BITÁCORAS DIGITALES COMO INSTRUMENTO INNOVADOR PARA UN CURSO DE MATEMÁTICA FUNDAMENTAL

Joan Sebastián Ordoñez Cuastumal
Víctor Hugo Gil Avendaño
Oswaldo Rodríguez Díaz
Doris Elena Campo Duarte
Yuridia Arellano García

SELLO EDITORIAL UAO

BITÁCORAS DIGITALES COMO INSTRUMENTO INNOVADOR PARA UN CURSO DE MATEMÁTICA FUNDAMENTAL

Joan Sebastián Ordoñez Cuastumal

Víctor Hugo Gil Avendaño

Oswaldo Rodríguez Díaz

Doris Elena Campo Duarte

Yuridia Arellano García

uao
Universidad Autónoma de Occidente

Universidad Autónoma de Occidente

2025

Ordoñez Cuastumal, Joan Sebastián, autor.
Bitácoras digitales como instrumento innovador para un curso de matemática fundamental / Joan Sebastián Ordoñez Cuastumal [y otros]. — Cali: Universidad Autónoma de Occidente, 2025.

176 páginas : ilustraciones, tablas ; 24 cm.
ISBN 978-958-619-216-3 (PDF). — ISBN 978-958-619-217-0 (EPUB)

1. Matemáticas. 2. Modelos matemáticos. 3. Educación digital — Colombia. I. Título.

Bitácoras digitales como instrumento innovador para un curso de matemática fundamental

© Autores
Joan Sebastián Ordoñez Cuastumal
Víctor Hugo Gil Avendaño
Oswaldo Rodríguez Díaz
Doris Elena Campo Duarte
Yuridia Arellano García

ISBN PDF: 978-958-619-216-3
ISBN EPUB: 978-958-619-217-0

Personería jurídica, Res. No. 0618, de la Gobernación del Valle del Cauca, del 20 de febrero de 1970. Universidad Autónoma de Occidente, Res. No. 2766, del Ministerio de Educación Nacional, del 13 de noviembre de 2003. Acreditación Institucional de Alta Calidad, Res. 23002 del 30 de noviembre de 2021, con vigencia hasta el 2025. Acreditación Internacional de Alta Calidad, acuerdo No. 85 del 26 de enero de 2022 del Cinda. Vigilada MinEducación.

Gestión Editorial

Vicerrectoría de Investigaciones, Innovación y Emprendimiento

Vicerrector de Investigaciones, Innovación y Emprendimiento
Jesús David Cardona Quiroz

Jefe Unidad de Visibilización y Divulgación de la Ciencia, la Tecnología y la Innovación
Editor
José Julián Serrano Quimbaya
jjserrano@uao.edu.co

Coordinadora editorial
Angélica María Bohórquez Borda
ambohorquez@uao.edu.co

Diseño editorial
Kevin Nieto Vallejo
kevinnieto.93@gmail.com

2025

Contenido

Sobre los autores

Joan Sebastián Ordoñez Cuastumal

Licenciado en matemáticas y física de la Universidad del Valle y magíster (maestro) en la Universidad Autónoma de Guerrero en México. Su experiencia laboral ha estado enfocada en la educación media y superior. Actualmente es profesor de tiempo completo en la Universidad Autónoma de Occidente en Cali. Las líneas de investigación en las que se especializa giran alrededor de la argumentación matemática, la didáctica de las matemáticas y la modelación matemática.

Víctor Hugo Gil Avendaño

Matemático y magíster en educación matemática con amplia experiencia en educación superior. La iniciativa y la innovación siempre han formado parte de su carrera profesional, ha desarrollado y ejecutado estrategias educativas que se alinean con las exigencias del entorno. A lo largo de su trayectoria, ha perfeccionado sus habilidades de creación, innovación y autoaprendizaje. Se enfoca en las herramientas que ofrece la educación matemática para procurar que los estudiantes aprendan a través de la modelación y de la solución de problemas.

Yuridia Arellano García

Doctora en ciencias con especialidad en matemática educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores (2019-2021). En la actualidad realiza investigaciones dentro del llamado "Dominio afectivo en matemática educativa", específicamente de emociones, creencias y actitudes hacia las matemáticas de estudiantes y profesores de nivel medio superior y superior. Además, realiza estudios sobre la invención de problemas matemáticos por estudiantes y profesores, y su relación con los cambios de creencias y actitudes hacia las matemáticas.

Oswaldo Rodríguez Díaz

Matemático y especialista en sistemas de información de la Universidad del Valle, especialista en educación virtual del Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE) de México y magíster en ciencias computacionales del Instituto Tecnológico y de Estudios Superior de Monterrey (ITESM) de México. Ha sido profesor con plaza nacional del MEN, de la Universidad del Valle, Pontificia Universidad Javeriana de Cali, la Escuela Militar de Aviación "Marco Fidel Suarez" (EMAVI) de Cali y actualmente de la Universidad Autónoma de Occidente donde ocupa el cargo de Jefe del Departamento de Matemáticas y Estadística.

Doris Elena Campo Duarte

Nació el 18 de julio de 1980. Comenzó a estudiar matemáticas en la Universidad del Cauca, después se trasladó a la Universidad del Valle, donde terminó sus estudios de pregrado, maestría y culminó su doctorado en el año 2018 con tesis meritoria. En el transcurso de su vida académica ha hecho diferentes pasantías en países como Japón, Alemania y Francia. Fue profesora invitada a dictar un cursillo en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. Ha trabajado en diferentes proyectos de investigación en el área de enfermedades epidemiológicas. Trabajó como docente en la Universidad del Valle y la Universidad Católica. En la actualidad trabaja como profesora de concentración en docencia en la Universidad Autónoma de Occidente.

Prólogo

El confinamiento social impuesto como medida universal para enfrentar la pandemia generada por el virus SARS-CoV-2 ha cambiado notablemente las formas de interactuar entre los individuos y las maneras de realizar las tareas en los ámbitos familiar, social, educacional y laboral. En la educación, en general, se ha respondido a los retos que plantea la interrupción del modelo presencial de enseñanza implementado diversas estrategias para guiar a los estudiantes en la construcción de conocimiento y la resolución de problemas.

La búsqueda de nuevos espacios o escenarios de aprendizaje demanda una reflexión profunda por parte de administradores, profesores, estudiantes y padres de familia sobre la disponibilidad de una infraestructura robusta para el diseño e implementación de escenarios de enseñanza, materiales de apoyo, implementación de las tareas y formas de evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes.

En este contexto se vislumbran transformaciones en el currículum, prácticas y dinámicas de trabajo por parte de los profesores y estudiantes en el uso sistemático y consistente de diversas tecnologías digitales y plataformas en línea, y en el monitoreo y seguimiento continuo de las actividades de los estudiantes.

También, durante el confinamiento se ha promovido la interacción entre diversos grupos de profesores por medio de seminarios y conferencias en línea. Por ejemplo, el seminario sobre resolución de problemas y uso de tecnologías digitales que se desarrolla en el departamento de matemática educativa del Cinvestav que ahora cuenta con la participación de profesores de Colombia y otros países. En la agenda del seminario no solo se destaca la búsqueda y análisis de diferentes caminos para incorporar el uso de tecnologías digitales en la resolución de problemas, también sobresale la importancia de compartir y contrastar experiencias relacionadas con las formas de implementar propuestas didácticas en realidades y contextos distintos.

Un tema común en los diversos sistemas de educación es la necesidad de revisar y sustentar un programa de formación de profesores de matemáticas que considere el uso de tecnologías digitales en el diseño de escenarios de aprendizaje y en las formas de comprender y resolver problemas por parte de los estudiantes.

La idea es centrar la atención en un ambiente flexible de enseñanza que promueva un compromiso en los estudiantes para trabajar y refinar sus formas de pensar y comprender conceptos a partir de una discusión con sus pares y profesores. Es decir, que los estudiantes en su interacción con las tareas matemáticas contemplen la consulta de

diversos desarrollos y plataformas digitales con la intención de clarificar dudas o extender su comprensión de los conceptos. Además, que problematicen el estudio de los contenidos y activen el uso de herramientas digitales como GeoGebra en la construcción de modelos dinámicos durante la resolución de problemas.

En esta perspectiva surge la bitácora digital como una herramienta que le permite a los estudiantes registrar sus ideas, dudas y formas de comprender y resolver problemas. Este registro no solo muestra los intentos y acercamientos de solución de los problemas, también las formas de afrontar dificultades que se presenten. La idea es que la bitácora sea un medio que les permita a los estudiantes reflexionar sobre sus propios acercamientos y, asimismo, un vehículo para compartir y discutir las ideas con sus pares y profesores

La arquitectura del diseño de la bitácora[1] refleja tres componentes relacionados: (a) Un acercamiento inquisitivo por parte de los estudiantes que se manifiesta a través de las preguntas que plantea durante la comprensión de conceptos y la resolución de problemas, la búsqueda de caminos múltiples para resolver un problema, la reformulación de nuevos problemas y la comunicación y discusión de resultados; (b) el uso sistemático de diversas tecnologías y desarrollos digitales en el proceso de resolver problemas y en la discusión de ideas e interacción con sus pares y profesores; (c) la participación en foros de discusión y el uso de distintas aplicaciones digitales que permitan presentar dudas y recibir retroalimentación de pares y profesores.

1 Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I & Gómez-Arciga, A. (en revisión). A conceptual framework to structure remote learning scenarios: A digital wall as reflective tool for students to develop mathematics problem-solving competencies.

El libro que aquí se presenta incorpora el uso de la bitácora como una herramienta para estructurar las actividades de aprendizaje de los estudiantes. Se contextualiza la presencia de la herramienta con una caracterización de la argumentación matemática y la modelización en la resolución de problemas. Estos dominios de investigación y práctica contribuyen en el desarrollo y en la estructura de los contenidos de la bitácora.

En el libro, se ofrecen ejemplos sobre el diseño potencial de una bitácora y se distingue la importancia de que los profesores analicen y discutan no sólo los contenidos y estructura de la bitácora, sino también una ruta didáctica para su implementación. En este caso, se identifican tres fases conectadas: (1) la etapa de motivación que permite al estudiante contextualizar el problema en términos de revisar sus propios recursos y activarlos en un plan de solución del problema; (2) la discusión directa de las formas de resolver los problemas y tareas con la guía directa del profesor o grupo de profesores que puede ser en un escenario presencial o remoto a través de una videoconferencia. Se destaca en esta parte la importancia de consultar y usar herramientas digitales en los procesos de resolución y en la comunicación de resultados; (3) el abordaje y seguimiento de otros problemas por parte de los estudiantes que les permita usar los métodos usados en sus experiencias de aprendizaje. Los estudiantes en esta fase pueden trabajar en grupo y compartir ideas que posteriormente se presentan y discuten en sesiones que involucren a todo el grupo.

El libro ofrece una orientación sobre las formas de diseñar y estructurar una bitácora, la siguiente tarea es centrar la atención en la bitácora propia que cada estudiante (o grupo de alumnos) desarrolla

y comparte en sus experiencias de aprendizaje. La idea es analizar cómo los estudiantes gradualmente refinan y robustecen sus formas de comprender conceptos matemáticos y los aplican en la resolución de nuevos problemas.

LUZ MANUEL SANTOS TRIGO

CINVESTAV-IPN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA.

Introducción

El progreso de un país y la educación van de la mano. La educación debe ser interés de todos; eso nos permite alcanzar un futuro próspero y productivo. En este libro planteamos la importancia de que el Gobierno de Colombia formule políticas que permitan a la población acceder a educación de calidad; escenario en el cual los docentes terminarían haciéndole frente a la implementación y regulación de estas políticas.

El cuidado de la calidad educativa en los procesos de formación académica debe desarrollarse constantemente a través de una buena implementación de estrategias pedagógicas y sociales. La formación de los estudiantes debe ser supervisada por actores capacitados, cuyo interés particular se encuentre vinculado a la enseñanza y la indagación de métodos de enseñanza.

El interés común de formar ciudadanos permite una constante evolución profesional de quienes le hacen veeduría a estos procesos de formación ciudadana desde el escenario académico (Desimone et al., 2002). Así, la calidad de la educación está directamente relacionada con la participación de los profesores. Por esa razón, este libro se construye teniendo como ejercicio metodológico la participación del sector de los docentes de cara al desarrollo de una educación de calidad (Gil-Flores et al., 2017).

Así, los docentes pueden sustentar sus intervenciones desde una experiencia educativa cuando realicen aportes para favorecer el mejoramiento del tratamiento de alguna temática de su competencia.

Las propuestas que los *docentes-investigadores* hacen en este libro son producto de esas prácticas obtenidas por el ejercicio de la enseñanza con estudiantes, investigadores y docentes que, desde su quehacer, proponen metodologías didácticas para facilitar y enriquecer los procesos de enseñanza.

Las matemáticas han acompañado el progreso de la humanidad. Se han reformado en la medida en la que avanza el pensamiento y las formas de comprensión social, lo anterior se plantea teniendo como punto de partida que la educación está en constante evolución. Desde el desarrollo de un plan de matemáticas Modernas (Kline, 1979) hasta una reformulación de las dinámicas en lo que se conoce como *modelo por competencias*.

El Ministerio de Educación Nacional considera, por ejemplo, que se alcanza un nivel de competencia matemática aceptable cuando se puede formular, plantear, transformar y resolver problemas desde el

mundo de las ciencias, el mundo de las matemáticas y su cotidianidad o quizás, la cotidianidad de otros (MEN, 2006). Es decir, cuando el estudiante presenta aptitudes en la argumentación y modelación matemática. Ser *matemáticamente competente* sugiere varios procesos entre los que se destaca la *argumentación* y la *modelación*.

La introducción de la tecnología en el aula favorece un acercamiento que media en lo didáctico y mejora el dinamismo en los salones para cerrar brechas de aprendizaje de los estudiantes frente a conceptos que se trabajan en clase usando softwares que permitan una visualización fáctica de los planteamientos matemáticos. De esa manera, pasan a un segundo plano las necesidades nemotécnicas de los estudiantes.

Esto permite ir de la práctica y los ejemplos particulares hacia los principios teóricos generales, y favorecer en los estudiantes la comprensión de los conceptos matemáticos. En ese sentido surge esta pregunta: ¿Cómo orientar a los jóvenes en el desarrollo de una actitud investigativa que les permita trabajar formas robustas de pensamiento consistentes con el quehacer de las disciplinas científicas, en particular de las relacionadas a las matemáticas?

Es un hecho que la virtualidad dificulta en parte los procesos de aprendizaje de los estudiantes; la interacción directa entre unos y otros en el aula de clase dispone de una gran ventaja sobre las instrucciones, explicaciones y orientaciones pedagógicas. Por eso es importante emplear herramientas que les permitan a los estudiantes y docentes afrontar las dificultades que trae consigo la educación a distancia.

Es en este punto en el que se puede recurrir a las bitácoras digitales, para alcanzar un acercamiento y una comprensión que facilitan los conceptos que se quieren enseñar o aprender (Santos- Trigo, 2020). Las bitácoras incluyen una serie de herramientas propias del trabajo a distancia obteniendo de ellas un alto nivel de productividad, softwares educativos como *GeoGebra*, *Tracker*, *Nearpod* y la *G-suite* de Google son algunos que pueden relacionarse al instrumento.

Las bitácoras digitales como recursos didácticos

Emplear la bitácora digital en las clases permite conectar el contexto de algunos objetos matemáticos con una situación particular sin dejar de lado las necesidades específicas del estudiante. Santos-Trigo (2020) describe la bitácora digital como:

> un instrumento importante que permite al estudiante registrar y llevar un control de su propio proceso de comprensión de conceptos y resolución de problemas. ¿Cuál es la estructura y qué contenidos debe incluir la bitácora? En términos generales, ese cuaderno de notas o trabajo donde el estudiante reportaba sus experiencias de aprendizaje en escenarios presenciales; ahora se transforma en una bitácora digital que puede compartir por medio de una plataforma digital (p.2).

Para este propósito didáctico se consideró adecuado diseñar actividades relacionadas con la resolución de problemas reales, mediante la modelación en el aula cuyo desarrollo se apoya en las bitácoras digitales que guían la actividad de los estudiantes, llevándolos a descubrir el conocimiento matemático al que el docente los orienta. En tal sentido, las bitácoras pretenden convertir a los estudiantes en sujetos activos que, a través de la experimentación y de la reflexión,

construyan conceptos y desarrollen habilidades matemáticas que permitan resolver problemas.

En las bitácoras digitales se les plantea a los estudiantes problemas y actividades que representan retos interesantes que puedan enfrentar usando los conocimientos ya adquiridos, pero que crean la necesidad de incorporar conocimientos nuevos. Una de las rutas de la metodología encausada en las bitácoras digitales tiene como objetivo recordar algún conocimiento previo en el estudiante y formular preguntas, a veces sugerencias, para que empiecen a explorar el problema propuesto. Las preguntas guían al estudiante a reflexionar acerca del problema planteado, a formular hipótesis, a ponerlas a prueba usando la tecnología y explorando así posibles soluciones.

Es conveniente, además, plantear preguntas que generen en el estudiante la necesidad de usar los resultados obtenidos. Así se podrá relacionar la utilidad de estos, verificar sus resultados y–lo más importante–no limitarse a realizar la actividad de manera mecánica y nemotécnica.

Consideraciones sobre el diseño de las bitácoras digitales

El diseño de las bitácoras digitales estuvo orientado a promover en el aula un proceso activo de resolución de problemas que involucran razonamiento, argumentación, comunicación, representación, conexiones, modelación y el uso coordinado de la tecnología, como claves para la producción de aprendizajes significativos alrededor de las matemáticas universitarias.

La ejecución de estas bitácoras digitales pretende proveer a los estudiantes de herramientas que les permitan responder a las exigencias propias de su carrera profesional. Teniendo en mente a esta premisa, los criterios generales del diseño de las bitácoras digitales fueron:

a) Problematizar los contenidos matemáticos de estudio con situaciones en contexto.

b) Generar espacios donde los estudiantes trabajen individualmente y espacios en los que se favorezca la interacción entre pares para defender sus argumentos.

c) Hacer uso de la tecnología mediante el trabajo en computadores, celulares o *tablets* y con el apoyo de *GeoGebra.*

Por su parte, el componente didáctico para el diseño de las bitácoras digitales se formuló de la siguiente manera:

a) Motivación o etapa reflexiva: la etapa reflexiva consiste en el desarrollo de conceptos previamente adquiridos por parte del estudiante en situaciones de resolución. En el inicio de esta fase se plantea un problema relacionado con la temática para que el estudiante, con apoyo del docente, lo intente resolver de manera individual o grupal.

La idea de esta fase consiste en que el estudiante utilice sus conocimientos escolares para resolver un problema de manera intuitiva y logre tener una aproximación a la solución. Se espera que el estudiante identifique la necesidad de utilizar nuevos conceptos, de aclarar nociones previas y que, a su vez, el docente identifique las principales dificultades metodológicas y de desarrollo conceptual para establecer las

falencias generales de los jóvenes. En esta fase el docente promueve la participación de los estudiantes para que comuniquen sus soluciones, las discutan en grupo, se aclaren las dudas y se corrijan errores.

b) Durante la clase: resume la participación en la interacción entre profesor-estudiante en el salón de clase. Por lo general, en este momento se determina que, a partir de un ejemplo particular con contexto, las herramientas computacionales u otros elementos tecnológicos (*hardware o software)* tengan sentido al desarrollarse con elementos y conceptos matemáticos. En esta fase se parte de la exploración de un problema mediante la construcción de un archivo en *GeoGebra* para que, mediante la exploración y la orientación guiada por preguntas, el estudiante encuentre respuestas usando las herramientas del software, plantee conjeturas y argumente los resultados visualizados en registros de representación. Igualmente, en esta fase se promueve que los estudiantes vean las conexiones existentes entre los conceptos trabajados y entre cada una de sus representaciones. El papel del docente en esta fase debe ser el de promotor del debate, estimulante de reflexión y de discusión de las ideas expuestas, para empezar a construir de manera conjunta espacios de conocimiento.

c) Después de clase o problema de reto: en esta fase se plantea un nuevo problema para que los estudiantes apliquen lo que se aprendió. Esto involucra un trabajo después de clase a través de una situación didáctica en la que sea el estudiante el que se enfrenta solo. Es decir que el profesor no interviene y la aceptación de los argumentos se verifica en una próxima clase.

Las bitácoras digitales diseñadas

La novedad de la propuesta está en la aplicación de nueve bitácoras digitales establecidas para guiar las clases de un curso inicial universitario de matemáticas fundamentales. El primer grupo compuesto por tres bitácoras relaciona elementos característicos de los números reales, situaciones de modelación en el mundo real y toma de decisiones. El segundo grupo (tres bitácoras) gira en torno a contextos de espacio y medida. El tercer grupo (tres bitácoras) involucra el concepto de *Función* como modelo matemático de distintas situaciones creadas a partir de la observación en contextos particulares. Entre los propósitos a alcanzar de estas nueve bitácoras están potenciar la argumentación individual y colectiva, estimular los diferentes tipos de razonamiento y fortalecer la capacidad de adquirir conocimientos a partir de la experiencia.

En la medida de lo posible se presentan contextos familiares para los estudiantes (contextos académicos del área de formación y contextos de la cotidianidad) con el propósito de darle significado a los conceptos matemáticos involucrados. Se considera importante que los estudiantes contesten por escrito las preguntas de las bitácoras digitales. Con esta síntesis de su experiencia comunicada, se busca generar mecanismos de reflexión sobre el proceso implementado y del resultado obtenido; se pretende informar al docente sobre la comprensión de los estudiantes respecto a los conceptos matemáticos involucrados en la tarea. Esta información es fundamental para que el docente conozca y evalúe el progreso de sus estudiantes y decida qué tipo de metodologías es más conveniente.

Capítulo 1

Instrumentos innovadores de aprendizaje y la importancia de la argumentación: el caso de la bitácora digital

Este capítulo exalta la importancia de la argumentación en el desarrollo de un instrumento innovador de aprendizaje: las bitácoras digitales. A partir de esto, se resalta el trabajo en matemáticas escolares y se relacionan aspectos a considerar para fomentar la argumentación individual y colectiva dentro del aula de clase.

Bitácoras digitales como instrumentos de innovación

Una de las problemáticas más persistentes en el aprendizaje de las matemáticas del nivel superior y de educación media es la descontextualización de los contenidos matemáticos y el auge de lo procedimental (algorítmico). Kline (1980) criticaba el enfoque de las matemáticas en torno a los conceptos abstractos, la resolución de algoritmos y el desarrollo formal que prevalecía sobre la utilidad práctica y su capacidad para resolver problemas reales donde la situación persevera hasta hoy. Este contexto no se escapa de la transición de la educación media a la superior, prevaleciendo en los cursos iniciales de la escuela universitaria. En beneficio del mejoramiento de este escenario se ha propuesto innovar con un instrumento de aprendizaje que no solo priorice el desarrollo de un algoritmo común, sino que, además, involucre un contexto, desarrolle argumentaciones para la toma de decisiones, resuelva problemas con ayuda de herramientas computacionales, modele fenómenos a través del lenguaje matemático y la capacidad de comunicar resultados matemáticos.

Las bitácoras digitales surgen como un instrumento de innovación que le permite al estudiante adquirir sentido de apropiación de su proceso de comprensión conceptual y resolución de problemas (Santos- Trigo, 2020). Estas incluyen una serie de herramientas propias de la modalidad virtual, de las que se obtienen un alto nivel de productividad.

Como recurso didáctico, la bitácora digital relaciona en contexto algunos objetos matemáticos con una situación particular; todo depende de las necesidades específicas del estudiante.

Metodológicamente, las resoluciones de las bitácoras digitales involucran tres momentos: el primero se denomina etapa reflexiva. Esta consiste en el desarrollo de conceptos previamente adquiridos por parte del estudiante en situaciones de resolución. Esta etapa también recibe el nombre de motivación.

En el segundo momento se resume la participación general dentro del salón de clase a través de intervenciones relacionadas con el tema en discusión; aquí se determina que, a partir de un ejemplo particular con contexto, las herramientas computacionales u otros componentes tecnológicos adquieran un sentido práctico al desarrollarse con elementos y conceptos matemáticos.

El tercer y último momento involucra un trabajo después clase, en una situación en la que el estudiante se confronta individualmente sin ayuda del profesor. El docente orienta las argumentaciones, verificándolas y encaminándolas hacia un objetivo formativo, unificándolas y creando una respuesta solida fundamentada en las matemáticas. El desarrollo del tipo de problemáticas alrededor de las bitácoras digitales involucra situaciones en contexto, predicción y toma de decisiones que pueden inferirse a partir de preguntas que fomenten la argumentación colectiva en el aula.

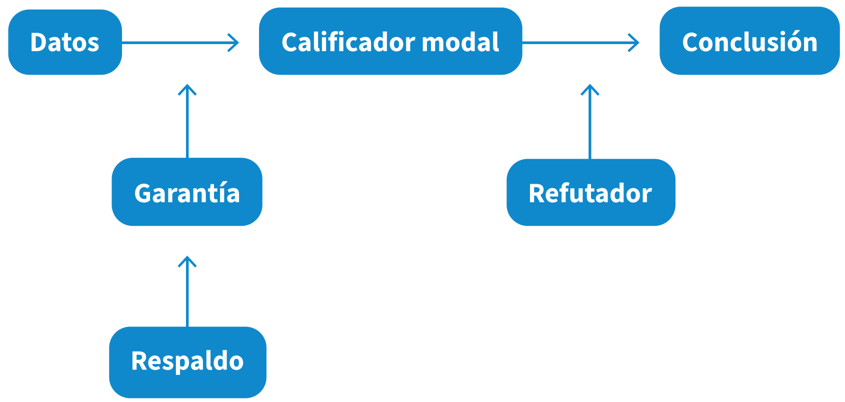
La argumentación desde Toulmin

La argumentación ha relacionado varias definiciones dependiendo del contexto específico de estudio (filosofía, derecho, ciencias sociales, matemáticas, entre otras). De las teorías alrededor del razonamiento humano, la propuesta por Toulmin, Janik & Rieke (1984) alrededor del razonamiento y la argumentación, involucra una manera de esquematizar los argumentos no formales a partir de la estructura del argumento, o esquema argumentativo. La argumentación desde Toulmin et al. (2003) se considera como aquella actividad explicita del ser humano de realizar aserciones, desafiarlas, soportarlas, mediante la producción de razones, criticando esas razones, refutándolas y así sucesivamente. Un argumento se entiende como “la secuencia de afirmaciones y razones que, entre ellas establecen el contenido y la fuerza de la posición de la cual un ponente particular está argumentando” (p. 14). De esta manera un argumento tiene una estructura no lineal, planteándose un esquema que hace posible la modelización de cualquier argumento.

El esquema argumentativo de Toulmin involucra seis elementos interconectados entre sí; de esta manera genera la explicación de un argumento desde un punto de vista lógico. Para Toulmin un argumentador cualquiera presenta ante otro una tesis explícita que sustenta en argumentos, o razones lógicas, y que posteriormente desembocan en una conclusión.

El esquema argumentativo de Toulmin (véase grafica No. 1) se compone de seis elementos: la conclusión se refiere a la afirmación que hace un argumentador, esta también se llama aserción. Los datos, que son la evidencia sobre la que se fundamenta la conclusión. La garantía es el interconector entre los datos. Y está por último la conclusión, con reglas indiscutidas como propiedades matemáticas, generalizaciones y objetos de naturaleza matemática.

Figura 1



Fuente: realización propia a partir de datos extraídos por Toulmin, Janij y Rieke (1984).

El respaldo (Toulmin) brinda apoyo a la garantía mediante conocimiento legitimado por una comunidad especializada, en este caso la matemática (dentro del conocimiento validado se encuentran los axiomas, teoremas, teorías, entre otros). La fuerza del argumento está condensada en el calificador modal, que refuerza el argumento con palabras como “siempre” o “para todos los casos”. Por último, se menciona el refutador como aquel elemento del esquema que presenta excepciones a la conclusión o aserción.

La argumentación en educación matemática

La argumentación es una habilidad crucial en el aula, esta funge como medio para relacionar procesos de prueba matemática y preparar a los estudiantes para alcanzar los logros correspondientes en su etapa escolar (Hoffman, Breyfogle y Dressler, 2009). Es en la argumentación donde los procesos deductivos que sirven para la toma de decisiones son aprendidos, es por esto que este tipo de habilidad debe promoverse en el aula de clase.

El valor de las matemáticas en la construcción del mundo es crucial para el progreso de la especie humana. Desde la década de los cincuenta se han planteado reformas para la enseñanza de estas. Desde el desarrollo de un plan de matemáticas Modernas hasta modelo por competencias. En el contexto colombiano los estándares básicos de competencias son criterios claros y públicos creados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) en los que se define que ser matemáticamente competente implica varias habilidades entre las que se destaca la argumentación. Así la educación matemática aborda algunos cuestionamientos sobre la argumentación y el razonamiento en todos los niveles escolares. En primaria, por ejemplo, Krummheuer (2013) muestra que en los estudiantes es factible reconocer argumentos de tipo narrativo en sus respuestas. Además de los patrones en figuras, que son de tipo diagramático o figural.

En secundaria Schnell (2014) evidencia diferentes argumentos basados en teoría matemática (propiedades, reglas matemáticas, entre otras) y los datos generados por softwares educativos. Y —aunque en nivel superior las investigaciones son pocas— Cervantes-Barraza, Ordoñez-Cuastumal y Morales-Carballo (2020) evidencian que los argumentos deductivo y abductivo potencian la conexión de los enfoques *algebraico-numérico* y las representaciones gráficas en la solución de problemas sobre ecuaciones diferenciales ordinarias.

Bitácoras digitales como elementos potencializadores de la argumentación individual y colectiva

La pandemia generada por el Covid19 puso sobre la mesa la necesidad de cambiar la vida en el planeta. La educación en particular se ha visto transformada. Palabras como *ambiente digital*, *material mediado por tecnologías*, *innovación educativa,* entre otras, han pasado a resaltar en el grueso del vocabulario de profesores en todos los niveles, desde primaria hasta la universidad. Es en este último escenario donde la tesitura ha sido más expresa, obligando a adaptarse a pasos acelerados. Esto ha llevado a descubrir nuevas prácticas en el aula, ofreciendo infinidad de posibilidades para la reinvención de las mismas. En ese sentido se planteó la construcción de nuevos instrumentos que permitieran solucionar la disparidad existente entre presencialidad, innovación tecnológica, calidad, práctica, enseñanza y aprendizaje, en el que el principal actor sea el estudiante con una metodología activa y funcional.

El material innovador viene adecuado a la potencialización de la argumentación individual y colectiva; es decir, a los diferentes tipos de razonamientos presentes y a la construcción de conocimiento a partir del propio quehacer del estudiante.

El material que se presenta resalta tres fases: en la primera el trabajo será netamente individual y trata de orientarse hacia los conocimientos básicos del estudiante. En la segunda se presenta un problema para la discusión en el que se motiva a una abducción que permita llevar a la mejor solución desde los conocimientos iniciales y relacionarlos.

El tercer momento implica la resolución individual contrastada en una próxima sesión de interacción en forma grupal. Basta aclarar que los elementos involucrados en el esquema argumentativo también emergen en lo colectivo.

La abducción como hipótesis de inferencia, es uno de los tres tipos de razonamiento que infiere Charles Alexander Pierce (1956). En palabras coloquiales, se relaciona la abducción como una circunstancia un tanto curiosa que permite explicar una regla general a partir de la suposición de un caso. El docente es parte fundamental, orienta las ideas y conjeturas hacia la argumentación constituida y genera el camino más apropiado para la conexión del problema. El desarrollo inicia con algunas consideraciones desde las matemáticas y un contexto común, además de algunas preguntas que directamente involucran la situación y varias decisiones alrededor de esta. Es fundamental garantizar y guiar dicha solución a través de herramientas matemáticas.

El esquema de Toulmin puede conectarse a esta fase; el problema inicia considerando algunas situaciones (premisas) que tratan de guiar la solución del ejercicio (conclusión) siempre encaminada hacia el desarrollo matemático (garantía) que avala la solución. En este camino pueden surgir aspectos que refuercen (respaldo) o que contradigan (refutador) las aserciones que se van planteando a través de las argumentaciones que presentan los estudiantes a lo largo de las clases. El tercer momento implica la resolución individual contrastada en una próxima sesión de interacción en forma grupal. Los elementos involucrados en el esquema argumentativo también emergen en lo colectivo.

Sobre los argumentos y razonamientos en las bitácoras digitales

En la teoría de la argumentación presentada por Pierce un argumento relaciona tres tipos de razonamientos: el abductivo, que se encarga de las conjeturas que se dan por una primera idea determinada como explicación a un hecho observable; el segundo está ligado a las inducciones en las que a partir de premisas se puede concluir un hecho general como cierto. Por último, el razonamiento deductivo, que parte de premisas establecidas e interconectadas, generando solidez en cada una de las conexiones que se satisfacen y expliquen el hecho al concluirse.

Las actividades denominadas como bitácoras digitales fueron creadas teniendo como punto de partida el marco teórico de la argumentación. Las tareas desarrolladas en la bitácora enfocan los tres tipos de argumentos desde la visión de Pierce (1956) y Toulmin (1980). La primera sesión desarrolla las ideas primarias o relacionadas por los indicios (razonamiento abductivo). Son los indicios aquellos determinados por los conocimientos iniciales y las observaciones que pueden desarrollarse y relacionarse con una primera idea conjeturada. En ese sentido, dicha actividad puede estar acompañada de una introducción al concepto, de un contexto que relacione la resolución de una problemática alrededor de lo estudiado en clase o, posiblemente, de una observación determinada alrededor de una experimentación contrastando preguntas que relacionan lo matemático y la cotidianidad de la experiencia.

En la bitácora presentada optamos por cualquiera de estas tres situaciones indagando en los indicios de los estudiantes. Por ejemplo, en la bitácora digital número uno se presenta la actividad dentro de la categoría que denominamos *Motivación*. Es a través de esta premisa por la que se relaciona el concepto de proporcionalidad aplicado a un contexto empresarial como el pago de las obligaciones prestacionales. Para ello buscamos que se logre consolidar el significado de los porcentajes y las ideas que existen alrededor de este concepto de las prestaciones sociales conectando la realidad con decisiones que se determinan por garantías matemáticas.

De esa manera se inquiere una primera situación que permite conectar con la fase denominada *Durante clase,* en la que se trabaja con el uso del concepto matemático y su relación con la toma de decisiones presentes o futuras. Las preguntas se determinan alrededor de la lectura de tablas y la representación de los datos en otro tipo de registro, sea el gráfico o el analítico.

El objetivo principal de la fase radica en determinar la construcción del concepto y su uso en contextos alrededor de la discusión en el aula; con esto se determina un argumento inductivo–o deductivo– sobre el estudiante que le permita relacionarse basado en premisas en las que pueda inferir y decidir.

La actividad permite determinar la validación y uso del concepto construido en el aula. Esta situación relaciona lo que el estudiante ha construido y que es factible validar a través de su razonamiento interiorizado. Por lo general, se espera que, tras las tres etapas, el estudiante relacione de manera deductiva el desarrollo del reto propuesto usando el conocimiento matemático adquirido.

Capítulo 2

La modelación en el aula: estudio de la realidad en ambientes de experimentación

Habilidades de pensamiento de orden superior

La educación es un factor importante que impacta directamente la prosperidad de un país. El éxito en la implementación educativa es clave para un futuro mejor. Los docentes también desempeñan un papel fundamental porque ponen en práctica todas las políticas y regulaciones educativas.

La calidad de la educación está determinada por el plan y el desarrollo de la educación y su correcta implementación. Se requiere la supervisión de diferentes actores, como expertos en educación, profesionales y partes interesadas. Todos ellos deben trabajar de manera conjunta para lograr el éxito educativo. Esto significa que no solo se enfoca en la mejora de la evaluación, currículo actualizado y nueva normativa, sino también sobre el desarrollo profesional de los docentes (Desimone, Porter, Garet, Yoon y Birman, 2002). De esta manera los profesores aportan en gran medida al mejoramiento de la calidad de la educación en un país (Gil-Flores., Rodríguez-Santero, y Torres-Gordillo, 2017). Por tanto, la calidad de un docente para implementar la política educativa afecta directamente la calidad de la educación.

Los esfuerzos para mejorar la calidad de la educación no pueden separarse de las complejas y desafiantes demandas de competitividad del presente. Hay tres marcos principales de habilidades del siglo XXI (Larson, 2011): 1) habilidades de aprendizaje e innovación, 2) habilidades para la vida y la carrera, y 3) habilidades de información, medios y tecnología. Las habilidades de aprendizaje e innovación consisten en la adquisición de destrezas como comunicación, colaboración, pensamiento crítico y creatividad. Las habilidades para la vida y la carrera consisten en flexibilidad y adaptabilidad, iniciativa y autodirección, competencias sociales y transculturales, productividad y rendición de cuentas, liderazgo y responsabilidad. Además, las habilidades en información, medios y tecnología consisten en conocimientos sobre esos tres elementos. Además, Bialik et al. (2015) menciona cuatro cuestiones clave en el marco de implementación de la educación del siglo XXI: conocimiento, habilidad, carácter y metacognición.

Para Bialik et al., (2015) la habilidad es relevante para la competencia de aprendizaje e innovación, que incluye creatividad, pensamiento crítico, comunicación y colaboración. Las habilidades del siglo XXI se pueden agrupar en dos componentes principales: habilidades abstractas relacionadas con las destrezas del pensamiento (pensamiento creativo y pensamiento crítico), y habilidades concretas (comunicación y colaboración). Además, el pensamiento creativo y el pensamiento crítico van de la mano con el pensamiento de orden superior (Miri et al., 2005). Estos últimos componentes son importantes para que un individuo pueda resolver nuevos problemas contemporáneos (Brookhart, 2010), además de jugar un papel relevante en la aplicación y conexión del conocimiento previo en orden para resolver eficazmente nuevos problemas (Thomas y Thorne, 2009).

Cómo entendemos la modelación matemática

Lo planteado en este apartado es producto del seminario permanente desarrollado por el Equipo Integral de Docencia, Departamento de Matemáticas y Estadística (EIDME) del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Autónoma de Occidente.

La modelización matemática es un tema complejo y multifacético que ha generado un amplio debate entre investigadores y educadores. Diversos estudios (Kaiser y Sriraman, 2006) han evidenciado la falta de consenso sobre la naturaleza, el uso y las implicaciones de los modelos matemáticos en el aula de clase. En su artículo, Kaiser y Sriraman (2006) analizan las diferentes perspectivas existentes sobre la modelización, relacionándolas con enfoques previos y destacando tanto sus similitudes como sus diferencias. Esta diversidad de perspectivas refleja la riqueza y complejidad del campo de la modelización, y resalta la necesidad de un análisis profundo y continuo para comprender mejor su papel en la educación matemática.

De acuerdo con lo anterior, se hace necesario precisar los conceptos básicos que componen el proceso de modelación en educación matemática, sus estructuras y la perspectiva que pretende abordar, como también las competencias y formas de evaluarlas.

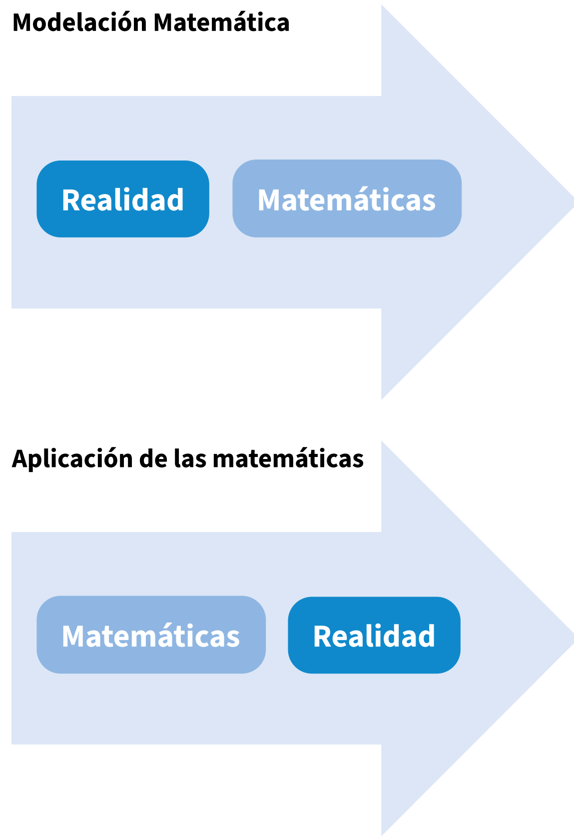
Los conceptos básicos que precisamos son: mundo real, modelación matemática y aplicación de las matemáticas.

El mundo real es el que sirve para describir el mundo fuera de las matemáticas, lo que tocamos, vemos, cuantificamos y presenta características propias: todas las cosas implícitas en la naturaleza, la sociedad y la cultura (Blum, Galbraith, Henn, y Niss, 2007).

La modelación matemática se utiliza para indicar cualquier relación, sea la que sea, entre el mundo real y las matemáticas, la cual se realiza en etapas: construcción, simplificación, matematización, trabajo matemático, interpretación, validación y exposición (J. Villa-Ochoa, Bustamante y Berrio, 2010). La modelación matemática es un sistema conceptual que se expresa mediante el uso de medios externos de representación que puede surgir de un problema o situación del mundo real (Bosch, García, Gascón, e Higueras, 2006).

La aplicación de las matemáticas se da cuando se utilizan para resolver un problema del mundo real. Ahora bien, existe una estrecha relación entre la aplicación de las matemáticas y su modelación. Según Blum et al., (2007) en las últimas dos décadas se han utilizado los términos "modelación matemática" y "aplicación de las matemáticas" para describir la relación bidireccional entre el mundo real y las matemáticas. Para entender esta relación veamos el diagrama de dirección entre la realidad y las matemáticas.

Figura 2. Relación direccional entre la realidad-matemáticas y las matemáticas-realidad.



Fuente: realizado por los autores a partir de datos suministrados por la investigación.

Precisando lo anterior, para comprender el término de la modelación matemática se puede indagar en dónde buscar ayuda en las matemáticas para solucionar este problema del mundo real. En cambio, la aplicación de las matemáticas debe abordarse desde el plano de la relación matemática-realidad. De igual forma, para entender este concepto se puede lanzar la siguiente pregunta: ¿Dónde se puede utilizar, en el mundo real, esta particular parte de las matemáticas que se conocen o se entienden? Se podría afirmar que es una dirección de relación opuesta a la modelación matemática (Lozana, 2012).

Modelación matemática y herramientas digitales

Las herramientas digitales tienen mucho que ofrecer en el contexto de la educación matemática. Estas se deben utilizar, como afirma Rögler (2014), dentro de un contexto de enseñanza centrado en el alumno que este orientado a la comprensión y la estimulación del conocimiento conceptual.

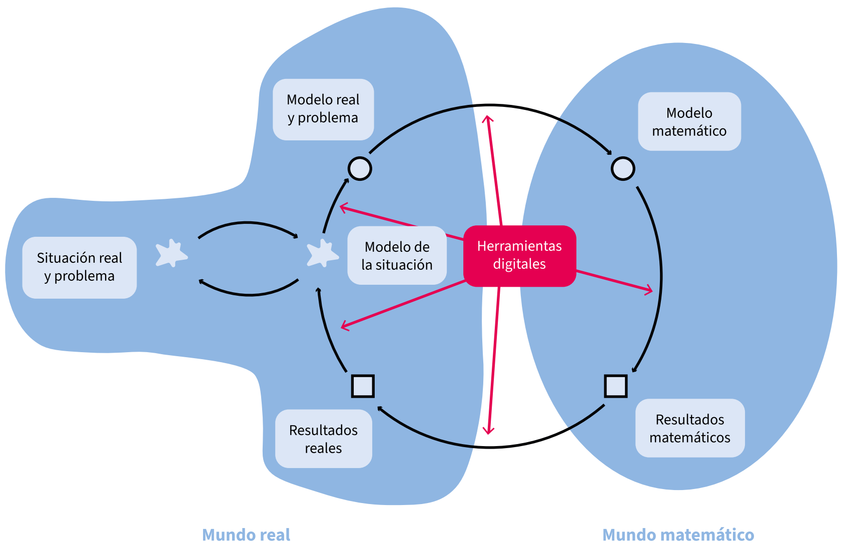
En Colombia se alude a la modelación matemática en la educación a partir de los lineamientos curriculares (MEN, 1998), en los que es vista como uno de los procesos generales; proceso que conduce de una situación problemática real hasta la construcción y validación de un modelo matemático, "[...] las situaciones problemas proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos" (MEN, 2006, p. 52).

Como lo señala la OCDE (2010, p. 3), "los jóvenes se encuentran en plena experimentación de nuevas formas de socialización y de adquisición de capital social a las que las TIC[2] están contribuyendo en gran medida". Para la OCDE las competencias de las TIC en los jóvenes están asociadas a: 1. Habilidades funcionales TIC, que incluyen habilidades relevantes para un buen uso de las diferentes aplicaciones. 2. Habilidades TIC para aprender, que incluyen habilidades que combinan las actividades cognitivas y de orden superior con habilidades funcionales para el uso y manejo de estas aplicaciones. 3. Habilidades propias del siglo XXI, necesarias para la sociedad del conocimiento donde el uso de las TIC es una condición necesaria.

Por lo tanto, los principales temas de la modelación matemática se pueden identificar dentro del alcance de las herramientas digitales; la relación entre estas herramientas y las competencias de la modelación matemática es obvia. Existen múltiples oportunidades para integrar herramientas digitales en un ciclo de modelado (Blum y Leiss, 2007; Siller y Greefrath, 2010) como se muestra en la Figura 3.

2 Las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) hacen referencia a un amplio conjunto de herramientas, equipos y programas informáticos que permiten la creación, almacenamiento, transmisión, recepción, manipulación

Figura 3. Integración de las herramientas digitales en el ciclo de modelación matemática.



Fuente: realizada por autores a partir de datos suministrados por Greefrath G., Siller HS. (2018).

Geiger (2011, p. 312) también describe un enfoque que permite insertar tecnología en diferentes etapas del ciclo de modelado. Dicho soporte se puede mejorar tomando decisiones informadas sobre las herramientas específicas que se utilizarán.

De acuerdo con Greefrath, (2018) asumimos el concepto de modelado matemático como un esquema que consta de varios elementos que deben abordarse, como se muestra en la figura 2.1. Partiendo de una situación real o sin ella se puede crear un modelo a través de la actividad cognitiva, y al idealizarlo se puede realizar un acercamiento a la realidad que incentive el ciclo de modelado. Es en este punto donde se comienza a traducir la situación real dada al mundo de las matemáticas. Al matematizar se crea un modelo que debe ser resuelto y reinterpretado, de modo que los resultados se puedan evaluar dentro de la situación dada. A primera vista, este ciclo parece fácil de manejar, pero mirando diferentes resultados de investigación, al tenor de Riebel (2010), podemos observar que especialmente los procesos de matematización e (re) interpretación, son de hecho muy difíciles para los estudiantes.

La observación de las diferentes etapas del ciclo de modelado permite una mirada sofisticada a esas etapas. Debido a que en las aulas de matemáticas el uso de herramientas digitales está aumentando continuamente, tiene sentido abordar estas etapas con la ayuda de la tecnología. En este contexto, sugerimos que GeoGebra puede asumir una amplia gama de funciones que promueven y mejoran la comprensión del estudiante sobre el proceso de modelado.

Modelación matemática: del salón de clase al mundo real

Los estudiantes universitarios suelen enfrentar desafíos al aprender disciplinas como las matemáticas. Estas dificultades pueden agravarse si no pueden visualizar la aplicación práctica de lo que están estudiando, lo que los lleva a enfocarse únicamente en aprobar exámenes. Este enfoque puede limitar su participación en el aprendizaje y dificultar una comprensión profunda y significativa, a pesar de que los contenidos de las asignaturas de matemáticas estén directamente relacionados con su campo de estudio.

La mayoría de los estudiantes prefieren clases de matemáticas que tengan algún grado de relación con la vida cotidiana y, especialmente, con su futura carrera profesional. Esta conexión facilita un aprendizaje más significativo y menos estresante. Jablonka (2003) sostiene que integrar en el aula ejemplos de matemáticas aplicadas en entornos profesionales es una forma efectiva de relacionar los conceptos matemáticos extracurriculares con el plan de estudios, demostrando así su utilidad práctica. Esta asociación ayuda a dar sentido a las actividades de enseñanza para los estudiantes y a reducir la ansiedad que puedan sentir hacia el aprendizaje de conceptos y la manipulación de números y algoritmos. Además, facilita la conexión entre el aprendizaje académico y las demandas profesionales, y promueve el reconocimiento de la diversidad cultural en el ámbito laboral. Sin embargo, vincular las técnicas matemáticas utilizadas en el lugar de trabajo con el currículo escolar puede ser desafiante, dado el carácter a menudo rígido de los planes de estudio, y la necesidad de contextualizar el concepto de "significado" para que se ajuste a las diversas experiencias y perspectivas de los estudiantes.

Además, la mayoría de las veces la asociación entre matemática y realidad es más exigente en cuanto a esfuerzo y compromiso para los estudiantes que para las clases tradicionales centradas en la enseñanza magistral. También exige tiempo disponible de los estudiantes para investigar y para otras tareas fuera del aula.

De acuerdo con lo anterior, nos permitimos evaluar algunas posibilidades para la enseñanza y el aprendizaje de las competencias matemáticas en los cursos de matemáticas en las universidades, cuando se utiliza el modelado matemático con el apoyo de la tecnología a partir de problemas relacionados con contextos cotidianos de los estudiantes, principalmente cuando dichas situaciones están relacionadas con sus actividades profesionales, actuales o futuras.

Algunas reflexiones sobre la modelación en el salón de clase

La idea de construir modelos para comprender y estudiar una amplia variedad de fenómenos es muy antigua; el ser humano a lo largo del tiempo ha utilizado representaciones del mundo real para obtener una solución respecto a los modelos construidos. La validación de tales modelos se realiza a través de análisis, reflexiones y discusiones sobre los resultados alcanzados.

Los modelos matemáticos son representaciones de los aspectos de interés del problema de estudio y se pueden formular a través de expresiones o fórmulas analíticas, diagramas, gráficas o representaciones geométricas, tablas, etcétera. Se destaca entonces que un solo modelo, con adaptaciones menores, puede representar a muchos fenómenos. Esto es útil tanto en el modelado profesional como en el modelado implementado en el aula de matemáticas ya que permite la utilización de un solo modelo para resolver diferentes situaciones

La matemática y la realidad se pueden conectar a través del modelado. Esta simbiosis se da mediante el uso de procesos matemáticos conocidos con el objetivo de estudiar, analizar, argumentar y pronosticar situaciones reales de la vida cotidiana.

La modelación matemática en el ámbito educativo se erige como una herramienta esencial para abordar problemas de índole práctica, estimulando la recopilación de datos y la simplificación de situaciones complejas por parte de los estudiantes. Este enfoque promueve la creación de un ambiente adecuado para que los alumnos puedan realizar simulaciones y establecer analogías, reconociendo la versatilidad de un mismo modelo para aplicar en diversas circunstancias, lo que facilita la identificación de oportunidades de aplicación en distintos dominios del conocimiento.

Por otra parte, la tecnología desempeña un papel fundamental en el proceso de modelado matemático en el contexto educativo. Tanto las herramientas de procesamiento de datos como las de representación gráfica y cálculo simbólico se constituyen en elementos imprescindibles que facilitan el trabajo con los modelos matemáticos. Estas tecnologías actúan como soportes operacionales y contribuyen a superar desafíos habituales en el aula, como la falta de interés o las dificultades conceptuales en la resolución de problemas.

El papel de la modelación matemática dentro de las bitácoras digitales

Con el objetivo de impulsar e inducir al desafío colectivo y de resolver problemas contextualizados, durante el desarrollo de las sesiones de clases se incorporaron en las bitácoras digitales una serie de tareas de modelación matemática a través de los distintos momentos de estas: *motivación, durante clase*, *después de clase* y *problema de reto.* Estas están planificadas para que desde la modelación matemática los estudiantes analicen los elementos básicos del álgebra, el espacio, la medida y, por último, las funciones y sus elementos característicos desde el planteamiento y la reflexión de problemas reales para el desarrollo de dos actividades como lo sugiere López (2012, p. 657):

1. Actividades ‘piensa y actúa’: se le plantean al estudiante todos los datos o elementos para que obtenga un modelo matemático que reproduzca de la mejor manera el planteamiento.

2. Actividades de ajuste de curvas: son las actividades en las cuales a los estudiantes se les presentan datos obtenidos a partir de una medición, con el propósito de que los manipulen y obtengan un modelo matemático que represente de la mejor manera la gráfica de la situación planteada.

En cuanto a la estructura de estas tareas de modelación se han propuesto tres tipos de tareas, como lo sugiere Rico (2005, p. 14-15):

1. Tareas de reproducción: realizar operaciones matemáticas básicas, y uso de fórmulas simples y algoritmos ya conocidos.

2. Tareas de conexión: relacionar ideas para resolver los problemas propuestos. Para ello, se inducirá a los estudiantes a buscar y usar nuevas estrategias o formas para intentar resolver situaciones problemáticas del fenómeno a estudiar.

3. Tareas de reflexión: describir demandas de tareas que requieren comprensión y reflexión, creatividad e innovación. En estas se relacionan con conocimientos previos para resolver problemas más complejos, con el fin de generalizar y justificar los resultados.

Por otro lado, debido a que en las aulas de matemáticas el uso de herramientas digitales está aumentando continuamente, tiene sentido mirar las etapas del ciclo de modelación con la ayuda de la tecnología. En este contexto, *GeoGebra* tiene una amplia gama de funciones.

El software de geometría dinámica conocido como GeoGebra se caracteriza por permitirle a los estudiantes experimentar o explorar conceptos propios de la geometría, además de brindarles la oportunidad de visualizar de manera dinámica distintos efectos sobre el problema de estudio. En este contexto, *GeoGebra* puede servir como una herramienta para dibujar y construir; calcular resultados numéricos o algebraicos que no serían factibles para los estudiantes en el período de tiempo dado, sin la ayuda de herramientas digitales; autocomprobar los resultados obtenidos por otros medios; realizar presentaciones.

GeoGebra admite varios de los diferentes procesos de modelado (Hall & Lingefjärd, 2016). Las representaciones gráficas se consideran relevantes (Pead, Bill & Muller, 2007) para comprender el contenido matemático, en particular, la diversidad de oportunidades de representación (Moreno-Armella, Hegedus & Kaput, 2008). Por ejemplo, mediante el uso de la ventana de gráfico y la ventana de hoja de cálculo, cuando se trabaja con términos de función y oportunidades de autocomprobación (Arzarello, Ferrara y Robutti, 2012) que pueden realizarse al cambiar un punto para controlar la construcción geométrica, desde donde se soportan procesos de modelación en varias etapas del ciclo de modelado (véase figura 3).

El vínculo entre las bitácoras digitales y la modelación se evidencia en la medida en que estas permiten, de manera experimental, producir matemáticas por parte de los estudiantes de manera individual y colectiva. Lo anterior pone de manifiesto las maneras en que ese conocimiento se produce en el aula. Como lo expresan Toro et al., (2018) la experimentación debe considerarse como un aspecto clave dentro del proceso de modelación, junto con la abstracción, la resolución, validación y modificación de los modelos, ya que en conjunto posibilitan que los estudiantes no centren la atención en la consecución de un modelo, sino también en las posibilidades y limitaciones que estos ofrecen frente al fenómeno o situación modelada, así como en la actividad matemática y los significados que se puedan construir a partir de ella.

Capítulo 3

Bitácoras

Bitácora 1

Cuando se enseña matemática es fundamental inducir al estudiante a que desarrolle competencias que le permita aplicar conceptos y competencias matemáticas en situaciones reales y prácticas de la vida cotidiana. En este sentido, la Bitácora 1 se diseña para proporcionar a los estudiantes herramientas que les ayuden a interpretar y utilizar información cuantitativa para la toma de decisiones en su futuro profesional.

Las competencias que se pretenden desarrollar en esta bitácora son interpretación y formulación de planteamientos matemáticos en situaciones relacionadas con la ingeniería y las ciencias económicas; esto incluye la capacidad de aplicar las habilidades aprendidas en clases en problemas prácticos, como es el caso de desglose del pago de una empresa a sus trabajadores. Al terminar esta bitácora se les facilitará mucho más describir, explicar, comunicar y plantear problemas de manera efectiva utilizando gráficas, tablas y otros formatos para presentar información cuantitativa. Así mismo, comprender y transformar información cuantitativa otorgada en diferentes formatos como tablas y gráficas.

El contenido de esta bitácora incluye instrucciones para que los estudiantes investiguen conceptos importantes como cesantías, prima de servicios, pago de vacaciones y otros elementos fundamentales de la arquitectura económica empresarial. También proporciona enlaces a recursos didácticos para una mejor comprensión de estos conceptos. A través de un ejemplo práctico, los estudiantes aprenderán a aplicar las nociones antes mencionadas utilizando matemáticas. Así pues, la bitácora busca que el estudiante se familiarice con el análisis de datos para la toma de decisiones y también comunicar sus hallazgos de forma efectiva. Por lo tanto, no es solo una herramienta educativa, sino una preparación integral para los desafíos del mundo real.

A continuación, se explica la estructura de la Bitácora 1, cuyo eje temático está basado en gráficos y tablas de datos en problemas de las ciencias económicas.

El método de elaboración es conjunta; se utilizan medios tecnológicos y el software *GeoGebra.* Para el desarrollo de la competencia es importante cumplir con los siguientes resultados de aprendizaje: analizar, formular y aplicar conceptos matemáticos, utilizando gráficos y tablas de datos en problemas contextualizados en ingeniería y ciencias económicas. Además, los estudiantes deberán calcular, representar e interpretar las prestaciones sociales de un trabajador,

así como datos históricos del salario mínimo en Colombia haciendo un análisis cuantitativo que permita mejorar la toma de decisiones en el contexto.

En este apartado el estudiante debe leer cuidadosamente la sección de motivación y a partir de allí responder de manera clara y ordenada a las preguntas planteadas. Se espera que el estudiante no solo lea, sino que reflexione e investigue los conceptos presentados con el ejemplo práctico presentado en esta bitácora. Utilice el caso presentado, para ilustrar el cálculo de las prestaciones sociales; instruya a los estudiantes que completen los detalles de las tablas. Facilite la discusión y la argumentación de las respuestas.

Antes de comenzar a realizar esta actividad se deben investigar los siguientes conceptos: cesantías, prima de servicios, salario mensual devengado, auxilio de transporte; pago de vacaciones, intereses de cesantías, parafiscales. Para mayor información se puede ver los siguientes links:

Dada la situación actual del país, muchas empresas han tenido que ajustar los gastos correspondientes a las prestaciones sociales para sus empleados. Para esto, el empleador debe calcular las provisiones sobre su nómina mensual. Los porcentajes que las empresas deben tener en cuenta para efectuar las provisiones de ley son los siguientes:

Cesantías: 8,33% mensual sobre el salario mensual devengado. Los intereses a las cesantías corresponden al 1% mensual sobre el valor de las cesantías acumuladas. La prima de servicios es del 8,33% mensual sobre el salario mensual devengado y las vacaciones son del 4,17% mensual sobre el salario mensual devengado, sin auxilio de transporte.

Prestaciones sociales: los beneficios y garantías a favor del trabajador son las cesantías que se traducen en 30 días de salario por cado año de servicios o proporcional, si el sueldo es variable se realiza un promedio de lo devengado en el último año. La prima de servicios corresponde a la liquidación de 15 días de salario mensual a quienes laboren todo el semestre, o proporcionalmente por fracción, cuando el trabajador haya laborado como mínimo 90 días del respectivo semestre.

Los trabajadores con contrato a término fijo tienen derecho a la prima independientemente del tiempo laborado. Las vacaciones equivalen a la liquidación de 15 días de salario por cada año de servicio a quien labore por lo menos 180 días. Y, por su parte, los trabajadores a término fijo tienen derecho a que se les liquiden vacaciones, independientemente del tiempo laborado.

Es importante anotar que los intereses sobre las cesantías se liquidan así: el 12% por cada año o proporcionalmente por el tiempo de servicio, es decir, el 1% mensual. Los empleadores deben pagar antes del 31 de enero el valor de los intereses sobre las cesantías acumuladas al 31 de diciembre del año inmediatamente anterior. Los intereses se pagan a la terminación del contrato y cuando efectúa el retiro parcial de cesantías. Se calculan sobre el monto de las cesantías acumuladas a diciembre 31 o a la fecha de liquidación.

Los aportes parafiscales son una contribución obligatoria que algunas empresas y empleador deben realizar al Sena[3], ICBF[4] y a las cajas de compensación familiar, por cada empleado que tenga. Todo empleador que tenga por lo menos un empleado vinculado con un contrato de trabajo en cualquiera de sus formas debe realizar los aportes parafiscales que correspondan. Hay algunas excepciones que a continuación se señalan, considerando que la obligación es parcial. Ejemplo:

Mario Pérez trabaja en una pizzería y para el año 2020 devengaba un salario mínimo (investiga cuánto es ese valor) más auxilio de transporte, lo que hace que cada mes reciba (investiga el valor) en pesos. Si el dueño de la pizzería no está exento de pago por parafiscales, entonces el empleador debe tener en cuenta la siguiente tabla donde se explica qué tanto deben aportar él y el trabajador para su salario mensual (Véase Tabla 1 en el apartado de anexos).

Ejercicio para el estudiante: en la misma tabla se relacionan los porcentajes con los aportes de empleador y trabajador para el pago mensual. Con la información anterior:

Investiga y completa la tabla 1 en las casillas sombreadas y calcula el costo que representa para el empleador este trabajador y el total recibido por él. ¿Cuál es el aporte total en porcentaje que se da por salud? ¿Cuánto es el aporte en dinero que se da por pensión? Si la pizzería tiene cinco empleados, que reciben igual salario, ¿Cuánto debe pagar en total el empleador por prima de servicios?

3 Servicio Nacional de Aprendizaje del estado colombiano que promueve ejercicios para la formación de los trabajadores colombianos.

4 Instituto Colombiano de Bienestar Familiar.

- Si para el año 2021 se incrementa el salario mínimo en un 3%, ¿Cuánto será el aporte del empleador en salud y pensión, para los 5 empleados de la pizzería?
- Si en 6 años el incremento por año es del 4 %, ¿Cuánto será el aporte total del empleador sin tomar en cuenta el subsidio de transporte para sus 5 empleados?

Con los datos proporcionados en la tabla (véase Tabla 2 en el apartado de anexos), resuelva lo siguiente: suponga que todos los trabajadores tienen el mismo salario, a partir de ello, y suponiendo que se mantienen los mismos porcentajes de aportes (véase Tabla 1), ¿para el año 2011, el empleador cuánto aportó para pensión del pago mensual?

- ¿En cuánto aumentó el salario mínimo desde el 2009 hasta el 2020?, ¿Cuánto fue este porcentaje de cambio?
- ¿Para el año 2015 cuánto aportó el trabajador de la pizzería a su salud y pensión?
- Si el dueño de la pizzería destinó 12.000.000 de pesos para el pago de nómina en el año 2014, ¿Cuántos trabajadores pudo contratar en este año?
- Si tuviera la misma cantidad de dinero para el año 2020 ¿podría mantener la misma cantidad de trabajadores?

El siguiente planteamiento es fundamental para profundizar en el análisis de la Bitácora: la contingencia del Covid-19 en Colombia. El dueño de la pizzería disminuyó sus ingresos en un 69%, lo que hace que el dinero para nómina que estaba en 17.000.000 de pesos disminuya en igual porcentaje, ¿Cuántos empleados con igual salario tenía al inicio de la contingencia?, ¿Cuántos empleados podrá tener (igual salario) con la disminución del presupuesto de nómina? ¿Qué medidas tomaría usted para que esta disminución sea lo menos posible?, sustente su respuesta.

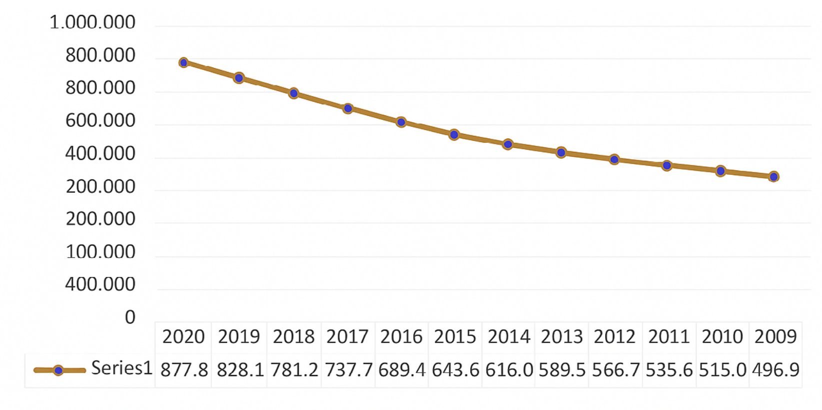
- ¿Con los datos suministrados, usted podría predecir cuánto será el aumento del salario mínimo para el año 2021, 2022? ¿Cuáles crees que son las variables para considerar el aumento?

A modo de hipótesis: si comienzas a trabajar con el salario mínimo y quieres comprar un Nissan March Active avaluado en $31.990.000 en el año 2020, después de comprar lo básico de la canasta familiar, pagar servicios, y arriendo, ¿cuánto debes ahorrar año a año para poder comprar tu carro?

Investiga cuánto se gastaba en tu hogar en artículos de primera necesidad para el año 2020. ¿Podrías comprar más o menos artículos con un salario mínimo para el año en curso? ¿Qué cambios harías para que se mantenga el mismo presupuesto para el año en curso? Sustenta tu respuesta.

En el siguiente diagrama se graficaron los datos de la Tabla 2 correspondientes al año y el salario mínimo.

Figura 4. Salario mínimo 2009-2010



Fuente: elaboración propia a partir de datos publicados por el Ministerio de Hacienda.

Con base en lo anterior responde las siguientes preguntas:

- ¿Para qué años el cambio porcentual fue mayor al salario mínimo mensual?
- ¿En qué año se da el menor cambio porcentual del salario mínimo?
- ¿Para qué años hubo mayor aumento porcentual del salario mínimo?
- ¿Para qué años tuvo el menor porcentaje de aumento del salario mínimo?

Finalmente, ¿qué puedes concluir del comportamiento del salario mínimo mensual? Teniendo en cuenta el salario mínimo mensual para el año en curso, cómo cambiaría el comportamiento de la gráfica presentada anteriormente.

Identifica en cada punto desarrollado anteriormente los diferentes conceptos utilizados en clases.

Ahora, grafica en un diagrama de barras los datos suministrados en la Tabla 2 (año auxilio de transporte) y analiza el comportamiento de dichos datos. ¿Qué puedes concluir al respecto?

Espacio de análisis colectivo: en grupos de tres estudiantes, con diferentes datos como, por ejemplo, el cambio del valor a pagar en el recibo de la energía en los últimos meses, cambio de los precios efectuados en la Canasta Familiar, desarrolla lo siguiente:

Haz una tabla donde se representen los datos investigados.

Gráfica en diagramas de barras, poligonal o circular los datos investigados; mira el video que está en el siguiente link:

Haz un análisis de los que observas en el video y los datos investigados. Descubre el porcentaje de cambio entre el primer dato y el último. Interpreta resultados a partir de la siguiente pregunta: si ganaras el salario mínimo mensual vigente, ¿cuál sería el porcentaje de distribución para cubrir tus gastos? Y, por último, plantea y resuelve un problema de la vida cotidiana en el que puedas utilizar lo que se ha discutido y desarrollado en clase aplicando las herramientas otorgadas por esta bitácora.

Bitácora 2

Esta se centra en la aplicación matemática a situaciones de la vida cotidiana tanto en el ámbito de la ingeniería como la de ciencias económicas. En el desarrollo de esta bitácora los estudiantes aprenderán a identificar, formular y resolver problemas utilizando principios de ingeniería, ciencia y matemáticas.

La bitácora enfrenta a los estudiantes a problemas prácticos. Por ejemplo, calcular y analizar el peso de un bebé durante sus primeros días de vida. Se utilizará el concepto de predicción y herramientas como *Geogebra* para visualizar y plantear los problemas planteados.

Otro enfoque de la Bitácora 2, es la utilización de un ejemplo hipotético de la planeación de proyectos de ingeniería como la construcción de una central eléctrica, en el que se analizarán los costos de la logística de tender cables bajo el agua y tierra. Se abordará el tema de ecuaciones lineales-cuadráticas para optimizar los costos, planificando inversiones y calcular los intereses generados aplicando conceptos de algebra.

A lo largo de las actividades planteadas, se espera que los estudiantes desarrollen habilidades propositivas y exploten sus herramientas de análisis cuantitativo frente a cualquier tipo de datos. También se aplicará procedimientos del álgebra y geometría en problemas propios de la ingeniería y ciencias administrativas; se hará uso de diferentes herramientas analíticas y tecnológicas de las funciones de una variable real, para la comprensión de fenómenos de variación y acumulación que contribuyan a la resolución de problemas.

Para alcanzar la competencia se utilizarán procesos de aprendizaje basados en la utilización de patrones y relaciones con el propósito de construir contextos matemáticos reales que permitan analizar las relaciones cuantitativas para resolver problemas de ingeniería. Del mismo modo, se busca que se aplique elementos y procedimientos del algebra y la geometría en contextos reales para la resolución de problemas propios de la ingeniería. Por último, se pretende utilizar diferentes estrategias analíticas, cuantitativas, numéricas y tecnológicas de las funciones de una variable real para la comprensión de fenómenos de variación y acumulación que contribuyen a la resolución de problemas ingenieriles.

Los estudiantes deben leer cuidadosamente la sección de motivación. Después de esto deben investigar y comprender conceptos, como el cálculo del peso de un bebé e inversión financiera. Es fundamental observar los recursos visuales, enlaces y videos para enriquecer la comprensión del estudiante. Es fundamental tener en cuenta lo siguiente: instruir a los estudiantes para que completen las tablas y resuelvan las ecuaciones proporcionadas, investigando y calculando los valores específicos mencionados, y facilitar la discusión para que los estudiantes puedan exponer y argumentar sus respuestas.

Utilice el siguiente ejemplo para enseñar a los estudiantes a construir y analizar gráficos a partir de los datos tabulados. Así mismo, guíelos en la utilización de softwares como Geogebra para modelar matemáticamente los datos planteados.

Ejemplo: cuando un bebé nace, normalmente perderá peso durante unos pocos días y después comenzará a ganarlo. La siguiente tabla muestra el peso del bebé durante los primeros días (Véase tabla 3 en el apartado de anexos).

- ¿Cuánto pesó el bebé al nacer? ¿Cuál es el peso del bebé el día 5? ¿Cuál es el peso del bebé el día 10?

Utilizando una hoja cuadriculada o milimetrada, ubica los puntos dados en el plano cartesiano y dibuja la curva que pasa por estos puntos.

- De acuerdo con la gráfica obtenida, ¿qué modelo se ajusta a estos datos, lineal o cuadrático? Justifica tu respuesta.

Se ha encontrado que un modelo para el peso promedio W de un bebé (en gramos) durante las dos primeras semanas de vida está dado por $W = 15t^2 - 180t + 3300$. ¿Piensas que este modelo es adecuado? ¿Por qué piensas eso? Encuentra un modelo para el peso promedio W de un bebé (en gramos) durante las dos primeras semanas de vida.

- Con el modelo que encontraste en el apartado responde: ¿Cuándo el peso del bebé será de 3720 gramos?

A continuación, analizaremos algunos problemas que tienen relación con el modelo matemático. Hagamos el siguiente análisis: Pogue es un pequeño pueblo ubicado dentro de la selva chocoana del río Atrato. Para llegar a Pogue hay que navegar por la orilla del río Bojayá. La Gobernación del Chocó tiene un proyecto para construir una central eléctrica para instalar una línea de energética que cruce el río en la parte más angosta (aproximadamente de 1,5 kilómetros de ancho) hasta llegar a Pogue que está ubicada 8 kilómetros aproximadamente, corriente abajo (ver figura). Cuesta $35'000.000 por kilómetro tender un cable bajo el agua y $15'000.000 por kilómetro tenderlo en tierra.

Teniendo en cuenta la información del problema y el dibujo, complete la siguiente tabla que indica la cantidad de cable que se necesita tanto en tierra como en agua, para las distintas posibilidades de ubicación del punto en tierra a una distancia x (Véase tabla 4 en el apartado de anexos).

- Escriba una ecuación que determine el costo bajo el agua para cualquier valor de x.
- Escriba una ecuación que determine el costo en tierra para cualquier valor de x.
- Escriba una ecuación que determine el costo total.

El proyecto tiene presupuestado gastar $200'000.000 en la instalación de los cables en tierra y en agua; ¿cuántos kilómetros de cable aproximadamente deben usarse bajo el agua y cuántos kilómetros en tierra, de tal manera que se utilice todo el presupuesto? (Si lo considera necesario utilice *Geogebra*).

- ¿Cree que la forma de construir la presa es la apropiada? sustente su respuesta.

Si tuvieras que a cargo este proyecto: ¿Cómo construirías esta central eléctrica con el ánimo de minimizar los costos de presupuesto dados en el apartado e)? Sustenta tu respuesta.

Betty Martínez tiene disponible 100.000 dólares que ahorró durante toda su vida y quiere invertirlos en proyectos que le generen más ingresos. Para tal fin decide consultar al señor Selenio Gómez, un planificador financiero, quien le recomendó que una cantidad se colocara en una cuenta libre de impuestos con un interés anual simple de 6% y el resto, en certificados de depósito al 4%. Para desarrollar el ejercicio, diríjase a la Tabla 5 ubicada en el apartado de anexos.

- Si al cabo de un año, la señora Betty, recibe en intereses totales la suma de $5.500, ¿cuánto dinero invirtió en la cuenta libre de impuestos?

Supongamos que el señor Selenio se equivocó e invirtió las cantidades de manera equivocada, es decir, la cantidad invertida en una cuenta libre de impuestos en la cantidad en certificados de depósito y viceversa. ¿Se esperaría obtener los mismos intereses? Realice los cálculos necesarios para argumentar su respuesta.

- Betty Martínez decide que con el dinero de los intereses ganados en las cuentas comprará una casa cuyo monto es 87.000.000 de pesos. ¿Con cuál de las dos cuentas conseguiría más rápido el dinero?

Por cuestión de la pandemia la cuenta que era libre de impuestos generó un impuesto de 2 centavos por cada dólar. Teniendo en cuenta esta información cuál de las dos cuentas sería la más apropiada para recolectar el dinero para la casa que desea Betty.

Primer ejercicio: los productos *Jugos UAO* han lanzado un nuevo jugo con sabor a kiwi con un 40% de pulpa, y se pretende agregar agua para obtener otro jugo más refrescante y económico con el 15% de pulpa. El jugo se conserva en depósitos de 50 litros que luego serán distribuidos en botellas 500 cm^3

- ¿Cuántas botellas de jugo se obtienen de un depósito totalmente lleno?

En el caso del jugo original, ¿qué cantidad de pulpa contiene un depósito lleno?

- ¿Cuántos litros de agua debemos agregar a un depósito que contiene 50 litros del jugo original para obtener el jugo más refrescante?

Si tú deseas comenzar un emprendimiento vendiendo estos jugos, ¿en cuánto venderías cada frasco con el fin de maximizar ganancias? Ten en cuenta que debes investigar los costos de fabricación de dicho producto

El problema de los residuos sólidos en nuestro país tiene diversos orígenes entre los que se destacan: la falta de consciencia ambiental de los consumidores y productores, la falta de capacidad de inversión en el país, el constante crecimiento de la población y la falta de educación formal acerca del tema.

En Colombia cada persona produce 1,5 kilos de residuos por día en promedio y no los separa en la fuente de origen. La recolección y transporte de los residuos no siguen criterios técnicos, se guían por la costumbre y además los camiones no están diseñados para una recolección apropiada. Existen en el país 1700 toneladas de residuos, de las cuales solo el 10% se aprovecha. Entre 50% y 60% de los residuos que se produce en los hogares son materiales biodegradables, que podrían aprovecharse en un proceso de transformación natural hasta convertirse en productos de gran calidad como abono orgánico. (La tabla 6 ubicada en el apartado de anexos resume los detalles de los diferentes rellenos sanitarios que hay en el país).

Supongamos que los costos de procesar basura (*Costo PB*) pueden ser calculados mediante la siguiente expresión matemática:

$$Costo\ PB = CT \quad (1)$$

Donde C corresponde al costo por tonelada y T a las toneladas depositadas por día. De acuerdo con la información y la tabla dada, responda:

- ¿En cuál relleno sanitario es más costoso procesar la basura?, ¿en cuál es más barato? Calcule el costo anual de disposición de cada relleno.
- Si aproximadamente el 50% de los residuos sólidos son reutilizables, ¿cuánto dinero se ahorraría en cada relleno? Ahora miremos el caso de Costa Rica donde cada habitante produce entre 0,6 y 1,1 kilos de basura por día, 876 toneladas son recogidas y se aprovecha un 23% de estos residuos. (Para detallar la cantidad de residuos sólidos y su costo, véase Tabla 7 en el apartado de anexos).

Utilice la expresión (1) y responda:

- Compare la generación promedio de residuos de un colombiano y un costarricense, y el costo de procesar basura más barato de rellenos sanitarios de cada país.
- Calcule los costos totales de disposición por día en dólares estadounidenses y determine en qué país es más económico procesar los residuos. Interprete.

- El reto que aquí se propone está en la tabla 7 (véase apartado de anexos) y presenta el número de casos diarios reportados por coronavirus en la ciudad de Cali, tomados de la página del Instituto Nacional de Salud INS, en el que el día uno corresponde al 29 de febrero y el día 147 corresponde al 23 de julio.

Observe cuidadosamente el video indicado, el cual muestra cómo ajustar una curva usando Geogebra:

- Siguiendo los pasos indicados en el video, inserte en una hoja de cálculo de *Geogebra*, los datos de las columnas 1 (día) y la columna 3 (acumulados) de la tabla dada.

Usando la herramienta Análisis de regresión de dos variables, queremos ajustar los datos dados. Para esto trabajemos con los siguientes modelos de regresión:

a) Lineal.

b) Polinomio de Grado 2.

c) Exponencial.

d) Logístico.

- ¿Cuál de los modelos propuestos se ajusta mejor a los datos?
- Si tuvieras que justificar la elección de tu modelo interpretando la situación real de la epidemia, ¿cómo lo harías?

Bitácora 3

Una de las habilidades adquiridas con las matemáticas es la de brindar tratamiento matemático a fenómenos que ocurren en la naturaleza, esto con el objetivo de predecir y tomar decisiones en un contexto determinado. En este sentido, la Bitácora 3 relaciona la toma de decisiones a partir de la modelización de datos observables en dos contextos donde a partir del uso del *Geogebra*, el desarrollo de procedimientos algebraicos-geométricos y el análisis de resultados logra consolidarse lo propuesto en los resultados de aprendizaje.

La competencia a la que se apunta en el desarrollo de esta bitácora es a la habilidad para identificar, formular y resolver problemas complejos, aplicando principios de ingeniería, ciencia y matemáticas. Así pues, los resultados de aprendizaje esperados para el fortalecimiento de competencias son:

Uso de patrones y relaciones con el propósito de construir contextos matemáticos y reales que permitan analizar las relaciones cuantitativas para resolver problemas de ingeniería; aplicación de elementos y procedimientos del álgebra y de la geometría en contextos reales para la resolución de problemas propios de la ingeniería; uso de diferentes estrategias analíticas, cuantitativas, numéricas y tecnológicas de las funciones de una variable real para la comprensión de fenómenos de variación y acumulación que contribuyen a la resolución de problemas ingenieriles.

A continuación, se explica la estructura de la Bitácora 3 cuyo eje temático es gráficos y tablas de datos en problemas de ciencias económicas. El método de elaboración es conjunto y se utilizan medios tecnológicos como el sotfware *Tracker* y *Geogebra.*

Para empezar de la mejor forma, se relaciona la siguiente carrera a la montaña, a través del cuestionario que se da en la plataforma Goconar; hay que acceder a ella y completar el reto:

Ahora bien, lea cuidadosamente, después responda de manera clara y ordenada justificando siempre la respuesta.

El venado de cola blanca es una especie de mamífero ubicado en la escala de preocupación menor referida al estado de conservación.

Se introdujo la especie (con un número de 20 venados) en una isla costera para estudiar su preservación. Después de 13 años la relación de número de venados se vinculó en la tabla número 9 presente en el aparte de anexos. En esta tabla se puede ver el tiempo transcurrido (determinado en años) y el número de venados que aparecen de más a medida a que pasan los años.

Con la información anterior responda las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el número inicial de venados?
- ¿Cuántos venados habrá en un periodo de 10 años?

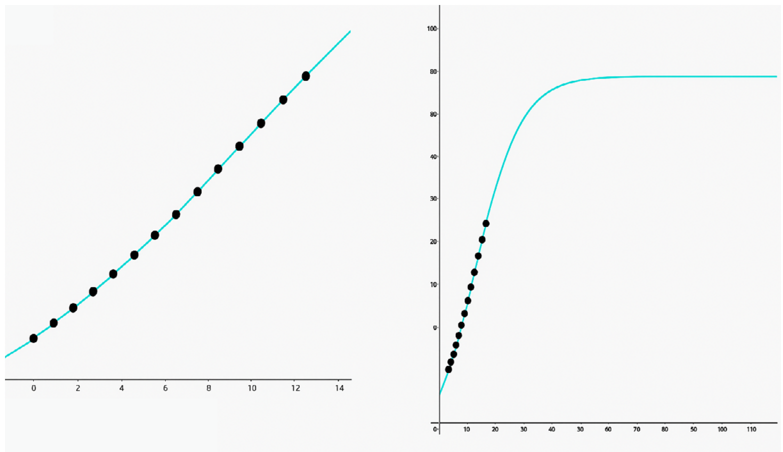
- ¿Cuándo habrá alrededor de 57 venados? ¿Cuántos años habrían pasado?

¿Hay alguna forma de predecir el número de venados para un tiempo superior al relacionado en la tabla 1? De ser así mencionarlas. Para este punto, se puede ingresar al siguiente código, que es un video tutorial para el ajuste de una curva en *Geogebra:*

A continuación, se relaciona la curva que aproxima el conjunto de puntos a través de dos imágenes. Una donde se hace el análisis de dispersión y otra donde se ve la panorámica general.

Figura 5.

Gráfico de modelación hecho por Geogebra.



Fuente: Elaborado por autores.

El gráfico anterior permite relacionar un ajuste lineal aproximado. La expresión que se relaciona estará determinada después de algunas aproximaciones por:

$$N = \frac{100}{1+4e^{-0.14t}}$$

- ¿Del gráfico anterior, es posible predecir la población total para cualquier año en particular?
- ¿Después de 80 años hay alguna variabilidad en el número de venados? Por ejemplo, ¿es significativo el cambio en comparación con 50 años?

Qué pasa con la población de venados después de transcurrido mucho tiempo. Sea la expresión:

$$\frac{100}{1+4e^{-0.14t}} = 80$$

- ¿Qué significa en el contexto de la expresión? Enuncie con sus propias palabras. ¿Cómo con la ecuación anterior se podría calcular t?

¿Tiene sentido para el contexto la siguiente expresión?

$$\frac{100}{1+4e^{-0.14t}} = 120$$

Demuestre matemáticamente que no.

- Actividad de experimentación: en la sección que sigue se retará a los estudiantes a que construyan un cohete de vinagre. Para el siguiente experimento de modelación se utilizará:

Tracker, que es un software que permite recolectar datos a través de videos y contrastarlo con algunos modelos matemáticos, y funciona a partir de un suceso filmado permitiendo tomar datos como posición, velocidad y aceleración.

Ingreso al software

Tutorial de uso Tracker

El estudiante deberá construir un cohete de bicarbonato de sodio, como se puede apreciar accediendo al siguiente código:

Los elementos importantes para su construcción son: bicarbonato, vinagre, corcho, cinta adhesiva, una botella de plástico y cartulina. Siga las instrucciones y filme un video del suceso mencionado. No

olvide generar de fondo una escala de medidas que permita acertar con valores más precisos y que el video sea fijo, sin movimientos.

Con ayuda del software Tracker construya la tabla de posición vs. tiempo.

a) ¿Qué puede inferir de los datos?

b) ¿Qué puede decir del comportamiento de la distancia a medida que avanza el tiempo?, ¿la relación es proporcional, lineal, cuadrática, cúbica? Justifique su respuesta.

c) Lleve los datos a la hoja de cálculo de *Geogebra* y realice el ajuste lineal, relacione la función con el ítem anterior.

d) ¿Qué puede concluir?

e) ¿Cuál es la distancia máxima de vuelo? ¿De qué depende la altura de vuelo?

f) ¿Cuál es la distancia máxima recorrida? ¿De qué depende la distancia máxima recorrida?

Repita el experimento para tres medidas diferentes de bicarbonato, tres medidas de vinagre y tres modelos diferentes de cohete. Realice el mismo análisis y concluya de qué depende la máxima altura de vuelo y la máxima distancia recorrida.

¿Por qué el cohete no se eleva de manera indefinida? Demuestre matemáticamente con el ajuste lineal hecho cómo se puede argumentar esta afirmación. Prueba con los tres intentos del punto F e infiere una conclusión.

Bitácora 4

Esta Bitácora pone un énfasis especial en los procesos de modelación matemática y su interpretación tanto en contextos tradicionales de lápiz y papel como en entornos digitales. Los estudiantes aprenderán a construir modelos matemáticos que representen situaciones del mundo real, permitiéndoles analizar y resolver problemas prácticos de manera efectiva.

Las competencias que se busca desarrollar en esta bitácora incluyen el uso de relaciones de escala, proporcionalidad y la identificación de variables en contextos cercanos a los estudiantes, tales como la lectura y el tratamiento de mapas, así como la observación de relaciones a partir de situaciones cotidianas. Estas habilidades son esenciales para formular, interpretar y aplicar matemáticas en diversos escenarios, tanto en la vida diaria como en futuros estudios en áreas como la ingeniería y las ciencias económicas.

Al finalizar esta bitácora, los estudiantes deben ser capaces de describir, explicar, comunicar y plantear problemas de manera efectiva utilizando gráficas, tablas y otros formatos para presentar información cuantitativa. Asimismo, deben ser capaces de comprender y transformar información cuantitativa presentada en diferentes formatos, como tablas y gráficos.

El contenido de esta bitácora incluye instrucciones para que los estudiantes investiguen conceptos importantes relacionados con la lectura de mapas y la interpretación de escalas, como la identificación de distancias reales a partir de representaciones gráficas y la comprensión de proporciones. También brinda enlaces a recursos didácticos para una mejor comprensión de los elementos enunciados. A través de ejemplos prácticos, los estudiantes aprenderán a aplicar los conceptos mencionados utilizando matemáticas, fomentando así su familiarización con el análisis de datos y la toma de decisiones.

Esta bitácora busca que el estudiante se sienta cómodo utilizando herramientas matemáticas para resolver problemas reales y comunicar sus hallazgos de forma efectiva. Por lo tanto, debe verse no solo como una herramienta educativa, sino como una preparación integral para los desafíos del mundo real.

A continuación, se detalla la estructura de la Bitácora 4, cuyo eje temático se centra en gráficos y tablas de datos aplicados a problemas de las ciencias económicas. El método de elaboración es colaborativo y se utilizan herramientas tecnológicas, incluyendo el software *GeoGebra*. Leer cuidadosa y detalladamente la bitácora para responder. Justificar todas las respuestas de manera clara y ordenada.

Los estudiantes serán capaces de usar patrones y relaciones para construir contextos matemáticos y reales que permitan analizar relaciones cuantitativas y resolver problemas en ingeniería y ciencias económicas. Además, aplicarán elementos y procedimientos del álgebra y la geometría en contextos reales, abordando problemas específicos de estas áreas. También emplearán diversas estrategias analíticas, cuantitativas, numéricas y tecnológicas relacionadas con funciones de una variable real para comprender fenómenos de variación y acumulación, contribuyendo así a la resolución de problemas en ingeniería, ciencias económicas y administrativas.

En este apartado el estudiante debe leer cuidadosamente la sección de motivación y, a partir de allí, responder de manera clara y ordenada a las preguntas planteadas. Se espera que el estudiante no solo lea, sino que reflexione e investigue los conceptos presentados.

En el siguiente código QR se muestra la gráfica de la cuenca hidrográfica del río Tuluá:

a) Ingrese al enlace, agrande la imagen mediante la casilla y con una regla encuentre (de un punto rojo a otro):

b) Una escala a partir de las medidas con la regla. Justifique la escogencia de esta.

c) Con la regla obtenga una medida aproximada para los inicios de los ríos secundarios de:

- Sevilla-Tuluá
- Andalucía-Bugalagrande
- Riofrío-Bugalagrande

Nota importante: en caso de que un municipio tenga dos ríos secundarios, haga las dos medidas.

- ¿La escala sugerida es la del mapa? Si es así, explíquelo. Relacione la escala sugerida en la parte inferior del mapa y encuentre las distancias aproximadas a partir de la medición.
- Justifique su respuesta: si el área de la cuenca aproximada es de 30 , ¿cómo se puede relacionar el área real?

Ahora, use Google Maps para comparar las distancias con la escala y la relación de la escala real:

Código de ingreso a Google Maps

Sevilla-Tuluá.

Andalucía-Bugalagrande.

Riofrío-Bugalagrande.

- ¿Qué puede referenciarse al hacerse el mismo ejercicio con el mapa anterior y las medidas de las escalas y la real?
- ¿Qué conclusiones pueden hacer al comparar con las distancias reales?, ¿es objetivo usar las escalas? Justifique sus respuestas

Un mapa similar al de la figura 1 relaciona una fotocopia reducida de un mapa en el que hay que estimar la extensión de una cuenca hidrográfica de un río. No se ha proporcionado el factor de reducción empleado al fotocopiar el original. En la fotocopia obtenida existe un pequeño escrito que relaciona que esta se trataba de un mapa a escala 1:10000. Parte de la gráfica a escala ha sido fotocopiada también. Si se mide con una regla el segmento de la escala gráfica que marca 50 km reales obtenemos 24.7 cm.

¿A qué escala se ha reducido el original?

- ¿Cuál ha sido el factor de reducción lineal empleado al fotocopiar el original?
- ¿En qué porcentaje se redujo la fotocopia de la cuenca del río respecto al mapa original fotocopiado?
- Se utilizó un planímetro y la cuenca de un río en la fotocopia reducida ocupa una superficie de 52.3 cm^2: ¿Cuál es la extensión real de la cuenca?
- ¿Qué valor de superficie se obtendría con el planímetro en el mapa original 1:100000? ¿Y la extensión real en este caso?
- Se sabe que la longitud del río es de 62 km, ¿qué valores obtendremos con un curvímetro al medir la longitud del cauce original y en la fotocopia?

El mapa debe ayudar a resolver la siguiente situación: Se quiere medir la anchura de uno de los ríos, para lo cual desde una orilla se dirige la visual a un poste que se encuentra en la otra orilla obteniendo un ángulo de 53°. Al alejarse de la orilla perpendicularmente un total de 2 cm y mirar de nuevo el poste, el ángulo ahora es de 32 ° ¿Cuánto mide

el río de ancho en la escala del mapa (usando Google Maps)? ¿Cuánto mide al transformar la escala?

El objetivo central de la siguiente situación es identificar las relaciones de dependencia en diferentes circunstancias para posteriormente crear un modelo matemático:

Pegue una cinta métrica de manera vertical sobre una pared, posteriormente tome un tubo cualquiera (puede ser el tubo de cartón de las toallas de papel) y ubíquese enfrente de la cinta métrica. Observe la cinta métrica por medio del tubo a medida que se aleja de ella (véase figura 2).

- ¿Qué magnitudes permanecen constantes y cuales son variables?
- ¿Existe alguna relación de dependencia entre las variables mencionadas en el literal a? Si es así, ¿cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente?

Interacción: como lo pudo observar en el ítem 1, existe una relación de dependencia entre dos variables relacionadas, el problema ahora es el de encontrar una ley matemática que describa la variación en el tamaño observado de la cinta métrica con la distancia desde el observador hasta la pared. Para ello es útil que tomen algunos datos y los escriban en el siguiente cuadro:

Cuadro 1

Distancia vs medida.

Distancia a la pared (cm)	Medida de la imagen observada (cm)

Fuente: elaborado por los autores (2021).

Matemátización: en esta etapa deben encontrar la descripción matemática de la situación. Para ello, definan como la variable *x* a la distancia de observación y la variable *y* como el tamaño observado del objeto (la cinta métrica), por analogía con los ejes de coordenadas. Usen *Geogebra* para graficar los puntos que obtuvieron en la tabla del ítem 2. (Recuerden que un punto en *Geogebra* lo escriben como pareja ordenada (X, Y). Por ejemplo, en la bandeja de entrada se debe escribir (4,2) para representar el punto cuya abscisa es 4 y cuya ordenada es 2).

Como se observa en los ítems 3 y 4, se obtuvo un conjunto discreto de puntos. Ahora es necesario encontrar una descripción en forma continua para esta representación discreta. La observación gráfica anterior les sugiere que el comportamiento de los datos sigue una línea como una aproximación al problema. De acuerdo a lo anterior, a continuación, completarán el siguiente cuadro de datos con el fin de analizar las tasas de variación de las variables del comportamiento tabular.

Cuadro 2.

x	y	$\Delta x = x_f - x_i$	$\Delta y = y_f - y_i$

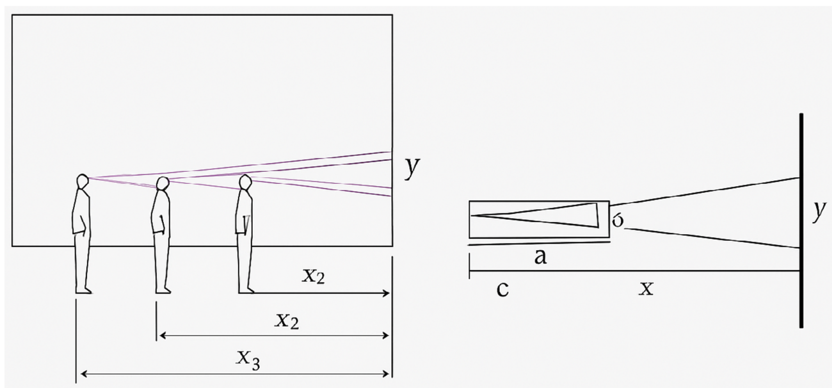
Fuente: elaborado por los autores (2021).

En este punto y con la intención de matematizar la situación mediante la formulación que se acerca al modelo físico, tendrán que usar la geometría para hallar dicha relación de manera simbólica.

Consideración la siguiente relación de la figura ilustrativa:

Figura 6

Representación de distancias y triángulos semejantes



Fuente: realizado por autores. (2021).

Ahora bien, haga el análisis pertinente, donde:

- *x* es la distancia del estudiante desde la pared, medida desde la punta de los pies.
- *y* es la medida de la imagen vista por el alumno.
- *a* es la medida de la longitud del tubo.
- *b* es el diámetro del tubo.
- *c* es la medida de lo que falta en el tubo, que se encuentra antes de los dedos de los pies.

De acuerdo a lo anterior, use semejanza de triángulos para expresar *y* en función de *x* (recuerde que según los datos le deberá dar una función que dependa de x, pero que también depende de a, b y c que son datos conocidos).

Validación del modelo: Use *Geogebra* para graficar en un solo plano cartesiano los datos descritos en el cuadro 1, junto con la función que obtuvo en el ítem 5.

De acuerdo al modelo encontrado por usted en el ítem 5, responda las siguientes preguntas: ¿Cuál cree que es la utilidad de hallar el modelo de esta situación? ¿Qué preguntas le haría usted al modelo? ¿Cómo las respondería?

Bitácora 5

La Bitácora 5, tiene su aplicación en los conceptos de áreas, volúmenes y proporcionalidad que serán utilizados en problemas propios de las ciencias administrativas. En el transcurso de esta bitácora los estudiantes aplicarán los conceptos antes mencionados con el propósito de plantear, optimizar y tomar decisiones.

Los estudiantes a lo largo de esta bitácora revisarán problemas prácticos como el cálculo del volumen de concreto para una construcción, la fabricación de helados con formas específicas y planeación de materiales para diferentes edificaciones. Además se abordará el problema financiero, como la inversión de casetones de construcción. Al terminar estas actividades el estudiante estará en la capacidad de calcular volúmenes de diversas figuras geométricas, cantidad de materiales y costo asociado al problema planteado.

La Bitácora 5 está diseñada para estudiantes de matemáticas fundamentales, y tiene como objetivo desarrollar competencias en la formulación y resolución de problemas mediante el uso de principios de geometría, álgebra y matemáticas aplicadas.

Los resultados de aprendizaje son:

- Analizar y aplicar conceptos de matemáticas y geometría en problemas relacionados a las ciencias económico-administrativas, calculando áreas y volúmenes de figuras geométricas aplicando estos conceptos a contextos prácticos como la construcción y cálculo de materiales.

Los estudiantes deben leer cuidadosamente la sección de motivación.

Los estudiantes deben investigar los conceptos necesarios para comprender los temas planteados.

Presente a los estudiantes los problemas expuestos en esta bitácora que están relacionados con áreas y volúmenes.

Facilite la discusión para que los estudiantes puedan exponer y argumentar sus respuestas.

El origen de la geometría se remonta al mismo origen de las matemáticas, y el origen de estas últimas a las del mismo ser humano, pues este desde sus inicios ha tratado de interpretar los patrones que rigen la naturaleza. Los conceptos de espacio y cantidad son innatos tanto en los humanos como en algunos animales, de tal manera que poseemos las habilidades para contar, diferenciar y comparar formas o tamaños de lo que observamos (Salazar 2016).

Peña (2000), al respecto, hace la siguiente apreciación: la geometría no era una disciplina especial, sino que era tratada de la misma forma que cualquier otra forma de relación numérica entre objetos de uso práctico.

Entre los resultados geométricos conocidos en Mesopotamia, se encuentran métodos para calcular el área de un círculo con muy buenas aproximaciones del número π[5]. Los babilonios podían además calcular el área de un triángulo y de un trapecio. Los volúmenes de prismas rectos y cilindros los calculaban multiplicando el área de la base por la altura. Tenían fórmulas para determinar el volumen de un tronco de cono y pirámides cuadrangulares truncadas.

5 Número pi. Es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

Para recordar el tema de áreas y volúmenes se puede desarrollar la siguiente actividad:

A continuación, responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el volumen de un ortoedro?
- ¿Cuál es el área total del ortoedro? ¿Por qué crees que se le llama área total?
- ¿Cuándo cambias el largo, cómo cambias las figuras presentadas en la actividad?, ¿puedes hacer la misma conjetura si cambia el ancho?

Ingresando al siguiente QR podrás encontrar diferentes fórmulas de áreas, perímetros y volúmenes que te ayudaran a realizar las siguientes actividades:

Con la ayuda de tu profesor realiza la siguiente actividad y prueba qué tanto sabes y qué tan rápido eres:

Después, comparte en clase los diferentes tipos de procesos que te llevaron a culminar la actividad de una manera satisfactoria.

Sarah Balbuena está rellenando de concreto una entrada de vehículos en su casa. La sección a rellenar es rectangular, mide 12 pies por 40 pies y es de 4 pulgadas de profundidad. ¿Cuántas yardas cúbicas de concreto se necesitan?

Para resolverlo, ¿qué datos necesitamos?

a) ¿Cuál es el volumen?

b) ¿Cuáles son las medidas suministradas?

c) ¿Cuál sería la respuesta?

En un helado con forma de cono, 1/3 del contenido sobresale del cucurucho. Si el radio de la base es tres centímetros y la altura es diez centímetros, ¿cuántos helados se podrán hacer con 20 litros de leche?

Una aplicación muy importante del cálculo de volúmenes y áreas es en la ingeniería civil, ya que calculando el área o el volumen de cierta edificación se puede saber qué tanto material podemos utilizar para realizar la construcción, para que no haya desperdicio. Una situación que evidencia esto es la que se muestra a continuación:

La empresa *Artie arquiet* está encargada de construir una edificación que tiene encofrado recuperable de cubetas RECUB, hecho con casetones recuperables para mitigar el impacto ambiental negativo al sustituir los tradicionales casetones de guadua (véase figura 2).

Por lo tanto, el arquitecto debe hacer tomar medidas y calcular cuánto se va ir en material y cuánto costará dicho proyecto, para esto se hace las siguientes preguntas:

Al hacer una maqueta de la estructura, nos da la figura 3, ¿cuántos casetones recuperables necesita?

¿Por qué es importante utilizar casetones recuperables y no los acostumbrados de guadua?

¿Enuncie una manera de calcular la totalidad de casetones de la figura 3 sin necesidad de contarlos uno por uno? Si cada casetón cuesta 8570 pesos, ¿cuánto gastaría en la compra de estos casetones? Para analizar las diferentes opciones tenga en cuenta las dimensiones del casetón. Podría ayudarle al arquitecto completando el siguiente cuadro:

Cuadro 3

Precios de casetones.

Medidas del casetón (a*b*c) respectivamente en cm	Volumen cm^3	Costo en dólares	Numero de usos
55,55, 25		16.64	15
40,40,20		9.44	20
40,40, 15		8.51	10

Fuente: realizado por autores con datos suministrados de Revista Construcción. Año 2021.

Si la superficie en la que están los casetones es de 600 m^2, ¿cuántos casetones de cada tipo necesitaría el arquitecto?

Completa el siguiente cuadro:

Cuadro 4

Precios de casetones

Medidas del casetón (a*b*c) respectivamente en cm	Volumen cm^3	Costo en dólares por cada casetón	Casetones para el plano	Costo total en pesos
55,55, 25		31.64		
40,40,20		19.44		
40,40, 15		18.51		

Fuente: realizado por los autores a partir de datos arrojados por la Revista Construcción (CAMICON, 2015, Villacís Martínez, J. S. año: 2018).

Si el precio en dólares del casetón sube un 7%, como cambiaría el costo total en pesos, cuál casetón utilizarías para la construcción

Con la información que te brinda la tabla 2, ¿cómo interpretamos los resultados dados?

Para que el arquitecto pueda tener una idea de lo que costará construir la estructura de casetones le dice a su asistente que complete la siguiente tabla de costos. Ayúdale al arquitecto a completar la tabla:

Cuadro 5

Análisis del costo unitario del proceso de colocación y retiro de casetones

Rubro:	Colocación y retiro de casetones		Unidad		*m^2*
Maquinaria					
Descripción	Cantidad A	Tarifa B en COP	Costo Hora C=A*B	Rendimiento	Costo D=C*R
Concretera.	0,130	3230,77		5%	
Herramienta menor	2,000	143462,46		4%	
Subtotal					
Mano de obra					
Descripción (CATEG.)	Cantidad A	Jornal/ hr B COP	Costo Hora C=A*B	Rendimiento	Costo D=C*R
Oficial 1ª encofrador.	0,736	14416,10		0,0139	
Ayudante encofrador.	0,756	10745,60		0,0139	
Oficial 1ª armador de concreto.	0,308	14416,10		0,0139	
Peón de obra blanca.	0,246	9932,90		0,0139	
Ayudante armador de concreto.	0,336	10745,60		0,0139	

Ayudante cementador de concreto armado.	0,229	10745,60		0,0139
Subtotal				
Materiales				
Descripción	Unidad	Cantidad A	Precio unitario B COP	Costo C=A*B
Separador homologado para columnas	Ud	0,500	106,83	
Cemento gris en sacos	kg	77,898	421,19	
Tablero de madera tratada, de 30 mm de espesor	m^2	0,008	96246,20	
Casetón Modular (55x55x25)	U	0,035	117505,00	
Subtotal:				
	Total de costos directos			
	Indirectos y utilidad 10%			
	Otros costos indirectos 3%			
	Costo total			
	Valor total			

Fuente: Villacís Martínez, J. S. Año 2018

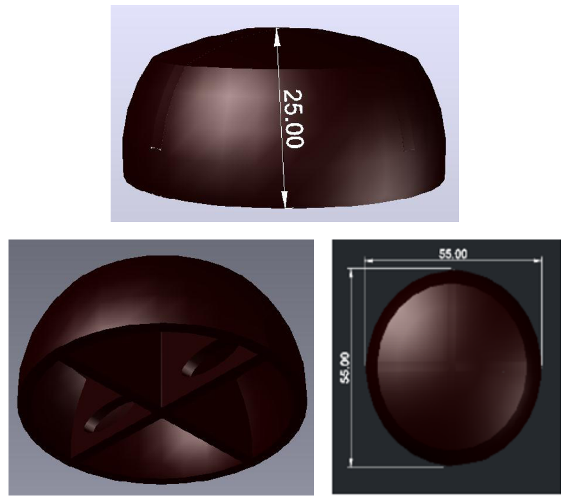
Si el arquitecto consigue que le hagan una rebaja del 5% en cada rubro de materiales de la lista, ¿cuánto cambiaría el costo total?

¿Si tienes un determinado presupuesto para los encofrados, cuál -o cuáles- elementos de la tabla cambiarías para cumplir con el presupuesto?

En medio de la investigación que se ha hecho sobre los casetones, el arquitecto encontró que la utilización de casetones de caucho reciclado presenta varias ventajas económicas: desde un mayor número de usos, por sus cualidades mecánicas y técnicas, además una mejora de rendimientos de la mano de obra por su facilidad y agilidad de colocación y retiro. Estos casetones pueden variar de forma, entre ellos hay casetones semiesféricos que presentan un diámetro de 55 centímetros y una altura de 25 centímetros, como se presenta:

Figura 7

Diseño computacional de casetón modular semiesférico.



Fuente: Elaborado por Juan Sebastián Villacís M. Año:2018

Según lo anterior, ¿cuál sería el volumen de este casetón esférico?

De acuerdo con Villacís Martínez, J. S. (2018), el uso de este método constructivo con casetones modulares de caucho reciclado presenta una mejora económica de 41 centavos de dólar por de construcción, esto equivale porcentualmente a que el método propuesto es 11% más económico que el método tradicional. Ahora la variación de forma de los casetones crea un volumen mayor de hormigón que se necesitará para fundir la losa diseñada, en este caso se desarrollará el cálculo de la variación de volumen de hormigón para el método propuesto:

Variación de volumen de Hormigón

$$\text{Variación} = \text{Volumen Casetón rectangular} - \text{Volumen casetón semi esfera}$$

el volumen del casetón semiesférico (V_s) $= \text{Volúmen zona esférica} + \text{casquete esferico}$ ($V_z + C_e$), donde

$$V_z = \frac{\pi h}{6}\left(3r_i^2 + 3r_s^2 + h^2\right)$$

$$C_e = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2)$$

r_i = *radio inferior*, r_s = *radio superior*

El arquitecto tiene las siguientes medidas:

Zona esférica

Altura	0,2m
Radio inferior	0,55m
Radios superiores	0,50m

Casquete esférico

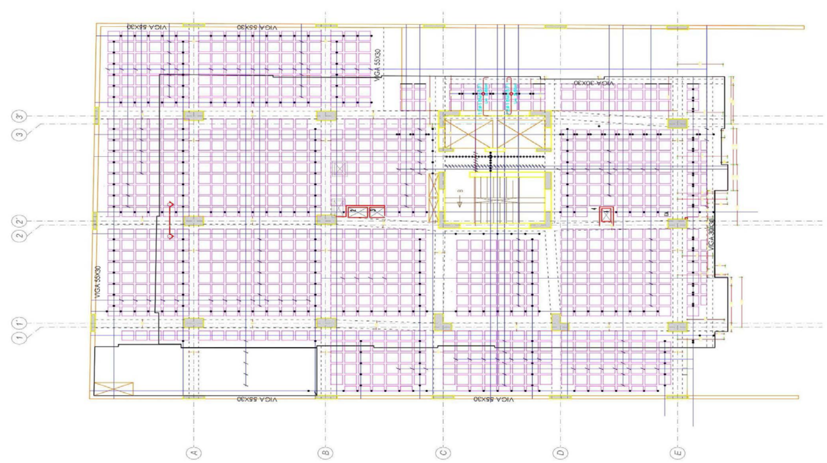
Altura	0,05
Radio	0,5

- ¿Cuál sería el volumen de la zona esférica y el casquete esférico?
- ¿Cuál es el volumen del casetón semiesférico?
- ¿Cuál sería la variación del volumen del hormigón, para cada uno de los casetones rectangulares que están consignados en el cuadro 4?

En vista de que con los casetones semiesféricos puede ahorrarse una cierta cantidad de dinero, el arquitecto volvió a realizar el plano considerando el uso de estos casetones:

Figura 8

Diseño computacional de casetón modular semiesférico.



Fuente: *realizado por Juan Sebastián Villacís M. Año 2018.*

De acuerdo a lo que analizas en este diseño, contesta:

- ¿Cuántos casetones rectangulares y semiesféricos necesita el arquitecto?
- ¿Cuál crees tú que serían las ventajas y desventajas de construir estos casetones reciclados?

Nota: con los ejemplos que se dan sobre “el arquitecto”, en ningún momento se pretende implementar de manera inadecuada los conceptos utilizados por un arquitecto o un ingeniero civil. Nuestro propósito es educativo para poner en contexto escenarios analíticos frente al aprendizaje y enseñanza de la educación matemática.

Bitácora 6

Esta Bitácora está diseñada para introducir a los estudiantes en el mundo de la modelación matemática destacando su relevancia tanto en escenarios tradicionales de aprendizaje como en entornos digitales. Se espera que a lo largo de esta bitácora los estudiantes desarrollen la habilidad de construir modelos matemáticos que representen situaciones reales, permitiéndoles abordar y resolver problemas prácticos con eficacia.

El enfoque principal del apartado es el uso de relaciones para modelar con funciones lineales, cuadráticas y polinómicas en contextos cercanos a los estudiantes, como la economía, el crecimiento poblacional, fenómenos de temperatura y la exploración tecnológica. Mediante esta aproximación, los estudiantes adquirirán competencias cruciales para interpretar y aplicar conceptos matemáticos en diversas situaciones de la vida cotidiana, así como en sus futuros estudios y carreras, especialmente en campos como la ingeniería y las ciencias económicas.

El propósito es que, al concluir esta bitácora, los estudiantes puedan describir, explicar y comunicar de manera efectiva problemas utilizando gráficas, tablas y otros formatos para presentar información cuantitativa. Además, este apartado se propone desarrollar destrezas de comprensión para la transformación de datos cuantitativos presentados en diferentes formatos, lo que podrá fortalecer su capacidad analítica y de resolución de problemas.

El contenido de esta bitácora abarca la investigación de conceptos fundamentales relacionados con la modelación matemática en contextos económicos, demográficos y tecnológicos. Se proporcionan instrucciones claras y ejemplos prácticos para guiar a los estudiantes en su aprendizaje, junto con recursos didácticos adicionales para una comprensión más profunda de los conceptos.

Por último, esta bitácora pretende promover una experiencia de aprendizaje de aprendizaje lúdica para que los estudiantes se sientan capacitados frente a la utilización de herramientas matemáticas para abordar problemas reales y comunicar sus soluciones de manera efectiva.

El método de elaboración es colaborativo y se utilizan herramientas tecnológicas, incluyendo el software *GeoGebra*, para enriquecer la experiencia de aprendizaje de los estudiantes.

Se espera que los estudiantes adquieran la capacidad de utilizar patrones y relaciones para construir contextos matemáticos y reales, lo que les permitirá analizar relaciones cuantitativas y resolver problemas tanto en ingeniería como en ciencias económicas. Asimismo, aplicarán elementos y procedimientos del álgebra y la geometría en situaciones concretas relacionadas con estas disciplinas. Además, se espera que desarrollen habilidades en diferentes estrategias analíticas, cuantitativas, numéricas y tecnológicas relacionadas con funciones de una variable real, lo que les permitirá comprender fenómenos de variación y acumulación que contribuyen a la resolución de problemas en ingeniería y ciencias económicas. Por último, podrán resolver situaciones específicas en el ámbito de las ciencias económicas y administrativas utilizando representaciones de familia de funciones para determinar puntos de equilibrio y tendencias, entre otros aspectos relevantes.

Para empezar, los estudiantes deben leer cuidadosamente y prestar especial atención para identificar las relaciones explícitas e implícitas presentes en los distintos fenómenos a matematizar. Después, deben responder de manera clara y ordenada, justificando siempre su respuesta.

Análisis: de acuerdo con la consultora Gartner, durante el segundo trimestre de 2019 se vendieron, a nivel mundial, alrededor de 368 millones de celulares, y aunque parece mucho, la cifra representa una caída de 1.7% con respecto al mismo periodo del año pasado. Parece que los precios más altos de los celulares de gama alta y características menos atractivas contribuyen a ventas cada vez menores. Según los datos, Samsung se mantiene como el líder del mercado al vender 75.1 millones de teléfonos (lo que señala un crecimiento de 3.8% con respecto al segundo trimestre de 2018). Huawei continúa en la segunda posición, con 58.1 millones de unidades (representando así un crecimiento de 16.5%), pese al veto comercial por parte de Estados Unidos. Frente a esto, la firma de China dijo el año pasado que posiblemente se pondría en el primer lugar durante el último trimestre de 2019. Como era de esperarse, Apple ocupa la tercera posición, con 38.5 millones de smartphones vendidos (una caída de 13.8%). Sin embargo, Xiaomi (33.2 millones) y Oppo (28.1 millones) lo están alcanzando.

En lo que se refiere a China, con 101 millones de unidades vendidas, y Brasil, con 10.8 millones de unidades vendidas. Estos dos países son los únicos en el top cinco con crecimiento porcentual en ventas.

De acuerdo a lo planteado, complete los siguientes cuadros teniendo en cuenta la información dada para cada una de las compañías:

Cuadro 6

Samsung

Año	Venta en millones
2018	
2019	38.5

Cuadro 7

Apple

año	Venta en millones
2018	
2019	75.1

Cuadro 8

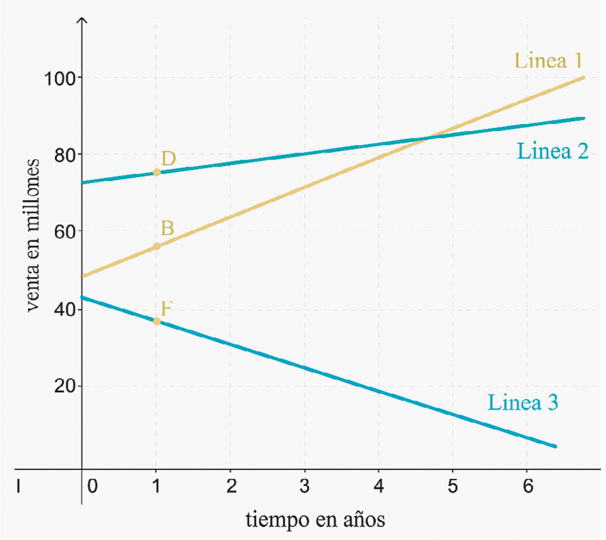
Huawei

año	Venta en millones
2018	
2019	58.1

Suponga que la venta de celulares es una función lineal del tiempo. La siguiente gráfica muestra las ventas de cada una de las compañías en función del tiempo

Figura 9

Imagen de apoyo.



Tras identificar cada una de las rectas y su función correspondiente a las ventas de cada una de las compañías, complete el siguiente cuadro, teniendo en cuenta también los datos ontenidos en los cuadros anteriores

Cuadro 9

Ejercicio venta de celulares a nivel mundial.

Gráfica	Compañía
Línea 1	
Línea 2	
Línea 3	

Fuente: elaboración propia (2021).

En el año 2018, ¿cuál de las compañías tiene el volumen más alto de ventas?

- ¿Después de cuántos años, la compañía que estaba en el primer lugar en ventas, pasa al segundo lugar?

En el año 2024, ¿cuál será la compañía con el mayor número de ventas?

Problema número uno

Discusión de los resultados del propuesto como motivación utilizando *Smart Learning Suite.* Para eso se creará un cuestionario que los estudiantes resolverán de manera simultánea durante la clase, teniendo como base las respuestas previamente obtenidas en este problema.

Problema número dos

Según datos suministrados por el DANE, al finalizar el año 2014 la población colombiana era de 47'661.790. Se estima que el promedio de crecimiento sea del 1% aproximadamente.

Complete el siguiente cuadro indicando el número aproximado de habitantes en Colombia al finalizar cada año, teniendo en cuenta la estimación del dane (crecimiento de 1% cada año), aproxime al entero más cercano:

Cuadro 10

Ejercicio de población de Colombia

año	Población
2014	47.661.790
2015	
2016	
2017	
2018	
2019	
2020	

Fuente: elaboración propia (2021).

Si se sigue esta tendencia, ¿cuál será la población en el año 2025?

Encuentre una expresión matemática que relacione el año. Sugerencia utiliza Geogebra para obtener la función de regresión. (si no recuerdas como hacer el ajuste de los datos, observa el video:

- ¿Cuál es el dominio y el rango de la función obtenida en (c)?
- ¿Cuál será la población en el año 2030 y en el año 2050?
- ¿Cuál será la población aproximada en junio de 2021? Justifica tu respuesta.

Problema número 3

Funciones polinómicas: ingrese al siguiente cuadro de Geogebra:

Verá que allí se muestra la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Mueva libremente cada uno de los deslizadores, *a, b, c* y *d* y observe cómo cambia la gráfica de la función obtenida. Consideremos diferentes casos de acuerdo a los valores dados a las constantes *a, b, c* y *d*.

Caso 1: $a = 0, b = 0 \text{y} c \neq 0.$

Mantenga fijos los valores de *a* y *b* $(a = 0, b = 0)$

Analice:

- ¿Qué tipo de gráfica se obtiene? ¿Cómo se llama esta función?
- Al mover el deslizador , encuentre la relación entre el valor de y las coordenadas del punto . ¿Qué características tiene el punto ¿Qué se puede concluir?

Manteniendo fijo el valor *d*, cambia los valores de *c*, ¿qué observas en la gráfica?

- ¿Cuál de los valores (*c* ó *d*) representa la pendiente o inclinación de la recta?

- ¿Cuál de los valores (*c* ó *d*) representa el intersecto de la recta con el eje ?
- Moviendo los deslizadores *c* y *d*, Identifique el corte o los cortes de la gráfica con el eje *x*, ¿en algún caso se obtienen dos cortes? ¿Cuántos cortes se pueden obtener?

Caso 2: $a = 0 \quad \text{y} \quad b \neq 0.$

- Si $a = 0 \quad \text{y} \quad b \neq 0$, ¿Qué tipo de gráfica se obtiene? ¿Cómo se llama esta función?
- Manteniendo fijos los valores de *c* y *d,* ¿Que cambios observas en la gráfica de la función cuando cambia de valores positivos a negativos? Sugerencia: Observa cuidadosamente la diferencia en las gráficas cuando *b = 0.1* y *b = -0.1*
- Manteniendo fijos los valores de *b* y *c,* al mover el deslizador . Encuentre la relación entre el valor de *d* y las coordenadas del punto *A*. ¿Qué se puede concluir?
- Moviendo sólo uno de los deslizadores, ¿cuántos ceros o raíces puede tener la función dada?

Caso 3: $a \neq 0$

- Manteniendo fijos los valores de *b* y *c* al mover el deslizador *d*. Encuentre la relación entre el valor de *d* y las coordenadas del punto *A*. ¿Qué se puede concluir?
- Moviendo sólo uno de los deslizadores, ¿cuántos ceros o raíces puede tener la función dada?

Para concluir: analice la siguiente función:

$$f(x) \quad = \quad ax^3 + bx^2 + cx + d$$

- ¿Qué representa la constante ?
- ¿Se puede generalizar a una función polinómica de grado n, es decir, para la función?

$$f(x) \quad = \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0?$$

- ¿Qué representa la constante a_0?

Complete la siguiente tabla teniendo en cuenta el número de ceros o raíces de la función obtenidos en cada caso:

Cuadro 11

Ejercicio funciones polinómicas.

Función	Número mínimo de Ceros	Número máximo de Ceros
Lineal		
Cuadrática		
Cúbica		

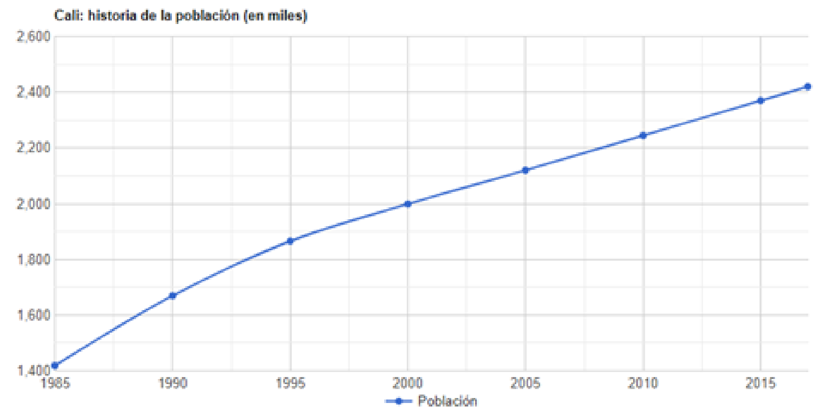
Fuente: elaboración propia (2021).

En general, una función polinómica de grado , ¿cuántos ceros puede tener?

Problema número cuatro

Figura 10

Crecimiento de la población de Cali a partir del año 1985.



Fuente: elaborado por autores. Año 2021.

Para el siguiente problema, el punto de partida está en la tabla número 10, presente en el apartado de anexos. Allí se dan las cifras del cambio anual de la población. A partir de lo visto en la tabla, responda:

- ¿La relación año versus número de habitantes representa una relación funcional? Explique:
- ¿Cuáles serían las variables independiente y dependiente?

Explique:

- Si la población en el año 2017 era de 2.420.100 y sigue un crecimiento de 1.06% por año, ¿cuál sería la población proyectada para el año 2020? ¿Coincide este resultado con la población actual?

- Se puede afirmar que entre el año 2000 y el año 2015, ¿el crecimiento es lineal?

Problema número cinco

La tabla número 11 (véase apartado de anexos) muestra el consumo de gasolina en litros de un vehículo que recorre la ciudad de Bogotá en las horas pico. Luego de analizarla, conteste las siguientes preguntas:

¿La relación entre Recorrido y Consumo, es una relación funcional?

- ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 20 Km en hora pico? Justifica tu respuesta.
- Realice un gráfico con la información suministrada en la tabla 11.
- ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer kilómetros en hora pico? Justifica tu respuesta.

Problema número 6

Realice el siguiente experimento en su casa y escriba en su cuaderno los datos obtenidos para contestar las preguntas en grupos de 3 estudiantes:

- Ponga dos tazas de agua a temperatura ambiente en un recipiente. Luego, utilice un termómetro para medir la temperatura del agua (tiempo cero). Con precaución, caliente el agua con flama baja y registre en una tabla la temperatura que alcanza en los dos minutos, en los cuatro minutos, en los ocho minutos, en los diez minutos y en los quince minutos.

Con los datos obtenidos responda con su grupo las siguientes preguntas:

- ¿La relación entre la temperatura y el tiempo de calentamiento corresponde a una función?
- Si es función, identifique, en el contexto la variable independiente y la dependiente
- ¿Cuál es el dominio y el rango en el contexto?
- ¿De qué manera podrías emplear esta información para predecir el tiempo que llevará calentar el agua hasta que hierva?
- Compare los resultados de tu equipo con los otros y de manera grupal discutirán las coincidencias o discrepancias.

Bitácora 7

Lea cuidadosamente, después responda de manera clara y ordenada justificando siempre la respuesta.

Las funciones son relaciones entre dos variables, una relación específica en donde cada resultado le corresponde una y solamente un valor de entrada. Las funciones y su representación son útiles para modelar situaciones del mundo real, ya que están presentes en diferentes fenómenos de la vida cotidiana como por ejemplo ver [1]:

- Relación entre la estatura de un niño según su edad.
- El costo de envío de un paquete por correo según su peso.
- Investiga cuántas clases de funciones se pueden identificar. Enseguida desarrolla la siguiente actividad.
- Consigue una vela o velón de aproximadamente 12 cm.
- En un lugar adecuado, donde se eviten corrientes de aire, enciende la vela o velón.
- Mide la vela o velón cada hora después de encenderla hasta que se consuma totalmente.
- Completa la siguiente tabla.

Cuadro 12

Ejercicio sobre estatura de un individuo.

Hora	Cm
0	12
1	
2	
3	
4	
5	
6	
...	
n=__	0

Sigue los siguientes pasos:

- Utiliza GeoGebra para graficar los datos obtenidos.
- ¿Qué gráfico obtuviste? ¿Cuáles características observas?
- Encuentra la ecuación que representa el gráfico obtenido.
- Si tuvieras una vela de 20 centímetros ¿cuál ecuación corresponde?
- ¿Si tuvieras una vela más grande podrías prever con la ecuación obtenida en que tiempo se quemará totalmente?

Por último, accede a los siguientes códigos:

- ¿Qué conclusión obtienes al desarrollar las actividades presentadas en la actividad?

En el siguiente apartado analizaremos diferentes aplicaciones de la representación de funciones.

Ejercicio para la clase

Cáncer en Colombia:

Según el Instituto Nacional del Cáncer, esta enfermedad podría empezar casi en cualquier lugar del cuerpo humano, que está formado por trillones de células; normalmente las células humanas crecen y se dividen para formar nuevas células a medida que el cuerpo las necesita, cuando las estas envejecen envejecen mueren y las nuevas células las reemplazan. Sin embargo, en el cáncer este proceso ordenado se descontrola a medida que las células se hacen más y más anormales, las células viejas o dañadas sobreviven cuando deberían morir y células nuevas se forman cuando no son necesarias, estas células adicionales se dividen sin interrupción y pueden formar masas que se llaman tumores, o neoplasias, y su expansión pueden destruir y sustituir a los tejidos normales.

En Colombia, estudios nacionales revelan que la tasa anual de incidencia ajustada por edad para los cánceres en el periodo 2002-2006, excepto cáncer de piel, fue de 186,6 casos por cada 100.000 habitantes en hombres y 196,9.

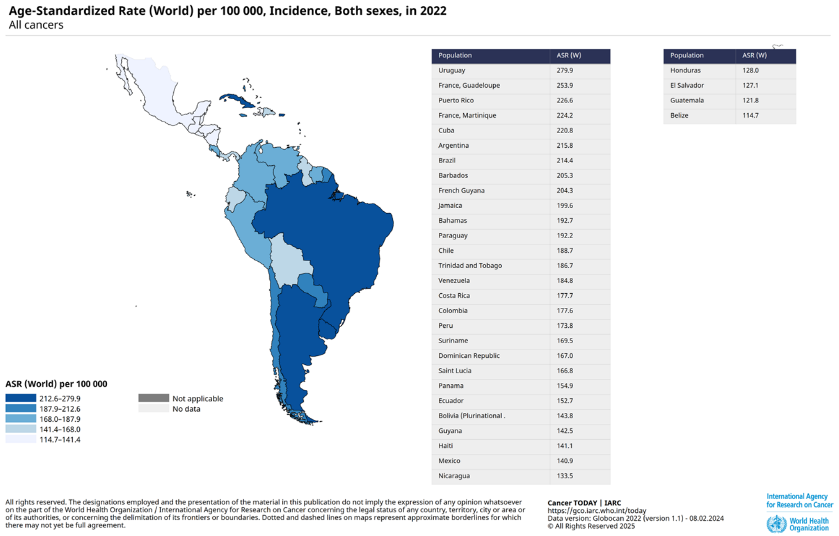
Según Globocan las estadísticas para el año 2020 son las siguientes:

- Total, de la población: 50 882 884
- Número de muertes: 54 984
- Número de nuevos casos: 113 221
- Para mayor información visitar.

A nivel de Sudamérica, se puede en el siguiente gráfico las tasas de incidencia del cáncer. Encontramos entre los países más afectados a Uruguay, Argentina y Brasil y los de menor incidencia: Honduras, El salvador y Guatemala.

Figura 11

Tasas de incidencia estimadas estandarizadas por edad (mundo) en 2020, todos los cánceres, ambos sexos, todas las edades.



Population	ASR (W)
Uruguay	279.9
France, Guadeloupe	253.9
Puerto Rico	226.6
France, Martinique	224.2
Cuba	220.8
Argentina	215.8
Brazil	214.4
Barbados	205.3
French Guyana	204.3
Jamaica	199.6
Bahamas	192.7
Paraguay	192.2
Chile	188.7
Trinidad and Tobago	186.7
Venezuela	184.8
Costa Rica	177.7
Colombia	177.6
Peru	173.8
Suriname	169.5
Dominican Republic	167.0
Saint Lucia	166.8
Panama	154.9
Ecuador	152.7
Bolivia (Plurinational .	143.8
Guyana	142.5
Haiti	141.1
Mexico	140.9
Nicaragua	133.5

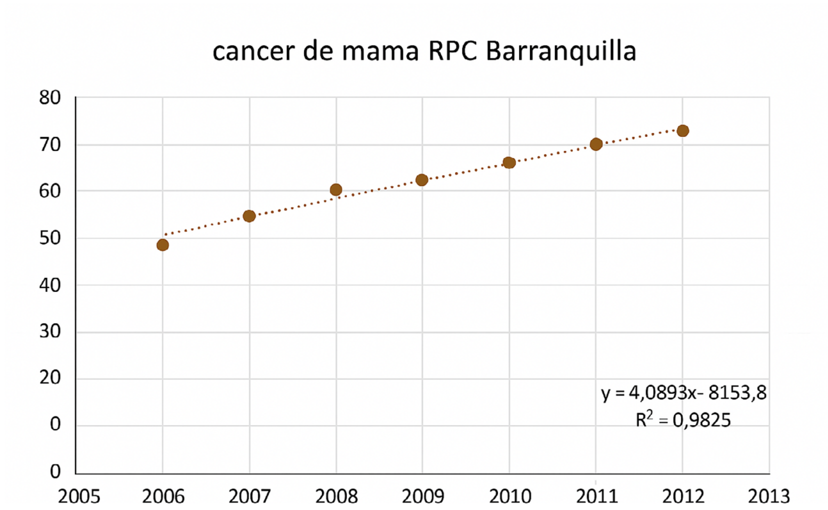
Population	ASR (W)
Honduras	128.0
El Salvador	127.1
Guatemala	121.8
Belize	114.7

Fuente: Elaborado por autores con datos suministrados a través de: https://gco.iarc.fr/today/online-analysis-map

En Colombia la mayor mortalidad es del cáncer de mama; analicemos la incidencia que hubo entre los años 2003 y 2012: en la tabla 12 (véase apartado de anexos), evalúe la tasa de incidencia estandarizada por 100.000 personas/año según población mundial estándar (Segi), en mujeres, edades [0–80+], cáncer de mama, RPC (procedimiento remoto para analizar datos) de Barranquilla, RPC de Bucaramanga, RPC de Manizales, RPC de Pasto.

Cuando graficamos la incidencia para Barranquilla y realizando un ajuste lineal, obtuvimos lo siguiente:

Figura 12



Fuente: realizado por los autores. Año: 2024

Vemos que la función $f(x) = 4.0893x - 8153.8$ es la que mejor modela los datos. Con base a lo anterior contesta las siguientes preguntas:

- ¿Qué clase de función es la que se obtuvo al ajustar los datos de la ciudad de Barranquilla?
- ¿Con esta función podríamos prever cuánto sería la incidencia del cáncer en Barranquilla para el año 2020?
- ¿Cuánto sería el porcentaje de aumento de esta incidencia entre el año 2006 y 2020?

Grafica y encuentra la ecuación que mejor ajuste los datos de las ciudades restantes.

Con lo desarrollado en el punto d, responde para las demás ciudades el punto c, y encuentra cual es la ciudad que tendrá para el 2020 el mayor y menor porcentaje de incidencia de cáncer de mama.

Cuando hablamos de los costos que tiene el cáncer por paciente nos dice que los costos van de acuerdo a sus componentes. Se puede observar que para el cáncer in situ la radioterapia representa el 51% del costo, para los demás estadios la quimioterapia se explica desde un 75,0% a un 87,6% del costo total, de acuerdo al estadio. Estos gastos se pueden ver en el siguiente cuadro:

Cuadro 13

Costos estimados por paciente para el tratamiento de cáncer de mama estadios in situ

Descripción	Suficiencia*	Soat**
IN SITU		
Diagnóstico inicial y de extensión	$ 913.711	$ 1.364.490
Tratamiento quirúrgico	$ 2.318.607	$ 4.188.710
Tratamiento de radioterapia	$ 4.748.966	$ 4.801.797
Tratamiento de hormonoterapia pre menopáusicas	$ 90.403	$ 139.205
Tratamiento de hormonoterapia postmenopáusicas	$ 20.556	$ 178.184
Seguimiento 5 años	$ 804.744	$ 1.402.245
TOTAL	$ 8.996.987	$ 12.074.630

Para el cálculo se usó la información de la base de datos de suficiencia, 2012 y la información del precio medio de los medicamentos, canal institucional, de la base SISMED.

Para el cálculo se usó las tarifas SOAT para los procedimientos y la información superior del precio de los medicamentos, canal institucional, de la base de SISMED o la información de topes de precios de medicamentos. Fuente: Ospina (2016) (ver [3]).

Con la información de la Tabla 2 haga los siguientes procedimientos:

- Realice una gráfica de los datos suministrados Descripción–suficiencia) y Descripción – Soat.
- Encuentra una función que mejor describa los datos suministrados primero Descripción -suficiencia y luego Descripción–Soat.
- ¿Qué tipo de funciones encontraste en el punto b?
- En la tabla se muestran los costos para un paciente en el año 2012, si para el año 2020 los costos de suficiencia han subido un 30% y Soat 25%, ¿cómo cambiarían las funciones encontradas en el punto b?
- ¿Cuánto es el porcentaje de diferencia entre los precios de suficiencia y Soat?
- Si en la ciudad de Bucaramanga en el 2020 hay 1295 casos, ¿cuánto le costaría a la ciudad estos enfermos de cáncer?

- Investiga cuales son las diferentes formas de prevención primaria del cáncer de mama, cáncer de próstata, cáncer de pulmón y cáncer de cuello uterino.

Siguiente ejercicio:

Según la Organización Internacional del Vino, en el mundo existen 7.5 millones de hectáreas para el cultivo de uvas, en los cuales se pueden producir 10 toneladas por hectárea. En Chile un 70% del cultivo de uvas se centra en la producción de vino. Para más información.

La producción es un proceso de transformación de factores en productos. Una función de producción es una representación matemática de la relación física que existe entre los diferentes factores de producción y/o los productos obtenidos en el proceso. Por lo tanto, una función de producción puede darse como:

$$Y = f(x_1, \ldots, x_g)$$

Donde las variables x_1 a x_g designan factores de producción y Y es la cantidad de producción obtenida. En [4] utilizando diferentes ajustes se llega que esta función puede ser descrita de la siguiente manera formal (independiente de la variedad de uva vinífera).

$$Y = \alpha_1 S + \alpha_2 S^2 \text{ (1)}$$

Donde Y= producción de uva vinífera, en toneladas. S=Superficie plantada de vid vinífera, en hectáreas y a_1, a_2 constantes reales

El costo anual de producción está dado por

$$C = \beta_1 S + \beta_2 S^2 + rS \text{ (2)}$$

Donde r= el costo de oportunidad de la tierra, expresado en miles de pesos para cualquier tamaño de la empresa, $\beta_2 < 0$ indica los costos unitarios (por hectáreas).

En [4] se realizaron ajustes encontrando que los valores de dichos parámetros son:

Cuadro 14

Parámetros de las funciones (1) y (2)

Parámetro	valor
	13.781
	-0.019
	807.999
	-0.6750
r	150.000

Con base a la información dada anteriormente resuelve el siguiente:

En la siguiente Tabla veremos la superficie de plantación por variedad

Cuadro 15

Ejercicio superficie de plantación por variedad.

	Producción de uva vinífera por hectárea			
Variedad/hectárea	0.1 a 5 ha	6 a 15 ha	16 a 35 ha	35 a 50 ha
Sauvignon				

Sirah	
Merlot	
Malbec	
Chardonay	

Utilizando la función (1) y los valores dados en la Tabla 3, completa la anterior tabla de cuánto sería el intervalo de producción de uva para cada variedad.

Cuál sería el intervalo de costo total de producción para la variedad de Chardonay y Sauvignon.

Realiza una gráfica de la función (1) y (2) y compara los resultados obtenidos en los puntos a y b.

Utiliza GeoGebra y crea un deslizador para el parámetro que cambie entre -5 y 5, y analiza qué pasa cuando se cambia este parámetro con la producción de uva vinífera, para qué valores hay un mínimo, para que valores hay un máximo.

Para la función (2) si cambias el parámetro β_2 a un valor positivo, como cambiaría la función de costo, analiza y compara resultados.

En la siguiente tabla se explica las variedades y precios en kilos (peso chileno) de las distintas variedades de vino en Chile.

Figura 13

Rango de precios por kilo en pesos.

Variedad	Calidad	Rango de precios por kilo en pesos				
		Vendimia 2013	Vendimia 2014	Vendimia 2015	Vendimia 2016	Vendimia 2017
Variedades Tintas						
Cabernet sauvignon	Baja	115 a 160	125 a 150	75 a 110	110 a 120	190
	Alta	150 a 215	160 a 195	125 a 135	130 a 135	225 a 240
Carménere	Baja	115 a 160	120 a 150	75 a110	90 a 110	170 a 190
	Alta	145 a 200	135 a 165	100 a 130	110	210 a 235
Merlot	Baja	130 a 175	145 a 180	85 a 110	110 a 120	170 a 190
	Alta	150 a 215	165 a 210	105 a 135	130 a 135	245 a 250
Syrah	Baja	110 a 175	110 a 145	75 a 110	110 a 120	170 a 210
	Alta	120 a 190	130 a 150	90 a 125	110 a 130	210 a 235
Carignan	Baja	100 a 155	110 a 140	75 a 100	85 a 90	150 a 190
	Alta	110 a 200	130 a 170	75 a 95	85 a 95	150 a 190
País	Baja	90 a 115	90 a 115	65 a 85	90	130 a 150
	Alta	100 a 135	90 a 140	70 a 95	---	170 a 195
Variedades Blancas						
Sauvignon blanc	Baja	110 a 170	160 a 180	125 a 190	135 a 150	165
	Alta	125 a 215	205 a 235	135 a 225	175 a 180	210
Chardonnay	Baja	150 a 185	170 a 270	170 a 210	150 a 160	190
	Alta	165 a 220	250 a 365	200 a 270	175	240
Semillón	Baja	105 a 160	145 a 150	100 a 110	110 a 120	150
	Alta	125 a 190	160 a 165	110 a 120	135	170
Merlot	Baja	110 a 150	110 a 130	85 a 110	90 a 95	110 a 130
	Alta	130 a 175	120 a 140	85 a 130	110 a 120	160 a 165

Fuente: Realización propia con datos arrojados por ODEPA.

En las tablas anteriores, ya encontraste cuál es la producción de uva por toneladas, ahora encuentra cuánto se ganaría si se tiene una superficie plantada de 4 ha y 10 ha, de cada variedad de alta y baja respectivamente.

Si tu fueras el productor de vino ¿cuál variedad de vino sembrarías para tener el máximo nivel de ganancia?

Según ODEPA (La Oficina de Estudios y Políticas Agrarias de Chile) una estimación del costo por hectárea del proceso productivo de la uva vinífera para la variedad Sauvignon Valparaíso esta dada en Imagen 1.

Dadas las condiciones de la ficha técnica ¿Si tuvieras 7 trabajadores, cuanto sería el costo de la mano de obra para tu plantación?

Si deseas sembrar seis hectáreas de *Sauvignon* blanco, ¿cuántos serían los costos de mano de obra por hectárea?

Encuentra una función que modele los gastos por hectárea y trata de prever cuánto se gastaría si la superficie de sembrada es de 10, 20, 50 70, hectáreas

¿Según la tabla 5 cuál es el fertilizante y fungicidas más baratos?

Para la siguiente actividad se utilizará lo siguiente:

Software Tracker: este software es libre y te permite analizar movimientos en una o dos dimensiones. El programa funciona a partir de un suceso filmado permitiendo tomar datos como posición, velocidad y aceleración. Se puede acceder en el siguiente código

Encontraras un tutorial en

Mira el video que está en el siguiente link

Una vez analizados los videos, desarrolla la siguiente actividad:

En el siguiente código está el récord mundial para el año 2020 por Yulimar Rojas:

Ahora, con ayuda del *Software Tracker* construye una tabla de posición vs tiempo, analizando primero el tobillo y después su cadera como se hizo en el video con Caterine Ibargüen.

- ¿Qué puedes inferir de los datos encontrados?

Lleva los datos de la tabla a GeoGebra, gráfica y compara los datos de Yulimar Rojas, y los de Caterine Ibargüen. ¿Qué puedes interpretar de las dos atletas?

Encuentra la función que mejor relaciona los datos encontrados de Yulimar. ¿Es lineal, polinómica, logaritmo? Justifica tu respuesta.

- ¿En qué tiempo Yulimar alcanza su máxima velocidad?
- ¿Cuál es la distancia por Yulimar antes de hacer el salto?

Ahora es tu turno. Trata de hacer saltos largos imitando los movimientos hechos por cualquiera de estas dos atletas. Graba un video cuando realices estos movimientos y utilizando el software *Tracker* analiza los movimientos tanto de tobillo y de cadera. Y contesta lo siguiente (repite el salto al menos tres veces):

- ¿Cuánto tiempo tienes para hacer el salto?
- ¿Cuánta velocidad puedes alcanzar antes de hacer el salto?
- ¿Cuánta altura máxima puedes alcanzar realizando el salto?
- ¿Cuánta distancia puedes saltar?

Lleva los datos a la tabla de datos de GeoGebra, y proyéctalo en gráficas.

Encuentra la función que mejor relaciona los datos encontrados en tus saltos.

Analiza e interpreta tus resultados.

- ¿Qué diferencias notas en los datos de tu salto con los de las atletas?

Bitácora 8

Las matemáticas no solo repercuten en el cálculo de algoritmos, la toma de decisiones es sustentada por los números y más cuando de dinero se trata. En el sector económico el reconocimiento de patrones, las diferentes estrategias analíticas y el uso de la tecnología para la predicción de fenómenos económicos es importante para la optimización.

La siguiente bitácora busca la modelización de fenómenos matemáticos a partir de datos sustentados idealizados en una experiencia. Particularmente se busca que el estudiante tenga la habilidad para identificar, formular y resolver problemas complejos de ingeniería, aplicando principios de ingeniería, ciencia y matemáticas.

La manera de alcanzar esta habilidad es determinada a partir del uso de patrones relaciones con el propósito de construir contextos matemáticos y reales que permitan analizar las relaciones cuantitativas para resolver problemas de ingeniería, Aplicar elementos y procedimientos del álgebra y la geometría en contextos reales para la resolución de problemas propios de la ingeniería y Utilizar diferentes estrategias analíticas, cuantitativas, numéricas y tecnológicas de las funciones de una variable real para la comprensión de fenómenos de variación y acumulación que contribuyen a la resolución de problemas ingenieriles.

Instrucciones

- Lee cuidadosamente la sección de motivación.
- En cada actividad se debe de responder y debes de argumentar tus respuestas.
- Debes de exponer tus resultados antes tus compañeros cuando el maestro lo indique.

Una persona que controla cierto mercado (monopolista) logra relacionar el costo de su mercancía a partir del siguiente cuadro con x dado en miles de unidades producidas y el costo en miles de dólares.

Cuadro 16

Costo de mercancía por miles de unidades.

X	C(x)
1	34,6666667
2	69,3333333
3	124
4	208,666667
5	333,333333
6	508
7	742,666667
8	1047,33333
9	1432
10	1906,66667
11	1931,33333
12	2506
13	3190,66667

A partir de la información anterior responda las siguientes preguntas:

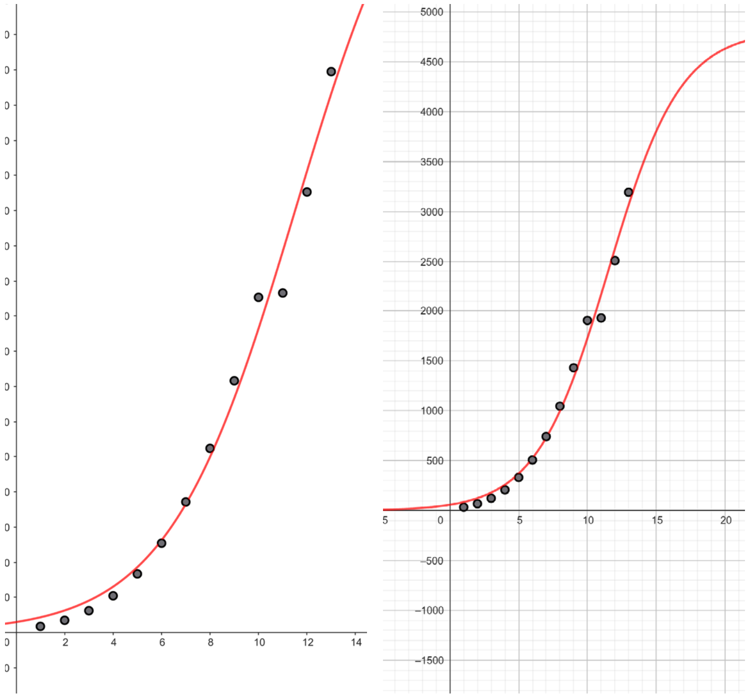
- ¿Cuál es precio por mil unidades?
- ¿Cuántos miles de unidades estimadas se producen para un presupuesto de $2506000 dólares?
- ¿Es posible inferir que los costos aumentan a medida que las unidades aumentan?
- ¿Qué significa que un mercado sea monopolista? Proporcione un ejemplo y justifique su respuesta
- ¿Es posible encontrar el costo para 14000 unidades o más? (explique su respuesta)
- ¿Cuál es ecuación que representa la relación unidades producidas- costo?

Para el punto f) en la actividad anterior ingrese al siguiente video:

A continuación, se relacionará la curva que aproxima el conjunto de puntos a través de dos imágenes una donde se hace el análisis de dispersión y otra donde se ve la panorámica general.

Figura 14

Aproximación lineal unidades (unidades de mil) versus costo (miles de dólares)



Fuente: realizado por autores. Año 2021.

El gráfico anterior permite identificar una predicción es aquí lo importante de la función, el objeto matemático que relaciona los datos. A partir de lo anterior la función que parametriza el fenómeno anterior es: $C(x) = 0.12x^3 + 20x^2 - 42.16x + 60.77$

¿Es posible para el monopolista identificar a través de la expresión anterior el costo para cualquier artículo?

Actividad 2

Una función de demanda para el artículo es dada por la expresión:

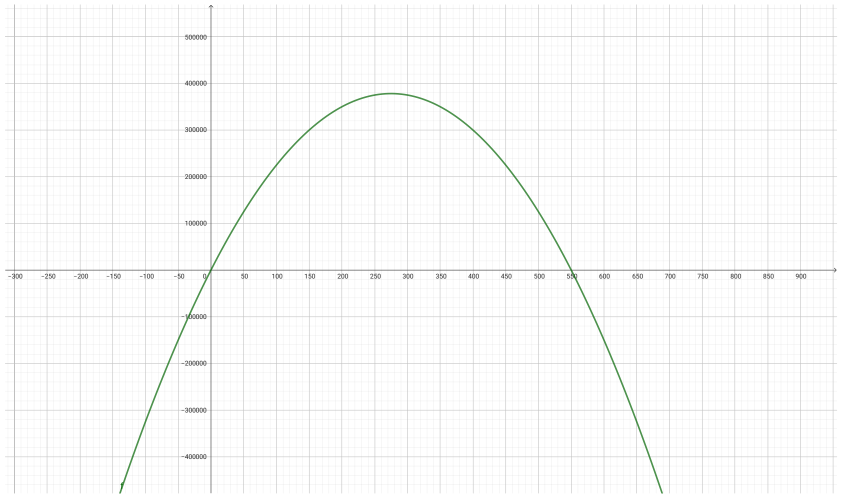
$$P = 2750 - 5x$$

A partir de lo anterior calcule el ingreso.

Sea la gráfica:

Figura 15

Unidades producidas (en miles) vs Ingresos (miles de dólares)



Fuente: realizado por autores. Año: 2021.

- ¿Es posible identificar el ingreso máximo para un valor específico de unidades? Justifique su respuesta.
- ¿Dónde el ingreso crece y dónde decrece? (que cree que justifique esto).
- Donde se encuentra el punto de equilibrio (Donde no crece ni decrece) muestre gráficamente
- Se puede relacionar el punto b) con la gráfica anterior y justifique su respuesta.
- Calcule la utilidad general y justifique su respuesta.
- ¿Cómo se puede calcular la utilidad es máxima? Utilice la gráfica y logre evidenciar el procedimiento matemático para construirla.
- ¿Es lógico relacionar el punto de equilibrio con la utilidad máxima? ¿si no es así explique qué ocurre en este caso? ¿puede entenderse una razón lógica para esto?
- ¿Qué tipo de curva corresponde al ingreso? ¿Cuál es el grado de la función antes estudiada?
- ¿Cuáles son las condiciones que deben establecerse para que la utilidad crezca?
- ¿Qué condiciones deben de considerarse con la información suministrada para que la utilidad no decrezca?

Realice el siguiente ejercicio:

El propietario de un concesionario encuentra que si se producen (s) sillones especiales de madera caoba por hora, el costo será C(s) dólares, donde:

$$C(s) = s^3 - 50s + \frac{1}{s+1}$$

Suponga, a su vez, que el nivel de producción satisface:

$$s = 4 + 0.3t$$

donde *t* es el salario por hora de los trabajadores.

- Construya la gráfica del costo de las sillas en función de su producción.
- Relacione el costo de las sillas como función del salario de los trabajadores. ¿Qué operación entre funciones se utiliza para justificar lo anterior?
- Relacione la gráfica del costo de las sillas vs el salario de los trabajadores.
- ¿Qué puede decir de las gráficas de a) y c)? ¿son iguales? ¿no son iguales? ¿a qué se debe que sean iguales o a que sean distintas?
- ¿Cuánto debe pagar el fabricante por la producción cuando los trabajadores ganan $20 dólares por hora?
- ¿Si el costo supera el $50000 cuál es el total de sillas?

Bitácora 9

En situaciones de la vida real el saber matemáticas optimiza situaciones cotidianas que van desde elegir el mejor parqueadero a bajo costo, la mejor opción de viaje en unas vacaciones, el más conveniente plan de internet, etc. La siguiente bitácora relaciona tres contextos de este tipo y ayuda en potencializar la Habilidad para identificar, formular y resolver problemas complejos de ingeniería, aplicando principios de ingeniería, ciencia y matemáticas.

En matemáticas se espera contribuir al uso de patrones y relaciones para construir contextos matemáticos y reales que permitan analizar las relaciones cuantitativas para resolver problemas de la cotidianidad y determinar una buena decisión. Además de aplicar elementos y procedimientos del álgebra y la geometría en contextos reales para la resolución de problemas propios de la ingeniería. También se busca Utilizar diferentes estrategias analíticas, cuantitativas, numéricas y tecnológicas de las funciones de una variable real para la comprensión de fenómenos de variación y acumulación que contribuyen a la resolución de problemas ingenieriles.

- Lee cuidadosamente la sección de motivación
- En cada actividad se debe de responder y debes de argumentar tus respuestas
- Debes de exponer tus resultados antes tus compañeros cuando el maestro lo indique.

Hoy en día cualquier ciudadano colombiano puede viajar dentro del territorio nacional. Las vías férreas, marítimas, terrestres y aéreas

conectan gran parte de la geografía nacional y se pueden combinar de diversas maneras. En la mayoría de los casos estamos con la combinación vehículo-avión, en la que una persona conduce al aeropuerto más cercano para tomar un avión hasta su destino final. Al alcanzar este destino, la persona puede alquilar un vehículo, pedir un taxi, o bien conducir su propio auto. El estacionamiento en el aeropuerto provee comodidad y seguridad para pasajeros, quienes llegan y quienes se van.

Santiago de Cali es la tercera ciudad en importancia de Colombia y el aeropuerto internacional Alfonso Bonilla Aragón y ubicado en el municipio cercano de Palmira que actualmente la sirve, fue inaugurado en 1971. La importancia de esta terminal aérea radica en que es un nodo clave que permite multiplicar el mercado aerocomercial en el suroccidente del país.

En este contexto, han surgido alrededor del aeropuerto de Cali empresas especializadas en el estacionamiento de vehículos ofreciendo servicios regulados por la Secretaría de Tránsito y Transporte de Palmira.

A continuación, se presenta la información sobre la tarifa que ofrecen tres empresas por el servicio de estacionamiento:

Figura 16

HANGAR PARQUEADEROS	TARIFAS	
DIAS Y HORAS	CARRO	MOTO
1 HORA	$4.300	$2.700
A PARTIR DE LA SEGUNDA HORA	$2.600	$1.500
1 DIA	$17.000	
DEL 2 AL 4 DIA	$16.000 C/DIA	
DEL 5 AL 6 DIA	$14.000 C/DIA	
ESPECIALES		
7 A 10 DIAS	$100.000	
11 A 20 DIAS	$115.000	
21 A 30 DIAS	$137.000	
DIA ADICIONAL DESPUES DEL MES	$6.000	
MENSUALIDAD	$160.000	

Año: 2021

Figura 17

DECRETA

ARTÍCULO PRIMERO: Fíjense las tarifas a cobrarse de los vehículos livianos (automóviles, camperos, camionetas y similares) en los garajes o parqueaderos públicos al servicio del Aeropuerto Internacional "Alfonso Bonilla Aragón", así:

CONCEPTO	TARIFA
Por la primera hora o fracción	$ 2.700/ hora
Por la segunda hora o fracción y hasta las doce (12) horas	$ 1.400/ hora
De las trece (13) hasta las ciento sesenta y ocho (168) horas o fracción	$ 900/ hora
De las ciento sesenta y nueve (169) horas o fracción en adelante	$ 200/hora
Mensualidad	$ 100.000

Año: 2014

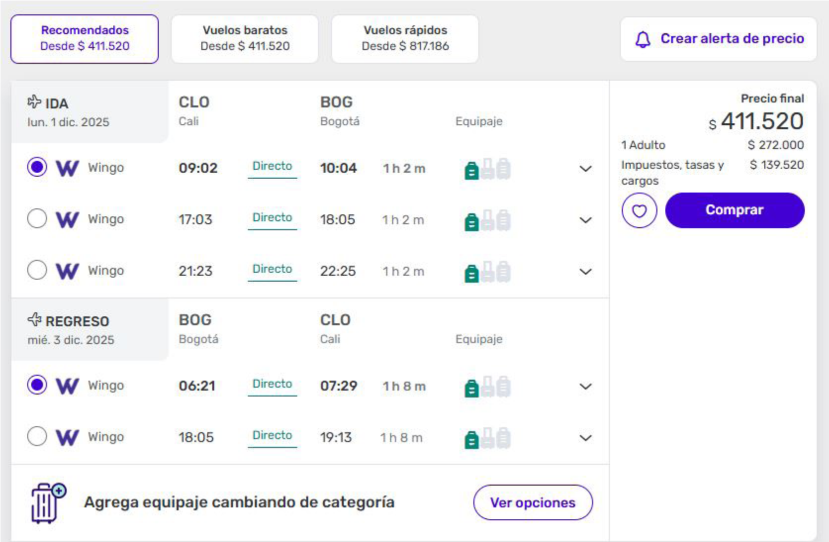
Figura 18

Año: 2017

- Varias compañías que aparcaron alrededor del aeropuerto están en el mercado. Si usted desea tomar los servicios de una de ellas ¿Qué aspectos consideras que deben ser relevantes para tomar esa decisión? ¿Por qué?
- Ahora, Usted tiene planeado realizar un viaje desde Santiago de Cali a la ciudad de Bogotá Distrito Capital siguiendo el itinerario que se describe a continuación:

Compra los tiquetes aéreos.

Figura 19



Fuente: Despegar. Año: 2021

- La aerolínea le sugiere que llegue al aeropuerto con una hora de antelación para realizar el registro del viajero.
- Cuando regresa a Santiago de Cali, con los trámites de desembarco y mientras llega al estacionamiento presupuesta que se demora una hora aproximadamente.

De acuerdo con el itinerario anterior, responda:

- ¿Da igual estacionar su vehículo en cualquiera de las tres empresas?

- Según su itinerario de viaje ¿Cuál empresa le ofrece una mejor tarifa por sus servicios? (Suponga que las tres empresas ofrecen un portafolio similar de servicios)
- Si comparamos las tarifas que debes pagar en cada una de las empresas por estacionar tu vehículo de acuerdo con tu itinerario, ¿Cuál es la diferencia entre la mayor y la menor? ¿Qué significa este número?
- Realice las gráficas de las tarifas que debes pagar en función del tiempo (puedes hacerlas en planos cartesianos distintos si lo desea) ¿Consideras que estas gráficas te pueden ayudar a tomar decisiones?

Ejercicio:

Mi nuevo plan de celular

Indagación:

- ¿Cuál es el principal beneficio que consideras antes de adquirir un plan post pago (no consideres el costo del equipo)?
- Escribe aquellas características que la gente de tu entorno toma como referencia para elegir un plan post pago. Menciónalas y expresar cual es la más importante.
- ¿Cómo puedes verificar si tu plan tarifario de telefonía móvil, según la empresa que te dé el servicio, es más rentable y beneficioso a diferencia de otras?

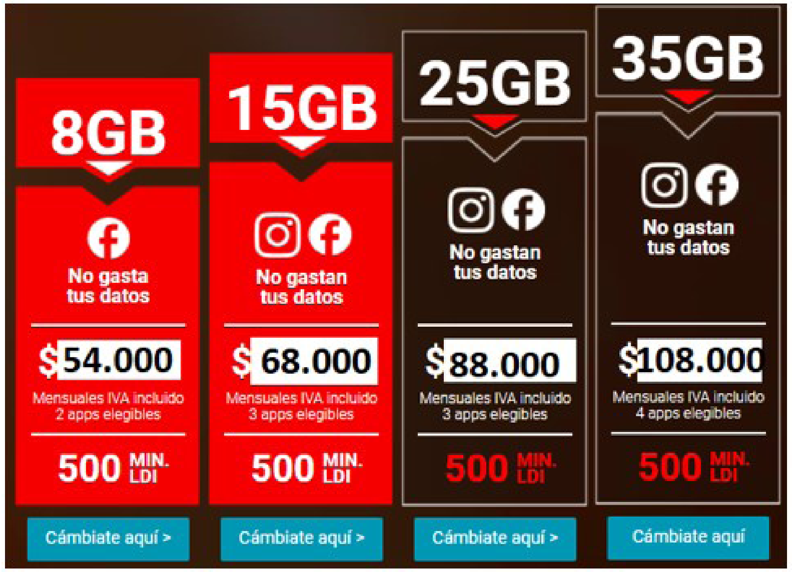
- Según tu opinión, ¿Qué empresa de telefonía móvil en nuestro país brinda el mejor servicio en cuanto al plan de datos en relación con el costo?, ¿Por qué?

Construcción:

El profesor ha decidido comprarse un nuevo chip de celular ya que su plan actual terminó el último mes, para ello ha empezado a buscar en internet los posibles precios que podría pagar en caso adquiera un nuevo chip para los próximos 12 meses.

La siguiente figura muestra los precios que el profesor observa en la página de una empresa de telefonía móvil. De lo que observa el profesor, ¿Qué relación existe entre el costo de cada plan y el plan de datos? Representa la información en la siguiente el siguiente cuadro.

Figura 20



Fuente: tomado de Empresas Claro.

- Escribe la información en el siguiente cuadro y represéntala en una ecuación.

Tabla 17

Relación entre el costo y plan de datos.

No. De Gb del plan	Costo del plan ($)

- Identifica, ¿cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente?
- Describe en tus propias palabras el patrón que se presenta en la tabla. Representando un modelo ¿Es posible representar gráficamente la situación anterior?
- Representa en un sistema de coordenadas cartesiano los puntos que obtuviste en la tabla 26 y explica que representa el crecimiento del pago del chip por la cantidad de megas.
- En caso de que la empresa tuviera un plan de datos de 50 GB, ¿Cuál sería el monto que pagaría por dicho plan?
- El profesor quiere un plan con más datos, es decir, más GB de internet para navegar con mayor frecuencia. ¿Qué cantidad de GB recibiría el profesor si pudiera pagar $100.000 mensualmente? Justifica tu respuesta.

A comparar modelos

Figura 21

Repite el análisis anterior, pero con la información que ofrece esta segunda empresa.

- Y, por último, grafica en un mismo sistema de coordenadas las funciones correspondientes a las dos cotizaciones correspondientes a las dos empresas.
- ¿Qué significa el punto de intersección? ¿Cómo ayudará esto para que el profesor tome una decisión objetiva?

Conclusiones y hallazgos

Este trabajo académico sobre el uso de bitácoras digitales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas revela varios hallazgos significativos. Las bitácoras digitales, como instrumentos innovadores, no solo facilitan el aprendizaje de conceptos matemáticos, sino que también promueven habilidades críticas como la argumentación y la modelación matemática.

Al utilizar tecnologías digitales, estas bitácoras permiten a los estudiantes conectar los conceptos matemáticos con situaciones del mundo real, mejorando su comprensión y aplicación práctica. Este enfoque contextualizado no solo enriquece el proceso de aprendizaje, sino que también fomenta una mayor motivación y compromiso por parte de los estudiantes.

Uno de los hallazgos pricipales es haber entendido el uso de las bitácoras digitales como una forma de superar la descontextualización de los contenidos matemáticos y el enfoque excesivo en los algoritmos. A través de estas bitácoras, los estudiantes desarrollan un sentido de apropiación de su proceso de aprendizaje, lo que se traduce en una mayor motivación y compromiso con la matemática. Además, la integración de herramientas computacionales y tecnológicas en las bitácoras facilita la visualización y resolución de problemas, cerrando brechas de aprendizaje y mejorando la comprensión conceptual. Esto se refleja en una capacidad incrementada para abordar problemas complejos y aplicar conceptos matemáticos en diversas situaciones.

Impactos en la enseñanza

El uso de bitácoras digitales tiene un impacto positivo en los procesos de enseñanza de la educación matemática. Primero, permite a los docentes evaluar el progreso de los estudiantes de manera más efectiva, ya que las bitácoras documentan el proceso de resolución de problemas y las estrategias utilizadas por los estudiantes. Esta información es valiosa para adaptar las metodologías de enseñanza y abordar las áreas donde los estudiantes muestran mayores dificultades. La capacidad de realizar un seguimiento detallado del progreso individual de cada estudiante permite a los docentes ofrecer una retroalimentación más personalizada y oportuna, lo que puede mejorar significativamente los resultados de aprendizaje.

Además, las bitácoras fomentan un ambiente de aprendizaje colaborativo y reflexivo. Los estudiantes participan en discusiones grupales y comparten sus enfoques y soluciones, lo que enriquece el proceso de aprendizaje colectivo. Esta dinámica no solo mejora la comprensión individual, sino que también fortalece las habilidades de comunicación y argumentación de los estudiantes. La colaboración entre pares y la exposición a diferentes perspectivas y métodos de resolución de

problemas promueven una comprensión más profunda y multifacética de los conceptos matemáticos.

Impactos en el aprendizaje

En cuanto al aprendizaje, las bitácoras digitales permiten a los estudiantes desarrollar habilidades de pensamiento de orden superior, como el pensamiento crítico y creativo. Al enfrentarse a problemas matemáticos en un contexto práctico y real, los estudiantes aprenden a aplicar los conceptos teóricos de manera significativa. Este enfoque les ayuda a ver la relevancia de las matemáticas en su vida cotidiana y en diversas disciplinas científicas y tecnológicas. La capacidad de conectar la teoría con la práctica no solo mejora la retención de conocimientos, sino que también prepara a los estudiantes para enfrentar desafíos del mundo real con confianza y competencia.

Las bitácoras también promueven la autogestión y la metacognición. Los estudiantes reflexionan sobre sus propios procesos de aprendizaje, identificando sus fortalezas y áreas de mejora. Este proceso de reflexión fomenta una actitud investigativa y autónoma, crucial para el desarrollo académico y profesional en el siglo XXI. La habilidad de autoevaluarse y ajustar sus estrategias de aprendizaje es una competencia clave que empodera a los estudiantes para convertirse en aprendices independientes y autodirigidos.

Para finalizar y a manera de conclusión podemos afirmar que las bitácoras digitales representan un avance significativo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Su uso mejora la comprensión conceptual, motiva a los estudiantes, y promueve habilidades críticas y colaborativas. Los impactos observados sugieren que la incorporación de estas herramientas en el currículo puede transformar significativamente los procesos educativos, preparando mejor a los estudiantes para los desafíos del mundo moderno. Los docentes están llamados a explorar y adoptar estas innovaciones para enriquecer sus prácticas pedagógicas y contribuir al desarrollo integral de sus estudiantes. La evidencia presentada en este trabajo subraya la importancia de integrar tecnologías digitales en la educación matemática para lograr una enseñanza más efectiva y un aprendizaje más significativo y duradero.

Anexos

Tabla 1. Relación del salario mínimo con porcentajes.

Salario	Porcentaje	Aporte Empleador(E)	Aporte Trabajador (T)
Auxilio de transporte	100% (E)	$ 102.854	———
Salud		$ 74.613	$ 35.112
Pensión	12% (E) y 4%(T)		$ 35.112
ARL		$ 4.565	———
Parafiscales			———
Prima de servicios	8,33%		———
Cesantías			———
Interés de la cesantía	1%	$ 8.778	———
Vacaciones	4.17%		———
Dotación		$ 43.890	———
Total			

Fuente: elaboración propia a partir de datos obtenidos en el año 2001.

Tabla 2. Relación del salario mínimo desde el año 2009 al 2020.

Año	Salario mínimo ($)	Auxilio de transporte ($)
2020	877.803	102.854
2019	828.116	97.032
2018	781.242	88.211
2017	737.717	83.140
2016	689.455	77.700
2015	644.350	74.000
2014	616.000	72.000
2013	589.500	70.500
2012	566.700	67.800
2011	535.600	63.600
2010	515.000	61.500
2009	496.900	59.300
Total		

Fuente: elaboración propia a partir de datos obtenidos en el año 2021.

Tabla 3. Representación tabular días de nacidos vs peso en gramos.

Día	peso en gramos
0	3300
1	3135
2	3000
3	2895
4	2820
5	2775
6	2760
7	2775
8	2820
9	2895
10	3000

Fuente: realización de los autores a partir de datos suministrados por la investigación.

Tabla 4. Contraste cable vs costo en tierra vs costo en agua vs Costo total

X(km)	Costo del cable en tierra (en millones)	Costo del cable en el agua (en millones)	Costo total
1			
2.5			
5			
8			

Fuente: realizado por autores.

Tabla 5. Traducción al lenguaje algebraico

En palabras	En álgebra
Cantidad invertida una cuenta libre de impuestos	
Cantidad invertida en certificados de depósito	
Interés ganado en la cuenta libre de impuestos	
Interés ganado en certificados de depósito	
Interés total ganado	

Fuente: realizado por autores.

Tabla 6. Cantidad de residuos y costo por tonelada en Colombia.

Relleno sanitario	Ciudades que atiende	Ton/ día	Costo de disposición por Ton/día.
Doña Juana	Bogotá, Cáqueza, Chipaque, Choachi, Fosca, Gutiérrez, Quetame, Ubaque y Une.	5.891	$21.545
Yotoco	Cali, Candelaria, Jamundí, Caloto, Villarrica, Yumbo	1.800	$19.203
Los ángeles	Neiva, Aipe, Algeciras, Baraya, Campo alegre, entre otros.	289,35	$12.500
El carrasco	Bucaramanga, Floridablanca, Piedecuesta, Grión, Rionegro, Lebrija, Suratá, Charta, California, Barbosa, Matanza, El playón, Tona.	734,3	$9.494

Fuente: realización de los autores con datos suministrados por los rellenos sanitarios en Latinoamérica.

Tabla 7. Cantidad de residuos y costo por tonelada en Costa Rica.

Relleno sanitario	Ciudades que atiende	Ton/día	Costo de disposición por Ton/día CRC
La Carpio	San José	700	CRC 5.750
Los mangos	Santa Bárbara, Barva, Heredia, Belén, Grecia, Palmares, San Pablo	750	CRC 7.322
Rio Azul	FEDEMUR	725	CRC 5545,22
Los pinos	Cartago	115	CRC 5.500

Fuente: realizada por autores con datos extraídos del Duodécimo informe sobre el estado de la Nación en desarrollo Humano sostenible. Memorias IX festival Internacional, Quepos Costa Rica, junio 2014.

Tabla 8. Casos de coronavirus en Colombia

Día	**Casos reportados**	**Acumulados**
1	1	1
6	1	3
11	5	12
15	6	33
20	18	109
25	26	227
30	18	333
35	19	425
40	17	509
45	18	598
50	14	706
55	30	852
60	30	991
65	51	1199
70	52	1439
75	69	1799
80	68	2232
85	97	2759
90	109	3244
95	245	3963
100	168	4730
105	235	5730
110	230	6665
115	214	7809
120	396	9607
125	530	11648
130	598	13865
135	430	16212
140	487	18632
145	349	20847
146	268	21115
147	264	21379

Fuente: realizado por los autores con datos extraídos del Instituto Nacional de Salud.

Tabla 9. Numero de Venados en 13 años.

Tiempo	Número de venados
0	20
1	22
2	25
3	28
4	30
5	33
6	37
7	40
8	43
9	47
10	50
11	55
12	56
13	61

Fuente: elaboración propia (2021).

Tabla 10. Cambio anual de la población de Cali desde 1985.

Intervalo de tiempo	% por año
1985–1990	3,31
1990 – 1995	2.24
1995 – 2000	1.39
2000 – 2005	1.18
2005 – 2010	1.15
2010 – 2015	1.09
2015 – 2017	1.06

Fuente: elaboración propia (2021).

Tabla 11. Consumo de gasolina en Bogotá durante la hora pico.

Recorrido (km)	Consumo (L)
1	0,14
2	0,21
3	0,31
4	0,46
5	0,55
6	0,64
7	0,78

8	0,83
9	0,99
10	1,10
11	1,20
12	1,33
13	1,43
14	1,52
15	1,67

Fuente: elaboración propia (2021).

Tabla 12. Tasa de incidencia para las ciudades Barranquilla, Bucaramanga, Manizales, Pasto.

Localización / año	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Mama RPC de Barranquilla	–	–	–	47,4	54,1	59,3	61,5	65,7	69,9	72,9
Mama RPC de Bucaramanga	53,7	52,9	58,7	59,1	58,6	50,7	48,5	41	40,3	40
Mama RPC de Manizales	29,6	30,8	29,2	36,4	38,5	38,8	39	41,7	38,3	36,7
Mama RPC de Pasto	27,6	26,9	27,2	29,2	31	29,5	29,6	29,2	27,5	25

Fuente: realizado por los autores a partir de datos brindados por www.infocancer.com

Agradecimientos

Los autores expresan su gratitud a las personas que han contribuido a la consolidación del diseño curricular del curso de matemáticas fundamentales y fundamentos en matemáticos a través de recursos innovadores que se fundamentan en una propuesta de aprendizaje centrada en la modelación y la argumentación.

Especialmente expresamos nuestro reconocimiento a l**a Vicerrectoría de Investigaciones, Innovación y Emprendimiento.** De manera particular a los doctores Jesús David Cardona Quiroz y Alexander García Avalos, vicerrector de investigación, innovación y emprendimiento de la Universidad Autónoma de Occidente y al director de gestión de la innovación y desarrollo tecnológico, por su dirección y especial atención a los recursos alrededor del proyecto de Innovación bitácoras digitales en matemática fundamental: Una propuesta innovadora para el aula de clases con código 20INTER-358.

También extendemos nuestro agradecimiento a los profesores del curso que han aportado al diseño y la evaluación de las actividades. A la doctora Paula Andrea Gonzáles y a los magister María Eugenia Martínez Grisales, José Julián Cortes Muñoz y Erminsul Palomino Bejarano, encargados de diseño y evaluación del material educativo.

Nuestro sincero agradecimiento a los profesores que han orientado el curso a lo largo de sus ediciones, quienes aceptaron el uso de un primer borrador siguiendo la perspectiva teórica y metodológica que se describe en este libro.

A la doctora Esther Magaly Méndez Guevara y Mtra. Antonia Hernández Moreno, evaluadoras externas del proyecto en la línea de modelación y argumentación matemática de la Universidad Autónoma de Guerrero, sede Acapulco. Sus observaciones y recomendaciones fueron muy pertinentes en la publicación de este texto. **Y, por último, a Mayra Alexandra Maca Ortega** quien fue la revisora de estilo, gramatical y de contenido.

Referencias

Arzarello, F., Ferrara, F., & Robutti, O. (2012). Mathematical modelling with technology: the role of dynamic representations. *Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA*, 31(1), 20-30.

Bertolotto Blas, F. (2020). Diseño y evaluación de un modelo de negocio para la producción de etiquetas y cajas de vino a partir del desechos orgánico-viníferos

Bialik, M., Bogan, M., Fadel, C., & Horvathova, M. (2015). Education for the 21st century: What should students learn? *Center for Curriculum Redesign*, 3 (4), 415–420. Retrieved from www.curriculumredesign.org.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example sugarloaf and the DISUM project. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering, and economics* (pp. 222–231). Chichester: Horwood.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., y Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education*. Springer New York.

Bosch, M., Garc´ıa, F. J., Gascón, J., y Higueras, L. R. (2006). La modelación matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación matemática*, 18 (2), 37–74

Brookhart, S. M. (2010). *How to assess higher-order thinking skills in your classroom*. ASCD.

Cervantes-Barraza, J., Ordoñez-Cuastumal, J., & Morales-Carballo, A. (2020). Los argumentos de estudiantes universitarios en la solución de problemas sobre ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). *Journal Educational Innovation/Revista Innovación Educativa*, *20*(82).

Cervantes-Barraza, J., Ordoñez-Cuastumal, J., & Morales-Carballo, A. (2020). Los argumentos de estudiantes universitarios en la solución de problemas sobre ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Journal Educational Innovation/Revista Innovación Educativa, 20(82).

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. Mathematical Thinking and Learning, 16(3), 181-200.

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. Mathematical Thinking and Learning, 16(3), 181-200.

Consejo Nacional de Educación Superior. (2014). Acuerdo por lo superior 2034: propuesta de política pública para la excelencia de la educación superior en Colombia en el escenario de la paz.

Desimone, L., Porter, A.C., Garet, M.S., Yoon, S. & Birman, B.F. (2002). “Effects of Profesional development on Teacher’s Instruction: Results from a Three-year Longitudinal Study”. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 24 (2), 81-112.

Desimone, Laura & Porter, Andrew & Garet, Michael & Yoon, Kwang Suk & Yoon, Beatrice & Birman,. (2002). Effects of Professional Development on Teachers’ Instruction: Results from a Three-Year Longitudinal Study. Educational Evaluation and Policy Analysis. 24. 81-112. 10.3102/01623737024002081.

Gamboa, Ó., Buitrago, L. A., Lozano, T., Dieleman, S., Gamboa, C., León Guzmán, É., ... & Fuentes, J. (2016). Costos directos de la atención del cáncer de mama en Colombia. *Revista colombiana de Cancerología*, *20*(2), 52-60.

Garzón Umerenkova, Angélica & Gil-Flores, Javier. (2017). Garzón, A. y Gil, J. (2017). El papel de la procrastinación académica como factor de la deserción universitaria. Revista Complutense de Educación, 28 (1), 307-324. http://dx.doi.org/10.5209/rev_RCED.2017.v28.n1.49682. Revista Complutense de Educacion. 28. 307. 10.5209/rev_RCED.2017.v28.n1.49682.

Geiger, V. (2011). Factors affecting teachers’ adoption of innovative practices with technology and mathematical modelling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in* *teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 305–314). Dordrecht: Springer.

Gil-Flores, J., Rodríguez-Santero, J., & Torres-Gordillo, J. J. (2017). Factors that explain the use of ICT in secondary-education classrooms: The role of teacher characteristics and school infrastructure. *Computers in Human Behavior*, 68, 441-449.

Greefrath G., Siller HS. (2018) GeoGebra as a Tool in Modelling Processes. In: Ball L., Drijvers P., Ladel S., Siller HS., Tabach M., Vale C. (eds) *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_21

Hall, J., & Lingefjärd, T. (2016). *Mathematical Modeling: applications with geogebra.* John Wiley & Sons.

Jablonka, E. (2003). Mathematical literacy. In *Second international handbook of mathematics education* (pp. 75-102). Springer, Dordrecht.

James, S., Redlin, L., Watson, S., Vidaurri, H., Alfaro, A., Anzures, M. B. J., & Fragoso Sánchez, F. (2007). Precálculo: matemáticas para el cálculo. México: Thomson Learning, 847.

Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zdm*, 38 (3), 302–310.

Kline, M. (1976). El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar. Mexico: Siglo xxi editores, s.a. de c.v.

Krummheuer, G. (2013). The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the context of the development of mathematical thinking in the early years. *Educational Studies in Mathematics, 84*(2), 249-265.

Krummheuer, G. (2013). The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the context of the development of mathematical thinking in the early years. Educational Studies in Mathematics, 84(2), 249-265.

Larson, L. C., & Miller, T. N. (2011). 21st century skills: Prepare students for the future. *Kappa Delta Pi Record*, 47(3), 121-123.

López, J. (2012). Modelización matemática en la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales. *Doctorado en Educación. Universidad Veracruzana. México*.

Lozana, W. (2012). El proceso de la modelación y aplicación de las matemáticas, competencias y evaluación.

MEN (Ministerio de Educación Nacional) (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Bogotá: Magisterio.

MEN (Ministerio de Educación Nacional) (2006). Estándares Básicos de Competencias Matemáticas. Bogotá: Magisterio

MEN, M. D. (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. *Recuperado de: http://www.Mineducacion. gov. Co/1621/articles-340021_recurso_*.

MEN, M. D. (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Recuperado de: http://www.Mineducacion. gov. Co/1621/articles-340021_recurso_.

Miri, B., David, B. C., & Uri, Z. (2007). Purposely teaching for the promotion of higher-order thinking skills: A case of critical thinking. *Research in science education*, 37(4), 353-369.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J., & Kaput, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68(2), 99-111.

OCDE. *Habilidades y competencias del siglo XXI para los aprendices del nuevomilenio en los países de la OCDE*. Madrid: Instituto de Tecnologías Educativas. (2010).

Ospina, M. L., Huertas, J. A., Montaño, J. I., & Rivillas, J. C. (2015). Observatorio Nacional de Cáncer Colombia. Facultad Nacional de Salud Pública: El escenario para la salud pública desde la ciencia, 33(2), 262-276.

Pead, D., Ralph, B., & Muller, E. (2007). Uses of technologies in learning mathematics through modelling. In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 309-318). Springer, Boston, MA.

Peña, M. (2000). Historia de la Geometría Euclidiana. Revista Candidus Año 1–No.10. Recuperado el 1 de mayo de 2015, de: http://www.euclides.org/menu/articles/article3.htm.

Rico, l. & fernández-cano. Análisis didáctico y metodología de Investigación. En: l. Rico, j.l. lupiáñez y m. Molina. *Análisis Didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, Innovación curricular y formación de profesores*. Los autores, granada, 2013.

Riebel, J. (2010). *Modellierungskompetenzen beim mathematischen Problemlösen—Inventarisierung von Modellierungsprozessen beim Lösen mathematischer Textaufgaben und Entwicklung eines diagnostischen Instrumentariums*. Dissertation, Universität Koblenz-Landau, Fachbereich Psychologie, Landau.

Rögler, P. (2014). Überzeugungen *von Mathematiklehrkräften als Basis zur Entwicklung von Lehrerfortbildung zu Technologien im Unterricht*. Universitätsbibliothek Dortmund.

Salazar (2006) Perdomo, W. H. Enseñanza de los conceptos de perímetro, área y volumen a estudiantes de grado sexto, a partir de maquetas. *Departamento de Matemáticas y Estadística*.

Santos-Trigo., L.M. (2020). Bitácora Digital y oportunidades de aprendizaje. *Revista cinecia y cultura, 1(1), 1-3.*

Santos-Trigo, M (2020, 30 de julio). Bitácora digital y oportunidades de aprendizaje. *Revista C2.* Recuperado de https://www.revistac2.com/bitacora-digital-y-oportunidades-de-aprendizaje/

Schnell, S. (2014). Types of arguments when dealing with chance experiments. En C. Nicole, S., Oesterle, P., Lijedahl, D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36,* vol. 5, pp. 113-120. Vancouver, Canada.

Schnell, S. (2014). Types of arguments when dealing with chance experiments. En C. Nicole, S., Oesterle, P., Lijedahl, D. Allan (Eds.), Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, vol. 5, pp. 113-120. Vancouver, Canada.

Siller, H.-St., & Greefrath, G. (2010). Mathematical modelling in class regarding to technology. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6),* January 28–February 1, 2009, Lyon (France).

Skovsmose, O. (2013). *Towards a philosophy of critical mathematics education* (Vol. 15). Springer Science & Business Media.

Thomas, A., & Thorne, G. (2009). How to increase higher order thinking. *Metarie, LA: Center for Development and Learning*.

Toro, J. F. M., Villa-Ochoa, J. A., & Téllez, L. S. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), Villa-Ochoa, J., Bustamante, C., y Berrio, M. (2010). Sentido de realidad en la modelación matemática. 7-115.

Toulmin, S., Rieke, R., y Janik, A. (1984). *An Introduction to Reasoning*. Nueva York, NY: Macmillan.

Troncoso, C., & Javier, L. (2001). Estimación de la función de producción del viñedo chileno de riego. Agricultura Técnica, 61(1), 70-81.

Villacís Martínez, J. S. (2018). Análisis comparativo de factibilidad técnica y económica entre casetones de telgopor de alta densidad y encofrados modulares semiesféricos de caucho reciclado usado como sistema de alivianamiento en losas (Bachelor's thesis, PUCE).

El libro *Bitácoras digitales como instrumento innovador para un curso de matemática fundamental* presenta una propuesta pedagógica innovadora para la enseñanza de matemáticas en contextos universitarios, integrando bitácoras digitales como herramientas didácticas. Los autores destacan cómo estas herramientas fomentan el aprendizaje activo, promoviendo habilidades de pensamiento superior, argumentación y modelación matemática. A través de nueve bitácoras, se abordan problemas prácticos relacionados con la vida cotidiana, ingeniería y ciencias económicas, utilizando tecnologías como GeoGebra y Tracker. El texto subraya la importancia de conectar conceptos matemáticos con situaciones reales, facilitando un aprendizaje significativo y motivador. Además, analiza los impactos en la enseñanza y el aprendizaje, evidenciando mayor compromiso estudiantil y una comprensión profunda de los conceptos. Esta obra, respaldada por referencias académicas, propone transformar el currículo educativo mediante la integración de tecnologías digitales, preparando a los estudiantes para desafíos del siglo XXI.