$$\underbrace{\frac{1}{m}kx^2}_{E_{m1}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2}_{E_{m3}}. \tag{9}$$

Ahora, si pasamos la energía cinética al otro lado, obtenemos

$$\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_2, \tag{10}$$

Y si dividimos entre mg esto nos da

$$\frac{1}{mg}\left(\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv_2^2\right) = h_2. \tag{11}$$

Si usamos los valores conocidos, entre ellos el valor de la energía cinética de la flecha cuando llega a la manzana, que es de 75.46 joules, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\underbrace{(0.05\ \text{kg})}_{m}(9.81\ \text{m/s}^2)}\left(\frac{1}{2}\underbrace{(1681.6\ \text{kg/s}^2)}_{k}\underbrace{(0.3\ \text{m})}_{x}{}^2 - \underbrace{75.46\ \text{J}}_{K_2}\right) &= 0.43\ \text{m} \\ &= h_2.\end{aligned} \tag{12}$$

La anterior es la altura de la manzana con respecto al sistema usado, que está 1.4 metros sobre el piso. Por lo tanto, la altura de la manzana con respecto al piso es 0.43 m + 1.4 m = 1.83 m.

(c) Como todo es igual salvo que el estiramiento del arco cambia, podemos usar de nuevo la ecuación (6) para hallar la rapidez de la flecha cuando sale disparada. En vez de usar x debemos usar $2x$:

$$\sqrt{\frac{1}{m}k(2x)^2 - 2gh_1} = v_1. \tag{13}$$

Si reemplazamos los valores, notamos que la rapidez ahora es

$$\sqrt{\underbrace{\frac{1}{(0.05\text{ kg})}}_{m}\underbrace{(1681.6\text{ kg/s}^2)}_{k}(2\times\underbrace{0.3\text{ m}}_{x})^2-2(9.81\text{ m/s}^2)\underbrace{(0.1\text{ m})}_{h_1}}=110.03\text{ m/s}. \quad (14)$$

Es decir, la rapidez aumentó casi el doble, pues pasó de 55 a 110.03 metros por segundo.

(d) Ahora debemos completar el gráfico de energías indicado en la figura inicial. Para hacer el gráfico debemos calcular las diferentes energías en cada punto.

Cuando el arco está estirado la energía potencial gravitacional y la energía cinética son cero, y la energía potencial elástica está dada por la ecuación (1):

$$U_{k1}=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}(1681.6\text{ kg/s}^2)(0.3\text{ m})^2=75.672\text{ J}. \quad (15)$$

Cuando la flecha sale disparada, la energía potencial gravitacional es

$$U_{k2}=mgh_1=(0.05\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(0.1\text{ m})=0.049\text{ J}. \quad (16)$$

Además, la energía cinética es

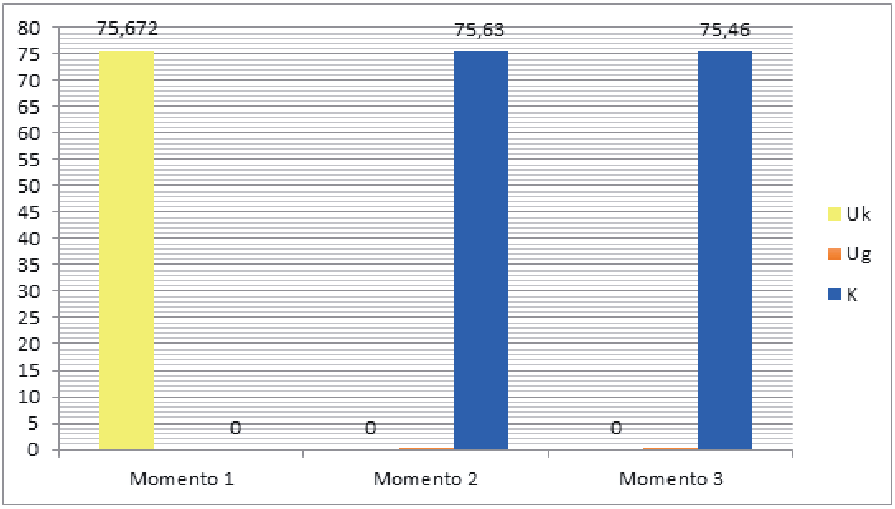
$$K_2=\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}(0.05\text{ kg})(55.00\text{ m/s}^2)=75.63\text{ J}, \quad (17)$$

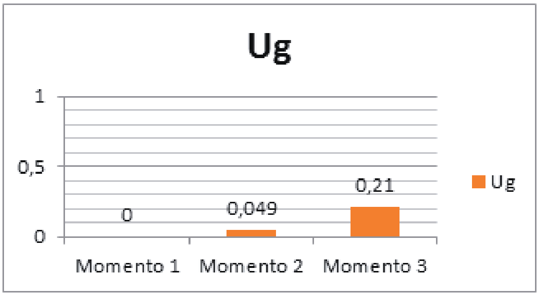
donde hemos usado el valor de v_1 que calculamos con la ecuación (7).

Finalmente, cuando la flecha alcanza la manzana, la energía potencial elástica sigue siendo cero. La energía potencial gravitacional es

$$U_{g3}=mgh_2=(0.05\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(0.43\text{ m})=0.21\text{ J}, \quad (18)$$

donde hemos usado la altura calculada con la ecuación (12). Además, la energía cinética es de 75.46 joules. Ahora que conocemos estos valores, podemos completar la gráfica. Como la energía potencial gravitacional es tan pequeña comparada con las otras, hacemos una gráfica aparte para esta energía:





Notemos primero que la energía potencial gravitacional es tan pequeña en los diferentes momentos que no alcanza a aparecer en la primera gráfica. Además, en el primer momento sólo tenemos energía potencial elástica mientras que en el segundo toda esa energía se convirtió en energía cinética (y un poco se convirtió en energía potencial gravitacional). Después, hasta el tercer momento, casi toda esa energía cinética permanece constante. Si sumamos la altura de las barras en cada momento obtenemos siempre el mismo valor, 75.67, lo cual significa que la energía mecánica del sistema se conserva, como esperamos en un caso en el cual sólo actúa la fuerza de gravedad y la fuerza elástica[6].

[6] En realidad este valor no es siempre exactamente 75.67 porque hay decimales en algunos cálculos que hemos omitido.

Problema 5.9.

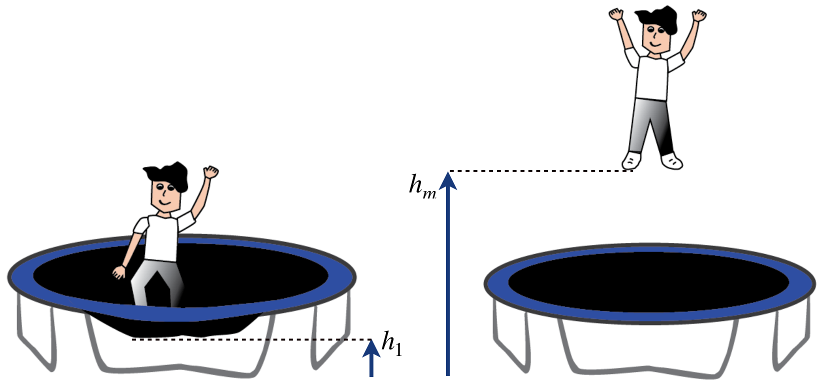
Palabras clave: objeto que cae sobre un resorte, máxima compresión, máxima altura alcanzada debido a un resorte.

Suponga que Camilo cae en un brinca-brinca. Suponga que el brinca-brinca se puede modelar como un resorte ideal que se comprime o se estira y que tiene constante k. Camilo salta sobre el brinca-brinca y lo comprime hasta que este le da un impulso suficiente para que alcance una altura máxima h_m. Cuando Camilo comprime el brinca-brinca, se encuentra a una altura h_1 del piso (ver dibujo).

(a) Escriba una expresión para la máxima compresión del brinca-brinca.

(b) Escriba una expresión para la rapidez de Camilo justo cuando sus pies se despegan del brinca-brinca (antes de que se eleve).

(c) Cuando cae por segunda vez sobre el brinca-brinca, ¿Camilo va a comprimir más o menos el brinca-brinca que lo que lo comprimió en el primer salto? Y con el impulso que le dará el brinca-brinca en este segundo salto, ¿Camilo va a alcanzar más o menos altura que en el primero?



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b) y (c) El brinca-brinca se puede modelar como un resorte ideal de constante k. Después de que salta, el brinca-brinca le da un impulso a Camilo suficiente para llegar a una altura máxima h_m. Cuando Camilo comprime el brinca-brinca, se encuentra a una altura h_1 del piso.

¿Qué nos piden?

(a) Escribir una expresión para la máxima compresión del brinca-brinca.

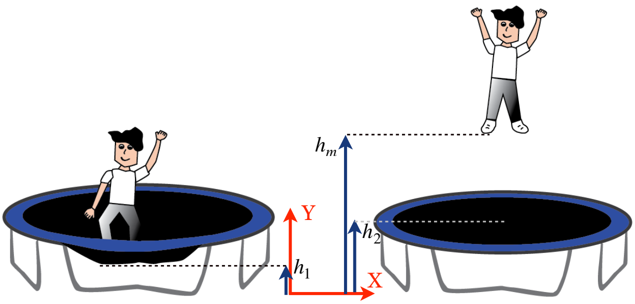
(b) Escribir una expresión para la rapidez de Camilo justo cuando sus pies se despegan del brinca-brinca.

(c) Decir si en el segundo salto sobre el brinca-brinca, este se comprime más o menos y decir si Camilo va a alcanzar más o menos altura después de que salte esa segunda vez.

Solución

(a) Para escribir una expresión para la máxima compresión del brinca-brinca debemos encontrar la energía potencial elástica del brinca-brinca en el momento de su máxima compresión. Tengamos en cuenta que como sobre Camilo sólo actúan el peso y la fuerza del brinca-brinca (que se modela como un resorte ideal), entonces la energía mecánica del sistema conformado por Camilo y el brinca-brinca se conserva.

Ahora, para plantear las ecuaciones de la energía mecánica debemos escoger un sistema de coordenadas que nos permita medir la altura de Camilo en diferentes momentos para medir la energía potencial gravitacional. Escojamos un sistema cuyo origen esté en el piso (de esta forma podemos usar directamente la altura máxima h_m y la altura h_1 que están medidas con respecto al piso):



Escogemos un sistema de coordenadas con el origen en el piso. La altura h_1 cuando Camilo comprime el brinca-brinca es conocida; la altura h_2 justo cuando Camilo se despega del brinca-brinca en su salto es desconocida; y la altura h_m que es la máxima altura que alcanza Camilo después de saltar es conocida.

La energía mecánica en el punto de máxima compresión es energía potencial elástica del brinca-brinca y energía potencial gravitacional de Camilo, pues Camilo no tiene energía cinética en ese momento (en el instante en que Camilo está en el punto más bajo, no tiene rapidez). Si llamamos x a la compresión del brinca-brinca en ese punto, entonces podemos escribir la energía mecánica en ese punto así:

$$E_{m1} = \frac{1}{2}kx^2 + mgh_1. \tag{1}$$

Para despejar x debemos usar la conservación de la energía, así que debemos usar la energía mecánica en otro momento. Como conocemos la altura máxima del salto de Camilo, podemos usar la energía en ese momento; en ese punto la energía mecánica es sólo energía potencial gravitacional (el brinca-brinca no está comprimido así que no tiene energía potencial elástica, y Camilo no se está moviendo porque la rapidez en el punto más alto es cero):

$$E_{m2} = mgh_m. \tag{2}$$

Si aplicamos la conservación de la energía mecánica entre el punto de máxima compresión y el punto de máxima altura, obtenemos

$$\underbrace{\frac{1}{2}kx^2 + mgh_1}_{E_{m1}} = \underbrace{mgh_m}_{E_{m2}}. \tag{3}$$

Si despejamos la energía potencial elástica, esto nos da

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgh_m - mgh_1. \tag{4}$$

Si multiplicamos por 2 y dividimos por k, lo anterior da

$$x^2 = \frac{2}{k}(mgh_m - mgh_1). \tag{5}$$

Si sacamos factor común de mg y sacamos la raíz cuadrada, obtenemos

$$x = \sqrt{\frac{2mg}{k}(h_m - h_1)}. \tag{6}$$

Esta es la expresión para la compresión del brinca-brinca que debíamos hallar. Notemos dos cosas: cuanto mayor es la diferencia entre la altura máxima y h_1, mayor es x. Esto tiene sentido porque el resorte se tiene que comprimir más para que pueda elevar a Camilo hasta una altura mayor. Mayor compresión significa mayor energía potencial elástica y por ende más energía le puede transmitir el brinca-brinca a Camilo. Por otro lado, notemos que cuanto mayor es k menor es la compresión, y esto tiene sentido porque si k es muy grande, el brinca-brinca hace más fuerza y entonces es mas difícil estirarlo o comprimirlo.

(b) Para hallar la rapidez de Camilo justo cuando se despega del brinca-brinca debemos encontrar la energía cinética de Camilo justo en ese momento (y con esa energía podemos despejar la rapidez). Y para encontrar la energía cinética debemos aplicar de nuevo la conservación de la energía mecánica.

Cuando Camilo está en el momento en que se despega, tenemos dos tipos de energía: energía cinética y energía potencial gravitacional (en ese instante no hay energía potencial elástica porque el brinca-brinca no está estirado ni comprimido):

$$E_{mb} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh_2. \tag{7}$$

Ahora, no conocemos h_2 pero podemos usar x (que ya conocemos por el numeral anterior) y h_1 para determinar h_2. Notemos de la figura anterior que $h_1 + x = h_2$, así que la ecuación (7) se puede escribir como

$$E_{mb} = \frac{1}{2}mv^2 + mg\underbrace{(x + h_1)}_{h_2}. \tag{8}$$

(Todavía no reemplazamos x para no complicar las ecuaciones innecesariamente). Ahora podemos volver a usar la conservación de la energía mecánica. Igualamos la energía E_{mb} con la energía E_{m2}:

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + mg(x + h_1)}_{E_{mb}} = \underbrace{mgh_m}_{E_{m2}}. \tag{9}$$

Si ahora despejamos la energía cinética, obtenemos

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh_m - mg(x + h_1). \tag{10}$$

Ahora podemos simplificar m, multiplicar por 2 y sacar factor común de g en el lado derecho:

$$v^2 = 2g(h_m - x - h_1). \tag{11}$$

Si ahora usamos la ecuación (6) para x y sacamos la raíz cuadrada, obtenemos

$$v = \sqrt{2g\left(h_m - h_1 - \underbrace{\sqrt{\frac{2mg}{k}(h_m - h_1)}}_{x}\right)}. \tag{12}$$

(c) Después de que Camilo llega a la altura máxima h_m, vuelve a caer en el brinca-brinca. Es sencillo notar que la compresión va a ser la misma que antes porque las ecuaciones que vamos a usar son exactamente las mismas; para hallar la compresión máxima debemos usar la ecuación (1). Además, para usar la conservación de la energía somos libres de usar cualesquier puntos del movimiento y resulta que la altura final de Camilo después de la primera vez que salta es la *altura inicial* para el segundo salto. Es decir, la energía mecánica inicial para el segundo salto es precisamente la energía mecánica final del primer salto, la cual está dada por la ecuación (2). Por lo tanto, vamos a volver a igualar la ecuación (1) con la (2) (sólo que está vez la ecuación (2) corresponde al punto inicial del movimiento), y así obtendremos la misma compresión del resorte.

Así como la compresión es la misma, la altura final después del segundo salto es la misma. Si la compresión es la misma, la energía potencial elástica también lo es y entonces, por conservación de energía, la energía mecánica final en la altura máxima del segundo salto debe ser igual a esa energía en la altura máxima del primer salto. Si Camilo alcanzara más o menos altura, entonces su energía mecánica habría cambiado comparada con el primer caso, pero no puede cambiar porque la energía mecánica se conserva[7].

[7] La única forma de que la altura del segundo salto cambie es si tenemos en cuenta la fricción del aire o si usamos un resorte no ideal. En ese caso se perdería energía, así que Camilo cada vez alcanzaría una altura menor (pronto veremos casos en los que la energía no se conserva).

Problema 5.10.

Palabras clave: sistema resorte-objeto, máxima compresión, máximo estiramiento, máxima y mínima rapidez, gráfica de energía.

Un objeto de masa m está unido a un resorte ideal que se puede estirar o comprimir de forma completamente vertical. Considere los cuatro momentos indicados en la figura y tenga en cuenta que en el momento 2 el resorte no está estirado ni comprimido, el momento 4 es el de máximo estiramiento del resorte y el momento 1 es el de mayor compresión. Considere las diferentes gráficas de energía indicadas en la parte inferior, puestas en desorden con respecto a los momentos.

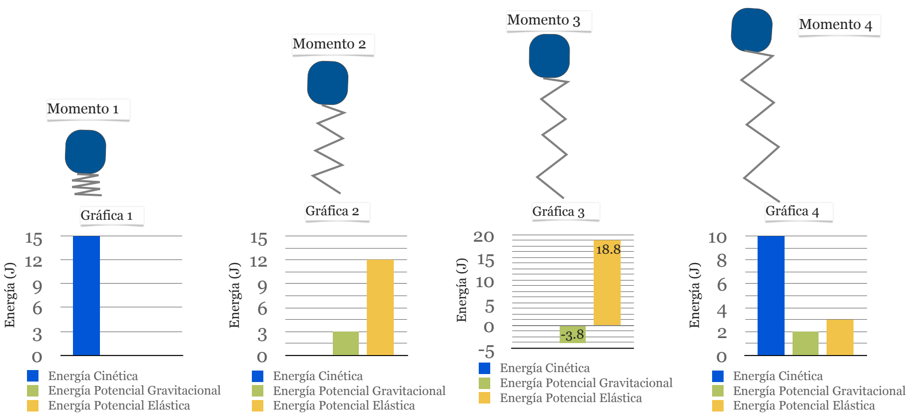
(a) Diga cuál gráfica de energía corresponde a qué momento y explique qué sistema de referencia se está usando para medir la altura del objeto.

(b) Diga en qué momento la rapidez del objeto es mayor y en qué momento es menor.

(c) Con base en lo hecho en (a), ¿es igual cuánto se comprime el resorte en su punto de máxima compresión que lo que se estira en su punto de máximo estiramiento?

(d) Si la masa del objeto es de 1 kilogramo, ¿de cuánto fue la máxima compresión? ¿De cuánto fue el máximo estiramiento del resorte y cuánto es la constante del resorte?

(e) ¿Cuál es la aceleración del objeto cuando el resorte está estirado 0.1 metros?



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b) y (c) Un objeto de masa m está atado a un resorte ideal. Nos muestran diferentes momentos y nos dicen que en el momento 2 el resorte no está estirado ni comprimido, en el momento 4 el resorte está en su máximo estiramiento y en el momento 1 en su máxima compresión. Las gráficas de energía están en desorden.

(d) y (e) La masa del objeto es de 1 kilogramo.

¿Qué nos piden?

(a) Decir cuáles gráficas de energía corresponden a cada momento.

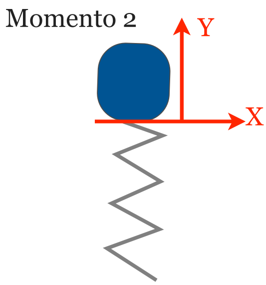
(b) Decir en qué momento la rapidez del objeto es mayor y en cuál es menor.

(c) Decir si la máxima compresión del resorte es igual al máximo estiramiento.

(d) Hallar el valor de la máxima compresión, el máximo estiramiento y la constante k del resorte.

(e) Hallar la aceleración del objeto cuando el resorte está estirado 0.1 metros.

(a) Como sobre el objeto sólo actúan el peso y la fuerza de un resorte ideal, entonces la energía mecánica del sistema objeto-resorte se debe conservar (la suma de la energía mecánica del resorte con la del objeto se conserva). Para determinar qué gráfica de energía corresponde a qué momento, empecemos por tener en cuenta que en el momento 2 el resorte no está estirado ni comprimido, así que en ese momento el resorte no tiene energía potencial elástica. Por lo tanto, debemos buscar una gráfica que no tenga energía potencial elástica. La única gráfica que no tiene energía potencial elástica es la 1, así que esa gráfica debe corresponder al momento 2. Notemos que en ese momento la energía potencial gravitacional también es cero, lo cual indica que se ha usado un nivel de referencia en el punto en el cual el resorte está en equilibrio:



Como la energía potencial gravitacional es cero en el momento 2, entonces podemos inferir que se está usando un nivel de referencia en el extremo superior del resorte, para que la altura del objeto sea cero.

Cuando el resorte está lo más estirado posible, el objeto tiene la mayor altura posible y entonces la energía potencial gravitacional es la más grande. Además, en ese punto de máximo estiramiento el objeto no se está moviendo, está justo en el instante en que llegó arriba y va a comenzar a caer, así que su energía cinética es cero. La gráfica de energía que coincide con estas características es la gráfica 2. Así que la gráfica 2 coincide con el momento 4.

Ahora bien, en el momento 1 el resorte está lo más comprimido que puede estar. En ese punto el objeto está lo más abajo posible así que su energía potencial gravitacional es la más pequeña y, además, en ese punto el objeto no se está moviendo (está en el instante en que terminó de bajar y va a empezar a subir), así que la energía cinética debe ser cero. Por lo tanto, el momento 1 debe corresponder con la gráfica 3 (note que la energía potencial gravitacional es negativa en ese punto porque el objeto está debajo del nivel de referencia). Finalmente, la única gráfica que queda es la 4, así que esa gráfica debe corresponder al momento 3.

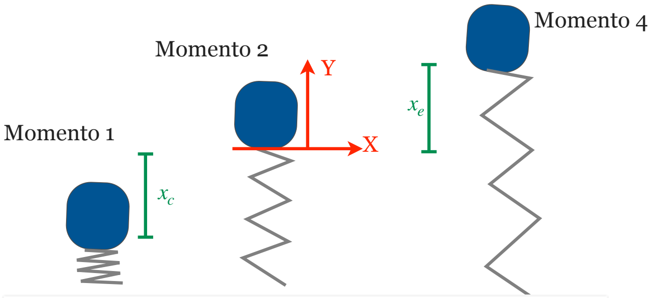
(b) La rapidez del objeto es mayor cuando la energía cinética es mayor, y esto ocurre en la gráfica 1, que corresponde al momento 2. Por su parte, la rapidez es menor cuando es cero y eso ocurre en dos momentos: cuando el resorte está comprimido a su máximo y cuando el resorte está estirado hasta el máximo (en ambos casos la energía cinética es cero). Eso ocurre en la gráfica 3, que corresponde al momento 1, y en la gráfica 2, que corresponde al momento 4.

(c) Para saber si la compresión máxima es igual al estiramiento máximo, podemos analizar las gráficas de energía. En el momento 1, cuando está en su compresión máxima, la energía potencial elástica es de 18.8 joules, como lo indica la gráfica 3. Por otra parte, en el momento 4, cuando el resorte está completamente estirado, la energía potencial elástica es de 12 joules como muestra la gráfica 2. Es claro entonces que la energía potencial elástica en el momento 1 es mayor que la energía potencial elástica en el momento 4. Si la energía potencial elástica cuando se comprime es mayor que cuando se estira lo que se comprime el resorte tiene que ser más de lo que se estira. Esto puede entenderse intuitivamente porque el peso facilita que el objeto comprima más el resorte e impide que el resorte se estire completamente.

Otro método: hay otra forma sencilla de explicar por qué lo que se comprime el resorte debe ser diferente a lo que se estira. La energía cinética, cuando el resorte se ha comprimido del todo o cuando se ha estirado del todo, es cero. Como la energía mecánica se conserva, entonces la suma de la energía potencial elástica con la energía potencial gravitacional debe ser la misma en el punto de máxima compresión y en el punto de máximo estiramiento. Pero en el punto más alto la energía potencial gravitacional es mayor que en el punto más bajo, entonces la energía potencial elástica tiene que ser menor arriba (de forma que la energía mecánica total permanezca constante). Por lo tanto, lo que se estira el resorte tiene que ser menor que lo que se comprime.

(d) Para determinar la máxima compresión y el máximo estiramiento del resorte debemos usar los valores de las energías en el momento 1 y el momento 4. Pero notemos que con los valores de la energía potencial elástica no podemos obtener la compresión (que llamaremos x_c) o el estiramiento (que llamaremos x_e) porque no conocemos la constante del resorte.

Sin embargo, hay otra forma con la que podemos encontrar la compresión y el estiramiento: usando la energía potencial gravitacional. Como el nivel de referencia es el indicado en la última figura, x_c no sólo es la compresión sino también la altura (que es negativa) del objeto, así que la energía potencial gravitacional en el momento 1 se puede escribir como $-mgx_c$. De forma similar, la energía potencial gravitacional en el momento 4 se puede escribir como mgx_e porque x_e coincide con la altura del objeto en ese momento:



Según el sistema usado, la máxima compresión que llamamos x_c coincide con la altura (que es negativa) del objeto en el momento 1, y el máximo estiramiento que hemos llamado x_e coincide con la altura del objeto en el momento 4.

Como conocemos la masa del objeto y el valor de la energía potencial gravitacional en todos los momentos, podemos determinar x_c:

$$U_{g1} = -mgx_c. \tag{1}$$

Si dividimos por $-mg$ obtenemos

$$-\frac{U_{g1}}{mg} = x_c. \tag{2}$$

Si usamos el hecho de que la masa es de 1 kilogramo y la energía potencial gravitacional en este punto es de -3.8 joules, llegamos a

$$-\frac{\overbrace{(-3.8 \text{ J})}^{U_{g1}}}{\underbrace{(1 \text{ kg})}_{m}(9.81 \text{ m/s}^2)} = 0.39 \text{ m} = x_c. \tag{3}$$

De forma similar, podemos encontrar el máximo estiramiento usando el valor de la energía potencial gravitacional en el momento 4.

En el punto de máximo estiramiento, el estiramiento x_e coincide con la altura máxima, que es positiva. Así, podemos volver a usar la ecuación (2) pero esta vez teniendo en cuenta que consideramos la energía potencial gravitacional en el momento 4:

$$\frac{U_{g4}}{mg} = x_e. \tag{4}$$

Si usamos los valores de cada variable, obtenemos

$$\frac{\overbrace{(3\ \mathrm{J})}^{U_{g4}}}{\underbrace{(1\ \mathrm{kg})}_{m}(9.81\ \mathrm{m/s^2})} = 0.31\ \mathrm{m} = x_e. \tag{5}$$

Así, hemos corroborado que lo que se comprime el resorte es mayor que lo que se estira.

Con x_e o con x_c y con la información de la energía potencial elástica podemos determinar la constante k del resorte. Por ejemplo, en el momento 1 la gráfica 3 dice que la energía potencial elástica es de 18.8 joules. Además, en ese momento la compresión es de 0.39 metros, como acabamos de ver. Así, usando el hecho de que la energía potencial elástica es $\frac{1}{2}kx^2$, podemos despejar k:

$$U_{k1} = \frac{1}{2}kx_c^2. \tag{6}$$

Multiplicando por 2 y dividiendo por x_c^2, obtenemos

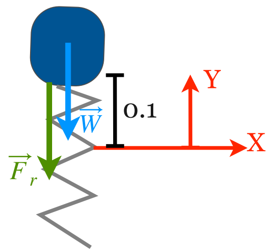
$$\frac{2U_{k1}}{x_c^2} = k. \tag{7}$$

Si reemplazamos los valores conocidos, obtenemos

$$\frac{2\overbrace{(18.8\ \mathrm{J})}^{U_{k1}}}{\underbrace{(0.39\ \mathrm{m})}_{x_c}{}^2} = 247.21\ \mathrm{kg/s^2} = k. \tag{8}$$

(e) Para hallar la aceleración del objeto cuando el resorte está estirado 0.1 metros necesitamos hacer un análisis de fuerzas (note que con la energía no podemos hallar las aceleraciones). Empecemos por realizar un diagrama de fuerzas del objeto:

Diagrama de fuerzas



Cuando el objeto estira el resorte, el resorte produce una fuerza en dirección contraria al estiramiento (es decir, hacia abajo). Además de esta fuerza que apunta hacia abajo, sobre el objeto actúa el peso.

Como el peso y la fuerza producida por el resorte son negativas en Y, la aceleración tiene que ser negativa en Y[8]. Según la segunda ley de Newton obtenemos

$$-W\hat{y} - F_r\hat{y} = -ma\hat{y}. \tag{9}$$

Ahora, la magnitud del peso es mg y la magnitud de la fuerza del resorte es kx, donde x es el estiramiento:

$$-mg\hat{y} - kx\hat{y} = -ma\hat{y}. \tag{10}$$

Si aplicamos la regla de oro y dividimos por la masa, obtenemos la magnitud de la aceleración:

$$g + \frac{k}{m}x = a. \tag{11}$$

Si reemplazamos los valores conocidos, la magnitud de esta aceleración nos da

$$9.81\ \mathrm{m/s^2} + \frac{\overbrace{(247.21\ \mathrm{kg/s^2})}^{k}}{\underbrace{1\ \mathrm{kg}}_{m}}\underbrace{(0.1\ \mathrm{m})}_{x} = 34.53\ \mathrm{m/s^2} = a. \tag{12}$$

Así que la aceleración del objeto es de magnitud 34.53 metros sobre segundo cuadrado y apunta en dirección negativa de Y.

[8] La aceleración es negativa sin importar si el objeto está subiendo, así como en los casos de lanzamiento vertical.

Problema de repaso 5.11.

Palabras clave: energía mecánica, energía potencial elástica, energía cinética, movimiento parábolico.

Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta:

(1) Si la energía mecánica de un objeto A es mayor que la de un objeto B, entonces la energía cinética de B tiene que ser menor que la energía cinética de A.

(2) Si sobre un objeto actúa el peso y un resorte ideal, y si entre el tiempo inicial y el tiempo final la energía potencial del sistema aumentó 8 J, entonces la energía cinética disminuyó 8 J.

(3) Si la energía cinética de un objeto se redujo cuatro veces y la masa del objeto permaneció constante, entonces la rapidez del objeto se redujo por cuatro.

(4) La energía potencial elástica es la misma para cualquier sistema de coordenadas.

(5) Si un objeto sigue un movimiento parabólico completo, su energía cinética disminuye hasta que es cero en el punto más alto y después comienza a aumentar.

Solución

(1) Falso. Puede suceder que la energía cinética de B sea mayor que la cinética de A pero que la energía potencial de A sea mayor que la de B de tal forma que la energía mecánica de A sea mayor que la de B.

(2) Verdadero. Como sólo actúa el peso y la fuerza de un resorte ideal, sabemos que la energía mecánica total se conserva. Si la energía potencial (que incluye la gravitacional y la elástica) del sistema aumentó 8 J, la energía cinética del objeto tuvo que disminuir 8 J.

(3) Falso. Si la energía cinética se reduce en cuatro y la masa permanece constante, la rapidez se tiene que haber reducido por dos, no por cuatro. Esto se aprecia en la ecuación de energía cinética: $K = (1/2)mv^2$. Si dividimos la rapidez por cuatro, obtenemos $K = (1/2)m(v/4)^2 = (1/2)m(v^2/16)$. Este último resultado es la energía cinética inicial dividida por 16, no por 4 como dice la afirmación.

(4) Verdadero. La energía potencial elástica sólo depende de la distancia de compresión o estiramiento y de la constante k, y ninguna de estas variables depende del sistema de coordenadas.

(5) Falso. En un movimiento parabólico la rapidez nunca llega a ser cero porque la velocidad en X siempre permanece constante y es mayor que cero. Como la rapidez nunca llega a ser cero, la energía cinética no puede llegar a ser cero (pero sí es verdad que la energía cinética disminuye mientras el objeto alcanza la altura máxima).

Problema (teórico) 5.12.

Palabras clave: trabajo, trabajo en términos de componentes.

(a) Explique qué es el trabajo.

(b) Escriba y explique la ecuación que nos permite calcular el trabajo y, con base en esa ecuación, diga cómo se calcula el trabajo de una fuerza que es antiparalela al desplazamiento y de una fuerza que es paralela al desplazamiento.

(c) Explique qué es el trabajo neto.

(d) Teniendo en cuenta que el trabajo hecho por una fuerza es la suma del trabajo hecho por sus componentes, y teniendo en cuenta lo hecho en (b), escriba una expresión del trabajo hecho por una fuerza que tiene componentes X y Y si el desplazamiento del objeto también tiene componentes X y Y.

Solución

(a) El trabajo es un concepto que *relaciona la fuerza que actúa sobre un objeto con el desplazamiento del objeto*. Para que una fuerza realice trabajo sobre un objeto, esta debe ir en la dirección del desplazamiento del objeto o en dirección contraria al desplazamiento del objeto. En los casos en los que la fuerza y el desplazamiento son paralelos, la fuerza ejerce un trabajo positivo. En los casos en los que la fuerza es contraria al desplazamiento (es antiparalela al desplazamiento), la fuerza ejerce un trabajo negativo.

Por ejemplo, si empujamos una nevera una cierta distancia, nuestras manos le han hecho trabajo positivo a la nevera porque la fuerza con que nuestras manos la empujan apunta en la misma dirección en la cual la nevera se mueve. Por el contrario, cuando los frenos de un carro hacen que el carro se detenga, los frenos le han hecho trabajo negativo al carro porque han ejercido una fuerza contraria al movimiento del carro.

Ahora, ¿qué pasa si la fuerza no es ni paralela ni antiparalela al desplazamiento? En un caso así debemos determinar si hay alguna componente de la fuerza que sea paralela o anti-paralela. Si esa fuerza tiene alguna componente paralela o antiparalela al desplazamiento entonces dicha componente hará trabajo positivo o negativo respectivamente. De la única forma en la que una fuerza no hace ningún trabajo es si esa fuerza es perpendicular al desplazamiento, pues en ese caso la fuerza no tendrá ninguna componente paralela o antiparalela al desplazamiento.

Nota 5.6. ¿Cuándo una fuerza realiza trabajo?

Una fuerza realiza trabajo sobre un objeto si alguna de las siguientes dos condiciones se cumple:

1. La fuerza es paralela al desplazamiento o tiene alguna componente paralela al desplazamiento. En este caso la fuerza (o su componente) realiza trabajo positivo sobre el objeto.

2. La fuerza es antiparalela al desplazamiento o tiene alguna componente anti-paralela al desplazamiento. En este caso, la fuerza (o su componente) realiza trabajo negativo.

Finalmente, debemos decir que el símbolo del trabajo que usaremos es W (por *work* en inglés), que el trabajo es una cantidad escalar y que tiene las dimensiones de energía (joules). Esto sugiere, como veremos pronto, que hay una relación estrecha entre el trabajo que una fuerza le hace a un objeto y la energía del objeto.

(b) El trabajo que una fuerza $\vec{F}$ hace se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$\vec{F} \cdot \vec{d} = W, \tag{1}$$

donde $\vec{d}$ es el desplazamiento del objeto y $\vec{F}$ es la fuerza. La anterior ecuación es la de un *producto punto* entre la fuerza y el desplazamiento. El producto punto entre dos vectores se define como *la multiplicación entre la magnitud de ambos vectores por el coseno del ángulo entre los vectores*. Así que podemos escribir la ecuación anterior así:

$$\|\vec{F}\| \, \|\vec{d}\| \cos\theta = W, \tag{2}$$

donde θ es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento del objeto.

Como se explicó en la sección anterior, si una fuerza es perpendicular al desplazamiento, no realiza trabajo. Esto es precisamente lo que refleja el producto punto; si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es de noventa grados y $\cos 90° = 0$, así que (2) nos da cero.

Además, si la fuerza es antiparalela, el trabajo es negativo y esto es también cierto de acuerdo al producto punto. El trabajo realizado por una fuerza antiparalela al desplazamiento es

$$\vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \, \|\vec{d}\| \cos 180° = -\|\vec{F}\| \, \|\vec{d}\|, \tag{3}$$

pues cuando los vectores son antiparalelos el ángulo que forman entre sí es de 180 grados y $\cos 180° = -1$. Así que cuando la fuerza y el desplazamiento son antiparalelos, calcular el producto punto es muy fácil: sólo multiplicamos la magnitud de la fuerza por la magnitud del desplazamiento y ponemos un signo negativo.

Por otro lado, si la fuerza es paralela al desplazamiento, el ángulo que forman entre sí ambos vectores es cero y $\cos 0^\circ = 1$, así que en ese caso el trabajo es positivo:

$$\vec{F}\cdot\vec{d} = \left\|\vec{F}\right\| \left\|\vec{d}\right\| \cos 0^\circ = \left\|\vec{F}\right\| \left\|\vec{d}\right\|. \tag{4}$$

Antes de continuar, debemos hacer una aclaración: la ecuación (1) para calcular el trabajo requiere que la fuerza sea constante durante el desplazamiento del objeto. En el caso en que la fuerza va variando mientras el objeto se desplaza, el desplazamiento que debemos usar en la ecuación (1) es un desplazamiento infinitesimal. En un caso así, para hallar el trabajo total debemos sumar los trabajos infinitesimales de cada instante de tiempo. En este libro no debemos calcular trabajos infinitesimales.

(c) El trabajo neto sobre un objeto es la suma de todos los trabajos que hacen todas las fuerzas sobre el objeto. Lo podemos representar matemáticamente así:

$$W_n = \sum_i W_i = \sum_i \left(\vec{F}_i\cdot\vec{d}\right), \tag{5}$$

donde la suma se hace sobre todos los trabajos. Notemos que la suma va sobre todas las fuerzas (por eso el subíndice i), pero el desplazamiento es uno solo porque el objeto sólo sufre un desplazamiento (por eso no tiene subíndice)[9].

(d) Nos dicen que el trabajo hecho por una fuerza es igual a la suma del trabajo hecho por cada componente de la fuerza. Cada componente de la fuerza hace un trabajo que depende de la respectiva componente del desplazamiento. Por ejemplo, la componente X de la fuerza hace un trabajo que depende del desplazamiento X del objeto y la componente Y de la fuerza hace un trabajo que depende del desplazamiento Y del objeto. Por supuesto, la componente X de la fuerza no hace trabajo con la componente Y del desplazamiento, pues la fuerza en X es perpendicular al desplazamiento en Y.

Como la componente X de la fuerza sólo puede ser paralela o antiparalela a la componente X del desplazamiento (pues ambas están en X), entonces la componente X de la fuerza hará un trabajo igual a $\left\|\vec{F}_x\right\| \left\|\vec{D}_x\right\|$ si son paralelas, o igual a $-\left\|\vec{F}_x\right\| \left\|\vec{D}_x\right\|$ si son antiparalelas. Por su parte, la componente Y de la fuerza hará un trabajo igual a $\left\|\vec{F}_y\right\| \left\|\vec{D}_y\right\|$ si la fuerza en Y es paralela al desplazamiento en Y, o igual a $-\left\|\vec{F}_y\right\| \left\|\vec{D}_y\right\|$ si son antiparalelas.

En resumen, el trabajo hecho por la componente X de la fuerza es $\pm\left\|\vec{F}_x\right\| \left\|\vec{D}_x\right\|$, donde el signo dependerá de si la componente X de la fuerza y del desplazamiento son paralelas o antiparalelas. Así mismo, el trabajo hecho por la

[9] Por supuesto, el desplazamiento se puede analizar en X y Y, pero en esta ecuación estamos refiriéndonos al desplazamiento total.

componente Y será $\pm \|\vec{F}_y\| \|\vec{D}_y\|$. El trabajo total hecho por la fuerza es la suma del trabajo de cada componente (debemos respetar los signos): $W = \pm \|\vec{F}_x\| \|\vec{D}_x\| \pm \|\vec{F}_y\| \|\vec{D}_y\|$.

Nota 5.7. Trabajo

- En general el trabajo que una fuerza $\vec{F}$ realiza sobre un objeto se calcula usando la siguiente ecuación: $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos\theta$, donde $\vec{d}$ es el desplazamiento del objeto y θ es el ángulo que se forma entre la fuerza y el desplazamiento.
- Si la fuerza es paralela al desplazamiento, el trabajo es positivo y es igual a la multiplicación de la magnitud de la fuerza y el desplazamiento: $W = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\|$.
- Si la fuerza es antiparalela al desplazamiento, el trabajo es la multiplicación de la magnitud de los vectores con un signo menos: $W = -\|\vec{F}\| \|\vec{d}\|$.
- Si la fuerza es perpendicular al desplazamiento el trabajo es cero.
- También podemos calcular el trabajo si conocemos las componentes de la fuerza y el desplazamiento, usando la ecuación $W = \pm \|\vec{F}_x\| \|\vec{D}_x\| \pm \|\vec{F}_y\| \|\vec{D}_y\|$, donde los signos dependen de si cada componente de la fuerza es paralela o antiparalela a la respectiva componente del desplazamiento.

Problema 5.13.

Palabras clave: trabajo, trabajo neto, trabajo de la fricción.

Un bus de Transmilenio de 25 000 kilogramos de masa aplica sus frenos, pero hay aceite en el piso y Hércules tiene que ayudarlo a parar. Suponga que el bus recorre 20 metros antes de que Hércules lo detenga por completo y suponga que la fuerza que le hace Hércules al bus es constante y de magnitud de 5000 N y se opone al desplazamiento del bus. Además, entre el piso y las llantas del bus hay un coeficiente de fricción dinámico de 0.25.

(a) ¿Cuál es el trabajo que Hércules le hace al bus para detenerlo?

(b) ¿Cuál es el trabajo que el bus le hace a Hércules en ese transcurso?

(c) ¿Cuál es el trabajo neto sobre el bus?

Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b) y (c) El bus tiene masa de 25 000 kilogramos, el coeficiente de fricción dinámico entre las llantas y el piso es de 0.25, y el bus recorre 20 metros antes de detenerse por completo. Además, Hércules ejerce una fuerza de magnitud de 5000 N, que se opone al desplazamiento del bus.

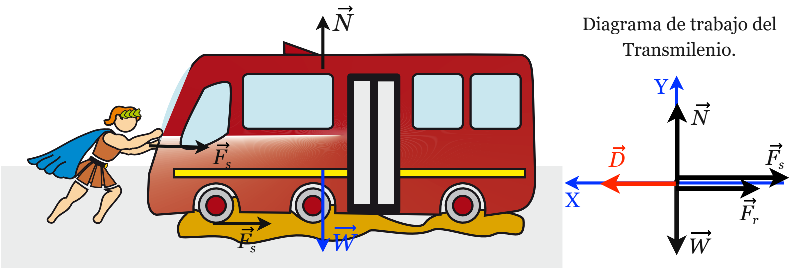
¿Qué nos piden?

(a) El trabajo que Hércules realiza sobre el bus.

(b) El trabajo que el bus le hace a Hércules.

(c) El trabajo neto sobre el bus.

(a) En los problemas de trabajo, así como en los de fuerza, es importante realizar un diagrama de fuerzas o, al menos, un diagrama en el que se ilustre la fuerza a la que le vamos a calcular el trabajo. Además, en los diagramas para problemas de trabajo debemos indicar el vector de desplazamiento, pues el trabajo depende del ángulo entre este vector y el vector de la fuerza. Llamaremos a estos diagramas en los que aparecen las fuerzas y aparece el desplazamiento *diagramas de trabajo*. Como en el punto (c) nos piden el trabajo neto, realicemos de una vez un diagrama para todas las fuerzas que actúan sobre el bus:



Sobre el bus actúan cuatro fuerzas: el peso, la normal, la fricción y la fuerza que hace Hércules que hemos llamado $\vec{F}_S$ (esta fuerza apunta en la dirección negativa del eje X que hemos usado). Además, el desplazamiento del bus, que hemos llamado $\vec{D}$ (en rojo), apunta en la dirección positiva del eje X del sistema de coordenadas que hemos elegido.

Nota 5.8. Diagrama de trabajo

En los problemas de trabajo es conveniente realizar un diagrama de trabajo. Este diagrama no es más que un diagrama de fuerzas en el que además de las fuerzas indicamos el desplazamiento del objeto.

El trabajo que Hércules le hace al bus se puede calcular teniendo en cuenta que la fuerza que hace Hércules es antiparalela al desplazamiento. El trabajo que hace una fuerza que es antiparalela al desplazamiento es simplemente (nota 5.7).

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = -\left\|\vec{F}\right\| \left\|\vec{d}\right\|. \tag{1}$$

Nos dicen que la magnitud de la fuerza que hace Hércules es de 5000 N y la magnitud del desplazamiento (la distancia recorrida) es de 20 metros, así que el trabajo realizado por Hércules es

$$W_s = \vec{F}_s \cdot \vec{D} = -\underbrace{(5000\ \mathrm{N})}_{\|\vec{F}_s\|}\underbrace{(20\ \mathrm{m})}_{\|\vec{D}\|} = -100\,000\ \mathrm{J}. \tag{2}$$

(b) El trabajo que el bus le hace a Hércules es muy fácil de calcular si tenemos en cuenta la tercera ley de Newton. Según esta ley, la fuerza que el bus le hace a Hércules tiene la misma magnitud pero dirección contraria a la fuerza que Hércules le hace al bus. Así que el bus le debe de hacer una fuerza de magnitud de 5000 N en dirección positiva de X (llamemos a esta fuerza $\vec{F}_T$). Además, notemos que el desplazamiento de Hércules tiene que ser el mismo que el del bus, pues él es arrastrado mientras el bus se detiene.

Como el desplazamiento de Hércules tiene dirección positiva de X y la fuerza que ejerce el bus tiene también dirección positiva de X, entonces la fuerza y el desplazamiento son paralelos, así que el trabajo es simplemente la multiplicación de la magnitud de la fuerza por la magnitud del desplazamiento (nota 5.7):

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \left\|\vec{F}\right\| \left\|\vec{d}\right\|. \tag{3}$$

En este caso, como la fuerza tiene magnitud de 5000 N y el desplazamiento magnitud de 20 metros, obtenemos

$$W_T = \vec{F}_T \cdot \vec{D} = \underbrace{(5000\ \mathrm{N})}_{\|\vec{F}_T\|} \underbrace{(20\ \mathrm{m})}_{\|\vec{D}\|} = 100\,000\ \mathrm{J}. \tag{4}$$

Notemos que este es exactamente el mismo trabajo hecho por Hércules pero con un signo positivo. Esto no es coincidencia sino un resultado general: el trabajo que un cuerpo A le hace a B y el que B le hace a A son iguales salvo por un signo menos. Esto es resultado de la tercera ley de Newton; la fuerza que A le hace a B tiene signo contrario a la fuerza que B le hace a A, así que una de estas fuerzas hará un trabajo positivo y la otra uno negativo.

Nota 5.9. Relación entre el trabajo que A le hace B y el que B le hace a A

El trabajo que A le hace a B es igual, salvo por un signo contrario, al trabajo que B le hace a A; $W_A = -W_B$.

(c) Para calcular el trabajo neto sobre el bus hay que hallar el trabajo que cada fuerza hace y sumarlos. Ya hallamos el trabajo que Hércules hace, pero sobre el bus hay tres fuerzas más: el peso, la normal y la fricción. El trabajo hecho por el peso es cero porque el peso es perpendicular al desplazamiento (nota 5.7), como se aprecia en el diagrama de trabajo. El trabajo hecho por la normal también es cero porque la normal también es perpendicular al desplazamiento. Así que el único trabajo que nos queda por calcular es el trabajo de la fricción.

Notemos en el diagrama de trabajo que la fricción es antiparalela al desplazamiento, así que el trabajo realizado por ella está dado por la ecuación (1). La magnitud de la fuerza de fricción dinámica es $\mu_d N$, así que la ecuación (1) quedaría así:

$$W_{fr} = \vec{F}_r \cdot \vec{d} = -\left\|\vec{F}_{fr}\right\| \left\|\vec{d}\right\| = -\mu_d N d, \tag{5}$$

donde d es la distancia recorrida. En este problema es claro que $N = mg$ porque el bus no tiene aceleración en Y, así que la ecuación (5) se puede escribir así:

$$W_{fr} = -\mu_d \underbrace{mg}_{N} d. \tag{6}$$

Si reemplazamos los valores conocidos, el trabajo realizado por la fricción nos da

$$W_{fr} = -\underbrace{(0.25)}_{\mu_d}\underbrace{(25\,000\ \text{kg})}_{m}(9.81\ \text{m/s}^2)\underbrace{(20\ \text{m})}_{d} = -1\,226\,250\ \text{J}. \tag{7}$$

Por lo tanto, el trabajo neto es la suma del trabajo de la fricción más el trabajo de Hércules:

$$W_n = \underbrace{100\,000\ \text{J}}_{W_s} - \underbrace{1\,226250\ \text{J}}_{W_{fr}} = -1\,126\,250\ \text{J}. \tag{8}$$

Problema 5.14.

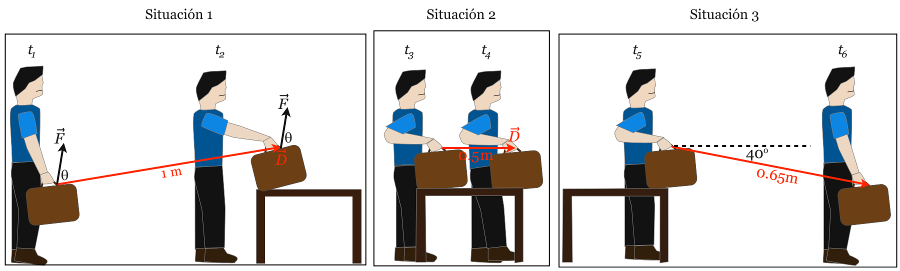
Palabras clave: definición de trabajo, cálculo de la fuerza a partir del trabajo, cálculo del ángulo entre la fuerza y el desplazamiento.

Considere las tres situaciones indicadas en el dibujo. En la primera situación, José levanta su maletín y lo pone sobre una mesa. En la segunda situación, José arrastra el maletín sobre la mesa. En la tercera situación, José baja de la mesa su maletín.

(a) Suponga que la magnitud de la fuerza que hace José para levantar la maleta en la primera situación es de 50 N y suponga que esa fuerza es constante. Además, el trabajo que hace José sobre la maleta es de 25 joules y la magnitud del desplazamiento es de 1 metro. ¿Cuál es el ángulo θ indicado en el dibujo?

(b) Suponga, para la segunda situación, que el coeficiente de fricción dinámico entre la mesa y el maletín es de 0.25 y suponga que el trabajo hecho por la fricción es de −18.75 joules. Además, tenga en cuenta que la fuerza de José es completamente paralela a la superficie de la mesa y que él arrastra la maleta 0.5 metros. ¿Cuál es la masa de la maleta?

(c) Finalmente, para la tercera situación, suponga que la magnitud del desplazamiento es de 0.65 metros, y José realiza un trabajo de −30 joules (preste atención al ángulo de 40 grados indicado en el dibujo). ¿Cuál es la magnitud de la fuerza hecha por José en esta situación si la dirección de la fuerza es completamente vertical?



Solución

¿Qué información nos dan?

(a) José ejerce una fuerza de 50 N de magnitud constante, y el trabajo que esa fuerza hace es de 25 joules. Además, la magnitud del desplazamiento es de 1 metro.

(b) El coeficiente de fricción dinámico entre la mesa y la maleta es de 0.25 y el trabajo hecho por la fricción es de −18.75 joules. En este tramo, la fuerza de José es completamente paralela al desplazamiento que tiene magnitud de 0.5 metros.

(c) La magnitud del desplazamiento es de 0.65 metros, formando un ángulo de 40° con respecto a una línea horizontal (como se ilustra en el dibujo). Además, José realiza un trabajo de −30 joules y la fuerza que ejerce es completamente vertical

¿Qué nos piden?

(a) Hallar el ángulo θ indicado en la figura de la primera situación.

(b) Hallar la masa de la maleta.

(c) Determinar la magnitud de la fuerza que hace José en la tercera situación.

(a) Para la primera situación ya tenemos el diagrama de trabajo de la maleta, pues nos indican la fuerza que hace José, que es la única fuerza que nos interesa en esa situación, y nos indican el desplazamiento. Para hallar el ángulo θ tengamos presente que el trabajo que una fuerza hace está dado por

$$W = \|\vec{F}\|\,\|\vec{D}\|\cos\theta. \tag{1}$$

El ángulo θ de la anterior ecuación es precisamente el ángulo que se forma entre la fuerza y el desplazamiento y ese es el ángulo que deseamos determinar. Podemos despejar $\cos\theta$ si dividimos por la magnitud de la fuerza y la magnitud del desplazamiento:

$$\frac{W}{\|\vec{F}\|\,\|\vec{D}\|} = \cos\theta. \tag{2}$$

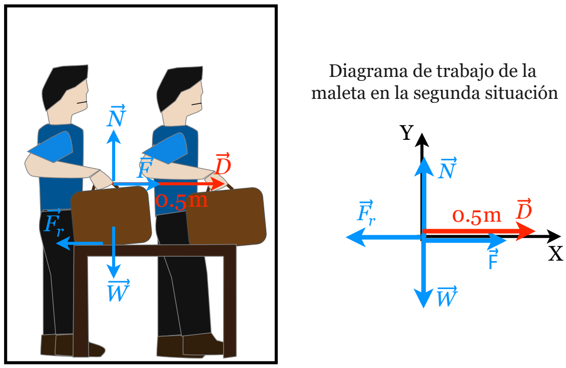
Si aplicamos arcoseno a ambos lados podemos despejar θ en términos de las variables conocidas:

$$\arccos\left(\frac{W}{\|\vec{F}\|\,\|\vec{D}\|}\right) = \theta. \tag{3}$$

Si reemplazamos los valores conocidos, obtenemos

$$\arccos\left(\frac{\overbrace{(25\ \mathrm{J})}^{W}}{\underbrace{(50\ \mathrm{N})}_{\|\vec{F}\|}\underbrace{(1\ \mathrm{m})}_{\|\vec{D}\|}}\right) = 60^\circ = \theta. \tag{4}$$

(b) Como nos dicen el trabajo hecho por la fricción y el coeficiente de fricción, y como la fricción está relacionada con la masa (a través de la normal), podemos hallar la masa de la maleta. Empecemos por realizar el diagrama de trabajo de la maleta en esta situación, teniendo en cuenta que hay cuatro fuerzas: el peso, la fricción, la normal y la fuerza que hace José:



Como la fricción es antiparalela al desplazamiento, el trabajo hecho por la fricción (que llamaremos W_r) es la multiplicación de la magnitud de la fricción con la magnitud del desplazamiento y con un signo menos:

$$W_r = -\left\|\vec{F}_r\right\|\left\|\vec{D}\right\|. \tag{5}$$

Ahora usemos el hecho de que la magnitud de la fricción es μN. La maleta no tiene aceleración en Y así que la magnitud de la normal se puede hallar teniendo en cuenta que $\vec{N} - \vec{W} = 0$ (las únicas fuerzas en Y son el peso y la normal). Por lo tanto, $N = mg$. Teniendo en cuenta esto, podemos escribir así a la ecuación (5):

$$W_r = -\underbrace{\mu m g}_{\left\|\vec{F}_r\right\|}\left\|\vec{D}\right\|. \tag{6}$$

Ahora podemos despejar la masa de la anterior ecuación en términos de variables conocidas:

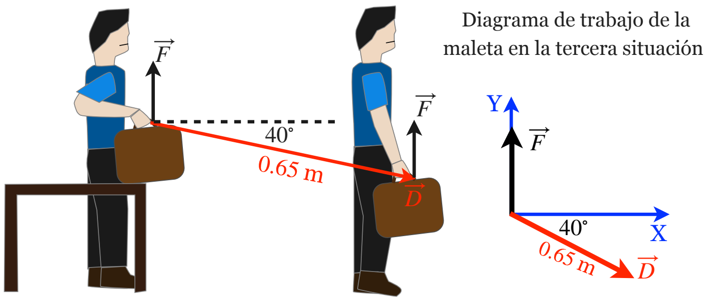
$$\frac{W_r}{-\mu g\left\|\vec{D}\right\|} = m. \tag{7}$$

Si usamos los valores de cada variable, obtenemos la masa:

$$\frac{\overbrace{-18.75\ \mathrm{J}}^{W_r}}{-\underbrace{(0.25)}_{\mu}(9.81\ \mathrm{m/s^2})\underbrace{(0.5\ \mathrm{m})}_{\left\|\vec{D}\right\|}} = 15.29\ \mathrm{kg} = m. \tag{8}$$

¡Es un maletín pesado!

(c) Para la última situación debemos hallar la magnitud de la fuerza hecha por José. Empecemos por realizar el diagrama de trabajo teniendo en cuenta que la única fuerza que nos interesa es la fuerza que hace José y que esta es completamente vertical:



Para hallar la magnitud de la fuerza podemos usar la ecuación (1). Si dividimos por $\|\vec{D}\|\cos\theta$ en ambos lados de la ecuación (1), obtenemos

$$\frac{W}{\|\vec{D}\|\cos\theta} = \|\vec{F}\|. \tag{9}$$

Notemos antes de reemplazar los valores que el ángulo que nos interesa es el marcado entre la fuerza y el desplazamiento, y ese ángulo no es 40 grados como podríamos pensar inicialmente. De hecho, en el diagrama de trabajo se ve que el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es de 40 grados más 90 grados, es decir, es de 130 grados. Por lo tanto, la ecuación (9) queda así:

$$\frac{\overbrace{-30\ \mathrm{J}}^{W}}{\underbrace{0.65\ \mathrm{m}}_{\|\vec{D}\|}\cos 130°} = 71.80\ \mathrm{N} = \|\vec{F}\|. \tag{10}$$

Problema (teórico) 5.15.

Palabras clave: trabajo en diferentes sistemas de coordenadas, selección de sistema de coordenadas para simplificar cálculos de trabajo, trabajo hecho por el peso.

Suponga que un helicóptero realiza un desplazamiento de magnitud $\|\vec{D}\|$, como se muestra en el dibujo. Desde el tiempo 1 hasta el tiempo 2 la fuerza del motor es constante de magnitud $\|\vec{F}_m\|$ y es completamente vertical, mientras que el desplazamiento marca un ángulo θ con respecto a una línea horizontal.

(a) Escriba en términos de $\|\vec{F}_m\|$ y θ las componentes de la fuerza del motor en ambos sistemas de coordenadas (el rojo y el verde). Ayuda: para este punto es útil considerar las siguientes identidades trigonométricas: $\cos(90° - x) = \sin x$ y $\sin(90° - x) = \cos x$.

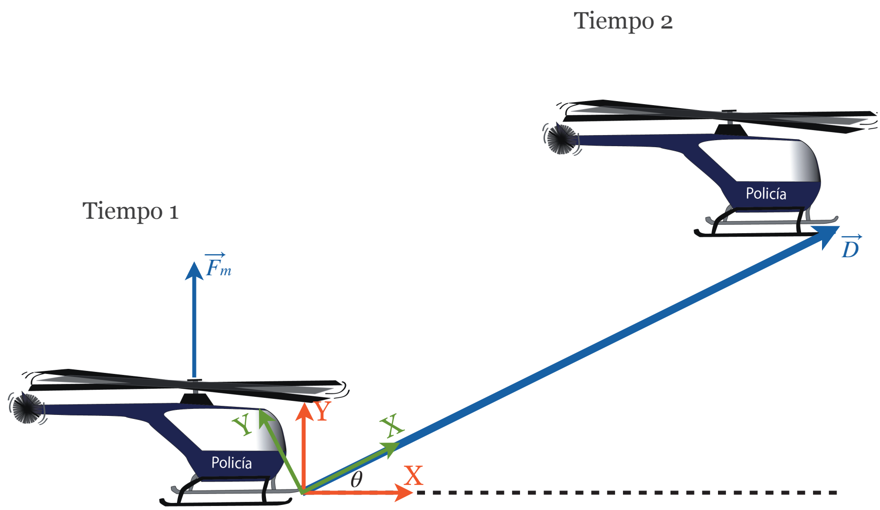
(b) Escriba en términos de $\|\vec{D}\|$ y θ las componentes del desplazamiento en ambos sistemas de coordenadas.

(c) Escriba una expresión para el trabajo realizado por el motor teniendo en cuenta que $W = \pm\|\vec{F}_x\|\,\|\vec{D}_x\| \pm \|\vec{F}_y\|\,\|\vec{D}_y\|$. Haga esto para las componentes de los vectores en el sistema verde y en el rojo, y compare.

(d) Con base en (c) y usando el sistema de coordenadas rojo, escriba una expresión para el trabajo realizado por el peso en términos de la masa del helicóptero y $\|\vec{D}_y\|$. Además, explique qué cambiaría si en lugar de subir el helicóptero hubiera descendido.

(e) Vuelva a escribir la expresión del trabajo hecho por el peso pero ahora en vez de usar $\|\vec{D}_y\|$ use el hecho de que el cambio de altura de un objeto es $h_f - h_i$.

(f) Compare el cambio de energía potencial gravitacional con el trabajo hecho por el peso calculado en el punto anterior.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b) y (c) Un helicóptero realiza un desplazamiento de magnitud $\|\vec{D}\|$ que marca un ángulo θ con una línea horizontal. El motor ejerce una fuerza de magnitud $\|\vec{F}_m\|$ que es completamente vertical. Nos recuerdan la ecuación $W = \pm\|\vec{F}_x\|\,\|\vec{D}_x\| \pm \|\vec{F}_y\|\,\|\vec{D}_y\|$ y además nos dan dos sistemas de coordenadas.

(d) Debemos usar el sistema de coordenadas rojo y los resultados de (c).

(e) y (f) El cambio de altura de un objeto es $h_f - h_i$.

¿Qué nos piden?

(a) Escribir las componentes de la fuerza del motor en ambos sistemas de coordenadas (el rojo y el verde) en términos de $\|\vec{F}_m\|$ y θ.

(b) Escribir las componentes del desplazamiento en ambos sistemas de coordenadas en términos de $\|\vec{D}\|$ y θ.

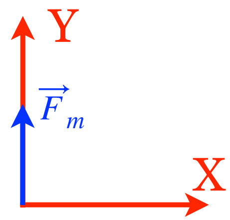
(c) Escribir una expresión para el trabajo realizado por el motor según ambos sistemas de coordenadas.

(d) Escribir una expresión para el trabajo realizado por el peso en términos de la masa del helicóptero y $\|\vec{D}_y\|$.

(e) Escribir la expresión hallada en (d) teniendo en cuenta que el cambio de altura de un objeto es $h_f - h_i$.

(f) Comparar la expresión hallada en (e) con el cambio de energía potencial gravitacional.

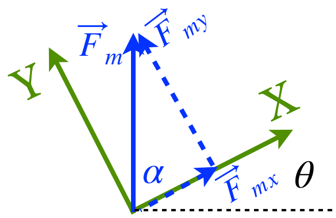
(a) Empecemos por descomponer la fuerza del motor en el sistema rojo. En ese sistema, la fuerza es paralela al eje Y así que no hay que descomponerla:



Así, en este sistema la magnitud de la componente X es cero y la magnitud de la componente Y es $\|\vec{F}_m\|$:

$$\|\vec{F}_{mx}\| = 0, \tag{1}$$
$$\|\vec{F}_{my}\| = \|\vec{F}_m\|. \tag{2}$$

En el sistema verde sí habría que descomponer la fuerza:



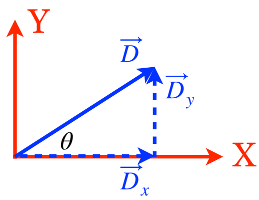
Notemos en el dibujo que la magnitud de la componente Y es $= \|\vec{F}_m\| \sin\alpha$ mientras que la magnitud de la componente X es $= \|\vec{F}_m\| \cos\alpha$. Sin embargo, nos piden que expresemos estas componentes en términos del ángulo θ. Para hacer eso, notemos que el vector $\|\vec{F}_m\|$ de la fuerza del motor es perpendicular a la línea negra punteada, así que el ángulo formado entre esta línea y el vector es 90 grados. Como se aprecia en el dibujo $\alpha + \theta = 90°$. Es decir, $\alpha = 90° - \theta$. Teniendo en cuenta esto, podemos escribir la magnitud de las componentes de la fuerza de la siguiente manera:

$$\|\vec{F}_{mx}\| = \|\vec{F}_m\| \cos\alpha = \|\vec{F}_m\| \cos(90° - \theta), \tag{3}$$
$$\|\vec{F}_{my}\| = \|\vec{F}_m\| \sin\alpha = \|\vec{F}_m\| \sin(90° - \theta). \tag{4}$$

Además, si usamos que $\cos(90° - x) = \sin x$ y que $\sin(90° - x) = \cos x$ esto nos da

$$\|\vec{F}_{mx}\| = \|\vec{F}_m\| \sin\theta, \tag{5}$$
$$\|\vec{F}_{my}\| = \|\vec{F}_m\| \cos\theta. \tag{6}$$

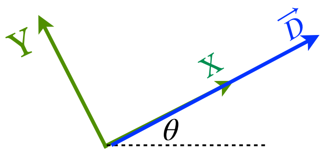
(b) Ahora descompondremos el desplazamiento en los dos sistemas de coordenadas. En el sistema rojo el desplazamiento se descompondría así:



Según este dibujo, la componente X del desplazamiento es $\|\vec{D}\| \cos\theta$ y la componente Y es $\|\vec{D}\| \sin\theta$:

$$\|\vec{D}_x\| = \|\vec{D}\| \cos\theta, \tag{7}$$
$$\|\vec{D}_y\| = \|\vec{D}\| \sin\theta. \tag{8}$$

En el otro sistema el desplazamiento está alineado con el eje X, así que no hay que descomponerlo (su componente Y es cero):



$$\|\vec{D}_x\| = \|\vec{D}\|, \tag{9}$$
$$\|\vec{D}_y\| = 0. \tag{10}$$

(c) Ahora que conocemos las componentes de la fuerza y del desplazamiento en cada sistema podemos calcular el trabajo usando la ecuación

$$W = \pm \|\vec{F}_x\| \|\vec{D}_x\| \pm \|\vec{F}_y\| \|\vec{D}_y\|, \tag{11}$$

donde los signos dependen de si la componente de la fuerza es o no paralela a la del desplazamiento. En el sistema rojo, la magnitud de la componente X de la fuerza es cero y la magnitud de la componente Y es $\|\vec{F}_m\|$. Además, la magnitud de la componente X del desplazamiento es $\|\vec{D}\|\cos\theta$ y la magnitud de la componente Y es $\|\vec{D}\|\sin\theta$ —ver ecuaciones (7) y (8)—:

$$W = \underbrace{(0)}_{\|\vec{F}_{mx}\|}\underbrace{\left(\|\vec{D}\|\cos\theta\right)}_{\|\vec{D}_x\|} + \underbrace{\|\vec{F}_m\|}_{\|\vec{F}_{my}\|}\underbrace{\|\vec{D}\|\sin\theta}_{\|\vec{D}_y\|} = \|\vec{F}_m\|\,\|\vec{D}\|\sin\theta. \tag{12}$$

En el sistema verde, la magnitud de la componente X de la fuerza es $\|\vec{F}_{mx}\| = \|\vec{F}_m\|\sin\theta$ y la magnitud de la componente Y es $\|\vec{F}_{my}\| = \|\vec{F}_m\|\cos\theta$ —ecuaciones (5) y (6)—. Además, la magnitud de la componente X del desplazamiento en este sistema es $\|\vec{D}\|$ y la magnitud de la componente Y es cero:

$$W = \underbrace{\left(\|\vec{F}_m\|\sin\theta\right)}_{\|\vec{F}_{mx}\|}\underbrace{\|\vec{D}\|}_{\|\vec{D}_x\|} + \underbrace{\left(\|\vec{F}_m\|\cos\theta\right)}_{\|\vec{F}_{my}\|}\underbrace{(0)}_{\|\vec{D}_y\|} = \left(\|\vec{F}_m\|\sin\theta\right)\|\vec{D}\|. \tag{13}$$

Notemos que este es exactamente el mismo resultado que hemos obtenido anteriormente con la ecuación (12) (el orden de los factores está cambiado). Así, hemos comprobado que *el trabajo realizado por una fuerza no depende del sistema de coordenadas usado*[10].

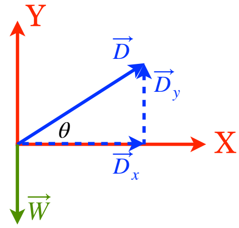
Por otro lado, debe ser claro que para aprovechar la ecuación (11) podemos buscar un sistema que tenga un eje alineado con la fuerza (como el sistema rojo) o con el desplazamiento (como el sistema verde). Si hacemos esto, sólo nos quedará uno de los dos términos de esa ecuación, pues el otro será cero.

Nota 5.10. Sistema de coordenadas conveniente para calcular el trabajo

Para calcular el trabajo usando la ecuación $W = \pm\|\vec{F}_x\|\,\|\vec{D}_x\| \pm \|\vec{F}_y\|\,\|\vec{D}_y\|$ es muy conveniente usar un sistema de coordenadas según el cual la fuerza o el desplazamiento se alineen con alguno de los ejes. Si alineamos un eje con la fuerza o con el desplazamiento, el trabajo será la multiplicación de la fuerza en ese eje con el desplazamiento en ese mismo eje y nos podemos olvidar de todo lo que pase en el otro eje. Si, por ejemplo, alineamos el desplazamiento con el eje Y, el trabajo será sólo F_yD_y porque el otro término será cero (D_x sería cero).

(d) Teniendo en cuenta lo anterior, el trabajo realizado por el peso es fácil de calcular. Si escogemos el sistema rojo, el peso estará alineado con el eje Y. Así que para calcular el trabajo sólo nos interesará la componente Y del desplazamiento:

[10] Esto es válido para sistemas que no se mueven entre sí, si los sistemas se mueven la magnitud del desplazamiento puede cambiar y entonces el trabajo puede cambiar.



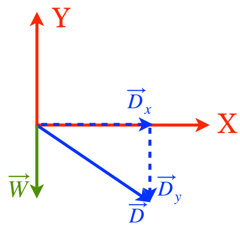
Usamos un sistema en el cual el peso está alineado con el eje Y.

En este caso la componente Y del desplazamiento es antiparalela al peso, así que el trabajo realizado por el peso es simplemente

$$W_w = -\left\|\vec{W}\right\|\left\|\vec{D}_y\right\| = -mg\left\|\vec{D}_y\right\|, \tag{14}$$

donde el signo menos aparece porque los vectores son antiparalelos y donde hemos usado el hecho de que la magnitud del peso es mg.

Si el helicóptero descendiera en lugar de subir, el análisis para el trabajo del peso sería igual, sólo que la componente Y del desplazamiento apuntaría hacia abajo, paralela al peso:



Si el helicóptero descendiera la componente Y del desplazamiento sería paralela al peso.

En este caso el trabajo realizado por el peso es positivo porque el peso es paralelo a la componente Y del desplazamiento, y el trabajo está dado por

$$W_w = \left\|\vec{W}\right\|\left\|\vec{D}_y\right\| = mg\left\|\vec{D}_y\right\|. \tag{15}$$

Lo mejor de todo es que, como vimos en el punto anterior, el trabajo no depende del sistema de coordenadas así que *las ecuaciones (14) y (15) son válidas sin importar el sistema que usemos*. Como muestran estas ecuaciones, para calcular el trabajo hecho por el peso sólo nos va a importar cuánto subió el objeto o cuánto bajó (es decir, la magnitud de la componente vertical del desplazamiento).

(e) Podemos escribir lo que sube o lo que baja el objeto como la diferencia de altura $h_f - h_i$ en vez de como $\left\|\vec{D}_y\right\|$. Como vimos en el numeral anterior, si un objeto sube podemos escribir el trabajo hecho por el peso como $-mg\left\|\vec{D}_y\right\|$, así que si $\left\|\vec{D}_y\right\|$ es igual a $h_f - h_i$, esto es lo mismo que $-mg(h_f - h_i)$.

Ahora, notemos que si el objeto desciende $h_f - h_i$ será negativo, pues la altura final será menor que la inicial. Pero $\|\vec{D}_y\|$ es siempre positivo porque es la magnitud de un vector, así que cuando el objeto baja no podemos reemplazar $\|\vec{D}_y\|$ usando $h_f - h_i$. Pero podemos arreglar esto si ponemos un signo negativo: $-(h_f - h_i)$ (el signo negativo de afuera cancela el que sale de la resta $h_f - h_i$). Así que cuando el objeto baja podemos reemplazar $\|\vec{D}_y\|$ con $-(h_f - h_i)$ y entonces la ecuación $mg\|\vec{D}_y\|$ se puede escribir como $-mg(h_f - h_i)$. Se puede ver que $-mg(h_f - h_i)$ es exactamente la misma fórmula que habíamos escrito cuando el objeto subía. Así que si sube o si baja, el trabajo hecho por el peso se calcula igual, con

$$W_w = -mg(h_f - h_i). \tag{16}$$

Esta ecuación para el trabajo hecho por el peso es completamente general porque, como ya mostramos, el trabajo no depende del sistema de coordenadas usado.

(f) Finalmente, debemos comparar el resultado anterior para el trabajo realizado por el peso con el cambio de energía potencial gravitacional, que es $\Delta U_g = mg(h_f - h_i)$ (nota 5.2). Note que el trabajo realizado por el peso dado por la ecuación (16) es precisamente el cambio de energía potencial gravitacional pero con un signo negativo. Es decir, el trabajo que hace el peso es igual al negativo del cambio de energía potencial gravitacional. Por ejemplo, si el peso realiza un trabajo de 100 joules, la energía potencial gravitacional disminuye 100 joules.

Nota 5.11. Trabajo hecho por el peso

El trabajo realizado por el peso sólo depende del desplazamiento vertical del objeto, es decir, sólo depende de $h_f - h_i$. El trabajo hecho por el peso se calcula usando la ecuación $W_w = -mg(h_f - h_i)$.

Notemos que si el objeto sube esta ecuación nos da negativa y entonces el trabajo hecho por el peso es negativo, lo cual tiene sentido porque si el objeto sube el desplazamiento vertical del objeto será "hacia arriba" mientras que el peso siempre apunta hacia abajo. Por el contrario, si el objeto desciende, esta ecuación es positiva porque $h_f - h_i$ será negativo. Esto tiene sentido porque en ese caso el desplazamiento vertical será hacia abajo, en la misma dirección del peso.

Además, el trabajo hecho por el peso es igual al negativo del cambio de energía potencial gravitacional: $W_w = -\Delta U_g$.

No sobra resaltar que para el trabajo hecho por el peso son irrelevantes las otras componentes del desplazamiento; sólo importa el cambio de altura porque el peso no tiene componentes en otras direcciones diferentes a la dirección vertical.

Problema de repaso 5.16.

Palabras clave: trabajo en diferentes sistemas de coordenadas, selección de sistema de coordenadas para simplificar cálculos de trabajo, trabajo hecho por el peso.

Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta:

(1) El trabajo que una fuerza hace sobre un objeto se puede calcular considerando únicamente la componente del desplazamiento que es paralela o antiparalela a dicha fuerza y podemos ignorar todas las demás componentes.

(2) Si sólo conocemos las componentes de la fuerza y del desplazamiento, la forma más sencilla de calcular el trabajo es usando la ecuación $W = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos\theta$.

(3) Si un camión de masa m desciende desde un pueblo en la montaña hasta el nivel del mar, y un helicóptero de masa m desciende desde el mismo pueblo hasta el nivel del mar, entonces el trabajo hecho por el peso será mayor para el camión porque recorrió una ruta más larga.

(4) El trabajo nunca depende de la distancia total recorrida por el objeto, sino sólo del cambio de altura.

(5) El trabajo que A le hace a B es el mismo que el negativo del trabajo que B le hace a A.

Solución

(1) Verdadero. Si alineamos uno de los ejes con la fuerza, entonces la única componente del desplazamiento que nos interesa para calcular el trabajo es aquella que esté alineada con ese mismo eje, es decir, aquella que sea paralela o antiparalela a la fuerza. Las otras componentes del desplazamiento serán perpendiculares y entonces no harán trabajo.

(2) Falso. Si sólo conocemos las componentes de la fuerza y del desplazamiento la forma más simple de calcular el trabajo no es usando la ecuación $W = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos\theta$ porque nos tocaría hallar el ángulo y la magnitud de la fuerza. La forma más sencilla para calcular el trabajo en este caso es con la ecuación $W = \pm\|\vec{F}_x\| \|\vec{D}_x\| \pm \|\vec{F}_y\| \|\vec{D}_y\|$.

(3) Falso. El trabajo hecho por el peso no depende de la distancia total recorrida sino del cambio de altura; $-mg(h_f - h_i)$. En este caso la masa y el cambio de altura son iguales así que el trabajo del peso sobre el helicóptero es igual al trabajo del peso sobre el camión.

(4) Falso. La gran mayoría de las veces el trabajo sí depende de la distancia recorrida, sólo en casos especiales, como con el peso, el trabajo no depende de la distancia recorrida.

(5) Verdadero. Como se explicó en la nota 5.9, el trabajo que A le hace a B es igual al trabajo que B le hace a A con un signo negativo (esto viene de aplicar la tercera ley de Newton).

Problema 5.17.

Palabras clave: trabajo del peso, trabajo de la normal, trabajo de fuerzas no conservativas, relación entre la fuerza y la energía cinética.

Considere las dos cabinas de teleférico ilustradas en el siguiente dibujo. En la primera está Leonardo y en la segunda está Ricardo. Suponga que la masa de Leonardo y de Ricardo es la misma: 70 kilogramos. Y suponga que la masa de las cabinas también es la misma: 300 kilogramos (sin incluir a los pasajeros). Suponga que ambos teleféricos subieron desde 1000 metros sobre el nivel del mar hasta 1600 metros sobre el nivel del mar.

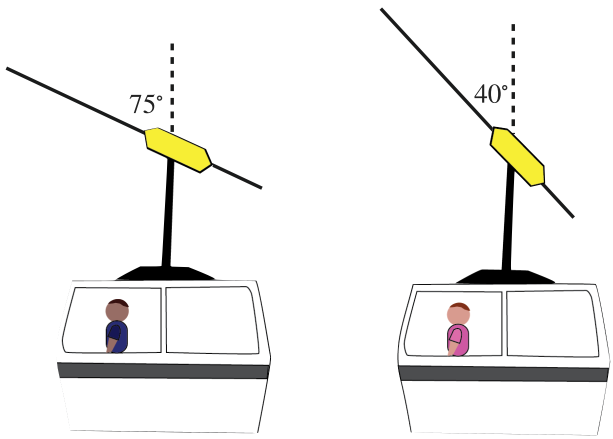
(a) ¿Cuál fue el trabajo hecho por el peso para cada cabina (considere a los pasajeros como parte de la cabina)?

(b) ¿Cuál fue el trabajo hecho por la fuerza normal sobre Leonardo y sobre Ricardo, suponiendo que ambas cabinas suben con velocidad constante?

(c) Si la magnitud de la fuerza que hace el mecanismo del teleférico (la parte amarilla que va sobre la cuerda) para subir es igual en ambos casos y apunta en dirección de la cuerda, ¿en cuál caso ese mecanismo hace más trabajo? ¿El trabajo hecho por el mecanismo de las cabinas depende de la distancia recorrida?

(d) Mientras suben las cabinas, ¿la energía mecánica de estas permanece constante o no?

(e) ¿Qué pasaría con la energía cinética de las cabinas si suponemos que todo sigue igual pero la fuerza que hace el mecanismo de las cabinas aumenta?



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b), (c), (d) y (e) Ambas cabinas tienen una masa de 300 kilogramos. Leonardo y Ricardo tienen masa de 70 kilogramos. Ambas cabinas subieron con velocidad constante desde los 1000 metros hasta los 1600 metros. La fuerza que hace el mecanismo de las cabinas para subirlas tiene la misma magnitud.

¿Qué nos piden?

(a) Calcular el trabajo hecho por el peso para cada cabina (debemos tener en cuenta los pasajeros).

(b) Calcular el trabajo hecho por la fuerza normal para Ricardo y para Leonardo.

(c) Decir en qué caso el mecanismo que sube a las cabinas hace más trabajo, en el de Leonardo o en el de Ricardo. Con base en esto debemos decir si el trabajo del mecanismo de las cabinas depende de la distancia recorrida.

(d) Debemos decir si la energía mecánica de las cabinas permanece o no constante mientras las cabinas suben.

(e) Debemos decir qué pasaría con la energía cinética de las cabinas si los mecanismos de cada cabina hicieran una fuerza de mayor magnitud.

(a) Para resolver esta pregunta no es necesario ni siquiera realizar el diagrama de trabajo de las cabinas ni de sus ocupantes. Recordemos que el trabajo realizado por el peso sólo depende del cambio de altura del objeto y de la masa (nota 5.11):

$$W_w = -mg(h_f - h_i). \tag{1}$$

El ángulo que marcan las cuerdas con la línea punteada vertical no nos interesa, porque, como acabamos de decir, lo único que importa para el trabajo realizado por el peso es la masa y el cambio de altura. En ambos casos el cambio de altura es de 600 metros. Y como la masa total de cada cabina es de 300 kilogramos más 70 kilogramos (el peso de los ocupantes), entonces el trabajo hecho por el peso es

$$W_w = -\underbrace{(370\ \text{kg})}_{m}(9.81\ \text{m/s}^2)\underbrace{(1600\ \text{m} - 1000\ \text{m})}_{h_f - h_i} = -2177820\ \text{J}. \tag{2}$$

Que el trabajo haya sido negativo indica que las cabinas subieron.

Por supuesto, el desplazamiento total de cada cabina no fue el mismo porque la dirección de este desplazamiento fue distinto en cada caso, pero, como hemos repetido, al trabajo hecho por el peso no le interesa el desplazamiento total del objeto, sólo el desplazamiento vertical.

(b) Para hallar el trabajo ejercido por la fuerza normal en cada caso debemos realizar un diagrama de trabajo para Leonardo y Ricardo. Empecemos por Leonardo.

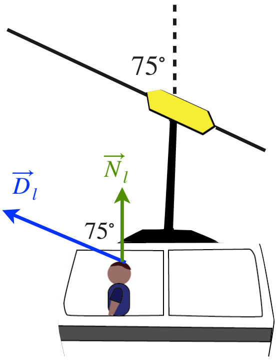
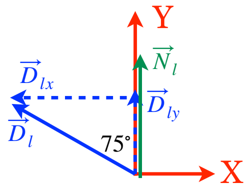


Diagrama de trabajo de Leonardo



La fuerza que nos interesa en este numeral es la normal sobre los pasajeros. La normal es perpendicular al piso de la cabina, así que apunta de forma vertical y forma un ángulo de 75 grados con el desplazamiento de Leonardo. Hemos usado un sistema en el cual la normal es paralela al eje Y.

Ahora que tenemos el diagrama de trabajo de Leonardo podemos determinar el trabajo realizado por la fuerza normal. Notemos que como hemos usado un sistema de coordenadas en el que el eje Y es paralelo a la normal, no es necesario considerar la componente X del desplazamiento.

Como la componente Y del desplazamiento es paralela a la normal, el trabajo producido por la normal será

$$W_{nl} = \left\|\vec{N}_l\right\| \left\|\vec{D}_{ly}\right\|. \tag{3}$$

Tanto para Leonardo como para Ricardo la magnitud de la fuerza normal debe ser igual a la magnitud del peso, pues las cabinas suben con velocidad constante, así que sus ocupantes también tienen velocidad constante y según la segunda ley de Newton $\vec{N} - \vec{W} = 0$ (las únicas fuerzas en Y son el peso y la normal). Por lo tanto, el trabajo realizado por la normal para el caso de Leonardo es

$$W_{nl} = \underbrace{mg}_{\|\vec{N}_l\|} \left\|\vec{D}_{ly}\right\|. \tag{4}$$

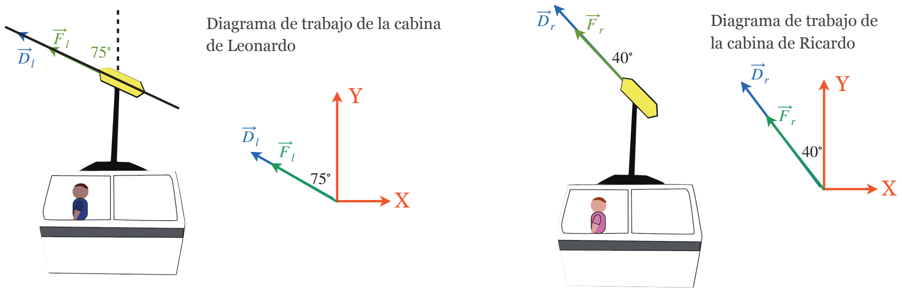
Sólo nos falta determinar $\left\|\vec{D}_{ly}\right\|$. Pero ya conocemos $\left\|\vec{D}_{ly}\right\|$, pues la magnitud del desplazamiento en Y es igual a la altura subida por las cabinas, la cual es, en ambos casos, 600 metros. Así que el trabajo realizado por la normal para Leonardo es

$$W_{nl} = \underbrace{(70\ \mathrm{kg})}_{m}(9.81\ \mathrm{m/s^2})\underbrace{(600\ \mathrm{m})}_{\|\vec{D}_{ly}\|} = 412020\ \mathrm{J}. \tag{5}$$

Este trabajo de la normal *tiene que ser igual al trabajo realizado por la normal sobre Ricardo*, pues la magnitud del desplazamiento en Y es el mismo y la masa de Ricardo y Leonardo son la misma. Así que no tenemos que hacer el diagrama de trabajo de Ricardo.

Notemos que también hubiéramos podido calcular el trabajo usando la ecuación $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \|\vec{D}\| \cos \theta$, pero en ese caso habríamos tenido que calcular $\|\vec{D}\|$. A veces, como hicimos aquí, es mucho más sencillo hallar el trabajo pensando sólo en qué componente del desplazamiento es paralela o antiparalela a la fuerza.

(c) Para determinar qué motor de qué cabina realiza mayor trabajo, empecemos por realizar el diagrama de trabajo de cada cabina:



La fuerza que nos interesa en este numeral es la fuerza que hace el motor de cada cabina. Hemos llamado $\vec{F}_l$ a la fuerza de la cabina de Leonardo y $\vec{F}_{lr}$ a la de la cabina de Ricardo. Esta fuerza es paralela al desplazamiento (es paralela a la cuerda) y su magnitud es la misma en la cabina de Leonardo y en la de Ricardo.

Como se ve en el diagrama de trabajo, en ambos casos la fuerza que hace el motor es paralela al desplazamiento de la respectiva cabina. Así que en ambos casos el trabajo estará dado por la multiplicación de la magnitud de la fuerza por la magnitud del desplazamiento:

$$W_n = \|\vec{F}\| \|\vec{D}\|. \tag{6}$$

En ambos casos la magnitud de la fuerza del motor es la misma así que la única diferencia que puede haber entre los trabajos es la magnitud del desplazamiento. Como el ángulo con el que sube la cabina de Leonardo es menos inclinado que el de la cabina de Ricardo, entonces la cabina de Leonardo tiene que recorrer mayor distancia para subir los mismos 600 metros.

Otra forma de ver que la distancia recorrida por la cabina de Leonardo es mayor es así: notemos en el último dibujo que $\|\vec{D}_l\| \cos 75° = 600$ m. Por otra parte, $\|\vec{D}_r\| \cos 40° = 600$ m. Como $\cos 40°$ es mayor que $\cos 75°$ y como ambas ecuaciones nos dan 600 metros, entonces $\|\vec{D}_r\|$ tiene que ser menor que $\|\vec{D}_l\|$.

Como la cabina de Leonardo recorre más distancia y como la fuerza es la misma, entonces *el trabajo ejercido por el motor de la cabina de Leonardo fue* *mayor que el de la cabina de Ricardo*. Así que, a diferencia del peso, el trabajo ejercido por el motor de la cabina depende de la distancia total recorrida.

Cuando el trabajo hecho por una fuerza depende de la distancia recorrida, decimos que esa fuerza es *no conservativa*. Así, la fuerza hecha por el motor de las cabinas no es conservativa (esto será explicado con más detalle en los siguientes problemas).

(d) Para determinar si la energía mecánica de las cabinas cambia mientras suben debemos determinar si la suma de la energía cinética con la potencial gravitacional cambia o permanece constante. Es claro que la energía potencial gravitacional de cada cabina está aumentando porque las cabinas están subiendo. Por otra parte, la energía cinética de las cabinas permanece constante porque las cabinas suben con rapidez constante; $(1/2)mv^2$ permanece constante. Como la energía mecánica es la suma de ambas energías y como la cinética permanece constante pero la potencial gravitacional aumenta, entonces *la energía mecánica de las cabinas aumenta mientras suben*.

Que la energía mecánica no permanezca constante no nos debería sorprender si tenemos en cuenta que la conservación de la energía mecánica sólo aplica en los casos en los que un objeto está sujeto al peso y a la fuerza elástica de un resorte ideal. En este problema, además del peso, tenemos la fuerza que hace el mecanismo de las cabinas.

(e) Si la fuerza de los mecanismos de las cabinas aumenta, entonces según la segunda ley de Newton la aceleración de las cabinas aumenta, así que la velocidad aumenta. Y como en este caso la dirección de la velocidad apunta en el sentido de la fuerza, al aumentar la velocidad aumentará la rapidez (si la velocidad inicial fuera en sentido contrario de las fuerzas, entonces al aumentar la velocidad no necesariamente aumentará la rapidez). Y si aumenta la rapidez entonces aumentará la energía cinética de las cabinas. En resumen, si aumenta la fuerza que hacen las cabinas aumenta la energía cinética de las cabinas.

Lo dicho aquí no sólo aplica para estas cabinas. Pronto veremos que hay una relación fundamental ente el trabajo que hace una fuerza y el cambio de energía cinética de un objeto.

Problema 5.18.

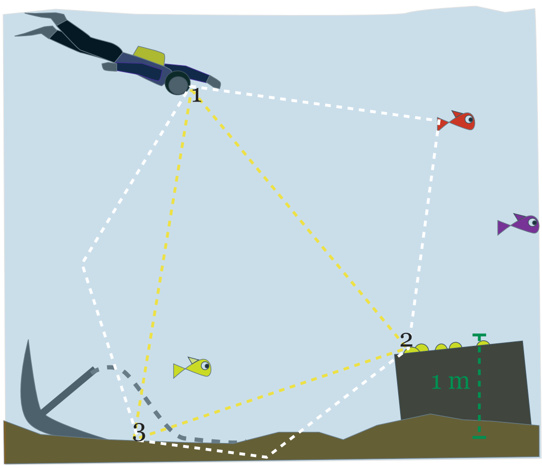
Palabras clave: trabajo del peso, trabajo de la fricción, trabajo de fuerzas no conservativas, trabajo neto a través de dos rutas distintas.

Un buzo de masa de 65 kilogramos quiere investigar un cofre que yace en el fondo del mar y después quiere investigar un ancla que está cerca del cofre, como se ilustra en el dibujo. El buzo parte del punto 1 y planea ir al punto 2 donde está el cofre, después al punto 3 donde está el ancla y después regresará al punto 1. El punto 2 está a 1 metro de altura con respecto al fondo del mar mientras que el punto 3 está precisamente en el fondo del mar, como se indica en el dibujo. Un compañero del buzo sugiere dos rutas diferentes para que el buzo realice su recorrido: una pintada en amarillo y la otra pintada en blanco. La distancia total del recorrido de la ruta amarilla es Da y la distancia total del recorrido de la ruta blanca es Db (note que la ruta blanca es más larga). Suponga que en todo el recorrido el agua ejerce una fuerza de fricción constante de magnitud Fr que siempre se opone al desplazamiento del buzo y suponga que las únicas fuerzas que actúan sobre el buzo son esta fricción y el peso.

(a) Entre el punto 2 y 3 calcule el trabajo realizado por el peso. ¿Este trabajo depende de la ruta?

(b) Para ambas rutas, escriba una expresión para el trabajo neto sobre el buzo desde que parte de 1 hasta que regresa a 1. Esta expresión debe quedar en términos de Fr y de la distancia total del recorrido de cada ruta.

(c) Con base en (b), diga en qué ruta el trabajo neto sobre el buzo es mayor.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b) y (c) Un buzo de masa de 65 kilogramos parte del punto 1, va a ir al punto 2, después al punto 3 y finalmente regresará al punto 1. El punto 2 está a un metro del fondo del mar, mientras que el punto 3 está en el fondo del mar. La distancia total de la ruta amarilla es D_a y la distancia total de la ruta blanca es D_b. El agua ejerce una fricción constante de magnitud F_r que siempre se opone al desplazamiento del buzo. Las únicas fuerzas que actúan sobre el buzo son la fricción y el peso.

¿Qué nos piden?

(a) Calcular el trabajo hecho por el peso desde el punto 2 hasta el 3 y explicar si este trabajo depende de la ruta.

(b) Para cada ruta debemos escribir una expresión para el trabajo neto sobre el buzo en términos de la fricción del agua y de la distancia de cada ruta.

(c) Decir en cuál ruta el trabajo neto sobre el buzo es mayor.

(a) El trabajo realizado por el peso es muy fácil de calcular si conocemos la altura final y la altura inicial (nota 5.11):

$$W_w = -mg(h_f - h_i). \tag{1}$$

Si ponemos nuestro nivel de referencia para medir la altura en el fondo del mar, entonces la altura del cofre será de 1 metro y la altura del ancla de cero metros. Si además tenemos en cuenta que la masa del buzo es de 65 kilogramos, la ecuación (1) queda

$$W_w = -\underbrace{(65\text{ kg})}_{m}(9.81\text{ m/s}^2)(\underbrace{0\text{ m}}_{h_f} - \underbrace{1\text{ m}}_{h_i}) = 637.65\text{ J}. \tag{2}$$

El trabajo del peso nos da positivo porque desde el punto 2 hasta el 3 el buzo está descendiendo y entonces el desplazamiento vertical es paralelo al peso.

Como la altura final e inicial son las mismas para ambas rutas, no importa la ruta que escoja el buzo, *el trabajo realizado por el peso será igual*.

(b) Ahora debemos escribir una expresión para el trabajo neto de cada ruta. El trabajo neto sobre el buzo para todo el recorrido es la suma de los trabajos que todas las fuerzas realizan sobre él. Las únicas fuerzas son el peso y la fricción del agua. Así, debemos calcular el trabajo total que el peso realiza sobre el buzo y sumarlo con el trabajo total que la fricción realiza y hacer esto para ambas rutas.

Empecemos por el trabajo total del peso. Es fácil ver que el trabajo total realizado por el peso es cero para cualquiera de las dos rutas, pues la altura inicial y la altura final son iguales (el buzo regresa al punto inicial, así que su cambio de altura es cero):

$$W_w = -mg(h_1 - h_1) = 0, \tag{3}$$

donde hemos llamado h_1 a la altura del punto 1. También hubiéramos podido calcular el trabajo realizado por el peso entre 1 y 2, entre 2 y 3 y entre 3 y 1 y sumarlos (es un buen ejercicio para el lector comprobar que eso también daría cero). Así que el peso no contribuye al trabajo neto sobre el buzo.

El trabajo neto realizado por la fricción no es tan simple porque debemos calcularlo para los desplazamiento entre los puntos 1 y 2, entre 2 y 3 y entre 3 y 1 y sumarlos (para el trabajo hecho por la fricción no hay una ecuación como (3) en la que sólo debemos considerar el punto inicial y final).

Ruta amarilla:

Debemos tener en cuenta que en el enunciado nos dicen que la fricción siempre se opone al desplazamiento del buzo. Como la fricción es antiparalela al desplazamiento, entonces el trabajo hecho por esta fuerza es simplemente

$$W_r = -\left\|\vec{F}_r\right\| \left\|\vec{d}\right\| \tag{4}$$

en cada tramo. El trabajo de la fricción entre 1 y 2 está dado por

$$W_{r12} = -F_r \left\|\vec{d}_{12}\right\|, \tag{5}$$

donde $\vec{d}_{12}$ es el desplazamiento entre los puntos 1 y 2 según la ruta amarilla (no conocemos este desplazamiento). Si hacemos esto mismo para el desplazamiento $\vec{d}_{23}$ entre 2 y 3, teniendo en cuenta que la magnitud de la fricción es la misma siempre, obtenemos

$$W_{r23} = -F_r \left\|\vec{d}_{23}\right\|. \tag{6}$$

Finalmente, aplicamos la misma ecuación para el desplazamiento $\vec{d}_{31}$ entre 3 y 1:

$$W_{r31} = -F_r \left\|\vec{d}_{31}\right\|. \tag{7}$$

Si sumamos todos los trabajos de la fricción para hallar el trabajo total de la fricción para la ruta amarilla, obtenemos

$$W_{r12} + W_{r23} + W_{r31} = -F_r \left\|\vec{d}_{12}\right\| - F_r \left\|\vec{d}_{23}\right\| - F_r \left\|\vec{d}_{31}\right\|. \tag{8}$$

Si sacamos factor común de F_r, esto nos da:

$$W_{Tra} = -F_r \left(\left\|\vec{d}_{12}\right\| + \left\|\vec{d}_{23}\right\| + \left\|\vec{d}_{31}\right\|\right). \tag{9}$$

Notemos que esta expresión no puede ser la respuesta final porque no conocemos las diferentes distancias que aquí aparecen. Pero note que la suma que está entre paréntesis no es más que *la distancia total recorrida por el buzo en la ruta amarilla* porque la magnitud de cada desplazamiento es la distancia de ese desplazamiento, así que la suma de las magnitudes de todos los desplazamientos es la distancia total. Así, la ecuación (9) es igual a

$$W_{Tra} = -F_r D_a. \tag{10}$$

Note que este es el trabajo neto hecho por la fricción pero también es el trabajo neto sobre el buzo en la ruta amarilla porque el peso no hizo trabajo.

Ruta blanca:

Ahora, el lector puede sospechar correctamente que el análisis para hallar el trabajo de la fricción para la ruta blanca es exactamente igual, sólo que esta vez los distintos desplazamientos intermedios serán otros (la magnitud de la fricción es la misma, F_r). Esta vez los podemos llamar $\vec{D}_{12}$, $\vec{D}_{23}$ y $\vec{D}_{32}$, donde usamos la D mayúscula para diferenciar estos desplazamientos de los de la ruta amarilla.

Como el análisis es el mismo, podemos aplicar directamente la ecuación (9) pero con los nuevos desplazamientos:

$$W_{Trb} = -F_r \left(\left\| \vec{D}_{12} \right\| + \left\| \vec{D}_{23} \right\| + \left\| \vec{D}_{31} \right\| \right). \tag{11}$$

La suma entre paréntesis es la distancia total del recorrido de la ruta blanca:

$$W_{Trb} = -F_r \vec{D}_b. \tag{12}$$

Como antes, este es el trabajo neto sobre el buzo en la ruta blanca porque el peso no hizo trabajo.

(c) Debemos comparar el trabajo total de la fricción de la ruta blanca con el de la ruta amarilla. Notemos a partir de las ecuaciones (10) y (12) que el trabajo de la fricción depende de la distancia total. Como la fuerza de fricción es la misma en ambas rutas, entre mayor sea la distancia, más negativo será el trabajo. Del dibujo inicial es claro que la ruta blanca es más larga, así que en esa ruta el trabajo de la fricción será más negativo. Por lo tanto, el trabajo neto sobre el buzo es mayor en la ruta amarilla, pues es menos negativo.

Nota 5.12. Trabajo hecho por la fuerza de fricción dinámica

El trabajo realizado por una fuerza de fricción dinámica depende de la distancia total del recorrido. Cuanto mayor sea esta distancia, más trabajo negativo realiza la fricción dinámica.

Problema (teórico) 5.19.

Palabras clave: fuerza conservativa, fuerza no conservativa, comportamiento de la energía mecánica cuando fuerzas no conservativas hacen trabajo.

(a) Explique la relación entre las fuerzas conservativas y la energía mecánica de un sistema, y entre las fuerzas no conservativas y la energía mecánica del sistema.

(b) Explique la relación entre el trabajo hecho por una fuerza conservativa y el desplazamiento del objeto, y entre el trabajo hecho por una fuerza conservativa y la distancia total recorrida por el objeto. Explique esto mismo pero para el caso de fuerzas no conservativas.

(c) Explique cuál es la relación entre el trabajo hecho por una fuerza conservativa y el cambio de energía potencial.

(d) Suponga que una fuerza no conservativa hace un trabajo positivo W_1 sobre un sistema. Después, otra fuerza no conservativa hace un trabajo negativo W_2 sobre el mismo sistema. Si la energía mecánica inicial del sistema antes de que la primera fuerza conservativa actuara era E_{mi}, escriba una expresión en términos de E_{mi}, W_1 y W_2 para la energía mecánica del sistema después de que ambas fuerzas no conservativas actuaron. ¿Cambiaría su respuesta si las dos fuerzas hubieran actuado simultáneamente, o si la segunda fuerza hubiera actuado antes de la primera?

(e) Con base en el punto (d), escriba una expresión para la energía mecánica final de un sistema si la energía mecánica inicial del sistema es E_{mi} y si hay N fuerzas no conservativas actuando sobre el sistema. ¿Cambiaría su respuesta si hubiera, además de las N fuerzas no conservativas, algunas fuerzas conservativas?

Solución

(a) Una forma de explicar la relación entre la energía mecánica y las fuerzas conservativas es considerando lo que dijimos en la nota 5.5: "Cuando sobre un objeto las únicas fuerzas que actúan son el peso y la fuerza de un resorte ideal, entonces la *energía mecánica* del sistema se conserva". Resulta que una fuerza conservativa es precisamente una fuerza que *conserva* la energía mecánica de un sistema y por eso se llama así; el peso es una fuerza conservativa porque conserva la energía mecánica de los objetos; la fuerza que hace un resorte ideal es conservativa porque conserva la energía mecánica del sistema objeto-resorte.

Por el contrario, una fuerza no conservativa es una fuerza que puede alterar la energía mecánica del sistema. Si una fuerza no conservativa hace cierto trabajo W sobre cierto sistema, entonces la energía mecánica inicial del sistema cambia por la cantidad W. El trabajo realizado por las fuerzas no conservativas aumenta la energía mecánica del sistema si el trabajo es positivo, o la disminuye si el trabajo es negativo. Por ejemplo, si una fuerza no conservativa le hace un trabajo de 50 joules a un sistema, entonces la energía mecánica del sistema aumenta en 50 joules.

Ejemplos clásicos de fuerzas conservativas son el peso, la fuerza de un resorte ideal, la fuerza eléctrica. Ejemplos de fuerzas no conservativas son la normal, la fricción o la fuerza que hace un motor.

(b) El trabajo realizado por una fuerza conservativa *no depende de la distancia total recorrida* por el objeto sino sólo de cuál es el punto inicial y cuál es el punto final del recorrido. En otras palabras, para el trabajo de las fuerzas conservativas sólo importa el *desplazamiento neto*. Por ejemplo, si un objeto comienza en un punto $\vec{X}_1$ y termina en un punto $\vec{X}_2$, el trabajo realizado por las fuerzas conservativas sobre el sistema no depende de cuál exactamente haya sido el camino que tomó el objeto sino del desplazamiento neto, que es dado por $\vec{X}_2 - \vec{X}_1$. De este principio se sigue que si un objeto realiza un recorrido y termina en el mismo punto en el que inicia, entonces el trabajo realizado por la fuerza conservativa es cero, pues $\vec{X}_1 - \vec{X}_1 = \vec{0}$.

Por su parte, las fuerzas no conservativas cumplen características opuestas a las mencionadas antes; el trabajo realizado por una fuerza no conservativa depende de la distancia total recorrida por el objeto, y no depende del desplazamiento neto. Si un objeto se mueve de $\vec{X}_1$ a $\vec{X}_2$, el trabajo realizado por la fuerza conservativa sobre el objeto depende de cuál haya sido el camino para ir de un punto al otro; si un camino es más largo o más corto, entonces la fuerza podrá hacer más trabajo o menos trabajo. De esto se sigue que si un objeto realiza un recorrido y regresa al mismo punto del que partió, el trabajo realizado por la fuerza no conservativa no será cero[11].

(c) Podemos explicar la relación entre el trabajo realizado por una fuerza conservativa y el cambio de energía potencial recordando que el trabajo realizado por el peso es igual al cambio de energía potencial gravitacional pero con un signo negativo, recordemos que el trabajo realizado por el peso es $-mg(h_f - h_i)$ y el cambio de energía potencial es $mg(h_f - h_i)$. Esto que sucede para el peso sucede, en general, para cualquier fuerza conservativa. A cada fuerza conservativa se le puede asociar una energía potencial: al peso se le asocia una energía potencial gravitacional (que es mgh), a la fuerza elástica se le asocia

[11] Como comprobamos en el problema 5.18, el trabajo de la fuerza de fricción es diferente para cada recorrido, mientras que el trabajo neto del peso fue cero porque el punto final e inicial fue el mismo.

una energía potencial elástica (que es $(1/2)kx^2$), a la fuerza eléctrica se le asocia una energía potencial eléctrica, etc.

En cada uno de estos casos, el negativo del cambio de energía potencial es igual al trabajo realizado por la respectiva fuerza; el negativo del cambio de energía potencial elástica es igual al trabajo de la fuerza elástica, el negativo del cambio de la energía potencial eléctrica es igual al trabajo de la fuerza eléctrica, y el negativo del cambio de energía potencial gravitacional es igual al trabajo de la fuerza de gravedad (el peso).

En contraste, no podemos asociar ninguna energía potencial a las fuerzas no conservativas. Por lo tanto, no hay ninguna relación interesante entre el trabajo de una fuerza no conservativa y algún potencial.

Nota 5.13. Comparación entre fuerzas conservativas y fuerzas no conservativas

	Fuerza conservativa	Fuerza no conservativa
Conserva la energía mecánica del sistema.	SÍ	NO
El trabajo realizado no depende de la distancia sino de la posición inicial y final.	SÍ	NO
Si el punto inicial y final del recorrido es el mismo, el trabajo de la fuerza es cero.	SÍ	NO
Podemos asociar una energía potencial a la fuerza.	SÍ	NO
El trabajo realizado por la fuerza es el negativo del cambio de la energía potencial asociada a la fuerza.	SÍ	No aplica

(d) Como dijimos en el punto (a), si una fuerza no conservativa ejerce un trabajo positivo W_1, entonces la energía mecánica inicial E_{mi} va a aumentar por una cantidad de W_1. Es decir, la nueva energía mecánica después de que ha actuado la primera fuerza no conservativa será

$$E_{mf1} = E_{mi} + W_1. \tag{1}$$

Pero en el enunciado no nos piden la energía mecánica después de que la primera fuerza actúa, sino que nos piden la energía mecánica después de que las dos fuerzas no conservativas han actuado.

Ahora bien, si una fuerza no conservativa hace trabajo W_2 negativo, entonces esa fuerza le quita energía mecánica al objeto. Así que podríamos creer que la nueva energía mecánica debido a esta segunda fuerza no conservativa será igual a la resta entre E_{mf1} y el trabajo hecho por la nueva fuerza:

$$E_{mf2} = E_{mf1} - W_2 \text{ ¿?}, \tag{2}$$

donde "¿?" señala que no estamos seguros de si esta ecuación es correcta.

Sin embargo, la ecuación (2) tiene un error, pues W_2 ya es negativo. Al escribir $E_{mf} = E_{mf1} - W_2$ es como si estuviéramos sumándole una energía a la energía mecánica inicial, pues restar un número negativo es como sumar un número positivo. Así que si el trabajo W_2 es negativo simplemente debemos sumar ese trabajo, y al hacer eso la energía mecánica disminuye, como debe ser:

$$E_{mf2} = E_{mf1} + W_2. \tag{3}$$

No debemos escribir la energía mecánica final en términos de E_{mf1} como está en la ecuación (3). Si tenemos en cuenta la ecuación (1), podemos escribir la ecuación (3) así:

$$E_{mf2} = \underbrace{E_{mi} + W_1}_{E_{mf1}} + W_2. \tag{4}$$

Si una fuerza hubiera actuado antes que la otra, o si hubieran actuado al mismo tiempo, nada habría cambiado, pues el orden temporal de los trabajos no aparece en la anterior ecuación en ninguna parte. Lo único que importa es que al comienzo hay una energía mecánica inicial y que como resultado de algunas fuerzas no conservativas, al final tenemos una energía mecánica diferente.

(e) En el punto anterior vimos que si dos fuerzas no conservativas actúan sobre un sistema, la energía mecánica inicial del sistema se puede escribir como $E_{mf} = E_{mi} + W_1 + W_2$ (los trabajos se suman pero al sumarlos debemos tener en cuenta si son positivos o negativos). Si sobre el sistema actuaran tres fuerzas no conservativas, entonces la ecuación quedaría así: $E_{mf} = E_{mi} + W_1 + W_2 + W_3$. Si fueran cuatro fuerzas no conservativas haciendo trabajo, entonces la energía mecánica final sería $E_{mf} = E_{mi} + W_1 + W_2 + W_3 + W_4$. De acuerdo a este razonamiento, si fueran N fuerzas no conservativas, entonces la energía mecánica final sería

$$E_{mf} = E_{mi} + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + \cdots W_N, \tag{5}$$

donde la suma va hasta la enésima fuerza. Usando el símbolo de sumatoria, esto se podría escribir así:

$$E_{mf} = E_{mi} + \sum_{i}^{n} W_i. \tag{6}$$

En palabras, la energía mecánica final es igual a la energía mecánica inicial más la suma del trabajo realizado por las N fuerzas no conservativas.

Si hubiera algunas fuerzas conservativas la expresión (6) que hallamos para la energía mecánica final no cambiaría en nada porque las fuerzas conservativas no alteran la energía mecánica de los objetos. El trabajo realizado por una fuerza conservativa podría transformar algún tipo de energía del sistema en otro tipo de energía (por ejemplo cinética en potencial gravitacional), pero no podría alterar la energía mecánica del sistema.

Nota 5.14. Energía mecánica final según el trabajo realizado por fuerzas no conservativas

Si sobre un sistema con energía mecánica inicial E_{mi} actúan varias fuerzas no conservativas que hacen trabajo, la energía mecánica final del sistema será $E_{mf} = E_{mi} + \sum_i W_i$, donde la suma se hace sobre todos los trabajos de las fuerzas no conservativas.

Problema 5.20.

Palabras clave: energía en montaña rusa, energía mecánica cuando hay fuerzas no conservativas, condiciones para que la normal haga trabajo, trabajo realizado por la fricción.

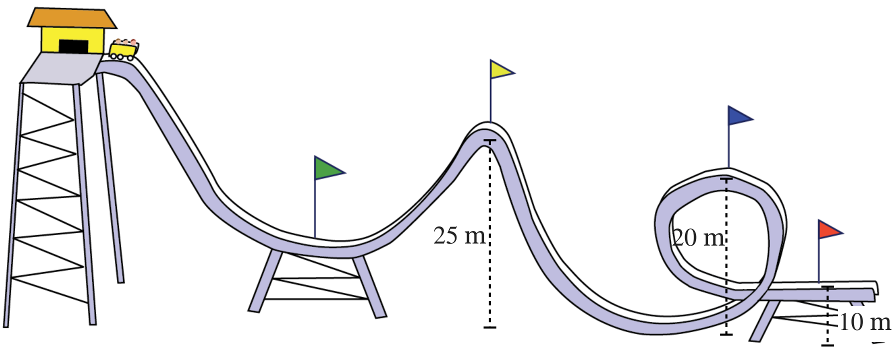
Considere la montaña rusa del dibujo. El carrito de la montaña rusa tiene una masa de 1000 kilogramos, incluidos los pasajeros, y parte su recorrido desde el reposo. La bandera amarilla está a 25 metros del piso, la azul a 20 metros y la roja está a 10 metros. Suponga que desde el punto inicial hasta la bandera amarilla la fricción realiza un trabajo de −950 joules y el trabajo de la fricción desde la bandera amarilla hasta la azul es de −4950 joules. Además, la rapidez del carrito cuando alcanza la bandera amarilla es de 6 metros por segundo y cuando alcanza la bandera roja es de 17 metros por segundo.

(a) Explique por qué la fuerza normal no realiza trabajo sobre el carrito en ninguna parte del trayecto. Además, diga cuándo la normal sí podría hacer trabajo.

(b) ¿Cuál es la altura inicial desde la que parte el carrito?

(c) ¿Cuál es la rapidez del carrito cuando alcanza la bandera azul?

(d) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fricción en todo el recorrido?



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b), (c) y (d) Un carrito de montaña rusa tiene masa de 1000 kilogramos y comienza su recorrido desde el reposo. Cuando llega a la bandera amarilla de la figura, su rapidez es de 6 metros por segundo, su altura es de 25 metros y la fricción ha hecho un trabajo de −950 joules. Cuando llega a la bandera azul la altura del carrito es de 20 metros y el trabajo realizado por la fricción desde la bandera amarilla hasta la azul es de −4950 joules. Cuando llega a la bandera roja el carrito tiene una altura de 10 metros y una rapidez de 17 metros por segundo.

¿Qué nos piden?

(a) Explicar por qué la fuerza normal no realiza trabajo sobre el carrito en ningún punto de la trayectoria, y con base en esto explicar cuándo la normal sí realiza trabajo.

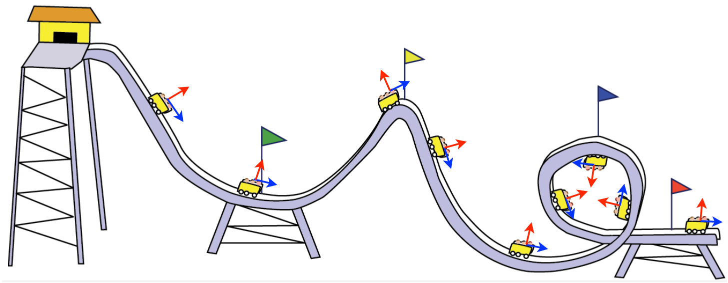
(b) Averiguar la altura inicial de la que parte el carrito.

(c) Hallar la rapidez del carrito cuando llega a la bandera azul.

(d) Encontrar el trabajo realizado por la fricción en todo el recorrido.

(a) Para explicar si la fuerza normal hace o no trabajo en alguna parte del trayecto, debemos determinar si la fuerza normal es siempre perpendicular al desplazamiento. Si la normal es siempre perpendicular al desplazamiento, entonces la normal no hace trabajo.

Hay una forma sencilla de explicar que cuando un objeto se mueve sobre una superficie, la normal no hace trabajo. Recordemos que, por definición, la fuerza normal siempre es perpendicular a la superficie sobre la que está el objeto. Si un objeto se mueve sobre la superficie, entonces el objeto se está moviendo de manera *paralela a la superficie*. Por lo tanto, si un objeto se mueve sobre una superficie la fuerza normal será perpendicular al desplazamiento del objeto, pues es perpendicular a la superficie. Por lo tanto, mientras el carrito se desliza por la montaña rusa la normal nunca hará trabajo. Esto se ilustra a continuación:



Notemos que en cualquier punto de la trayectoria el desplazamiento (vector azul) es perpendicular a la fuerza normal (vector rojo). De lo anterior se sigue que en todos los instantes del movimiento del carrito, el trabajo realizado por la normal es cero (el producto punto entre dos vectores perpendiculares es cero).

De lo explicado hasta aquí no se sigue que la normal nunca hace trabajo, pues hay casos en los que la normal y el desplazamiento del objeto no son perpendiculares (como ocurría en el problema 5.17). Por ejemplo, en un ascensor la normal apunta hacia arriba y el desplazamiento del objeto tiene una componente hacia arriba o hacia abajo. Si la superficie está quieta y el objeto simplemente se mueve sobre ella, entonces la normal y el desplazamiento serán perpendiculares y el trabajo será cero. Pero si la superficie se mueve y empuja al objeto, entonces habrá algunas componentes del desplazamiento que no serán perpendiculares a la normal y el trabajo no será cero. ¡Si pusiéramos la montaña rusa sobre una nave gigante que empieza a elevarse, entonces la normal hará trabajo sobre el carrito!

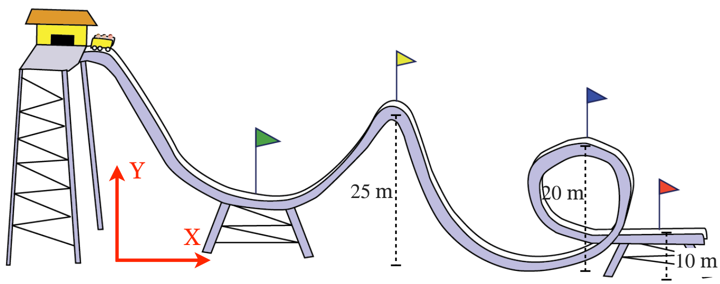
Nota 5.15. ¿Cuándo la normal hace trabajo?

Si un objeto se mueve sobre una superficie la normal no hace trabajo porque es perpendicular al desplazamiento del objeto. Pero si la superficie también se mueve de forma que empuja al objeto, la normal sí hace trabajo.

(b) Para hallar la altura inicial de la que parte el carrito debemos encontrar la energía potencial gravitacional inicial del carrito; con esta energía y sabiendo la masa podemos determinar la altura inicial. Para hallar la energía potencial gravitacional inicial debemos tener en cuenta que hay dos fuerzas no conservativas sobre el carrito: la fuerza de fricción y la fuerza normal. Como hay fuerzas no conservativas, la ecuación de la energía mecánica final es (nota 5.14):

$$E_{mf} = E_{mi} + \sum_i W_i. \tag{1}$$

Usemos un sistema de coordenadas cuyo origen esté en el piso para que las diferentes alturas que nos dan en el enunciado sean medidas con respecto a este sistema de coordenadas:



Estamos usando un sistema de coordenadas cuyo origen esté en el piso, de forma que todas las alturas que nos dieron apliquen también para nuestro sistema de coordenadas.

Para usar la ecuación (1) necesitamos conocer la energía mecánica en algún otro punto del trayecto. Podemos escoger el momento en que el carrito llega a la bandera amarilla porque conocemos la altura de esa bandera y sabemos la rapidez. Note que el problema de escoger como referencia la bandera roja es que en la ecuación (1) hay que tener en cuenta el trabajo realizado por la fricción y no conocemos ese trabajo desde el punto inicial hasta la bandera roja.

La energía mecánica inicial es sólo potencial gravitacional porque el carrito parte desde el reposo y la energía mecánica en el punto de la bandera amarilla es tanto potencial gravitacional como cinética. Además, como la fuerza normal no realiza trabajo, la única fuerza no conservativa que debemos considerar es la fricción. Teniendo en cuenta esto, podemos escribir la ecuación (1) así:

$$\underbrace{mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2}_{E_{mf}} = \underbrace{mgh_1 + W_f}_{E_{mi}}, \tag{2}$$

donde hemos llamado h_1 a la altura inicial, h_a a la altura del carrito cuando llega a la bandera amarilla, v_a a la rapidez del carrito cuando llega a bandera amarilla y W_f al trabajo realizado por la fricción.

Si pasamos a restar W_f, obtenemos

$$mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 - W_f = mgh_1. \tag{3}$$

Si dividimos por mg podemos obtener h_1:

$$\frac{mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 - W_f}{mg} = h_1. \tag{4}$$

Finalmente, si usamos los valores numéricos de las diferentes variables, obtenemos

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{(\overbrace{(1000\text{ kg})}^{m}(9.81\text{ m/s}^2)\overbrace{(25\text{ m})}^{h_a} + \frac{1}{2}\overbrace{(1000\text{ kg})}^{m}\overbrace{(6\text{ m/s})}^{v_a}{}^2 - \overbrace{(-950\text{ J})}^{W_f})}{\underbrace{(1000\text{ kg})}_{m}(9.81\text{ m/s}^2)} \qquad (5) \\ &= 26.93\text{ m}. \end{aligned}$$

(c) Para hallar la rapidez del carrito cuando alcanza la bandera azul debemos encontrar la energía cinética en ese momento. Y para hallar la energía cinética debemos volver a usar la ecuación (1), sólo que esta vez debemos usar esta ecuación entre la bandera amarilla y la bandera azul (no usamos la ecuación entre el punto de partida y la bandera azul porque desconocemos el trabajo realizado por la fricción en ese trayecto).

La energía mecánica inicial de la ecuación (1) será la energía mecánica del carrito cuando está en la bandera amarilla, mientras que la energía mecánica final ahora será la energía del carrito cuando alcanza la bandera azul. Teniendo en cuenta que tanto en la bandera azul como en la amarilla el carrito tiene energía potencial gravitacional y cinética, y que la fricción hace trabajo, la ecuación (1) se puede escribir así:

$$\underbrace{mgh_z + \frac{1}{2}mv_z^2}_{E_{mf}} = \underbrace{mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2}_{E_{mi}} + W_{fz}, \tag{6}$$

donde hemos llamado h_z a la altura del carrito en la bandera azul, v_z a la rapidez del carrito cuando llega a bandera azul y W_{fz} al trabajo realizado por la fricción entre la bandera amarilla y la azul (las variables con subíndice a corresponden a la bandera amarilla).

Si pasamos a restar la energía potencial gravitacional en la bandera azul, obtenemos

$$\frac{1}{2}mv_z^2 = mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 + W_{fz} - mgh_z. \tag{7}$$

Si multiplicamos por 2 y dividimos por m, obtenemos

$$v_z^2 = 2gh_a + v_a^2 + 2\frac{W_{fz}}{m} - 2gh_z. \tag{8}$$

Si sacamos raíz cuadrada, llegamos a

$$v_z = \sqrt{2gh_a + v_a^2 + 2\frac{W_{fz}}{m} - 2gh_z}. \tag{9}$$

Finalmente, si reemplazamos los valores numéricos de cada variable podemos hallar la rapidez del carrito cuando alcanza la bandera azul

$$\sqrt{2(9.81\text{ m/s}^2)\underbrace{(25\text{ m})}_{h_a} + \underbrace{(6\text{ m/s})^2}_{v_a} + 2\frac{\overbrace{(-4950\text{ J})}^{W_{fz}}}{\underbrace{(1000\text{ kg})}_{m}} - 2(9.81\text{ m/s}^2)\underbrace{(20\text{ m})}_{h_z}}$$
$$= 11.14\,\text{m/s} \tag{10}$$

(d) Para hallar el trabajo de la fricción en todo el recorrido podemos hacer dos cosas. Podemos buscar el trabajo de la fricción desde la bandera azul hasta la bandera roja. El trabajo de todo el recorrido será la suma de ese trabajo con el trabajo de la fricción desde el punto inicial hasta la bandera amarilla y con el trabajo desde la bandera amarilla hasta la bandera azul (ambos son conocidos). O podemos hallar directamente el trabajo desde el punto inicial hasta la bandera roja. De cualquier forma debemos aplicar la ecuación (1)[12].

[12] Podríamos pensar que hay una tercera forma de hallar el trabajo realizado por la fricción, a saber, calcular directamente el trabajo a partir del producto punto entre la fuerza de fricción y

Hay una ventaja en calcular el trabajo de la fricción desde el punto inicial hasta la bandera roja de forma directa y es que inicialmente el carrito no tiene energía cinética, así que la ecuación de la energía mecánica inicial es más simple que en el caso de la bandera azul. Por esta simple razón vamos a aplicar la ecuación (1) desde el punto inicial hasta la bandera roja;

$$\underbrace{mgh_r + \frac{1}{2}mv_r^2}_{E_{mf}} = \underbrace{mgh_1}_{E_{mi}} + W_{fr}. \tag{11}$$

Las variables con subíndice r indican el momento en que el carro llega a la bandera roja.

Cuidado: W_{fr} es el trabajo de la fricción desde el momento inicial hasta la bandera roja, no es el trabajo desde la bandera azul hasta la roja.

Si pasamos a restar la energía potencial gravitacional inicial, obtenemos

$$mgh_r + \frac{1}{2}mv_r^2 - mgh_1 = W_{fr}. \tag{12}$$

Finalmente, si usamos los valores conocidos —entre ellos la altura inicial hallada en el punto (b)—, obtenemos

$$\begin{aligned}&\underbrace{(1000\text{ kg})}_{m}(9.81\text{ m/s}^2)\underbrace{(10\text{ m})}_{h_r} + \frac{1}{2}\underbrace{(1000\text{ kg})}_{m}\underbrace{(17\text{ m/s})}_{v_r}{}^2\\ &\qquad - \underbrace{(1000\text{ kg})}_{m}(9.81\text{ m/s}^2)\underbrace{(26.93\text{ m})}_{h_1} = -21583.3\text{ J}.\end{aligned} \tag{13}$$

el desplazamiento. Sin embargo, no podemos hacer esto porque no conocemos el coeficiente de fricción y, además, calcular el trabajo con el producto punto en un caso así, en el que la fuerza y el desplazamiento van variando, exige métodos más avanzados que los estudiados en este libro.

Problema de repaso 5.21.

Palabras clave: caída libre combinada con caída con velocidad constante, tiempo de caída, gráfica velocidad contra tiempo, gráfica de posición contra tiempo.

Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta:

(1) Nunca se conserva la energía mecánica de un objeto cuando una fuerza no conservativa actúa sobre el objeto.

(2) El trabajo realizado por la fricción dinámica es más negativo cuanto mayor sea la distancia recorrida por el objeto.

(3) Si el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas sobre un sistema es positivo, entonces la energía mecánica de dicho sistema aumenta.

(4) Si un carro de mercado se desliza sobre la superficie de un ascensor que está subiendo, entonces la normal no hace trabajo.

(5) Si el cambio de energía potencial de una fuerza conservativa es 70 J, entonces el trabajo hecho por dicha fuerza es −70 J.

Solución

(1) Falso. Si la fuerza no conservativa es perpendicular al desplazamiento del objeto, entonces el trabajo que hace es cero y no altera la energía mecánica del objeto (por ejemplo, la fuerza normal no es conservativa pero en la mayoría de los casos no hace trabajo).

(2) Verdadero. Cuanto mayor sea la distancia recorrida, más negativo es el trabajo hecho por la fricción dinámica, como vimos en la nota 5.12.

(3) Verdadero. De la ecuación $E_{mf} = E_{mi} + \sum W_i$ vemos que si $\sum W_i$ es positivo, entonces a la energía mecánica inicial se le suma una cantidad positiva. Por lo tanto, la energía mecánica final será mayor que E_{mi}.

(4) Falso. En la nota 5.15 dice que si la superficie empuja al objeto, entonces la superficie hace trabajo sobre el objeto. Si el carro sólo se desliza entonces la normal no hace trabajo, pero mientras el carro se desliza el ascensor lo empuja, así que la normal sobre el carrito sí hace trabajo (la componente vertical del desplazamiento del carro es paralela a la normal).

(5) Verdadero. Como se explica en la nota 5.13, el trabajo hecho por una fuerza conservativa es igual al negativo del cambio de energía potencial asociado con la fuerza. Así que, en este caso, si el cambio de energía potencial es 70 J, el trabajo es −70 J.

Problema 5.22.

Palabras clave: trabajo realizado por la fricción, rapidez final, trabajo neto, relación entre cambio de energía cinética y el trabajo neto.

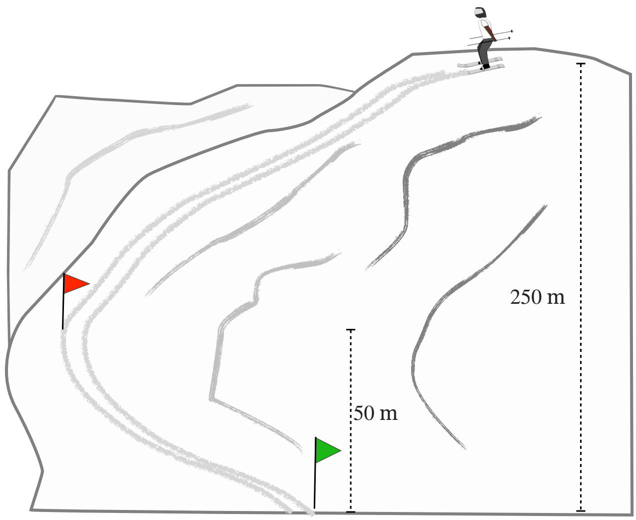
Suponga que un esquiador con masa de 55 kilogramos está esquiando sobre una montaña como se indica en el dibujo. Entre los esquís y el hielo hay un coeficiente de fricción dinámico de 0.1. El esquiador parte desde el reposo desde una altura de 250 metros con respecto a la bandera verde, y cuando llega a la bandera roja tiene una rapidez de 14 m/s. La bandera roja está a 50 metros de altura de la bandera verde. Suponga que cuando llega a la bandera verde el esquiador se detiene por completo.

(a) Halle el trabajo realizado por la fricción hasta la bandera roja.

(b) Con base en el trabajo calculado en el numeral anterior, ¿cuál habría sido la rapidez del esquiador al llegar a la bandera roja si no hubiera habido fricción?

(c) Halle el trabajo neto sobre el esquiador desde el punto inicial hasta que pasa la bandera roja y halle el trabajo neto sobre el esquiador desde el punto inicial hasta que pasa la bandera verde.

(d) Compare el trabajo neto hallado entre el punto inicial y la bandera roja con el cambio de energía cinética entre ambos puntos, y compare el trabajo neto entre el punto inicial y la bandera verde con el cambio de energía cinética entre ambos puntos.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b) (c) y (d) Un esquiador con masa de 55 kilogramos parte desde el reposo a una altura de 250 metros con respecto a la bandera verde (ver dibujo). Hay un coeficiente de fricción dinámico de 0.1 entre los esquís y la nieve. Cuando llega a la bandera roja el esquiador tiene una rapidez de 14 m/s y está a 50 metros de altura con respecto a la bandera verde. Cuando llega a la bandera verde el esquiador se detiene por completo.

¿Qué nos piden?

(a) Hallar el trabajo realizado por la fricción hasta la bandera roja.

(b) Con base en (a) debemos calcular la rapidez del esquiador al llegar a la bandera roja si no hubiera habido fricción.

(c) Hallar el trabajo neto sobre el esquiador desde que arranca hasta que llega a la bandera roja y desde que arranca hasta que llega a la bandera verde.

(d) Comparar el trabajo neto hallado entre el punto inicial y la bandera roja con el cambio de energía cinética entre el punto inicial y la bandera roja. Debemos hacer lo mismo para el trayecto entre el punto inicial y la bandera verde.

(a) Podemos usar la nota 5.14 para hallar el trabajo realizado por la fricción hasta la bandera roja, pues conocemos la energía mecánica inicial y la energía mecánica en el punto de la bandera roja. La energía mecánica final es igual a la inicial más los trabajos de todas las fuerzas no conservativas:

$$E_{mf} = E_{mi} + \sum W_i. \tag{1}$$

En este caso hay dos fuerzas no conservativas: la fricción y la normal. Pero la normal no hace trabajo porque el esquiador se desliza sobre la superficie (nota 5.15). Si aplicamos la ecuación (1) y llamamos W_r al trabajo realizado por la fricción en este tramo, obtenemos

$$E_{mf} = E_{mi} + W_r. \tag{2}$$

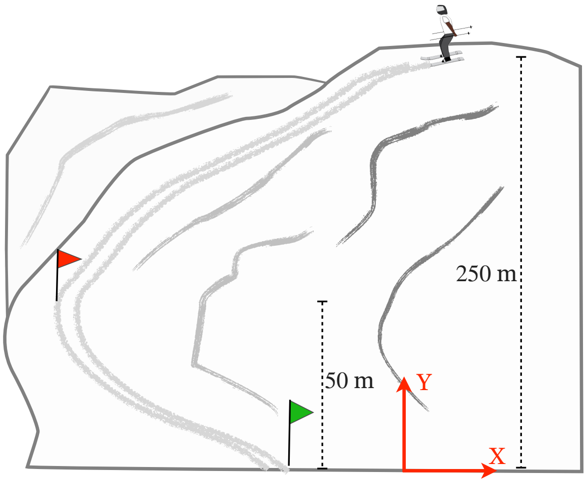
Si pasamos a restar la energía mecánica inicial, podemos escribir el trabajo de la fricción en términos de las energías mecánicas inicial y final:

$$E_{mf} - E_{mi} = W_r. \tag{3}$$

Ahora, la energía mecánica final se compone de la energía cinética y de la potencial gravitacional, mientras que la energía mecánica inicial sólo es potencial porque el esquiador parte desde el reposo:

$$\underbrace{mgh_2 + \frac{1}{2}mv^2}_{E_{mf}} - \underbrace{mgh_1}_{E_{mi}} = W_r. \tag{4}$$

Antes de continuar, necesitamos escoger un sistema de coordenadas que nos permita medir las alturas en los diferentes puntos. Escojamos uno cuyo origen esté a la altura de la bandera verde, de forma que la altura a la que está la bandera roja sea de 50 metros y la altura de la posición inicial sea de 250 metros, como se indica en el dibujo:



Si usamos un sistema de coordenadas cuyo origen esté a la altura de la bandera verde, entonces la altura a la que está la bandera roja es de 50 metros y la altura inicial a la que está el esquiador es de 250 metros.

Con este sistema ya podemos escribir los valores numéricos de la ecuación (4):

$$\underbrace{(55\ \text{kg})}_{m}(9.81\ \text{m/s}^2)\underbrace{(50\ \text{m})}_{h_2}+\frac{1}{2}\underbrace{(55\ \text{kg})}_{m}\underbrace{(14\ \text{m/s})^2}_{v}$$
$$-\underbrace{(55\ \text{kg})}_{m}(9.81\ \text{m/s}^2)\underbrace{(250\ \text{m})}_{h_1}=-102520\ \text{J}=W_r. \quad (5)$$

Notemos que el trabajo de la fricción nos dio negativo, como era de esperar porque la fricción se opone al desplazamiento del esquiador. Este valor de −102 520 joules es precisamente la energía mecánica que perdió el esquiador por culpa de la fricción.

Es interesante comprobar que la ecuación (1) nos permitió calcular el trabajo de la fricción sin necesidad de tener que usar la definición de trabajo (el producto punto entre la fuerza y el desplazamiento). De hecho, ni siquiera tuvimos que averiguar cuál fue la fuerza de fricción ni cuál fue el desplazamiento. Lo único que aplicamos aquí para calcular el trabajo fue la información de la energía mecánica inicial y final.

(b) Con base en lo calculado en el numeral anterior, debemos decir cuál habría sido la rapidez del esquiador al llegar a la bandera roja si no hubiera habido fricción. Si no hubiera habido fricción, el esquiador no habría perdido esos 102 520 joules que recién calculamos. Así que la energía mecánica en el punto de la bandera roja habría sido 102 520 joules mayor de lo que fue. En este problema la energía mecánica es cinética más potencial gravitacional, pero la potencial gravitacional en el punto de la bandera roja no depende o no cambia si hay o no hay fricción, pues esa energía sólo depende de la altura y de la masa. Por lo tanto, los 102 520 joules que se perdieron se hubieran sumado a la energía cinética en el caso en que no hubiera habido fricción:

$$K_{2sinfr} = K_{2confr} + 102520 \text{ J}. \tag{6}$$

(Hemos llamado K_{2sinfr} a la energía cinética en el caso en que no hay fricción y K_{2confr} a la energía cinética en el caso en que sí hay fricción). Si usamos los valores numéricos para la energía cinética con fricción en la bandera roja, y usamos que la rapidez es de 14 metros por segundo, obtenemos

$$K_{2sinfr} = \underbrace{\frac{1}{2}(55 \text{ kg})(14 \text{ m/s})^2}_{K_{2confr}} + 102520 \text{ J} = 107910 \text{ J}. \tag{7}$$

Ahora que conocemos la energía cinética si no hubiera habido fricción, podemos, usando la definición de energía cinética, calcular la rapidez del esquiador si no hubiera habido fricción:

$$\underbrace{107910 \text{ J}}_{K_{2sinfr}} = \frac{1}{2}(55 \text{ kg})(v_{2sinfr})^2. \tag{8}$$

Si multiplicamos por dos y dividimos por la masa, obtenemos

$$3924 \text{ m}^2/\text{s}^2 = (v_{sinfr})^2. \tag{9}$$

Finalmente, si sacamos raíz cuadrada obtenemos la rapidez que buscamos:

$$62.64 \text{ m/s} = v_{sinfr}. \tag{10}$$

Como era de esperar, esta rapidez nos dio mucho más que la rapidez que tenía el esquiador cuando había llegado a la bandera roja en el caso en que había fricción (que era 14 m/s).

(c) Ahora debemos calcular el trabajo neto desde el punto inicial hasta la bandera roja y desde el punto inicial hasta la bandera verde. El trabajo neto sobre el esquiador es la suma de todos los trabajos que hay. Ya dijimos que la normal no hace trabajo y la fricción sí, pero la fricción no es la única fuerza que hace trabajo. El peso también hace trabajo porque el esquiador cambia de altura en su recorrido.

Empecemos por calcular el trabajo neto hasta la bandera roja. La ecuación (5) nos da el trabajo de la fricción hasta la bandera roja. El trabajo total del peso desde el punto inicial hasta la bandera roja es fácil de calcular usando la ecuación

$$W_w = -mg(h_f - h_i). \tag{11}$$

Si usamos los valores numéricos de estas variables, obtenemos

$$W_w = -\underbrace{(55\text{ kg})}_{m}(9.81\text{ m/s}^2)(\underbrace{50\text{ m}}_{h_f} - \underbrace{250\text{ m}}_{h_i}) = 107910\text{ J}. \tag{12}$$

El trabajo neto sobre el esquiador es la suma del trabajo de la fricción con el del peso:

$$W_{N\,bandera\ roja} = W_w + W_r = 107910\text{ J} - 102520\text{ J} = 5390\text{ J}. \tag{13}$$

Ahora debemos hallar el trabajo neto desde el punto inicial hasta la bandera verde. Como las fuerzas que actúan sobre el esquiador en todo momento son siempre las mismas (el peso, la normal y la fricción), el trabajo de la fricción desde el punto inicial hasta la bandera verde se calcula de la misma forma que calculamos el trabajo de la fricción hasta la bandera roja, usando la ecuación (4). Aunque la energía mecánica inicial es la misma, la energía mecánica final ahora es cero porque cuando el esquiador alcanza la bandera verde la altura es cero (así que la energía potencial es cero) y además la energía cinética es cero porque el esquiador llega al reposo.

Si reemplazamos los valores de las variables de la ecuación (4) teniendo en cuenta que la energía cinética final y potencial final son cero obtenemos que el trabajo de la fricción desde el inicio hasta la bandera verde es

$$W_r = -\underbrace{(55\text{ kg})}_{m}(9.81\text{ m/s}^2)\underbrace{(250\text{ m})}_{h_1} = -134887.5\text{ J}. \tag{14}$$

El trabajo de la fricción desde el punto inicial hasta la bandera verde es claramente más negativo que el trabajo de la fricción hasta la bandera roja porque la distancia hasta la bandera verde es mayor, y recordemos que cuanta más distancia más negativo es el trabajo de la fricción (nota 5.12).

Nos queda hallar el trabajo del peso hasta la bandera verde. Para hallar el trabajo del peso usaremos la ecuación (11) teniendo en cuenta ahora que la altura final es cero y la inicial sigue siendo 250 metros:

$$W_w = -\underbrace{(55\text{ kg})}_{m}(9.81\text{ m/s}^2)((\underbrace{0\text{ m}}_{h_f} - (\underbrace{250\text{ m}}_{h_1}) = 134887.5\text{ J}. \tag{15}$$

El trabajo neto sobre el esquiador es la suma del trabajo de la fricción con el del peso:

$$W_{k bandera\ verde} = W_w + W_r = 134887.5\text{ J} - 134887.5\text{ J} = 0\text{ J}. \tag{16}$$

El trabajo neto desde el principio hasta la bandera verde es cero.

(d) Ahora debemos comparar los resultados del numeral anterior con los cambios de energía cinética. El cambio de energía cinética desde el punto inicial hasta la bandera roja se puede expresar como

$$\Delta K = K_{bandera\ roja} - K_i. \tag{17}$$

Ahora, la energía cinética inicial es cero porque el esquiador parte desde el reposo, mientras que a la energía cinética en la bandera roja la podemos calcular porque conocemos la masa y la rapidez:

$$\Delta K = \frac{1}{2}\underbrace{(55\text{ kg})}_{m}(\underbrace{14\text{ m/s}}_{v})^2 - 0\text{ J} = 5390\text{ J}. \tag{18}$$

Si comparamos este resultado con el trabajo neto sobre el esquiador hasta la bandera roja —ecuación (13)—, podemos comprobar que son exactamente iguales.

Ahora analicemos el cambio de energía cinética desde el inicio hasta la bandera verde:

$$\Delta K = K_{bandera\ verde} - K_i. \tag{19}$$

Esto es cero porque el esquiador parte desde el reposo y en la bandera verde llega al reposo, así que ambas energías cinéticas son cero:

$$\Delta K = K_{bandera\ verde} - K_i = 0\text{ J}. \tag{20}$$

Esto coincide con el resultado de la ecuación (16).

Hemos visto que *el trabajo neto sobre el esquiador desde un punto hasta otro punto de su trayectoria es exactamente igual al cambio de energía cinética entre ambos puntos*. Esto es el corazón de un resultado muy importante que examinaremos pronto.

Problema 5.23.

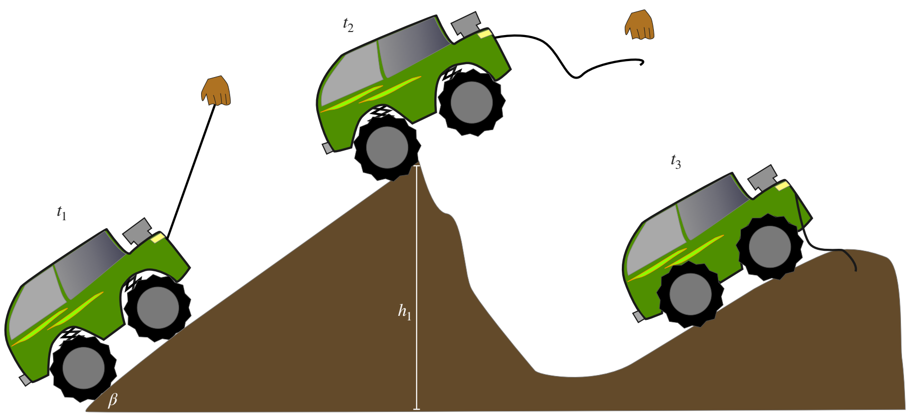
Palabras clave: salto de objeto en plano inclinado, energía potencial elástica, trabajo de un resorte ideal, fuerzas no conservativas.

María Cecilia arrastra con una cuerda su camión mostruo de masa m desde el reposo, como se ve en el dibujo. Entre las llantas y el piso hay un coeficiente de fricción dinámico μ (las llantas del camión son decorativas, no pueden giran). En el tiempo t_2 María Cecilia suelta la cuerda y hace saltar al camión desde la rampa con altura h_1. El camión tiene cuatro amortiguadores idénticos que funcionan como resortes ideales, cada uno de constante k (a diferencia de las llantas, los amortiguadores sí cumplen su función). El ángulo de inclinación de la rampa es β. Además, la tensión de la cuerda realiza un trabajo W_m sobre el camión desde el inicio hasta que el camión salta. Hasta este momento los amortiguadores no están comprimidos. En el instante t_3 el camión cae en la segunda rampa y sus amortiguadores se comprimen al máximo una distancia c, y en ese instante el camión queda en reposo absoluto.

(a) Escriba una expresión para la rapidez que tiene el camión justo cuando salta desde la primera rampa en términos de m, μ, W_m, β y h_1.

(b) Usando resultados del punto anterior escriba una expresión para la altura a la que cae el camión en la segunda rampa cuando sus amortiguadores están completamente comprimidos, y esta expresión escríbala en términos de m, μ, W_m, β, h_1, c y k.

(c) Teniendo en cuenta que la fuerza de los amortiguadores es la de un resorte ideal, y esta fuerza es conservativa, escriba una expresión para el trabajo total realizado por los amortiguadores desde el instante en que el camión toca la segunda rampa hasta que los amortiguadores se comprimen del todo.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b), y (c) El camión tiene masa m y cuatro amortiguadores que funcionan como resortes ideales y tienen constante k. El camión inicia en el reposo y luego salta por una rampa de inclinación β y de altura h_1. Además, hay un coeficiente de fricción dinámico μ entre las llantas y la rampa. Durante la subida en la primera rampa la tensión de la cuerda hace un trabajo W_m. Cuando el camión cae en la segunda rampa sus amortiguadores se comprimen una distancia c (antes no estaban comprimidos) y el camión queda en reposo absoluto. Nos recuerdan que la fuerza elástica es conservativa.

¿Qué nos piden?

(a) Escribir una expresión para la rapidez que tiene el camión justo cuando salta desde la primera rampa. La expresión debe quedar en términos de m, μ, W_m, β y h_1.

(b) Escribir una expresión para la altura a la que cae el camión en la segunda rampa cuando sus amortiguadores están comprimidos. Esta expresión debe quedar en términos de m, μ, β, h_1, c, W_m y k.

(c) Debemos escribir una expresión para el trabajo total realizado por los amortiguadores desde el instante en que el camión toca la segunda rampa hasta que los amortiguadores se comprimen del todo.

(a) Debemos escribir una expresión para la rapidez del camión cuando se despega de la primera rampa. Para hallar la rapidez debemos hallar la energía cinética del camión justo cuando se despega de la rampa. Para hallar la energía cinética del camión cuando se despega de la rampa, empecemos por notar que la energía mecánica del camión desde que arranca hasta que parte de la rampa no se conserva porque hay dos fuerzas no conservativas haciendo trabajo; la fricción entre las llantas y la rampa, y la fuerza de tensión. Por lo tanto, debemos usar la ecuación

$$E_{mf} = E_{mi} + \sum_i W_i. \tag{1}$$

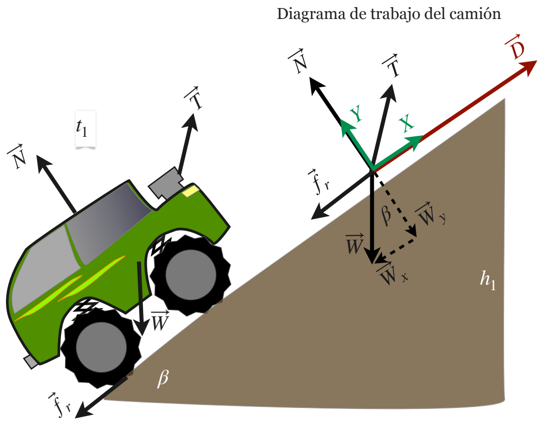
Sabemos que la rapidez inicial es cero, así que la energía cinética inicial es cero. Si usamos un sistema de coordenadas cuyo origen está en el punto inicial, entonces la energía potencial gravitacional inicial también será cero.

Cuando salta el camión tiene energía potencial gravitacional y cinética. Por lo tanto, la ecuación (1) se puede escribir como

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = 0 + W_f + W_m, \tag{2}$$

donde hemos llamado v_1 a la rapidez del camión al saltar de la rampa (esto es lo que buscamos) y W_f al trabajo realizado por la fricción. De aquí podríamos intentar despejar la energía cinética pero el problema es que no conocemos W_f. Así que antes de seguir debemos encontrar una expresión para W_f.

Hagamos el diagrama de trabajo del camión.



Sobre el camión actúan cuatro fuerzas; la normal, el peso, la tensión y la fuerza de fricción. Notemos que usamos un sistema de coordenadas inclinado. La fuerza de fricción es anti-paralela al desplazamiento, el cual es paralelo al eje X. No descompusimos la tensión porque no conocemos el ángulo que forma con el eje X o el Y.

Del diagrama anterior se ve que la fricción dinámica es antiparalela al desplazamiento, así que el trabajo por la fricción es simplemente

$$W_f = -f_r d, \tag{3}$$

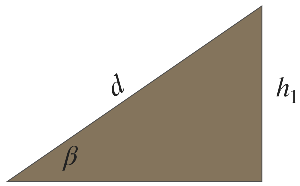
donde d es la distancia que recorre el camión en la primera rampa y f_r es la magnitud de la fricción (ambas variables son desconocidas). Recordemos que la magnitud de la fricción es μN, así que la ecuación (3) queda

$$W_f = -\underbrace{\mu N}_{f_r}\, d. \tag{4}$$

En este problema la magnitud de la normal debe ser igual a la magnitud de $\vec{W}_y$ porque el camión no tiene aceleración en la dirección del eje Y que hemos usado. Como se ve en el dibujo, la magnitud de la componente Y del peso es $W\cos\beta$ y como $W = mg$, la ecuación (4) queda

$$W_f = -\mu\underbrace{(mg\cos\beta)}_{N}d. \tag{5}$$

Por otro lado, podemos escribir la distancia d en términos del ángulo β y la altura h_1. Notemos que la primera rampa forma un triángulo rectángulo, donde d es la hipotenusa y h_1 el cateto opuesto al ángulo β:



Así que el seno del ángulo β es

$$\frac{h_1}{d} = \sin\beta. \tag{6}$$

Por lo tanto, d es igual a

$$\frac{h_1}{\sin\beta} = d. \tag{7}$$

Ahora podemos reemplazar esta distancia en la ecuación (5):

$$W_f = -\underbrace{\mu mg\cos\beta}_{f_r}\underbrace{\frac{h_1}{\sin\beta}}_{d}. \tag{8}$$

Si tenemos en cuenta que $\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{1}{\tan\beta}$, obtenemos

$$W_f = -\mu mg\frac{h_1}{\tan\beta}. \tag{9}$$

Si usamos este resultado en la ecuación (2), obtenemos

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \underbrace{-\frac{\mu mgh_1}{\tan\beta}}_{W_f} + W_m. \tag{10}$$

Esta ecuación ya está en términos de variables conocidas. Si pasamos la energía potencial gravitacional al otro lado, obtenemos

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{\mu mgh_1}{\tan\beta} + W_m - mgh_1. \tag{11}$$

Si multiplicamos por dos y dividimos por la masa, la anterior ecuación queda

$$v_1^2 = -2\frac{\mu gh_1}{\tan\beta} + 2\frac{W_m}{m} - 2gh_1. \tag{12}$$

Finalmente, para hallar la rapidez que buscamos sacamos raíz cuadrada:

$$v_1 = \sqrt{-2\frac{\mu g h_1}{\tan\beta} + 2\frac{W_m}{m} - 2gh_1}. \tag{13}$$

(b) Para hallar la altura a la que cae el camión en la segunda rampa debemos hallar la energía potencial gravitacional del camión en ese momento. Notemos que desde que el camión salta hasta que queda en reposo en la segunda rampa la energía mecánica se conserva, pues sólo hay fuerzas conservativas en este trayecto (el peso y la fuerza de los amortiguadores que funcionan como resortes ideales son fuerzas conservativas). Por lo tanto, podemos escribir

$$E_{mi} = E_{mf}. \tag{14}$$

Ahora, la energía mecánica inicial es potencial gravitacional y cinética (no hay potencial elástica porque inicialmente los resortes no están comprimidos). Esta energía mecánica inicial es conocida porque la ecuación (11) nos da la energía cinética en términos de variables conocidas, y la energía potencial gravitacional en ese punto es simplemente mgh_1 (todas estas son variables conocidas).

La energía mecánica final es potencial elástica y potencial gravitacional (no hay cinética porque el camión queda en reposo). Podemos hallar la energía potencial elástica final porque conocemos la compresión de los amortiguadores y la constante de los mismos.

Como son resortes ideales, la energía potencial asociada a los amortiguadores es la energía potencial elástica de un resorte ideal, que es $(1/2)kx^2$. La compresión de cada amortiguador es c, así que la energía potencial elástica de cada amortiguador cuando se comprime al máximo es

$$W_R = \frac{1}{2}kc^2. \tag{15}$$

Como son cuatro amortiguadores iguales, la energía potencial elástica total es cuatro veces lo anterior:

$$W_{TR} = 4\left(\frac{1}{2}kc^2\right) = 2kc^2. \tag{16}$$

Si escribimos la ecuación (14) en términos de la energía cinética inicial, la energía potencial gravitacional inicial, la energía potencial gravitacional final (que no conocemos porque no conocemos la altura) y la energía potencial elástica final recién hallada, obtenemos

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1}_{E_{mi}} = \underbrace{mgh_f + 2kc^2}_{E_{mf}}, \tag{17}$$

donde todavía no hemos usado la ecuación (11) para escribir la energía cinética inicial. Si pasamos la energía potencial elástica al otro lado, la anterior ecuación queda

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 - 2kc^2 = mgh_f. \tag{18}$$

Si dividimos por mg, obtenemos

$$\frac{1}{mg}\left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 - 2kc^2\right) = h_f. \tag{19}$$

Ahora sí usamos la ecuación (11) para escribir la energía cinética cuando el camión sale de la rampa

$$\frac{1}{mg}\left(\underbrace{\left(-\frac{\mu mgh_1}{\tan\beta} + W_m - mgh_1\right)}_{K_1} + mgh_1 - 2kc^2\right) = h_f. \tag{20}$$

Finalmente, se pueden sumar los términos mgh_1 que se cancelan:

$$\frac{1}{mg}\left(-\frac{\mu mgh_1}{\tan\beta} + W_m - 2kc^2\right) = h_f. \tag{21}$$

(c) Ahora debemos hallar el trabajo total realizado por los amortiguadores. Recordemos de la nota 5.13 que el trabajo de una fuerza conservativa es igual al menos cambio de energía potencial. Empecemos por escribir el cambio de energía potencial elástica de un amortiguador:

$$\Delta U_e = U_{ef} - U_{ei}, \tag{22}$$

donde U_{ef} es la energía elástica final y U_{ei} la inicial. La energía potencial elástica final de cada amortiguador es $(1/2)kc^2$ porque la compresión final es c, y la energía potencial elástica inicial de cada amortiguador es cero porque inicialmente los amortiguadores no están comprimidos. Por lo tanto, la ecuación anterior queda

$$\Delta U_e = \left(\underbrace{\frac{1}{2}kc^2}_{U_{ef}} - \underbrace{0}_{U_{ei}}\right) = \frac{1}{2}kc^2. \tag{23}$$

El trabajo realizado por un amortiguador es el menos cambio de energía potencial elástica, es decir, es

$$W_a = -\frac{1}{2}kc^2. \tag{24}$$

El anterior es el trabajo realizado por un solo amortiguador, pero el camión tiene cuatro amortiguadores iguales así que el trabajo total de los cuatro amortiguadores es cuatro veces lo anterior:

$$W_{Ta} = 4\left(-\frac{1}{2}kc^2\right) = -2kc^2. \tag{25}$$

Nota 5.16. Trabajo realizado por un resorte

El trabajo realizado por un resorte ideal es igual al menos cambio de energía potencial elástica. Si x_i es el estiramiento o la compresión inicial del resorte y x_f es la final, entonces el trabajo realizado por el resorte es igual a $W_r = -\left(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\right) = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$.

Problema (teórico) 5.24.

Palabras clave: teorema de trabajo y energía, trabajo de fuerzas no conservativas.

Suponga que sobre un sistema compuesto por un objeto de masa m y un resorte ideal actúan n fuerzas no conservativas. Suponga que inicialmente el objeto tiene altura h_i con respecto al piso, rapidez v_i y el resorte está comprimido una distancia x_i. Después de que las fuerzas no conservativas actúan, el objeto queda con rapidez v_f a una altura h_f del piso, y el resorte queda estirado una distancia x_f.

(a) Escriba una expresión para el cambio de energía cinética del sistema desde el momento inicial hasta el final, en términos de m, h_f, h_i, x_i, x_f y en términos del trabajo de las n fuerzas no conservativas.

(b) Con base en el resultado anterior y teniendo en cuenta que el trabajo de una fuerza conservativa es igual al menos cambio de energía potencial, muestre que el cambio de energía cinética del sistema es igual al trabajo neto de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema (tanto fuerzas conservativas como no conservativas).

(c) Tenga en cuenta la siguiente ecuación de cinemática: $v_f^2 = v_i^2 + 2ad$. Vuelva a escribir esta ecuación pero en el lado derecho no escriba la aceleración sino que despeje la aceleración en término de la suma de la fuerza neta y de la masa. Teniendo en cuenta que el trabajo neto es igual a $W_n = \sum_i W_i = \sum_i (F_i d)$, muestre de nuevo que el trabajo neto es igual al cambio de energía cinética del objeto. Al resolver este último punto suponga que las fuerzas son paralelas o antiparalelas al desplazamiento.

Solución

(a) Si hay un número n de fuerzas no conservativas, podemos escribir la energía mecánica final así:

$$E_{mf} = E_{mi} + \sum_i^n W_i, \qquad (1)$$

donde, como ya sabemos, la sumatoria incluye todas las fuerzas no conservativas. Ahora bien, si el sistema está compuesto por un objeto y un resorte ideal, entonces la energía mecánica inicial y final está conformada por energía potencial gravitacional, por energía potencial elástica y por energía cinética.

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación (1) en términos de las diferentes energías, así:

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f + \frac{1}{2}kx_f^2}_{E_{mf}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i + \frac{1}{2}kx_i^2}_{E_{mi}} + \sum_i^n W_i. \tag{2}$$

Como buscamos una expresión para el cambio de energía cinética, pasemos la energía cinética inicial al lado izquierdo y pasemos la energía potencial gravitacional final y potencial elástica final al lado derecho:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -mgh_f - \frac{1}{2}kx_f^2 + mgh_i + \frac{1}{2}kx_i^2 + \sum_i^n W_i. \tag{3}$$

A la izquierda tenemos precisamente el cambio de energía cinética, todo está en término de las diferentes variables que nos piden. La anterior ecuación se puede escribir así:

$$\Delta K = -mgh_f - \frac{1}{2}kx_f^2 + mgh_i + \frac{1}{2}kx_i^2 + \sum_i^n W_i, \tag{4}$$

donde $\Delta K = K_f - K_i$.

(b) Ahora debemos mostrar con la anterior ecuación que el cambio de energía cinética es igual al trabajo neto. Para hacer esto, empecemos por factorizar mg y $(1/2)k$ en los términos de la derecha:

$$\Delta K = mg(-h_f + h_i) + \frac{1}{2}k(-x_f^2 + x_i^2) + \sum_i^n W_i. \tag{5}$$

Ahora notemos que $mg(-h_f + h_i)$ es lo mismo que $-mg(h_f - h_i)$, que es el trabajo realizado por el peso. Además, $\frac{1}{2}k(-x_f^2 + x_i^2)$ es lo mismo que $-\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$, que es el trabajo realizado por un resorte ideal (nota 5.16). Por lo tanto, la anterior ecuación queda así:

$$\Delta K = W_g + W_r + \sum_i^n W_i, \tag{6}$$

donde W_r es el trabajo realizado por el resorte y W_g es el trabajo realizado por el peso. Finalmente, $W_g + W_r + \sum_i^n W_i$ es el trabajo neto, pues incluye el trabajo de todas las fuerzas conservativas y no conservativas del caso, así que la ecuación (6) es igual a

$$\Delta K = W_n, \tag{7}$$

donde W_n es el trabajo neto. Es decir, acabamos de mostrar que *el trabajo neto es igual al cambio de energía cinética*. Este resultado se conoce como el *teorema de trabajo y energía*.

El teorema de trabajo y energía se puede interpretar de forma sencilla: si el trabajo que hace una fuerza es positivo es porque esa fuerza va en la misma dirección en la que se desplaza el objeto, así que esa fuerza contribuye a que el objeto acelere y aumente su rapidez. Si la rapidez aumenta, la energía cinética aumenta. Por su parte, si una fuerza realiza trabajo negativo, entonces esta fuerza va en dirección contraria al desplazamiento del objeto, así que lo frena y le disminuye su energía cinética. El cambio de energía cinética depende del trabajo neto porque el trabajo neto depende de la fuerza neta, y la fuerza neta determina si el objeto aumenta, conserva o pierde rapidez, lo que a su vez determina si el objeto aumenta, mantiene o disminuye su energía cinética.

Todo lo que podamos resolver con la ecuación $E_{mf} = E_{mi} + \sum W_i$ lo podemos resolver también con el teorema de trabajo y energía. Esto es así porque la ecuación $E_{mf} = E_{mi} + \sum W_i$ no es mas que una forma diferente de escribir el teorema de trabajo y energía. También es útil decir que todos los problemas de este capítulo, incluidos los primeros de caída libre y movimiento parabólico, se podrían haber resuelto usando el teorema de trabajo y energía (es un buen ejercicio resolverlos usando el teorema).

(c) Según la segunda ley de Newton, la aceleración de un objeto es

$$\frac{1}{m}\sum_i F_i = a \tag{8}$$

(hemos escrito la segunda ley de Newton aplicando la regla de oro para evitar los vectores). Por lo tanto, la ecuación de cinemática que nos dan en el enunciado se puede escribir así:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2\underbrace{\left(\frac{1}{m}\sum_i F_i\right)}_{a} d. \tag{9}$$

Cuidado: esto sólo se puede hacer si asumimos, como nos dicen en el enunciado, que la distancia recorrida por el objeto es paralela o antiparalela a las fuerzas.

Notemos que podemos meter la distancia d dentro de los paréntesis, esto es la regla distributiva, por ejemplo $(F_1 + F_2 + F_3)d = (F_1 d + F_2 d + F_3 d)$:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2\left(\frac{1}{m}\sum_i F_i d\right). \tag{10}$$

Tengamos en cuenta que $F_i d$ es el trabajo realizado por la fuerza i: $F_i d = W_i$ (de nuevo, esto funciona porque asumimos que la fuerza es paralela o antiparalela al desplazamiento). Por lo tanto, la anterior ecuación queda así:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2\left(\frac{1}{m}\sum_i W_i\right). \tag{11}$$

Como $\sum_i W_i$ es el trabajo neto, entonces podemos escribir la anterior ecuación así:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2\left(\frac{1}{m}W_n\right). \tag{12}$$

Si ahora multiplicamos por la masa y dividimos por 2 para despejar W_n, obtenemos (13):

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = W_n. \tag{13}$$

Es decir, hemos mostrado otra vez que el trabajo neto (que incluye el trabajo de todas las fuerzas conservativas y no conservativas) es igual al cambio de energía cinética.

Nota 5.17. Teorema de trabajo y energía

El teorema de trabajo y energía dice que el cambio de energía cinética de un sistema es igual al trabajo neto (a la suma de todos los trabajos que hay) sobre el sistema: $\Delta K = W_n$.

Problema 5.25.

Palabras clave: teorema de trabajo y energía, trabajo de la fricción estática, trabajo de la normal, trabajo del peso, trabajo neto.

Una grúa levanta desde el piso una plataforma que tiene un material de construcción. En el instante t_1 la plataforma está en reposo en el piso. Desde ese momento la grúa levanta de forma vertical la plataforma, hasta que en el instante t_2 la plataforma queda a una altura de 20 metros y tiene una rapidez de 2 metros por segundo. Justo después la grúa se detiene por completo, de forma que todo está en reposo de nuevo. Luego, la grúa mueve la plataforma de forma horizontal una distancia desconocida, hasta el instante t_3 en el cual tiene rapidez de 4 metros por segundo. Finalmente, la grúa baja la plataforma hasta una altura desconocida y en el instante t_4 se detiene por completo. En este último trayecto la fuerza normal sobre el material hace un trabajo de −17 659.5 J. Puede asumir que la cuerda permanece de forma vertical en todo su recorrido[13]. Use el teorema de trabajo y energía para responder los puntos desde (a) hasta (d).

(a) Si la plataforma, incluido el material, tiene masa de 500 kilogramos, diga cuál es el trabajo realizado por la tensión de la cuerda de la grúa (la cuerda vertical que es la más gruesa) entre el instante t_1 y el instante t_2.

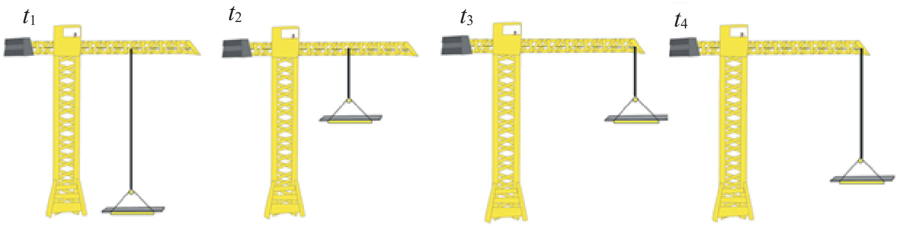
(b) Si el material tiene masa de 300 kilogramos y si entre el material y la base de la plataforma hay un coeficiente de fricción estático de 0.4, halle la distancia horizontal recorrida por el material desde que se detuvo por completo a los 20 metros de altura hasta el tiempo t_3. Tenga en cuenta que el material nunca se desliza sobre la plataforma y que la fricción estática es máxima.

(c) Halle la altura final del material en el momento t_4.

(d) Halle el trabajo total que el material ejerce sobre la plataforma en todo el recorrido, si tenemos en cuenta que la cuerda de la grúa ejerce un trabajo de 200 000 joules sobre la plataforma en todo el recorrido.

(e) Vuelva a responder (a) y (c) pero sin usar el teorema de trabajo y energía sino usando la ecuación $E_{mf} = E_{mi} + \sum W_i$.

[13] Por supuesto esto es una aproximación; la cuerda se va a inclinar un poco pero asumiremos que se inclina tan poco que podemos ignorarlo.



Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b), (c), (d) y (e) Una grúa levanta una plataforma con un material de construcción. Primero, la grúa levanta desde el reposo la plataforma y la sube de forma vertical hasta que en el instante t_2 la plataforma tiene una rapidez de 2 metros por segundo y una altura de 20 metros. Justo después la grúa se detiene por completo. Luego de eso la plataforma mueve el material de forma horizontal hasta que en t_3 tiene una rapidez de 4 metros por segundo. Finalmente la grúa baja el material hasta una altura desconocida y en el instante t_4 queda en reposo. La normal sobre el material hace un trabajo de −17 659.5 J en este último trayecto. La plataforma con el material tiene una masa de 500 kilogramos mientras que el material solo tiene una masa de 300 kilogramos. Entre el material y la base de la plataforma hay un coeficiente de fricción estático de 0.4 y el material nunca se desliza (además, la fricción estática es máxima). En todo el recorrido, la tensión de la cuerda principal de la grúa hace un trabajo de 200 000 J sobre la plataforma. La cuerda permanece vertical.

¿Qué nos piden?

Usando el teorema de trabajo y energía debemos:

(a) Calcular el trabajo realizado por la tensión de la cuerda de la grúa sobre la plataforma entre t_1 y t_2.

(b) Hallar la distancia horizontal recorrida por el material entre el momento en que se detuvo la grúa después de t_2 y el tiempo t_3.

(c) Encontrar la altura del material en el instante t_4.

(d) Hallar el trabajo que el material ejerce sobre la plataforma en todo el recorrido (desde t_1 hasta t_4).

Usando $E_{mf} = E_{mi} + \sum W_i$ debemos:

(e) Responder (a) y (c).

(a) Debemos hallar el trabajo realizado por la tensión de la cuerda de la grúa desde el instante t_1 hasta el instante t_2. El teorema de trabajo y energía nos dice que el cambio de energía cinética es igual al trabajo neto sobre el sistema:

$$\Delta K = W_n. \tag{1}$$

El sistema que nos interesa en este punto es la plataforma junto con el material. Sobre este sistema actúan dos fuerzas que hacen trabajo: la tensión que queremos hallar y el peso total de la plataforma.

Cuidado: la normal que la plataforma le hace al material o la que el material le hace a la plataforma son fuerzas que no nos interesan en este numeral porque *no actúan sobre el sistema sino que actúan sobre objetos dentro del sistema*. Algo similar ocurre cuando analizamos el movimiento de un carro; no nos interesa la fuerza que los pasajeros le hacen a la silla, o la fuerza que los pulmones del conductor hacen al respirar; todas esas son fuerzas que actúan dentro del sistema pero no son fuerzas que actúan sobre el sistema.

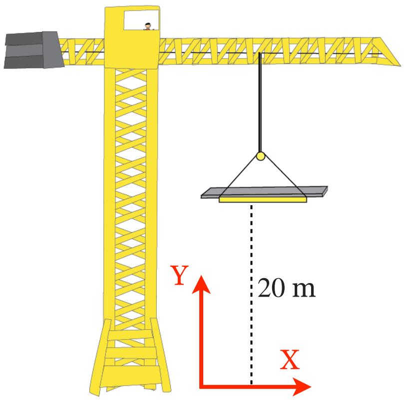
Por lo tanto, podemos escribir el teorema de trabajo y energía así:

$$\Delta K = W_p + W_t, \tag{2}$$

donde W_t es el trabajo de la tensión y W_p es el trabajo del peso. Podemos hallar el cambio de energía cinética porque conocemos la rapidez inicial y final, y además podemos calcular el trabajo del peso ya que conocemos la altura inicial y final. Recordemos que el trabajo realizado por el peso es

$$W_p = -mg(h_f - h_i). \tag{3}$$

Para aplicar la ecuación (3) debemos escoger un sistema de coordenadas que nos permita medir las alturas. Usemos un sistema de coordenadas cuyo origen esté en el piso, de forma que la altura inicial sea cero y la final sea de 20 metros:



Con el sistema anterior, la ecuación (3) se puede escribir así:

$$W_p = -mgh, \tag{4}$$

donde h es 20 metros, pero no vamos a reemplazar los valores de las variables aún. Si escribimos la ecuación (2) teniendo en cuenta este trabajo, obtenemos

$$\Delta K = W_t \underbrace{-mgh}_{W_p}. \tag{5}$$

Ahora escribamos explícitamente el cambio de energía cinética en términos de la rapidez inicial y final:

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2}_{\Delta K} = W_t - mgh. \tag{6}$$

Como la plataforma empieza desde el reposo, la rapidez inicial es cero y podemos escribir la ecuación (6) así:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = W_t - mgh. \tag{7}$$

Finalmente, para despejar W_t pasamos el trabajo realizado por el peso al otro lado:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgh = W_t. \tag{8}$$

Si reemplazamos los valores numéricos, esto da

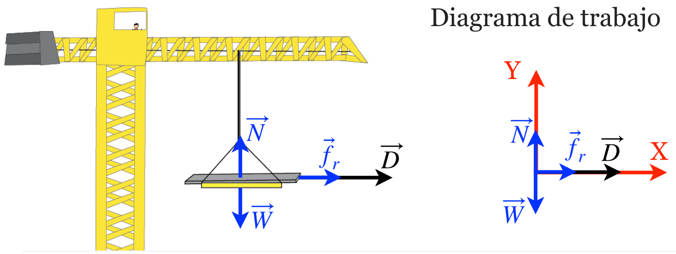
$$\frac{1}{2}\underbrace{(500\text{ kg})}_{m}\underbrace{(2\text{ m/s})}_{v_f}^2 + \underbrace{(500\text{ kg})}_{m}(9.81\text{ m/s}^2)\underbrace{(20\text{ m})}_{h} = 99100\text{ J}. \tag{9}$$

(b) Para hallar la distancia recorrida por el material entre el momento en que la grúa se detiene después de t_2 y el tiempo t_3 debemos encontrar una ecuación que relacione esta distancia con la información que nos dan. Nos dicen el coeficiente de fricción, la rapidez inicial (que es cero) y la final de este trayecto. Con la rapidez inicial y final podemos hallar el cambio de energía cinético y sabemos por el teorema de trabajo y energía que este cambio es igual al trabajo neto. Además, en el trabajo neto sobre el material se incluye el trabajo que hace la fricción, y el trabajo de la fricción depende de la distancia recorrida. Así que calculando una expresión para el trabajo de la fricción y el cambio de energía cinética podemos encontrar una expresión para la distancia.

Cuidado: esta vez no estamos analizando la plataforma completa sino que estamos analizando el material, así que es importante tener en cuenta la fricción y la fuerza normal que la base de la plataforma le hace al material.

Sobre el material actúan tres fuerzas: la normal, el peso y la fricción. Antes de continuar realicemos el diagrama de trabajo del material. Notemos que la fricción es estática porque el material no se desliza sobre la base de la plataforma y es paralela al desplazamiento; es precisamente por la fricción estática que el material se mueve de forma horizontal hacia la derecha (no hay otras fuerzas en X sobre el material)[14]:

[14] La fricción debe ir hacia la derecha porque el material se tiende a mover hacia la izquierda de la plataforma (se tiende a deslizar).



Sobre el material actúan tres fuerzas, la normal que le hace la base de la plataforma, el peso y la fricción estática. Esta fricción apunta en el sentido del desplazamiento, como se explicó antes.

Como se aprecia en el anterior diagrama, la normal y el peso son perpendiculares al desplazamiento, así que no hacen trabajo. La única fuerza que hace trabajo es la fricción, por lo que el teorema de trabajo y energía quedaría así:

$$\Delta K = W_f. \tag{10}$$

Como la fricción es paralela al desplazamiento, el trabajo realizado por la fricción es simplemente

$$W_f = f_r d, \tag{11}$$

donde f_r es la magnitud de la fricción (que no conocemos) y d la distancia. Si usamos esto en la ecuación (10), obtenemos

$$\Delta K = \underbrace{f_r d}_{W_f}. \tag{12}$$

Para despejar la distancia de la anterior ecuación necesitamos encontrar f_r. Como la fricción estática es máxima, la magnitud de la fricción es $f_r = \mu N$. Además, la magnitud de la normal en este caso es igual al peso porque el material no tiene aceleración en Y ($N = mg$). Así:

$$f_r = \mu \underbrace{mg}_{N}. \tag{13}$$

Si usamos esto en la ecuación (12), obtenemos

$$\Delta K = \underbrace{(\mu mg)}_{f_r} d. \tag{14}$$

De aquí podemos despejar d en términos de variables conocidas:

$$\frac{\Delta K}{\mu mg} = d. \tag{15}$$

Si escribimos el cambio de energía cinética explícitamente, esto da

$$\frac{\overbrace{\frac{1}{2}mv_f^2 - 0}^{\Delta K}}{\mu mg} = d. \tag{16}$$

Ahora sólo nos queda reemplazar los valores de cada variable:

$$\frac{\frac{1}{2}\overbrace{(300\text{ kg})}^{m}\overbrace{(4\text{ m/s})}^{v_f}{}^2}{\underbrace{(0.4)}_{\mu}\underbrace{(300\text{ kg})}_{m}(9.81\text{ m/s}^2)} = 2.04\text{ m}. \tag{17}$$

(c) La altura final del material se puede hallar con el teorema de trabajo y energía, pues con este podemos relacionar el trabajo del peso y de las demás fuerzas con el cambio de energía cinética (que conocemos). Como ya sabemos, el trabajo del peso depende del cambio de altura.

Entre t_3 y t_4 la normal y el peso son las únicas fuerzas que hacen trabajo sobre el material (la fricción no hace trabajo porque el desplazamiento es vertical en este trayecto), así que el teorema de trabajo y energía para este trayecto queda

$$\Delta K = W_{pm} + W_N, \tag{18}$$

donde W_N es el trabajo de la normal sobre el material que conocemos, y W_{pm} es el trabajo del peso sobre el material. Si pasamos el trabajo de la normal al otro lado para despejar el trabajo del peso, esto queda

$$\Delta K - W_N = W_p. \tag{19}$$

Ahora el trabajo del peso es simplemente $-mg(h_f - h_i)$, donde h_f sería la altura final del recorrido (que no conocemos) y h_i la altura inicial (que es de 20 metros). Así que la ecuación (19) se puede escribir como

$$\Delta K - W_N = \underbrace{-mg(h_f - h_i)}_{W_p}. \tag{20}$$

Si pasamos a dividir por $-mg$ esto nos da

$$\frac{\Delta K - W_N}{-mg} = h_f - h_i. \tag{21}$$

Finalmente, si pasamos la altura inicial al otro lado, llegamos a

$$\frac{\Delta K - W_N}{-mg} + h_i = h_f. \tag{22}$$

Para reemplazar los valores numéricos primero escribamos de forma explicita el cambio de energía cinética teniendo en cuenta que la rapidez final es cero:

$$\frac{\overbrace{-\frac{1}{2}mv_i^2}^{\Delta K} - W_N}{-mg} + h_i = h_f. \tag{23}$$

Ahora sí reemplazamos los valores:

$$\frac{-\frac{1}{2}\overbrace{(300\ \text{kg})}^{m}\overbrace{(4\ \text{m/s})}^{v_i}{}^2 - \overbrace{(-17659.5\ \text{J})}^{W_N}}{-\underbrace{(300\ \text{kg})}_{m}(9.81\ \text{m/s}^2)} + \underbrace{20\ \text{m}}_{h_i} = 14.81\ \text{m}. \tag{24}$$

Notemos que el trabajo de la normal es negativo porque el material desciende mientras que la normal apunta hacia arriba.

(d) Debemos hallar el trabajo neto que el material ejerce sobre la plataforma para todo el recorrido, es decir, desde t_1 hasta t_4. Para hacer esto nos piden que apliquemos el teorema de trabajo y energía para todo el recorrido (otra forma de resolver esto hubiera sido hallando el trabajo de cada fuerza en los diferentes tramos y luego sumaríamos).

Sobre la plataforma actúan cuatro fuerzas: la fricción, el peso, la normal del material y la tensión de la grúa. Así que el trabajo neto sobre la plataforma es la suma del trabajo que el material ejerce (a través de la fricción y de la normal) más el trabajo que la tensión de la grúa realiza, más el trabajo que el peso ejerce. Como el material ejerce dos fuerzas, podemos escribir el teorema de trabajo y energía así:

$$\Delta K = W_t + W_p + W_{nm} + W_{fm}, \tag{25}$$

donde W_{nm} es el trabajo que la normal del material ejerce, W_{fn} es el trabajo que la fricción del material realiza, W_p es el trabajo del peso de la plataforma y W_t es el trabajo que la tensión de la grúa realiza.

Podemos hallar el trabajo total del peso porque conocemos la altura inicial que es cero y la altura final (hallada en el punto anterior). Además, el cambio de energía cinética es cero porque todo comienza y termina en reposo. Además, conocemos el trabajo de la tensión de la grúa. Teniendo en cuenta esto, la ecuación (25) queda

$$0 = W_p + W_t + W_{nm} + W_{fm}. \tag{26}$$

Si pasamos el trabajo de la tensión y del peso al otro lado, obtenemos

$$-W_t - W_p = W_{nm} + W_{fm}. \tag{27}$$

Si llamamos W_{mT} a la suma de los dos trabajos que hace el material, que es el trabajo neto realizado por el material, entonces obtenemos

$$-W_t - W_p = \underbrace{W_{mT}}_{W_{mn}+W_{fm}}. \tag{28}$$

Si escribimos el trabajo del peso de forma explicita, esto nos da

$$-W_t - \underbrace{(-mg(h_f - h_i))}_{W_p} = W_{mT}. \tag{29}$$

Si reemplazamos los valores de cada variable, teniendo en cuenta que la altura final es 14.81 metros y la altura inicial es cero, esto nos da

$$-(200000\ \mathrm{J}) - (-(300\ \mathrm{kg})(9.81\ \mathrm{m/s^2})(14\ \mathrm{m} - 20\ \mathrm{m})) = -215274.17\ \mathrm{J}. \tag{30}$$

(e) Ahora calculemos (a) pero usando la ecuación $E_{mf} = E_{mi} + \sum W_i$. Recordemos que con esta ecuación la sumatoria del trabajo se hace sobre fuerzas no conservativas, y en este caso la única fuerza no conservativa que hace trabajo es la tensión:

$$E_{mf} = E_{mi} + W_t. \tag{31}$$

Ahora, la energía mecánica inicial es cero porque la rapidez inicial es cero y porque la altura inicial es cero según el sistema usado, mientras que la energía mecánica final es tanto potencial gravitacional como cinética:

$$\underbrace{mgh + \frac{1}{2}mv_f^2}_{E_{mf}} = \underbrace{0}_{E_{mi}} + W_t. \tag{32}$$

Notemos que esta es exactamente la misma ecuación que (8), así que como era de esperar, *al reemplazar los valores vamos a obtener el mismo resultado que antes* —ecuación (9)—.

Ahora respondamos (c) usando este mismo método. Entre t_3 y t_4 hay dos fuerzas no conservativas sobre el material, la fricción y la normal que la base de la plataforma hace. Sin embargo, la fricción no hace trabajo en este trayecto como ya explicamos antes (es paralela a X mientras que el desplazamiento es en Y). Así que la única fuerza no conservativa en este trayecto es la normal:

$$E_{mf} = E_{mi} + W_N. \tag{33}$$

Si escribimos explícitamente la energía mecánica inicial y la final teniendo en cuenta que la cinética final es cero (porque la rapidez es cero), la anterior ecuación queda

$$\underbrace{mgh_f}_{E_{mf}} = \underbrace{mgh_i + \frac{1}{2}mv_i^2}_{E_{mi}} + W_N. \tag{34}$$

Finalmente, dividimos por mg:

$$h_f = h_i + \frac{\frac{1}{2}mv_i^2 + W_N}{mg}. \tag{35}$$

El lector puede comprobar que este es exactamente el mismo resultado dado por la ecuación (23), así que al reemplazar los valores de las variables vamos a obtener la misma altura final (14.81 metros).

Así hemos comprobado que ambos métodos son equivalentes, lo cual era esperable ya que para derivar el teorema de trabajo y energía partimos de $E_{mf} = E_{mi} + \sum W_i$ (problema 5.25). La diferencia entre los métodos reside en la forma como plantemos el problema: con el teorema de trabajo y energía debemos escribir los trabajos de todas las fuerzas, sean conservativas o no, mientras que con la ecuación $E_{mf} = E_{mi} + \sum W_i$ debemos escribir los trabajos de las fuerzas no conservativas y escribir la energía mecánica inicial y final del sistema.

Problema 5.26.

Palabras clave: trabajo de fuerzas no conservativas, plano inclinado, gráfica de energía, trabajo de la fricción, rapidez final.

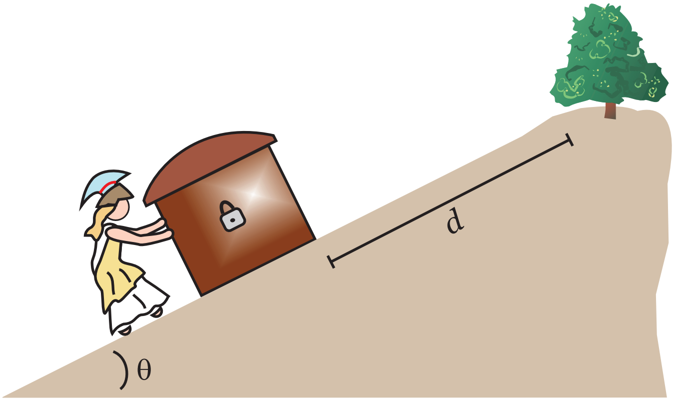
Atenea empuja con rapidez constante un gran cofre con masa de 18 000 kg a través de una ladera de inclinación θ, como se ve en el dibujo. Atenea realiza sobre el cofre un trabajo de 7 281 102 joules en una distancia de 80 metros que se mide desde el punto inicial hasta el árbol. Además, la fricción sobre el bloque hace un trabajo de −217 902 joules. La fuerza de Atenea sobre el cofre es paralela a la ladera.

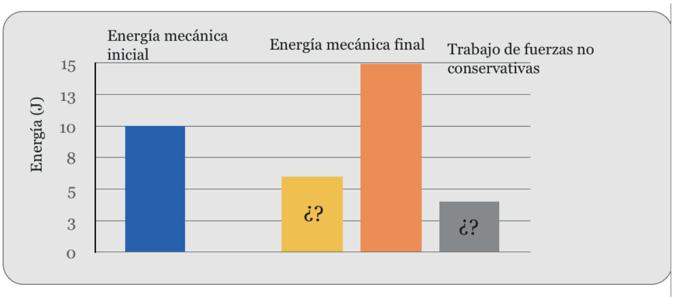
(a) Usando el teorema de trabajo y energía, calcule el ángulo θ.

(b) Con base en la respuesta anterior, encuentre el coeficiente de fricción entre el cofre y la ladera (suponga que es el mismo para todos los puntos de la ladera).

(c) Corrija la gráfica de energías para el cofre que está justo debajo del dibujo teniendo en cuenta la siguiente convención: la barra azul indica la energía cinética inicial, la barra naranja la energía potencial gravitacional final, la barra amarilla la energía cinética final y la barra gris indica el trabajo de todas las fuerzas no conservativas. Lo que debe hacer es corregir la barra amarilla y la gris (sus valores están mal) suponiendo que la barra azul y la naranja están bien. Tenga en cuenta que los valores son a escala, es decir, no representan directamente la energía del cofre en cada momento.

(d) Si todo hubiera sido exactamente igual, a excepción de que no hubiera fricción, ¿cuál habría sido la rapidez del cofre al llegar al árbol si la rapidez inicial era de 10 metros por segundo?





Solución

¿Qué información nos dan?

(a), (b), (c) y (d) El cofre tiene una masa de 18 000 kilogramos y es subido por una pendiente con rapidez constante. Desde el punto inicial hasta el árbol, la distancia de la pendiente es de 80 metros. En ese tramo la fricción realiza un trabajo de −217 902 joules sobre el cofre y Atenea hace un trabajo de 7 281 102 joules sobre el cofre. La fuerza de Atenea es paralela a la ladera. Las barras azul y naranja de la gráfica de energía están bien, pero la amarilla y la gris no.

¿Qué nos piden?

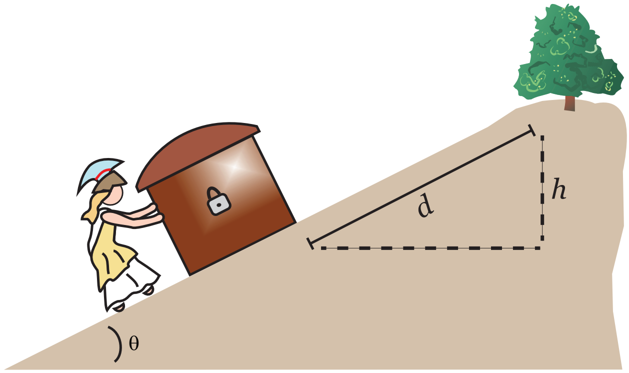
(a) Encontrar θ usando el teorema de trabajo y energía.

(b) Hallar el coeficiente de fricción entre el cofre y la ladera.

(c) Corregir una gráfica de energías que nos muestran.

(d) Encontrar la rapidez del cofre al llegar al árbol si no hubiera habido fricción.

(a) Para hallar θ debemos buscar una ecuación que relacione la pendiente de la ladera con la información que nos dan. Primero, notemos que se forma un triángulo rectángulo entre la distancia recorrida, la altura subida h y una línea horizontal, como se aprecia a continuación:



De la figura anterior se ve que

$$\sin\theta = \frac{h}{d}. \tag{1}$$

De aquí no conocemos h, pero la podemos encontrar hallando la energía potencial gravitacional final del cofre. El teorema de trabajo y energía dice que el cambio de energía cinética es igual al trabajo neto sobre el sistema:

$$\Delta K = W_n. \tag{2}$$

En este caso, hay cuatro fuerzas sobre el cofre: la fuerza de Atenea, la fuerza de fricción, el peso y la fuerza normal. Sin embargo, la fuerza normal no hace trabajo porque es perpendicular al desplazamiento del cofre (nota 5.16). Si llamamos W_m al trabajo de Atenea, W_f al de la fricción y W_p al del peso, la anterior ecuación queda así:

$$\Delta K = W_m + W_f + W_p. \tag{3}$$

Ahora, el cambio de energía cinética es cero porque el cofre sube con rapidez constante (así que la energía cinética final es igual a la inicial). Por lo tanto, la ecuación (3) queda

$$\underbrace{0}_{\Delta K} = W_m + W_f + W_p. \tag{4}$$

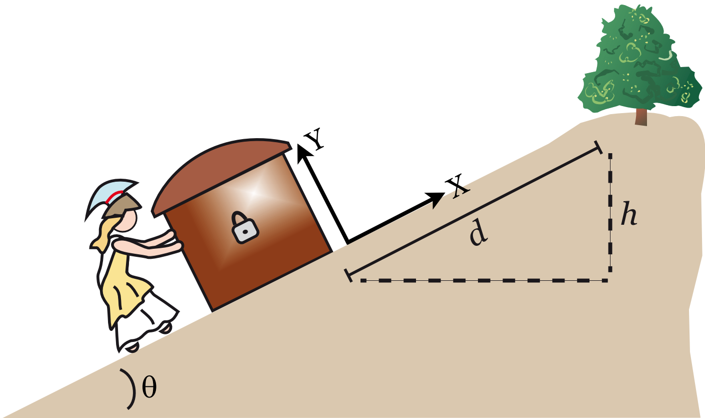
La única variable que no conocemos aquí es el trabajo realizado por el peso, así que despejemos este trabajo:

$$-W_m - W_f = W_p. \tag{5}$$

Como el trabajo realizado por el peso es $-mg(h_f - h_i)$, podemos escribir la ecuación (5) así:

$$-W_m - W_f = \underbrace{-mg(h_f - h_i)}_{W_p}. \tag{6}$$

Si usamos un sistema de coordenadas con el origen en el punto inicial del recorrido, entonces la altura inicial será cero y la altura final es h, que es la altura subida por el cofre:



Estamos usando un sistema de coordenadas cuyo origen esté en el punto inicial del cofre en la ladera de forma que la altura inicial sea cero y la altura final sea simplemente h. Hemos usado un sistema inclinado, con el eje X paralelo al desplazamiento del cofre.

Si tenemos en cuenta que h_i es igual a cero, h es h_f y si dividimos por $-mg$, la ecuación (6) queda

$$\frac{-W_m - W_f}{-mg} = h. \tag{7}$$

Si simplificamos los signos negativos, obtenemos

$$\frac{W_m + W_f}{mg} = h. \tag{8}$$

Ahora que tenemos una expresión para h, podemos usar la ecuación (1):

$$\sin\theta = \frac{\overbrace{\frac{W_m+W_f}{mg}}^{h}}{d} = \frac{W_m + W_f}{mgd}. \tag{9}$$

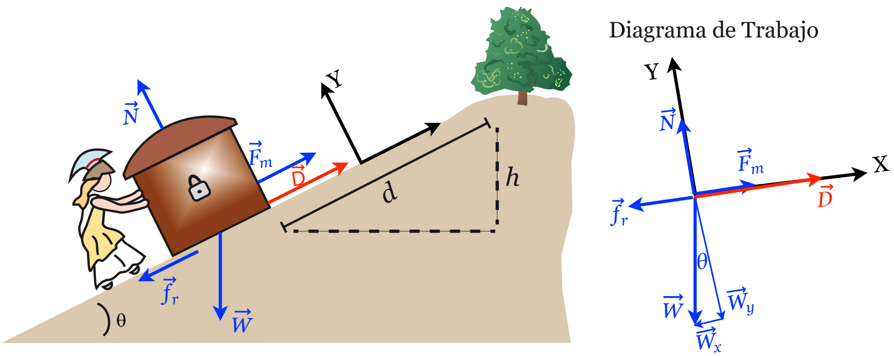
Si aplicamos seno inverso, obtenemos finalmente

$$\theta = \arcsin\left(\frac{W_m + W_f}{mgd}\right). \tag{10}$$

Sólo nos queda reemplazar los valores numéricos de cada variable:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\overbrace{7281102\ \mathrm{J}}^{W_m} - \overbrace{217902\ \mathrm{J}}^{W_f}}{\underbrace{(18000\ \mathrm{kg})}_{m}(9.81\ \mathrm{m/s^2})\underbrace{(80\ \mathrm{m})}_{d}}\right) = 30^\circ. \tag{11}$$

(b) Para hallar el coeficiente de fricción entre el cofre y la ladera podemos usar la información del trabajo realizado por la fricción, pues la magnitud de la fricción es $f_r = \mu N$. Ahora bien, la fricción es antiparalela al desplazamiento del cofre, como podemos apreciar claramente a partir del diagrama de trabajo del cofre:



Sobre el cofre actúan cuatro fuerzas; el peso, la normal, la fuerza de Atenea y la fuerza de fricción. La fricción es anti-paralela al desplazamiento.

Como la fricción es antiparalela al desplazamiento, el trabajo de la fricción es

$$W_f = -\underbrace{\mu N}_{f_r}\ d. \tag{12}$$

Aquí no conocemos la magnitud de la normal ni el coeficiente de fricción. Para hallar la normal notemos del diagrama de trabajo que la normal debe ser igual a la componente Y del peso porque la aceleración Y del cofre es cero. Según el diagrama de trabajo, $W_y = W\cos\theta$, así que

$$N = \underbrace{mg\cos\theta}_{W_y}. \tag{13}$$

Ahora podemos aplicar la ecuación (12) para obtener el coeficiente de fricción:

$$W_f = -\mu(\underbrace{mg\cos\theta}_{N})d. \tag{14}$$

Si dividimos por todo lo que acompaña a μ, obtenemos

$$-\frac{W_f}{(mg\cos\theta)d} = \mu. \tag{15}$$

Finalmente, reemplazamos los valores de las diferentes variables:

$$-\frac{\overbrace{-217902\ \mathrm{J}}^{W_f}}{\underbrace{(18000\ \mathrm{kg})}_{m}(9.81\ \mathrm{m/s^2})(\cos \underbrace{30^\circ}_{\theta})\underbrace{(80\ \mathrm{m})}_{d}} = 0.02. \tag{16}$$

(c) Debemos corregir la gráfica de energías. Para hacerlo debemos tener presente que la barra azul y la naranja están bien, y la amarilla y la gris están mal.

Empecemos por ver cuál es el problema con la barra amarilla. Esa barra indica la energía cinética final del cofre y tiene un valor entre 5 y 8 joules. No es difícil saber por qué está mal esa barra: el cofre sube con rapidez constante, así que su energía cinética siempre debe ser la misma. Si la barra azul nos dice que la energía cinética inicial es de 10 joules, entonces la barra amarilla que también representa a la energía cinética debe indicar 10 joules.

El problema con la barra gris es más sutil. ¿Cómo podemos saber qué valor debería indicar el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas? Una forma es usando la ecuación $E_{mf} = E_{mi} + \sum W_i$. Conocemos la energía mecánica inicial que es de 10 joules (sólo es cinética) y conocemos la energía mecánica final que es de 25 joules (10 joules de la cinética más 15 joules de la potencial). Así que la anterior ecuación quedaría así:

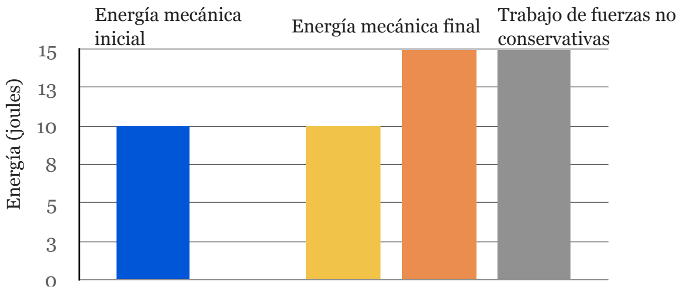
$$\underbrace{25\ \mathrm{J}}_{E_{mf}} = \underbrace{10\ \mathrm{J}}_{E_{mi}} + \sum W. \tag{17}$$

De la anterior ecuación se sigue que el trabajo total de todas las fuerzas no conservativas debe ser

$$15\ \mathrm{J} = \sum W. \tag{18}$$

Así, la barra gris debe indicar un valor de 15 joules.

Otro método: otra forma de obtener este resultado es usando la ecuación (5) que obtuvimos al aplicar el teorema de trabajo y energía. Según la ecuación (5) el trabajo del peso es igual al menos trabajo de la fuerza de Atenea y de la fuerza de fricción. Si nos dicen en la gráfica de energía que la energía potencial final es de 15 joules y la inicial es de 0 joules, entonces podemos inferir que el trabajo del peso es de $-(15\text{ J} - 0\text{ J}) = -15\text{ J}$, porque el trabajo del peso es el menos cambio de energía potencial gravitacional. Así que por la ecuación (5), el trabajo de las otras fuerzas no conservativas debe ser igual a 15 J. Si realizamos la gráfica de energía con estas correcciones, obtenemos:



Esta gráfica nos muestra claramente que si hay fuerzas no conservativas actuando sobre el sistema, entonces la energía mecánica del sistema no se conserva (la energía mecánica inicial es de 10 joules y la final es de 25 joules). De hecho, *lo que aumentó la energía mecánica entre el momento inicial y final es exactamente igual al trabajo que las fuerzas no conservativas hicieron (15 joules)*.

(d) Debemos calcular la rapidez del cofre cuando llega al árbol suponiendo esta vez que no hay fricción. Para hacer esto podemos usar el teorema de trabajo y energía.

Volvemos a escribir la ecuación (3) pero esta vez teniendo en cuenta que la fricción no hace trabajo:

$$\Delta K = W_m + W_p + \underbrace{0}_{W_f}. \tag{19}$$

El trabajo que hace Atenea lo conocemos y el trabajo del peso lo podemos calcular porque conocemos la pendiente y la distancia. Empecemos por encontrar una expresión para el trabajo del peso:

$$W_p = -mg(h_f - h_i). \tag{20}$$

Según el sistema elegido, la altura inicial es cero y la altura final es h, así que la ecuación (20) queda

$$W_p = -mgh. \tag{21}$$

Ahora podemos escribir la altura h en términos de la pendiente y la distancia, usando la ecuación (1):

$$W_p = -mg\underbrace{(d \sin \theta)}_{h}. \tag{22}$$

Ahora usamos esta expresión en la ecuación (19):

$$\Delta K = W_m \underbrace{-mg(d \sin \theta)}_{W_p}. \tag{23}$$

Para hallar la rapidez final debemos escribir el cambio de energía cinética explícitamente, en términos de la rapidez inicial y final:

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2}_{\Delta K} = W_m - mg(d \sin \theta). \tag{24}$$

Si pasamos la energía cinética inicial al otro lado, esto queda

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = W_m - mg(d \sin \theta) + \frac{1}{2}mv_i^2. \tag{25}$$

Multipliquemos por 2 y dividamos por la masa:

$$v_f^2 = \frac{2(W_m - mg(d \sin \theta) + \frac{1}{2}mv_i^2)}{m}. \tag{26}$$

Finalmente, sacamos raíz cuadrada para obtener una expresión de la rapidez final

$$v_f = \sqrt{\frac{2(W_m - mg(d \sin \theta) + \frac{1}{2}mv_i^2)}{m}}. \tag{27}$$

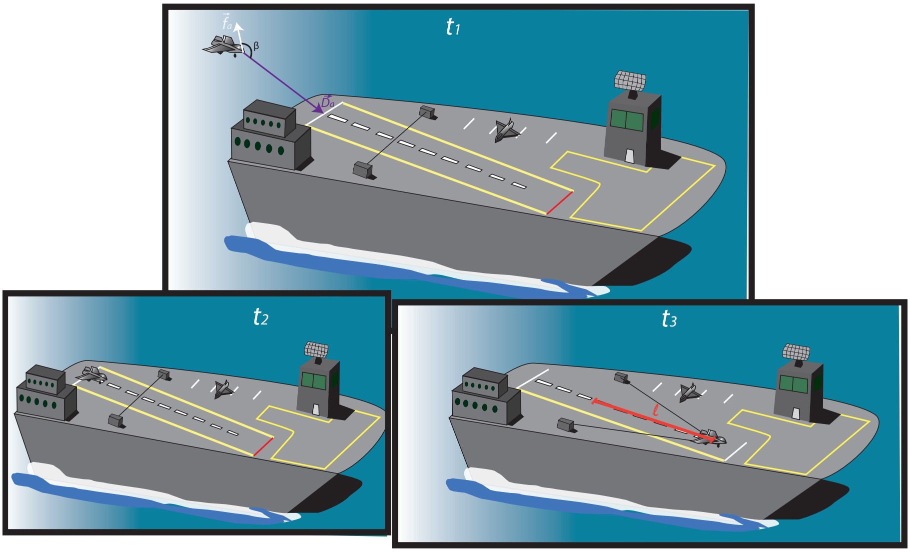
Si reemplazamos los valores numéricos, la rapidez final nos da

$$\begin{aligned} v_f &= \sqrt{\frac{2(\overbrace{(7281102)}^{W_m} - \overbrace{(18000\ \text{kg})}^{m}(9.81\ \text{m/s}^2)(\overbrace{(80\ \text{m})}^{d} \sin \overbrace{30^\circ}^{\theta}) + \frac{1}{2}\overbrace{(18000\ \text{kg})}^{m}\overbrace{(10\ \text{m/s})}^{v_i}{}^2)}{\underbrace{(18000\ \text{kg})}_{m}}} \qquad (28) \\ &= 11.15\ \text{m/s}. \end{aligned}$$

Problema 5.27.

Palabras clave: teorema de trabajo y energía, trabajo de la fricción dinámica, definición de trabajo, trabajo de un resorte ideal.

Como las pistas de los portaviones son mucho más cortas que la pista de un aeropuerto normal, los portaviones usan una especie de caucho que sirve para ayudar a frenar los aviones de combate cuando aterrizan. Suponga que un avión de masa m aterriza sobre el portaviones indicado en el siguiente dibujo. En el instante t_1 el avión tiene una rapidez v_1 y está a una altura h_1 de la pista del portaviones. En el instante t_2 el avión hace contacto con la pista y en el instante t_3 se detiene por completo. Entre la pista y las llantas del avión hay un coeficiente de fricción dinámico μ_d. Además, desde t_1 hasta t_2, el avión realiza un desplazamiento $\vec{D}_a$ de magnitud D_a. Mientras el avión realiza el desplazamiento anterior, el aire genera una fuerza de sustentación de magnitud f_a que forma un ángulo β con respecto al vector $\vec{D}_a$, como se indica en el dibujo. Suponga que el caucho que ayuda a frenar al avión se puede modelar como un resorte ideal de constante k y suponga que cuando el avión se detiene por completo, el estiramiento es l, como se ve en el dibujo. Escriba una expresión en términos de m, v_1, μ_d, f_a, β, D_a, k, l y h_1 para la distancia que recorre el avión desde t_2 hasta el instante en que el avión hace contacto con el caucho.



Solución

¿Qué información nos dan?

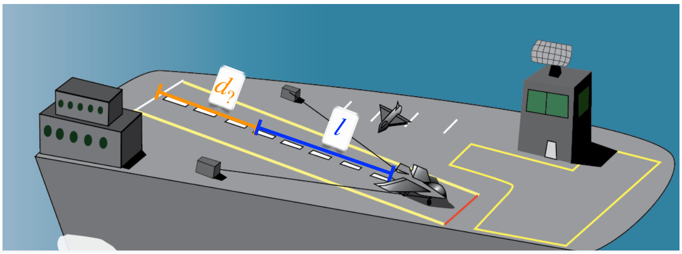
El avión de masa m tiene una rapidez v_1 cuando está a una altura h_1. Mientras aterriza, realiza un desplazamiento $\vec{D}_a$ de magnitud D_a, que marca un ángulo β con respecto a la fuerza de sustentación que tiene magnitud f_a. El coeficiente de fricción dinámico entre la pista y el avión es μ_d. El caucho que ayuda a frenar se puede considerar como un resorte ideal, de constante k que se estira l hasta que el avión se detiene por completo.

¿Qué nos piden?

Encontrar la distancia que recorre el avión en la pista desde que la toca por primera vez hasta que hace contacto con el caucho.

Para encontrar la distancia que recorre el avión en la pista antes de entrar en contacto con el caucho podemos aplicar el teorema de trabajo y energía. Notemos que la distancia que buscamos influye en el trabajo que la fricción de la pista hace sobre el avión. En realidad, el trabajo total que hace la fricción de la pista se compone de dos tramos: el trabajo que hace la fricción en la distancia que buscamos y el trabajo que hace la fricción desde que el avión toca el caucho hasta que se frena.

La distancia que recorre el avión desde que hace contacto con el caucho es l, que es el estiramiento del caucho. Esto se ilustra a continuación:



La fricción de la pista hace trabajo a lo largo de toda la distancia que recorre el avión en la pista. Es decir, desde que el avión toca la pista en t_2 hasta que se detiene en t_3. Notemos que esta distancia total se puede escribir como la distancia desconocida que buscamos y que hemos llamado $d_?$ sumada con l que es la distancia que recorre el avión mientras estira el caucho.

Por lo explicado arriba, podemos dividir el trabajo de la fricción en dos: el trabajo de la fricción en la distancia l que conocemos y el trabajo de la fricción en la distancia $d_?$ que no conocemos. El trabajo total de la fricción de la pista es la suma de ambos trabajos:

$$W_l + W_{d?} = W_{fr}, \tag{1}$$

donde W_l es el trabajo de la fricción en la distancia l, $W_{d?}$ es el trabajo en la distancia desconocida y W_{fr} es el trabajo total de la fricción.

Nuestro objetivo es hallar una expresión para $W_{d?}$ y con ella poder encontrar después una expresión para $d_?$. Para hallar una expresión para $W_{d?}$ podemos comenzar por aplicar el teorema de trabajo y energía. Tenemos dos opciones: aplicar este teorema para diferentes tramos o aplicarlo de una vez para todo el recorrido del avión desde t_1 hasta t_3. Para no extendernos innecesariamente vamos a aplicar el teorema para todo el recorrido (si el lector desea practicar, puede intentar aplicarlo para cada uno de los tramos).

En todo el recorrido hay en total cuatro fuerzas sobre el avión: la fuerza de sustentación del aire, la fricción con la pista, la fuerza elástica del caucho que ayuda a detener al avión y la fuerza normal que la pista le hace al avión. De estas fuerzas la única que no hace trabajo es la normal de la pista porque esta es perpendicular al movimiento del avión sobre la pista. Si llamamos W_a al trabajo que hace la fuerza de sustentación del aire, W_{fr} al trabajo que hace la fricción de la pista, W_c al trabajo que hace el caucho y W_p al trabajo que hace el peso, el teorema de trabajo y energía queda así:

$$\Delta K = W_p + W_a + W_{fr} + W_c. \tag{2}$$

Si usamos la ecuación (1) en la (2), obtenemos

$$\Delta K = W_p + W_a + \underbrace{W_l + W_{d?}}_{W_{fr}} + W_c. \tag{3}$$

Para despejar $W_{d?}$ debemos primero encontrar las otras variables que aparecen en la ecuación anterior. Empecemos por el trabajo hecho por el peso, que siempre es $-mg(h_f - h_i)$. Si ponemos nuestro sistema de coordenadas en la pista del portaviones, entonces la altura final será cero y la altura inicial será h_1, que es conocida. Así que el trabajo hecho por el peso será

$$W_p = -mg(\underbrace{\;0\;}_{h_f} - \underbrace{h_1}_{h_i}) = mgh_1. \tag{4}$$

Ahora encontremos una expresión para el trabajo de la fuerza de sustentación del aire. Nos dicen la magnitud de esta fuerza, la magnitud del desplazamiento del avión en el tramo en que siente esta fuerza y el ángulo que forman el desplazamiento y la fuerza. Con estos elementos podemos encontrar una expresión para el trabajo que hace la fuerza de sustentación del aire usando la definición de trabajo:

$$W_a = \vec{F}_a \cdot \vec{D}_a = \left\|\vec{F}_a\right\| \left\|\vec{D}_a\right\| \cos\theta \tag{5}$$

donde $\vec{F}_a$ es la fuerza de sustentación del aire y $\vec{D}_a$ es el desplazamiento del avión. En el enunciado nos dicen que la magnitud de la fuerza de sustentación del aire es f_a, la magnitud del desplazamiento es D_a y el ángulo entre ambos vectores es β, así que podemos escribir la anterior ecuación de esta forma:

$$W_a = \underbrace{f_a}_{\|\vec{F}_a\|} \underbrace{D_a}_{\|\vec{D}_a\|} \cos\beta. \tag{6}$$

Ahora busquemos una expresión para el trabajo W_l hecho por la fricción en el tramo en que el avión se frena con el caucho. Como la fuerza de fricción de la pista es opuesta al desplazamiento del avión sobre la pista, el trabajo hecho por la fricción es

$$W_{fr} = -f_r d. \tag{7}$$

Para aplicar la anterior ecuación, recordemos que la magnitud de la fricción dinámica que una superficie realiza es $f_r = \mu_d N$. En este caso $N = mg$ porque en la pista el avión no tiene aceleración vertical (en Y). Por lo tanto, la magnitud de la fuerza de fricción de la pista es

$$f_r = \mu_d \underbrace{mg}_{N}. \tag{8}$$

Si usamos esto en la ecuación (7), obtenemos

$$W_{fr} = -\underbrace{\mu_d mg}_{f_r} d. \tag{9}$$

Ahora, la distancia que a nosotros nos interesa aquí es l porque estamos analizando la fricción sólo en ese trayecto, así que podemos escribir la ecuación (9) así:

$$W_{fr} = -\mu_d mg \underbrace{l}_{d}. \tag{10}$$

Finalmente, busquemos una expresión para el trabajo realizado por el caucho. Nos dicen que el caucho se puede modelar como un resorte ideal y recordemos de la nota 5.16 que el trabajo de un resorte ideal es $-\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$, donde x_f es el estiramiento final y x_i el inicial. En este caso el estiramiento inicial es cero porque inicialmente el caucho no está estirado, y el estiramiento final es l. Así que el trabajo hecho por el caucho es

$$W_c = -\frac{1}{2}k(l^2 - 0) = -\frac{1}{2}kl^2. \tag{11}$$

Si usamos los resultados de la ecuación (4), ecuación (6), ecuación (10) y ecuación (11) en la ecuación (3), obtenemos

$$\Delta K = \underbrace{mgh_1}_{W_p} + \underbrace{f_a D_a \cos\beta}_{W_a} \underbrace{-\mu_d mgl}_{W_{fr}} \underbrace{-\frac{1}{2}kl^2}_{W_c} + W_{d?}. \tag{12}$$

Si dejamos el término $W_{d?}$ solo al otro lado, llegamos a

$$\Delta K - mgh_1 - f_a D_a \cos\beta + \mu_d mgl + \frac{1}{2}kl^2 = W_{d?}. \tag{13}$$

Nos falta escribir el cambio de energía cinética de forma explícita. Como la rapidez final es cero y la inicial es v_1, este cambio es

$$\Delta K = \underbrace{0}_{K_f} \underbrace{-\frac{1}{2}mv_i^2}_{K_i} = -\frac{1}{2}mv_1^2. \tag{14}$$

Si usamos esto en la ecuación (13), tenemos

$$\underbrace{-\frac{1}{2}mv_i^2}_{\Delta K} - mgh_1 - f_a D_a \cos\beta + \mu_d mgl + \frac{1}{2}kl^2 = W_{d?}. \tag{15}$$

Así hemos encontrado una ecuación para $W_{d?}$ en término de variables conocidas. Sin embargo, lo que en realidad queremos es una expresión para $d_?$. Para hallarla teniendo $W_{d?}$ sólo necesitamos recordar que el trabajo de la fricción de la pista está dado por la ecuación (9). Podemos usar esa ecuación pero teniendo en cuenta que la distancia que nos interesa ahora es $d_?$:

$$-\frac{1}{2}mv_i^2 - mgh_1 - f_a D_a \cos\beta + \mu_d mgl + \frac{1}{2}kl^2 = \underbrace{-\mu mgd_?}_{W_{d?}}. \tag{16}$$

Si pasamos a dividir todo por $-\mu_d mg$, obtenemos finalmente una expresión para la distancia que nos piden:

$$\frac{-\frac{1}{2}mv_i^2 - mgh_1 - f_a D_a \cos\beta + \mu_d mgl + \frac{1}{2}kl^2}{-\mu mg} = d_?. \tag{17}$$

Problema de repaso 5.28.

Palabras clave: teorema de trabajo y energía, trabajo de la fricción, trabajo de fuerzas no conservativas.

Responda falso o verdadero y justifique su respuesta:

(1) El teorema de trabajo y energía no sirve para casos de caída libre.

(2) La fuerza de fricción siempre realiza trabajo negativo sobre un objeto.

(3) Si el trabajo total de las fuerzas no conservativas sobre un sistema es cero, entonces la energía mecánica del sistema se conserva.

(4) Si la rapidez final del objeto es menor que la inicial, entonces el trabajo neto sobre el sistema es negativo.

(5) Si la energía cinética permanece constante, podemos inferir que no hay fuerzas que hagan trabajo.

Solución

(1) Falso. El teorema de trabajo y energía sirve para cualquier tipo de casos, incluido por supuesto casos de caída libre.

(2) Falso. Cuando el objeto se desliza sobre una superficie, la fricción dinámica se opone al desplazamiento y entonces realiza un trabajo negativo. Pero también existe la fricción estática y esta puede ir en la dirección en que se mueve el objeto, como ocurría, por ejemplo, en el problema 5.25.

(3) Verdadero. Si el trabajo realizado por todas las fuerzas no conservativas es cero, entonces la energía mecánica se debe conservar. Esto se ve claramente en la ecuación $E_{mf} = E_{mf} + \sum W_i$, donde la suma es sobre los trabajos de las fuerzas no conservativas.

(4) Verdadero. Por el teorema de trabajo y energía, el trabajo neto es igual al cambio de energía cinética. Si la rapidez final es menor, entonces el cambio de energía cinética es negativo; si este cambio es negativo entonces el trabajo neto tiene que ser negativo.

(5) Falso. Si la energía cinética permanece constante entonces el cambio de energía cinética es cero y, por el teorema de trabajo y energía, el trabajo neto es cero. Pero que el trabajo neto sea cero no quiere decir que no haya fuerzas haciendo trabajo; puede ser que una fuerza haga trabajo positivo y otra haga negativo de forma que se cancelen ambos y el total sea cero.

5.1 Notas del capítulo

Nota 5.1: Un sistema de coordenadas conveniente para la energía potencial gravitacional.

Es conveniente usar, cuando sea posible, un sistema de coordenadas para el cual la energía potencial gravitacional inicial o final sea cero. Al hacer esto podemos simplificar un poco los cálculos.

Nota 5.2: Energía potencial gravitacional.

La energía potencial gravitacional de un objeto está dada por mgh, donde h es la altura a la que está el objeto con respecto a nuestro sistema de coordenadas. Como la altura cambia de acuerdo al sistema elegido, la energía potencial gravitacional va a depender de la escogencia del sistema. Además, la altura puede ser negativa si la posición final del objeto apunta en la dirección negativa de Y.

El cambio de energía potencial gravitacional no depende del sistema de coordenadas y siempre está dado por $mg(h_f - h_i)$ que es lo mismo que $-mg(h_i - h_f)$.

Si un objeto se acerca al centro de la Tierra, su energía potencial gravitacional disminuye, y si se aleja, aumenta.

Nota 5.3: Energía cinética

La energía cinética de un objeto es una energía que depende de la masa y de la rapidez al cuadrado del objeto: $k = \frac{1}{2}mv^2$.

Nota 5.4: Energía mecánica.

La energía mecánica de un objeto es la suma de la energía potencial con la energía cinética. En el caso en el que la única energía potencial es la gravitacional, la energía mecánica se puede escribir así: $E_m = K + U_g$.

Cuando sobre un objeto la única fuerza que actúa es el peso, la energía mecánica del objeto se conserva: $E_{m1} = E_{m2}$. Esto quiere decir que la suma de la energía cinética con la potencial gravitacional del objeto en un tiempo t_1 es igual a la suma de ambas energías en otro tiempo t_2: $K_1 + U_{g1} = K_2 + U_{g2}$, donde el subíndice 1 se refiere al tiempo t_1 y el subíndice 2 al tiempo t_2.

Nota 5.5: Energía mecánica de sistema objeto-resorte.

La energía mecánica de un sistema compuesto por un objeto y un resorte ideal es la suma de la energía mecánica del objeto con la energía mecánica del resorte. La energía mecánica del objeto es la suma de la energía cinética del objeto con la energía potencial gravitacional del objeto, mientras que la energía mecánica del resorte es igual a la energía potencial elástica del resorte. Por lo tanto, la energía mecánica total del sistema es $E_{m_{sistema}} = E_{m_{objeto}} + E_{m_{resorte}} = K + U_g + U_e = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx^2$.

Cuando sobre un objeto las únicas fuerzas que actúan son el peso y la fuerza de un resorte ideal, entonces la energía mecánica del sistema total se conserva: $E_{m1} = E_{m2}$. Esto quiere decir que la suma de la energía cinética con la potencial gravitacional y la potencial elástica en un tiempo t_1 es igual a la suma de estas energías en otro tiempo t_2: $K_1 + U_{g1} + U_{e1} = K_2 + U_{g2} + U_{e2}$, donde el subíndice 1 se refiere al tiempo t_1 y el subíndice 2 al tiempo t_2.

Nota 5.6: ¿Cuándo una fuerza realiza trabajo?

Una fuerza realiza trabajo sobre un objeto si alguna de las siguientes dos condiciones se cumple:

1. La fuerza es paralela al desplazamiento o tiene alguna componente paralela al desplazamiento. En este caso la fuerza (o su componente) realiza trabajo positivo sobre el objeto.

2. La fuerza es antiparalela al desplazamiento o tiene alguna componente antiparalela al desplazamiento. En este caso la fuerza (o su componente) realiza trabajo negativo.

Nota 5.7: Trabajo.

- En general, el trabajo que una fuerza $\vec{F}$ realiza sobre un objeto se calcula usando la siguiente ecuación: $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos\theta$, donde $\vec{d}$ es el desplazamiento del objeto y θ es el ángulo que se forma entre la fuerza y el desplazamiento.

- Si la fuerza es paralela al desplazamiento, el trabajo es positivo y es igual a la multiplicación de la magnitud de la fuerza y el desplazamiento: $W = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\|$.

- Si la fuerza es antiparalela al desplazamiento, el trabajo es la multiplicación de la magnitud de los vectores con un signo menos: $W = -\|\vec{F}\| \|\vec{d}\|$.

- Si la fuerza es perpendicular al desplazamiento el trabajo es cero.

- También podemos calcular el trabajo si conocemos las componentes de la fuerza y el desplazamiento, usando la ecuación: $W = \pm\|\vec{F}_x\| \|\vec{D}_x\| \pm \|\vec{F}_y\| \|\vec{D}_y\|$, donde los signos dependen de si cada componente es paralela o antiparalela a la respectiva componente del desplazamiento.

Nota 5.8: Diagrama de trabajo.

En los problemas de trabajo es conveniente realizar un diagrama de trabajo. Este diagrama no es más que un diagrama de fuerzas en el que además de estas indicamos el desplazamiento del objeto.

Nota 5.9: Relación entre el trabajo que A le hace a B y el que B le hace a A.

El trabajo que A le hace a B es igual, salvo por un signo contrario, al trabajo que B le hace a A; $W_A = -W_B$.

Nota 5.10: Sistema de coordenadas conveniente para calcular el trabajo.

Para calcular el trabajo usando la ecuación $W = \pm\left\|\vec{F}_x\right\|\left\|\vec{D}_x\right\| \pm \left\|\vec{F}_y\right\|\left\|\vec{D}_y\right\|$ es muy conveniente si usamos un sistema de coordenadas según el cual la fuerza o el desplazamiento se alineen con alguno de los ejes. Si alineamos un eje con la fuerza o con el desplazamiento, el trabajo será la multiplicación de la fuerza en ese eje por el desplazamiento en ese mismo eje y nos podemos olvidar de todo lo que pase en el otro eje. Si, por ejemplo, alineamos el desplazamiento con el eje Y, el trabajo será sólo F_yD_y porque el otro término sería cero (D_x sería cero).

Nota 5.11: Trabajo hecho por el peso.

El trabajo realizado por el peso sólo depende del desplazamiento vertical del objeto, es decir, sólo depende de $h_f - h_i$. El trabajo hecho por el peso se calcula usando la ecuación $W_w = -mg(h_f - h_i)$.

Notemos que si el objeto sube esta ecuación nos da negativa y entonces el trabajo hecho por el peso es negativo, lo cual tiene sentido, porque si el objeto sube su desplazamiento vertical será hacia arriba, mientras que el peso siempre apunta hacia abajo. Por el contrario, si el objeto desciende, esta ecuación es positiva porque $h_f - h_i$ será negativo. Esto tiene sentido porque en ese caso el desplazamiento vertical será hacia abajo, en la misma dirección del peso.

Además, el trabajo hecho por el peso es igual al negativo del cambio de energía potencial gravitacional: $W_w = -\Delta U_g$.

No sobra resaltar que para el trabajo hecho por el peso son irrelevantes las otras componentes del desplazamiento; sólo importa el cambio de altura (la razón de esto es que el peso no tiene componentes en otras direcciones diferentes a la dirección vertical).

Nota 5.12: Trabajo hecho por la fuerza de fricción dinámica.

El trabajo realizado por una fuerza de fricción dinámica depende de la distancia total del recorrido. Cuanto mayor sea esta distancia, más trabajo negativo realiza la fricción dinámica.

Nota 5.13. Comparación entre fuerzas conservativas y fuerzas no conservativas

	Fuerza conservativa	Fuerza no conservativa
Conserva la energía mecánica del sistema.	SÍ	NO
El trabajo realizado no depende de la distancia sino de la posición inicial y final.	SÍ	NO
Si el punto inicial y final del recorrido es el mismo, el trabajo de la fuerza es cero.	SÍ	NO
Podemos asociar una energía potencial a la fuerza.	SÍ	NO
El trabajo realizado por la fuerza es el negativo del cambio de la energía potencial asociada a la fuerza.	SÍ	No aplica

Nota 5.14: Energía mecánica final según el trabajo realizado por fuerzas no conservativas.

Si sobre un sistema con energía mecánica inicial E_{mi} actúan varias fuerzas no conservativas que hacen trabajo sobre el sistema, la energía mecánica final del sistema será $E_{mf} = E_{mi} + \sum_i W_i$, donde la suma se hace sobre todos los trabajos de las fuerzas no conservativas.

Nota 5.15: ¿Cuándo la normal hace trabajo?

Si un objeto se mueve sobre una superficie, la normal no hace trabajo porque es perpendicular al desplazamiento del objeto. Pero si la superficie también se mueve y empuja al objeto, la normal sí hace trabajo.

Nota 5.16: Trabajo realizado por un resorte.

El trabajo realizado por un resorte ideal es igual al menos cambio de energía potencial elástica. Si x_i es el estiramiento o la compresión inicial del resorte y x_f es la final, entonces el trabajo realizado por el resorte es igual a $W_r = -\left(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\right) = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$.

Nota 5.17: Teorema de trabajo y energía.

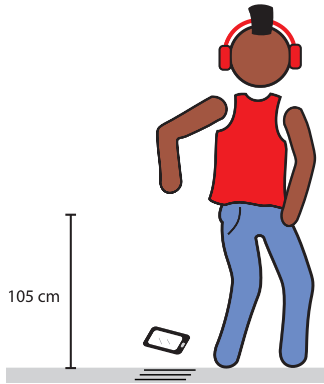
El teorema de trabajo y energía dice que el cambio de energía cinética de un objeto es igual al trabajo neto (a la suma de todos los trabajos que hay) sobre el sistema: $\Delta K = W_n$.

5.2 Problemas sin solucionar

1. Un teléfono celular se cae del bolsillo de Ernesto, el cual está a 105 centímetros sobre el suelo. Cuando el celular está a 5 centímetros de tocar el piso, su rapidez es de 5 metros por segundo.

(a) ¿Era cero la rapidez inicial del celular? Si no lo era, ¿cuál era?

(b) Ernesto tiene mala suerte y el celular no cae en el suelo sino en un hueco de alcantarilla, que tiene una profundidad de 2 metros. Con base en lo encontrado en (a), ¿cuál es la rapidez del celular al tocar el fondo de la alcantarilla?

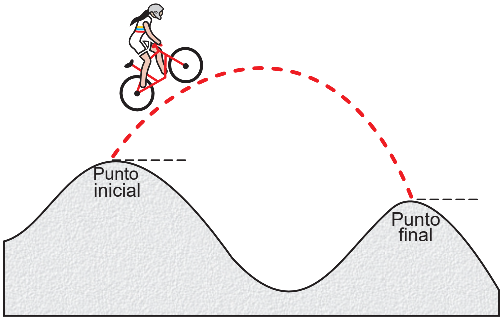


Problemas similares: 5.2, 5.4, 5.5.

2. Mariana Pajón realiza un salto en su bicicleta. Si la rapidez en el punto final del salto es de 10 metros por segundo y la rapidez inicial es de 8 metros por segundo,

(a) ¿A qué altura con respecto al punto final está el punto inicial del salto?

(b) ¿Cuál es la energía mecánica de Mariana con su bicicleta en cualquier punto del vuelo si la masa de ella junto con la de la bicicleta es de 65 kilogramos?



Problemas similares: 5.4, 5.5.

3. Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta:

(a) La energía mecánica de A se conserva si la única fuerza sobre A es el peso.

(b) Si la energía mecánica de un objeto no se conserva, entonces la energía cinética del objeto aumenta.

(c) El cambio de energía cinética depende del sistema de coordenadas elegido.

(d) Si la energía potencial gravitacional de un objeto aumenta una cantidad X (y esta es la única energía potencial del objeto) y la energía cinética de ese objeto disminuye una cantidad X, entonces la energía mecánica se conserva.

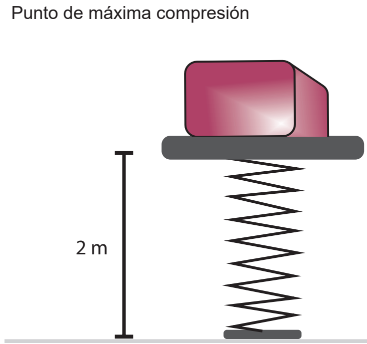
(e) Si la rapidez disminuye, y la única fuerza actuando sobre el objeto es el peso, entonces la altura del objeto aumenta.

Problemas similares: 5.3.

4. Matilda pone un objeto de 4 kilogramos sobre un resorte, y deja que el objeto comprima el resorte. En el punto de máxima compresión el objeto está en equilibrio, a una altura de 2 metros sobre el suelo. La energía mecánica del sistema total en ese momento es de 200 joules (esta energía se mide con respecto a un sistema de coordenadas en el piso). Tenga en cuenta que la fuerza ejercida por el resorte sobre el objeto es de magnitud kx, donde x es la compresión y k la constante del resorte.

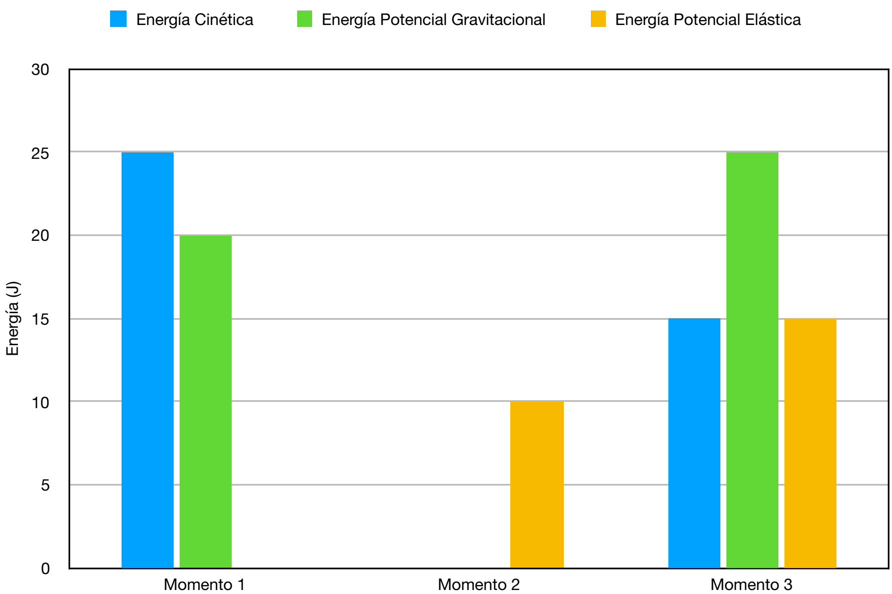
(a) ¿Cuál es la compresión del resorte?

(b) Si Matilda pusiera un objeto de 6 kilogramos, ¿cuál sería la energía mecánica total del sistema?



Problemas similares: 5.6, 5.8.

5. La siguiente es una gráfica de las energías de un sistema que incluye un resorte ideal y otro objeto. Con base en la gráfica, explique qué está pasando con el objeto; ¿sube, baja, se mantiene a la misma altura o aumenta su rapidez? Explique qué pasa con el resorte; ¿se comprime más o menos?

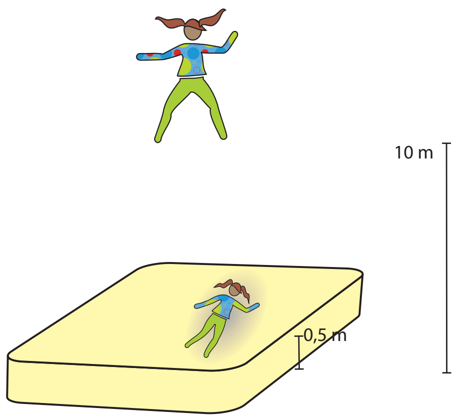


Problemas similares: 5.8, 5.10.

6. Cecilia salta desde una altura de 10 metros medidos con respecto al piso, para caer en una plataforma inflable que se puede modelar como un resorte ideal. Cuando Cecilia cae sobre ella y la comprime, Cecilia está a 0.5 metros del piso. Suponga que la energía elástica de la plataforma cuando Cecilia la comprime al máximo es de 1000 J, y que la constante k de la plataforma es de 8 kg/s^2.

(a) ¿Cuál es la compresión de la plataforma?

(b) ¿Cuál es la energía mecánica total del sistema en el momento justo cuando Cecilia ha comprimido la plataforma la mitad de la compresión hallada en (a)?



Problema similar: 5.9.

7. Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta:

(a) Si tenemos un objeto que interactúa con un resorte ideal, y si sobre el objeto actúa el peso, la fuerza del resorte y otra fuerzas, entonces la energía mecánica del objeto no se conserva.

(b) La energía mecánica de un resorte ideal cambia si el resorte se comprime.

(c) Si Pedro hala un resorte de constante k una distancia $4d$, y si María comprime un resorte con el doble de k una distancia $d/4$, entonces la energía elástica de ambos resortes es la misma.

(d) Cuanto mayor sea la energía elástica de un resorte, mayor es la energía mecánica que se pierde para un sistema compuesto por el resorte y un objeto.

(e) Si la energía cinética de un objeto que interactúa con un resorte ideal disminuye a la mitad, la energía potencial elástica tiene que aumentar el doble.

Problemas similares: 5.7, 5.11.

8. Dos rinocerontes están peleando. El rinoceronte más pequeño tiene masa de 300 kilogramos y tiene más fuerza, así que logra arrastrar 5 metros al rinoceronte más grande, el cual tiene masa de 600 kilogramos. Hay un coeficiente de fricción dinámico de 0.25 entre el piso y las patas de los rinocerontes. El trabajo hecho por el rinoceronte más grande sobre el rinoceronte más pequeño es de −30 000 J (note el signo negativo). Ambos rinocerontes ejercen una fuerza constante.

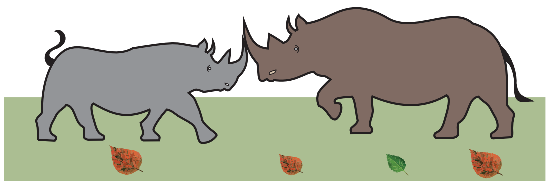
(a) ¿Cuál es el trabajo hecho por el rinoceronte pequeño sobre el grande?

(b) ¿Cuál es la fuerza que el rinoceronte pequeño ejerce sobre el grande?

(c) ¿Cuál es el trabajo neto sobre el rinoceronte grande?

(d) ¿Cuál es el trabajo neto sobre el rinoceronte pequeño?

Nota: como en casi todos los problemas de trabajo, empiece por realizar un diagrama de trabajo.

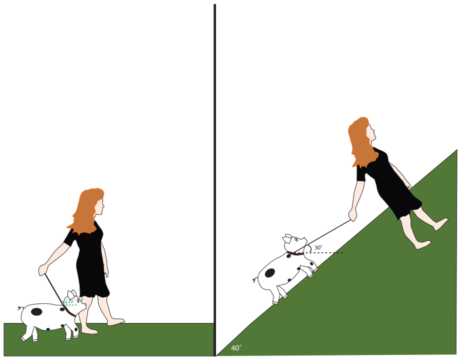


Problemas similares: 5.12, 5.13.

9. Stacy saca a su cerdito, llamado Abner, a caminar. Primero Stacy y Abner caminan sobre un sendero plano una distancia de 200 metros, pero después caminan 40 metros por una pendiente de inclinación de 60 grados. En la primera parte del trayecto, Stacy hala a Abner con una fuerza constante de 30 N, marcando un ángulo de 120 grados con el suelo, como se ve en el dibujo. En la segunda parte del trayecto, Stacy ejerce una fuerza constante de 50 N, marcando un ángulo de 30 grados con respecto a una línea horizontal, como se indica en el dibujo.

(a) Halle el trabajo total que Stacy ejerce sobre Abner durante todo el recorrido.

(b) Halle el trabajo realizado por el peso sobre Abner en todo el recorrido, usando directamente la definición de trabajo, $\vec{F} \cdot \vec{d}$ —es decir, no use el hecho de que el trabajo hecho por el peso es $-mg(h_f - h_i)$—.



Problemas similares: 5.12, 5.14.

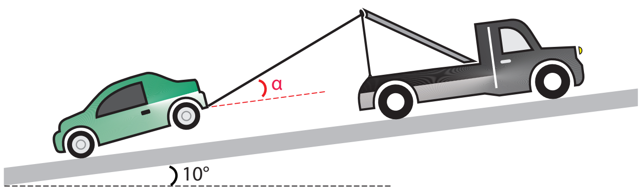
10. Una grúa lleva a un carro de masa de 1000 kilogramos que tuvo un problema y el freno se le quedó activado (de forma que las llantas no giran). La calle sobre la que anda la grúa tiene pendiente de 10 grados. La distancia que recorre la grúa por esa calle es de 500 metros, y el trabajo total que realiza el cable de la grúa sobre el carro es de 40 000 J. Además, la tensión realizada por el cable que arrastra el carro es de magnitud de 5000 N. Usando la ecuación $W = \pm \|\vec{F}_x\| \|\vec{D}_x\| \pm \|\vec{F}_y\| \|\vec{D}_y\|$,

(a) Halle el ángulo α que se forma entre el cable y la calle.

(b) Halle el trabajo realizado por el peso durante los 500 metros.

(c) Si el trabajo hecho por la fricción dinámica sobre el carro es de $-20\,000$ J, ¿cuál es el coeficiente de fricción?

(d) ¿Cambiaría el trabajo realizado por el peso y por la fricción si el carro hubiera sido arrastrado por una calle más larga pero de menor pendiente, de forma que al final el carro llegara a la misma altura que en el caso original?

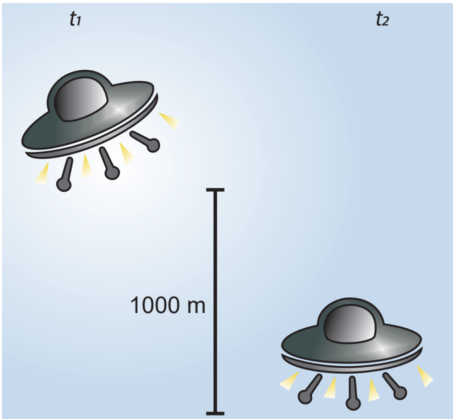


Problemas similares: 5.15, 5.18.

11. Inicialmente un ovni de 25 000 kilogramos tiene una rapidez de 100 metros por segundo, y está a una altura de 50 000 metros. El ovni desciende 1000 metros, y disminuye su rapidez a la mitad. La energía mecánica final de la nave es de 250 000 J.

(a) ¿Cuál es el trabajo total hecho por las fuerzas no conservativas?

(b) Suponga que el ovni sigue descendiendo, aterriza y se detiene por completo. La fuerza de fricción del aire ejerce un trabajo total de −20 000 J, y la fuerza de fricción entre las llantas y la pista ejerce un trabajo de −30 000 J. Si la única otra fuerza no conservativa es la fuerza de los motores, ¿qué trabajo realizan los motores?



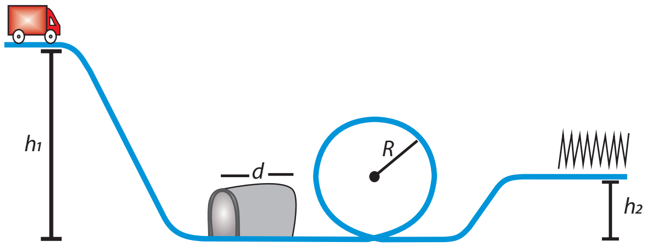
Problemas similares: 5.19, 5.20.

12. Considere el circuito de carritos de masa m_c con los que juega Lina. El punto de partida está a una altura h_1, hay un bucle de radio R que termina a una altura h_2, donde hay un resorte de constante k que amortigua a los carros. Además, en la única parte donde hay fricción es en el túnel, que tiene una distancia d.

(a) Escriba una expresión para el coeficiente de fricción en el túnel de forma tal que el carrito tenga la mitad de la energía cinética que tendría en el máximo punto del bucle si no hubiera fricción. Esta expresión debe quedar en términos de h_1, R, d y g.

(b) Con base en lo hallado en (a), escriba una expresión para la compresión máxima del resorte cuando el carrito se detiene por completo.

(c) Escriba una expresión para el trabajo neto sobre el carrito en todo el recorrido.



Problemas similares: 5.19, 5.20, 5.22, 5.23.

13. Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta:

(a) El trabajo que una fuerza hace sobre un objeto no se puede calcular considerando únicamente la componente del desplazamiento que es paralela o antiparalela a dicha fuerza (pues debemos hallar las demás componentes del desplazamiento).

(b) Si conocemos las magnitudes de la fuerza y del desplazamiento, y el ángulo entre ambos, la forma más sencilla de calcular el trabajo es usando la ecuación $W = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos\theta$.

(c) Dos escaladores de la misma masa escalan el monte Everest. Si un escalador siguió una ruta mucho más corta que el otro, el trabajo hecho por el peso sobre este escalador fue mucho menor que el trabajo hecho por el peso sobre el otro escalador.

(d) Cuanto mayor sea la altura inicial de un objeto, mayor será el trabajo que haga el peso sobre ese objeto, independientemente de cuál sea la altura final.

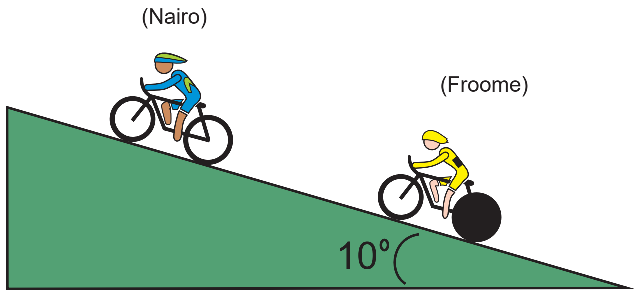
(e) El trabajo que A le hace a B es el mismo que el trabajo que B le hace a A.

Problema similar: 5.16.

14. En una parte de la penúltima etapa del Tour de Francia, Nairo sube por una pendiente de 10 grados. En cierto momento Nairo tiene una rapidez de 5 metros por segundo, y en ese mismo momento su rival, Froome, tiene una rapidez de 4 metros por segundo. Froome se mantiene con esa rapidez después de recorrer 20 metros, pero Nairo disminuye su velocidad a 3 metros por segundo después de esos 20 metros.

(a) Halle la razón entre el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas de Froome sobre el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas de Nairo, y comente su resultado.

(b) En los siguientes 30 metros, Nairo y Froome mantienen su velocidad, y suponga que el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas sobre cada uno es el mismo que el hallado en (a). ¿Cuál es la pendiente durante estos 30 metros?



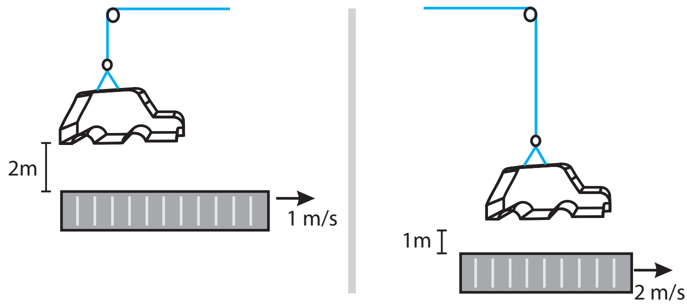
Problemas similares: 5.24, 5.26.

15. En una línea de producción de carros, un robot levanta una distancia de 2 metros el chasis de los autos. El robot agarra el chasis cuando este se mueve sobre una banda de ensamblaje, con rapidez de 1 metro por segundo. Cuando el robot levanta el chasis hasta los 2 metros, lo deja por unos segundos en reposo, y luego lo mueve a otra banda de ensamblaje que se mueve con rapidez de 2 metros por segundo, y que está a una altura de 1 metro por debajo de la banda inicial. Para evitar daños, justo antes de poner el chasis en la banda final el robot le da al chasis la misma rapidez que tiene esa banda.

(a) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza con la que el robot sujeta el chasis cuando lo levanta de la primera línea de ensamblaje hasta la altura de 2 metros y lo deja en reposo?

(b) ¿Cuál es el trabajo neto ejercido sobre el chasis desde la primera banda hasta que se pone en la segunda?

(c) ¿Cuánto tendría que ser la rapidez de la banda final para que el trabajo realizado por el robot desde la primera banda hasta la segunda hubiera sido el doble de lo que en realidad fue?



Problemas similares: 5.24, 5.25.

16. Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta:

(a) La energía mecánica de un objeto cuando una fuerza no conservativa actúa sobre él se puede llegar a conservar en algunos casos incluso si el trabajo hecho por esa fuerza no es cero.

(b) El trabajo realizado por la fricción es mayor entre mayor sea la distancia recorrida por el objeto.

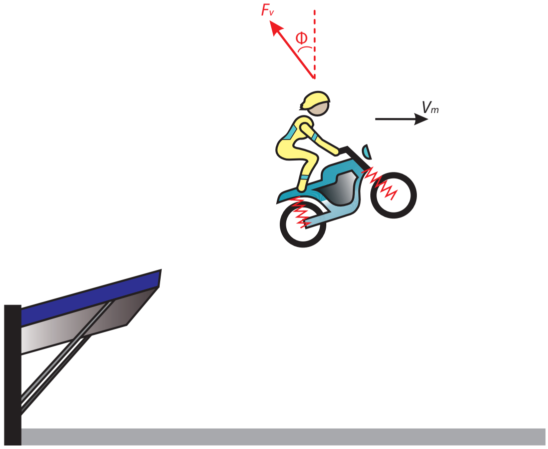
(c) Si el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas sobre un sistema es negativo, entonces la energía mecánica de dicho sistema disminuye.

(d) La normal de las sillas de pasajeros de un avión hace trabajo sobre el pasajero mientras el avión asciende.

(e) Si el cambio de energía potencial de una fuerza conservativa es -5 J, entonces el trabajo hecho por dicha fuerza es -5 J.

Problemas similares: 5.21.

17. Un motociclista de masa m salta de una rampa y en su punto de máxima altura tiene una rapidez v_m. La moto tiene dos amortiguadores ideales de constante K, uno en cada llanta. La compresión máxima de los amortiguadores cuando el motociclista cae y se detiene por completo es x_m. Además, durante toda la caída el viento ejerce una fuerza de magnitud F_v que marca un ángulo ϕ con respecto a una línea vertical, como se indica en el dibujo. Escriba una expresión para la altura del motociclista justo cuando las llantas tocan el suelo (antes de que los amortiguadores se compriman). La expresión debe quedar en términos de m, v_m, K, x_m, F_v, ϕ.



Problemas similares: 5.23, 5.27.

18. Resuelva los problemas 9, 10 y 11 (de la sección de problemas sin resolver) aplicando el teorema de trabajo y energía en lugar de utilizar la ecuación $E_{mf} = E_{mi} + \sum_i W_i$ (y si usó directamente el teorema de trabajo y energía, entonces resuélvalos usando $E_{mf} = E_{mi} + \sum_i W_i$).

Problema similar: 5.25.

19. Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta:

(a) El teorema de trabajo y energía sirve para casos de movimiento parabólico.

(b) La fuerza de fricción puede realizar trabajo positivo sobre un objeto.

(c) Si el trabajo total de las fuerzas conservativas sobre un sistema es cero, entonces la energía mecánica del sistema se conserva.

(d) Si la rapidez final del objeto es mayor que la inicial, entonces el trabajo neto sobre el sistema es positivo.

(e) Si la energía cinética permanece constante, podemos inferir que no hay fuerzas no conservativas que hagan trabajo.

Problema similar: 5.28.