KEMEL GEORGE

# CÁLCULO CON INFINITESIMALES

CON LA COLABORACIÓN DE CARLOS IMAZ JANCKE

FONDO EDITORIAL UNIVERSIDAD DEL MAGDALENA

FONDO DE PUBLICACIONES DE LA UNIVERSIDAD DEL MAGDALENA

# CÁLCULO CON INFINITESIMALES



Kemel George González

ISBN: 958-97023-1-7
Santa Marta, Colombia



Carlos Eduardo Caicedo Omar
Rector Universidad del Magdalena

Sitio Web: www: umag.edu.co
E-mail: unimagdalena@idea.com.co

Portada: Óleo de María Emilia Echeverry
Diseño de César Tovar

Diseño y diagramación
ÉDITER. Estrategias Educativas Ltda.
Tel 2557251. Bogotá
Email: ctovarl@latinmail.com

Impresión
Editorial Gente Nueva Ltda.

Primera edición
Impreso en Colombia. *Printed in Colombia*
Bogotá, octubre de 2001

*Dedicado a Camilo José, Paula Camila*
*y María Sara, a Elías, Édgar y Miriam.*
*A mi adorada Pamela. Y a Tota, por supuesto.*

*«Generalmente todos pueden aprender*
*la geometría* y *comprenderla;*
*pero no sucede lo mismo con el álgebra*
*y el cálculo integral* y *diferencial»*.

Simón Bolívar
Pueblo de la Magdalena,
cerca de Lima, año de 1825

*Una vez presentida, la cosa inminente*
*se vuelve cosa prevista; tan extraño.*
*Y lo descubierto se hace evidente*

*A la sola luz de lo que ya se padeció.*
*El Séptimo Cielo no es más, tal vez,*
*Que la verdad completa tras el sexto sentido.*

*Seamus Heaney*
*Squaring XLVIII, 1991*
*Versión al español*
*Joe Broderick*

# Contenido

## Capítulo 15
## Estudio de la voz humana 251



## Apéndice I
## Construcción de sistemas numéricos no arquimedianos 281

# Presentación

La universidad del Magdalena tiene un sueño: ser una de las mejores universidades del país y la región, y movida por ese sueño posible ha trazado su prospectiva, su proyecto colectivo de refundación, que busca superar sus bajos desempeños académicos, su aislamiento nacional e internacional, su divorcio con el Magdalena y la Región Caribe, el limitado desarrollo de la investigación y la baja frecuencia de sus publicaciones. Empeño que intensificaremos con la Reforma Académica elaborada durante varios meses por sus profesores, estudiantes y directivos.

En esa perspectiva, el apoyo a la creación científica y literaria es una prioridad que estamos atendiendo y atenderemos en la medida de nuestros aún limitados recursos.

Es una prioridad porque no puede haber excelencia académica y un escalamiento de la investigación en una universidad si el pensamiento no plasma sus hallazgos, sus conquistas, sus perplejidades y sus dudas, a través de libros, revistas y periódicos. Una universidad sin publicaciones sería, por tanto, un campus estéril, una caricatura de universidad.

Nos hemos esmerado y nos seguiremos esmerando en publicar textos (libros y revistas) respaldados sólo por sus méritos y su calidad; esa seguirá siendo nuestra inflexible e inalterable directriz en materia editorial.

Eso explica la publicación del libro del doctor Kemel George González, Ph.D en Ciencias con especialidad en matemáticas del Centro de Estudios Avanzados de México, quien ha sido profesor de post-grado de la Universidad Nacional y profesor titular de la Universidad Distrital de Bogotá «Francisco José de Caldas» durante varios años; y en la actualidad profesor visitante de nuestra universidad para el fortalecimiento del módulo de cálculo diferencial e integral. El doctor George González no sólo es un académico de destacada inteligencia y meritorios títulos, sino también un magdalenense oriundo de Salamina.

Con el libro «*Cálculo con infinitesimales*», la Universidad del Magdalena inaugura, promisoriamente, su línea de investigación en matemáticas, y ratifica su apoyo a una especialidad en la que nuestra institución tiene talentosos y creativos cultores, cuyos puntajes han sido los más altos en los post-grados realizados por otras universidades; eso significa que en Santa Marta y el Magdalena tenemos un fértil semillero de matemáticos que debemos cultivar con particular atención.

Con su libro, el profesor Kemel George González le entrega al mundo universitario, a sus profesores y estudiantes de matemáticas, una importante herramienta didáctica para el estudio del cálculo, que enriquecerá las referencias bibliográficas de los programas oficiales sobre la materia.

Nos complace presentar al mundo académico nacional el libro de este brillante profesor de sangre caribe y con sólidas raíces en el Magdalena, a cuya iniciativa de Senador de la República le debemos, en buena parte, la Estampilla que nos permitirá construir la Ciudadela Universitaria, demostrando que desde la política –el pasatiempo favorito del docente Kemel George González– se pueden hacer también loables gestiones en favor de la educación y la cultura, sin mediar otro tipo de cálculo.

**Carlos Eduardo Caicedo Omar**

Rector

# Prólogo

*«Sólo tomando unidades infinitamente pequeñas para*
*la observación (la diferencial de la historia,*
*esto es, las tendencias individuales de los hombres)*
*y accediendo al arte de integrarlas*
*(esto es, encontrando la suma de estos infinitesimales)*
*podemos esperar llegar a las leyes de la historia».*

Leon Tolstoy
*La Guerra y la Paz. Tercer libro, tercera parte, capítulo I.*

Durante muchos años enseñé análisis de Fourier a los ingenieros electrónicos y de sistemas. Me consideraba un experto en la materia. Exponía, una y otra vez, como es usual en este oficio, las series de Fourier, la transformada integral de Fourier y la transformada discreta de Fourier, así como sus propiedades, relaciones y aplicaciones. Con el tiempo, comencé a sentirme enormemente molesto porque los cursos se convertían en la «repetición de la repetidera» ya que los resultados de los tres temas eran muy parecidos, casi los mismos, aunque se trataran en tres capítulos distintos. Nació en mí la convicción de que las tres entidades –transformada discreta, serie y transformada integral– eran una misma cosa, pero mis esfuerzos por cambiar creiblemente una transformada en otra resultaban infructuosos. Así estaban las cosas cuando tuve la oportunidad de tratar el asunto con el doctor Carlos Imaz Jancke, quien investigaba modelos de cálculo con infinitesimales. «¿En vez de cambiar de transformada, no has pensado cambiar de modelo de cálculo?» – me dijo. A partir de allí, incursioné con Imaz en la aventura del análisis no estándar y los modelos infinitesimales de cálculo, lo que nos llevó a inventar nuestro propio modelo numérico y de cálculo con infinitesimales. Así, hemos podido demostrar el carácter unificado de la teoría de Fourier y la íntima relación entre el discreto y el continuo, relación que deja de ser imperceptible una vez que se utilice la escala infinitesimal. Así mismo, hemos encontrado que la teoría discreta y continua de la reconstrucción de señales es una sola, como podrá verificarse con nuestros resultados sobre el teorema del muestreo de Shannon. No puedo dejar de mencionar la deuda de gratitud con el doctor Luis Moreno Armella, quien me animó a llevar este estudio hasta sus últimas consecuencias, y con el Rector de la Universidad del Magdalena, Carlos Eduardo Caicedo Omar, quien hizo posible la edición del libro. Esperamos que nuestro método, que hemos bautizado como MicroCálculo, sea una herramienta apropiada para la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en el aula de clase y una toma de posición ante un viejo mito, porque aquí, el discreto y el continuo están unidos por un vínculo inseparable.

# Introducción

«Tenemos que abandonar este hábito de pensamiento.
*No hemos de admitir la posibilidad de la observación continua.*
Las observaciones se han de considerar como acontecimientos
discretos, 'desconectados'.
Entre ellos hay huecos que no pueden llenarse».

Erwin Schrödinger
*Causalidad y mecánica ondulatoria.*

El MicroCálculo[1] es el estudio de los fenómenos del cálculo, a escala infinitesimal. Pero no de cualquier fenómeno, sino de aquellos representados en el continuo que, en realidad, se originan en el discreto y que, mediante nuestro modelo de cálculo, hacen el tránsito al continuo, que es el escenario donde aparentemente se observan. De allí que el MicroCálculo sea una especie de *cálculo discreto infinitesimal*, concepto equivalente que consideramos muy adecuado. La idea primaria de este libro es la conversión del cálculo tradicional que se enseña en el aula de clase, en lo que fue su origen: las sumas y las restas. En otras palabras, nos proponemos convertir la acción de integrar y diferenciar en una acción de adicionar y sustraer, sólo que lo haremos a escala infinita e infinitesimal.

Esta idea, original de Leibniz, reinó en la matemática durante casi doscientos años. Luego de su auge, entró en desgracia, y fue dejada de lado hace un siglo, imponiéndose una doctrina oficial que es la que se basa en el concepto de *límite*, tal y como se enseña en el aula de clase.

---

1 *MicroCálculo* es el logosímbolo del modelo de Cálculo con Infinitesimales inventado por Kemel George y Carlos Imaz Jancke, Cinvestav, México, 2000.

Nosotros hemos retomado la construcción inicial en condiciones modernas, volviendo a considerar los elementos organizadores que le dieron vida al cálculo (en su orden: la *variable*, la *diferencial*, la *función*, la *derivada* y la *integral*), inmersos en modelos infinitesimales, que son construcciones cuyo pariente más cercano es el análisis *no estándar*. Así, el MicroCálculo deviene en el estudio de tales elementos, de sus relaciones y distinciones, su alcance teórico y sus aplicaciones, postulando al cálculo discreto infinitesimal como un estado intermedio entre el continuo tradicional y el discreto moderno. Para usar una metáfora, nuestro cálculo es el eslabón perdido entre el discreto y el continuo.

Pero hemos ido más allá. Nos interesa develar el origen discreto de fenómenos cuya observación aparente es de dominio continuo, reformulándolos bajo el modelo infinitesimal que aquí presentamos y convirtiéndolos al continuo mediante una transición que cumple todos los requisitos del rigor y conserva un sabor didáctico. El apoyo práctico de este cálculo en el aula de clase, es el computador, que brinda un contexto aproximativo para las cantidades numéricas infinitas e infinitesimales, cuya organización representa *fenómenos*, sean estos acústicos, mecánicos, ópticos y electromagnéticos, voz, imagen, sonido, texto escrito, o simplemente estructuras de datos. Además, como mostraremos en varias oportunidades en el libro, hemos creado un modelo explicativo, esto es, no es sólo un modelo de cálculo para calcular, sino que está hecho para producir la conversión del discreto al continuo y así explicar los fenómenos que el modelo tradicional no puede siquiera detectar[2].

Si se ojea cualquier texto de un primer curso de cálculo, se verifica que entre sus objetivos y aplicaciones se encuentra el estudio de las sucesiones, límites y funciones, las reglas de derivación e integración de funciones, la obtención de máximos y mínimos, el cálculo de longitudes, áreas, superficies y volúmenes, y otros tópicos familiares, como el cálculo de varias variables. En ese terreno, el MicroCálculo no puede competir con el cálculo tradicional, a quien le reconocemos la primacía. En cambio, tratamos de crear alternativas para su enseñanza penetrando la naturaleza misma del sistema numérico y de los elementos constituyentes del cálculo diferencial e integral, lo que nos coloca en condiciones de explicar satisfactoriamente

2 C. Imaz, *Una alternativa teórica al cálculo,* Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.

un área de profundo interés entre los ingenieros, los físicos y los docentes matemáticos: la delta de Dirac como función, el análisis de Fourier, las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales, el teorema del muestreo, entre otros.

Construiremos un modelo de análisis de Fourier unificado, en donde el tránsito del dominio discreto al dominio continuo produce la conversión de la *transformada discreta* en *serie de Fourier,* y de ésta en *transformada integral,* mostrando así el carácter unitario de la teoría de Fourier. Con ello, esperamos mostrar que el MicroCálculo provee al docente de un modelo integrado como herramienta apropiada para la enseñanza y el aprendizaje del análisis de Fourier en el aula de clase, donde se representa por igual, la transformada discreta, las series y la transformada integral, ya que en dicho modelo, el discreto y el continuo están unidos por un vínculo inseparable.

Al lograr esta construcción logramos resolver el problema –hasta ahora insoluble– del tránsito del discreto al continuo en el análisis de Fourier y también explicar con entera satisfacción la *delta de Dirac* como función y sus aplicaciones. Como una primicia, revelaremos el origen discreto del teorema del muestreo Shannon y su conversión en teorema de muestreo de dominio continuo. Una aplicación práctica de fundamental importancia es *el modelo matemático de voz humana*, que nos permite una explicación de la relación profunda entre el continuo y su reconstrucción por medios discretos, y que ocupará también una buena parte de nuestra investigación.

Detrás de la diversidad de resultados, como puede verificarse, hay un hilo conductor: el modelo de cálculo infinitesimal secuencial cuya base es el concepto de diferencial. En una dimensión, por supuesto, lo que significa que se abre la expectativa de otro libro, para el MicroCálculo en dos y tres dimensiones. El enfoque que sigue mostrará, en la medida de nuestras posibilidades y pese a las inevitables tensiones entre lo clásico y lo moderno, un vínculo solidario entre el cálculo tal y como convencionalmente se enseña en el aula de clase, y el que es originario de sus fundadores, a la luz de los recursos que nos proveen las nuevas teorías matemáticas y las ciencias computacionales.

Capítulo 1

# Origen, destierro y renacimiento de los infinitesimales

Hace unos trescientos años el cálculo infinitesimal, o más exactamente, el cálculo con infinitamente grandes e infinitamente pequeños, reinó en la matemática durante casi dos siglos. Después de tal período de esplendor, entró en desgracia, y fue desterrado a fines del siglo pasado, imponiéndose una nueva doctrina oficial, que es la que se basa en el concepto de límite, tal y como se enseña en el aula de clase.

Pero los infinitesimales fueron expulsados vivos y rondaron a los matemáticos como fantasmas, durante su destierro. Hace pocas décadas, cumpliendo todos los estándares del rigor, el cálculo con infinitesimales ha renacido y cobra vigor en el aula de clase, compitiendo con el cálculo convencional y mostrando que también tiene futuro. Lo que sigue es sólo un fragmento de su grandiosa historia. Describiremos apenas tres episodios –surgimiento, crisis y esperanzas– de lo que se ha considerado como una de las más grandes conquistas de la humanidad. Como en toda historia, no han faltado las incompresiones, las deslealtades y las traiciones. Nos interesa mantener la vista fija en un aspecto fundamental: la actualidad del cálculo infinitesimal, con el sabor que inicialmente le dieron sus fundadores.

## ¿QUE ES EL CÁLCULO?

Si abrimos un diccionario elemental de matemáticas podemos leer definiciones como las siguientes: «Cálculo. Una rama de las matemáticas que usa la idea de límite, y generalmente dividida en dos partes: cálculo integral y diferencial»[1]. En una sección de Internet, encontramos la siguiente

1 J. Daitith, R. D. Nelson, *Dictionary of Mathematics,* Penguin Books, 1989.

definición: «Cálculo es, en cierto sentido, el estudio de las funciones. Usted aprende cómo hacer toda clase de cosas bien hechas con las funciones, llamadas diferenciación, integración y cosas como esas»[2]. Algunos ven en el cálculo un vínculo y un intercambio que se establece entre lo continuo y lo discreto[3].

Cuando no se encuentran palabras para definirlo, se acude a su rol como herramienta en el desarrollo de la sociedad humana, como lo muestra la siguiente cita: «Es más fácil decir lo que hace el cálculo que lo que es el cálculo. Practicamente, todo desarrollo importante en la ciencia y en la matemática desde 1600 hasta 1900 estuvo conectado de alguna forma u otra con los métodos diferenciales e integrales. El cálculo infinitesimal ha sido la principal herramienta en la explotación de los recursos terrestres, en la elaboración de las cartas de los cielos y en la construcción de la tecnología moderna. Sus aplicaciones ocurren en donde hayan fenómenos medibles: gravitación, calor, luz, sonido, electricidad, magnetismo y ondas de radio»[4].

Halmos, una autoridad en la materia, en vez de lograr algun tipo de simplificación conceptual, le agrega todo tipo de ingredientes, hasta hacerlo indefinible: «Los profesores de matemáticas elementales de los EU frecuentemente se quejan de que todos los libros de cálculo son malos. Este es el punto a tratar. Los libros de cálculo son malos porque no hay un sujeto tal como cálculo; no es un sujeto porque es muchos sujetos. Lo que llamamos cálculo en nuestros días es la unión de un retoque de lógica y teoría de conjuntos, alguna teoría axiomática de campos ordenados completos, geometría analítica y topología, ésta última en el sentido «general» (límites y funciones contínuas) y en sentido algebraico (orientación); teoría de la variable real propiamente así llamada (diferenciación); la manipulación simbólica combinatoria llamada integración formal; los primeros pasos de teoría de la medida en bajas dimensiones, alguna geometría diferencial; los primeros pasos del análisis clásico de las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, y, dependiendo del espacio disponible y la inclinación personal del autor, algun libro de ecuaciones diferenciales de cocina, mecáni-

2 *The Math Forum*, Ask Dr. Math, Internet, 1996.

3 R. M. Young, *Excursions in Calculus, An Interplay of the Continuous and the Discrete*. The Mathermatical Assotiation od America, 1992.

4 M. E. Baron, *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Dover Publications, Inc., New York, 1969.

ca elemental y un pequeño surtido de matemáticas aplicadas. Con cualquiera de éstos, es muy duro escribir un buen libro; la mezcla es imposible»[5]. A propósito, entonces, surge la pregunta: ¿que es el cálculo?

## CÁLCULO E INFINITUD

La respuesta apropiada sólo la obtendremos si viajamos directamente al orígen, ya que élla se encuentra en las fuentes originales y en los propios títulos de las obras de los primeros autores. Wallis, contemporáneo a Newton, en 1665, titula su libro: *Arithmetica infinitorum*. Diez años más tarde, hacia 1665, Newton escribe el breve compendio: *De Analysi per Aecuationes Numero Terminorun Infinitas*. Y Leibniz, en 1686, titula su ensayo: *De geometria recóndita et analysi indivisibilium atque infinitorum*... La famosa publicación de l'Hopital, que data de 1696, se llama: *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. Euler denominó su libro magistral: *Introductio in Analysin Infinitorum,* publicado en 1748, que aparece en dos tomos, en su monumental *Opera Omnia*. Hubo que esperar hasta 1755 para que Euler publicara *Institutiones Calculi Differentialis*. Y hubo que esperar mucho más, hasta 1770, cuando dió a conocer sus tres tomos denominados *Institutiones Calculi Integralis*.

¿Qué observamos de todos estos títulos? Una palabra curiosa, enigmática, común a todos éllos: la palabra infinito. O más exactamente, *infinitorum*. En realidad, la varias veces citada palabra latina *infinitorum* es plural, lo que, por ejemplo, llevaría a traducir el título de Euler como «Introducción al análisis de los infinitos». ¿Qué querría decir Euler al usar el plural? Seguramente sin saber que eludía un problema profundo, el autor de la traducción de Euler al inglés colocó el título «Introduction to Analysis of the Infinite»[6] aclarando que la palabra «infinities» era incómoda. De acuerdo a la observación de un estudioso del tema[7], el uso del plural se debe a que en el origen del cálculo hay varios infinitos: series infinitas, productos infinitos y fracciones continuas. Pero esto no aclara el hecho de que en el texto también hay capítulos donde Euler maneja igualmente los infinitesimales. Tantos, que la traducción francesa se pasa al extremo opues-

5 P. R. Halmos, «How to write mathematics», *L'Enseignement Mathématique,* Vol. 16, 1970.

6 L. Euler, *Introduction to Analysis of the Infinite,* Book I, Springer-Verlag, New York Inc., 1988

7 R. M. Young, Op. Cit.

to, y traduce el libro de Euler como «Introduction a l'analyse infinitesimale»[8]. Queda entonces la duda de si con *Infinitorum* no se refería Euler a dos tipos de infinitos, tanto a los números infinitamente grandes como a los infinitamente pequeños.

Nosotros nos inclinamos por esta hipótesis. El cálculo, como lo entendieron sus fundadores, no es otra cosa que el cálculo de infinitos, los infinitamente grandes y los infinitamente pequeños. El propio Euler distingue claramente el cálculo, en general, del cálculo diferencial e integral. Así, queda claramente establecido que hay una gran distinción entre álgebra y cálculo, ya que aquella no necesariamente apela al infinito, mientras que al cálculo el infinito le es esencial. Para que sirva de ilustración, podríamos establecer la igualdad: cálculo = álgebra + el infinito.

De todo ésto, hay que retener una idea suprema: la íntima relación que existe entre cálculo e infinitud, sea esta infinitud de escala infinita o infinitesimal.

## Los orígenes

Hay unanimidad entre diversos autores en que el cálculo moderno, tal y como se entiende en todo el mundo, sea éste denominado cálculo de infinitos, cálculo infinitesimal, cálculo diferencial e integral o de cualquier otro modo, tuvo su origen en Leibniz (1646-1716) y Newton (1642-1727), aunque sus raices más remotas se encuentran en Eudoxo, Arquímedes, Cavalieri, Pascal, Fermat, Descartes, Kepler, Wallis, Barrow y muchos más. La utilización de enteros infinitos se remonta al siglo XVII, con Pascal[9], quien calculó el área bajo la parábola asumiendo que ésta podía encerrarse en un número infinito de rectángulos, al dividir un segmento por un entero infinito. A los contemporaneos, que le criticaron que estos usos violaban el sentido común, Pascal les respondió que cuando las cosas no están claras, interviene el corazón[10]. Sobre estos aspectos la bibliografía abunda, desde compendios populares[11] hasta investigaciones más profundas[12].

8 L. Euler, *Introduction a l'analyse infinitesimale,* Tome Premier, l'Ecole Polytecnique, 1835.

9 R. M Young, *Excursions in Calculus,* The Mathematical association of America, 1992.

10 C. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development,* Dover, New York, 1959.

11 M. Perero, *Historia e historias de las matemáticas,* Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.

12 C. B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development,* Dover Publications, Inc., New York, 1959.

La siguiente es una frase muy citada de uno de los dos fundadores, un par de años antes de su muerte: «Una de las invenciones más nobles de nuestro tiempo ha sido una nueva clase de análisis matemático, conocido como el cálculo diferencial; pero, mientras que su sustancia ha sido adecuadamente explicada, su fuente y motivación original no ha sido hecha pública. Hace casi cuarenta años que yo lo inventé...»[13].

Esto no fue aceptado por los ingleses, quienes le atribuyeron la verdadera invención del cálculo, no a Leibniz, sino a Newton, lo que produjo una polémica cuyas consecuencias han sido siempre calificadas de deplorables[14]. El juicio de la historia ha dado, con criterio unánime, el título de fundadores del cálculo a ambos.

## LAS CONTROVERSIAS

Hasta aquí llega la unanimidad. En lo que al cálculo infinitesimal se refiere, por lo visto, ni siquiera la combinación de las dos palabras cálculo e infinitesimal indica a qué cuestión nos referimos exactamente cuando las pronunciamos. Ya hemos indicado que los fundadores del cálculo, para titular sus obras, utilizaban indistintamente las palabras infinito e infinitesimal. En la actualidad, como puede verse en las bibliotecas y en las librerías, la mayoría de los textos escolares lo utilizan en su sentido literal, refiriéndose a la forma como lo denominaron sus inventores, teniendo cuidado en aclarar que a lo que se refieren es el cálculo diferencial e integral, ya que, según estos textos, los infinitesimales no existen.

Bertrand Russell, crítico implacable de los infinitesimales, ofrece la siguiente versión de lo que es el cálculo: «Cálculo infinitesimal es el nombre tradicional que recibe el conjunto del Cálculo diferencial e integral, y como tal lo conservo; pero como veremos en breve, no existe alusión ni implicación a lo infinitesimal en parte alguna de esta rama de la matemática»[15].

Se pueden encontrar muchos textos de matemáticas aplicadas donde los infinitesimales se utilizan abundantemente para resolver los problemas planteados; sus autores aclaran que ayudan a la intuición, pero que cuando

13 G. W. Leibniz, *Historia et Origo Calculi Differentialis,* 1714.

14 E. T. Bell, *Historia de las matemáticas,* Fondo de Cultura Económica, México, 1949.

15 B. Russell, Los principios de la matemática, (3a.Ed.), Espasa-Calpe, Madrid, 1977.

hablan de infinitesimales no están hablando en serio. Este modo fraudulento de utilización de un concepto no se limita a los libros de texto. También afecta a los especialistas en materia educativa. Recientemente, se realizó un evento muy importante en Sevilla, España, el VIII Congreso Internacional de Educación Matemática ICME8. Una de sus comisiones se denominó «El Futuro del Cálculo Infinitesimal», pero no hubo una sóla referencia al cálculo con infinitesimales.

La aparente ambigüedad en la utilización del doble término «cálculo infinitesimal» no obedece tanto a una confusión o un malentendido. Ella encierra el secreto de los cambios que se produjeron en el proceso de desarrollo del cálculo, en el que los infinitesimales y los infinitamente grandes, su esencia íntima desde el origen, fueron posteriormente desterrados como alternativa, y se impusieron otras construcciones matemáticas que imperan en los currículos oficiales y que, pese a los problemas cognitivos que conlleva, han reinando durante los últimos cien años con éxito.

## EL CÁLCULO LEIBNIZIANO

Importantes investigaciones modernas arrojan luz sobre el cálculo, como en un principio lo manejaron sus fundadores, desde Leibniz a Euler. Uno de los más destacados estudios es el de Bos[16], quien aclara muchos interrogantes, como veremos a continuación. De acuerdo a este investigador, el concepto fundamental del cálculo leibniziano es el de diferencial. El análisis Cartesiano se caracteriza como el estudio de las curvas mediante métodos algebraicos. Esto es denominado por Leibniz y l'Hópital cálculo ordinario. En cambio, el cálculo infinitesimal es aquél cuya principal herramienta de análisis es la diferencial.

El concepto de derivada, como modernamente lo denominamos, presupone el de función, y por tanto no se utilizó como tal durante varias décadas, hasta que se produjo la separación entre la geometría y el análisis, lo que hizo posible la emergencia de la función de una variable. La función, como actualmente se la conoce, emerge décadas después de la fundación

16 H. J. M. Bos, «Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus,» *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 14, 1974/75.

del cálculo. Contra toda evidencia, la derivada de una función no pudo existir en la fase geométrica del cálculo infinitesimal.

El cálculo leibniziano, en sus inicios, concierne al análisis de las curvas y las relaciones entre variables de cantidades geométricas involucradas en las curvas, tales como sus ordenadas y abcisas, la longitud de arco, radio, arco polar, subtangente, normal, tangente, áreas entre curvas y los ejes, rectángulo circunscrito, centros de gravedad de los arcos y sólidos de revolución. Este cálculo acepta las cantidades infinitas e infinitesimales como genuinas entidades matemáticas. La variable opera en un rango como sucesión ordenada de valores. La diferencial es la diferencia infinitesimal entre dos valores sucesivos de la variable.

La etapa primaria de este cálculo es la teoría de sucesiones numéricas, de diferencias de sucesiones y de sumas de sucesiones. En su desarrollo ulterior y como una extrapolación infinitesimal, una curva será una línea polígonal constituída por segmentos infinitesimales de rectas. Las abcisas y ordenadas de estas curvas son variables continuas sólo en el sentido de que actúan como sucesiones de valores separados infinitesimalmente.

## UN NUEVO MÉTODO

Leibniz publica en Acta Eruditorum, 1684 su breve ensayo titulado: «Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus»[17]. Dado que hay diversas opiniones sobre élla,[18] es necesario volver a esta obra, ya que su estudio arroja luz sobre el nuevo método que Leibniz comunica, aunque sin mayores explicaciones: el cálculo de diferencias y de sumas, a escala infinitesimal. Esta es la esencia del cálculo, desde su origen.

Para Leibniz –desde nuestro punto de vista y siguiendo a Bos– una variable x actúa como sucesión ordenada de valores, por lo que es perfectamente posible definir su diferencial como la nueva variable $dx$ que es la diferencia infinitesimal entre dos valores sucesivos de la variable x. Esto explica que,

17 G. W. Leibniz, *Análisis Infinitesimal,* Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante las cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas, Editorial Tecnos, S. A., 1987.

18 J. De Lorenzo, *Estudio Preliminar, Análisis Infinitesimal,* Editorial Tecnos, S. A., 1987.

con toda naturalidad, Leibniz establezca sin mayores rodeos las siguientes reglas del cálculo (la cita es textual):

«Si $a$ es una cantidad constante dada, será $da = 0$ y $d(ax) = ad(x)$».

«Si $y = v$ será $dy = dv$ ».

«Adición y sustracción:

si es $z - y + w x = v$, será $d(z - y + w + x) = dv = dz - dy + dw + dx$ ».

«Multiplicación:

$$d(xv) = x\,dv + v\,dx$$

ó poniendo $y = xv$, será

$$dy = x\,dv + v\,dx»$$

«División: (poniendo $z=v/y$)

$$d\frac{v}{y} = dz = \frac{vdy - ydv}{y^2} »$$

«Es arbitrario poner la fórmula como «xv» o abreviadamente una letra en su lugar, como «y». Ha de notarse en este cálculo que «x» y «$dx$» han de ser tratados del mismo modo que «y» y «$dy$» o cualquier otra letra determinada con su diferencial»[19].

De estas reglas, Leibniz deduce las propiedades más conocidas de la diferencial de las potencias y las raices:

«Potencias:

$$dx^{\alpha} = ax^{\alpha-1}dx. \text{ etc., »}$$

«Raices:

$$d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\,dx\sqrt[b]{x^{a-b}} \text{ » etc.,}$$[20]

19 *Un nuevo método...*, página 5.

20 *Un nuevo método...* página 7.

El alcance de esta nueva herramienta teórica salta a la vista: «Del conocimiento de este Algoritmo, así lo llamo, o de este cálculo, que llamo diferencial, pueden obtenerse todas las otras ecuaciones diferenciales por medio del álgebra común, y los máximos y mínimos, así como pueden obtenerse las tangentes, de tal forma que no sea necesario separar las fracciones o los irracionales u otros vínculos, como, sin embargo, debía hacerse según los métodos hasta ahora publicados»[21].

Hay un concepto completamente nuevo para el cálculo de la tangente: «En esta situación se consigue, para encontrar la tangente, trazar la recta que una dos puntos de una curva que estén a una distancia infinitamente pequeña o el lado prolongado de un polígono de infinitos ángulos, que para nosotros equivale a la curva. Esa distancia infinitamente pequeña siempre puede ser expresada por alguna diferencial conocida, como *«dv»,* o por una relación con la misma, esto es, a través de alguna tangente conocida»[22].

En pocas lineas, Leibniz resuelve el problema de la ley de refracción, que ha costado a otros, varios años de esfuerzos: «Y se tiene así la demostración por el cálculo, realizada por nosotros en otra parte de estas mismas Actas, cuando exponíamos el fundamento general de la Optica, Catóptrica y Dióptrica. Lo que otros doctísimos varones han investigado con muchas dificultades, el conocedor de este Cálculo lo ha obtenido en tres líneas»[23].

Luego de resolver problemas diversos, incluídos algunos de logarítmos, mediante su triángulo caracteristico, Leibniz concluye: «Y ciertamente estos puntos son los inicios de una Geometría muy sublime que también se extiende a los dificilísimos y hermosos problemas de la Matemática mixta que sin nuestro cálculo diferencial o semejante nadie podrá tratar con parecida facilidad»[24]. Estas ideas claves van a ser registradas y ampliadas posteriormente en otro ensayo magistral, dos años más tarde.

21 Ibid, página 8.

22 Ibid, página 9.

23 Ibid, página 13.

24 Ibid, página 14.

## TODO SE REDUCE A UN JUEGO

El segundo ensayo: «De Geometria recondita et Analysi indivisibilium atque infinitorum», lo publica Leibniz en el *Acta Eruditorum,* en 1686[25]. Polemiza con algunos matemáticos y añade ricas ideas a las del Nuevo Método: «Comprendiendo que algunas cosas que publiqué en estas Actas para el avance de la Geometría no han sido suficientemente entendidas por algunos hombres doctos y más aún han sido cambiadas en su uso y algunas no han sido suficientemente comprendidas bien por error del que escribe bien por otra causa, pensé que sería de gran valor añadir en este lugar lo que puede ilustrar los asuntos anteriores»[26].

El análisis leibniziano es diferente al cartesiano, porque penetra el infinito mismo, mientras que el segundo es considerado geometría vulgar: «Pues de este modo los teoremas y problemas, que eran dignos de admiración, se desarrollan con tal facilidad que ya no es necesario aprenderlos y tenerlos en cuenta sino como son estudiados la mayor parte de los teoremas y problemas de la Geometría vulgar por quien la tiene por elemental»[27].

Hace un reconocimiento a los que han contribuído a la fundación del cálculo, por lo que transcribimos enteramente tan valiosa cita: «Falta, para que no parezca que me atribuyo demasiado a mí mismo o que menosprecio a los demás, que diga en pocas palabras lo que en mi fórmula se debe especialmente a los insignes matemáticos de nuestro siglo en este género de Geometría. Los primeros, Galileo y Cavalieri, empezaron a descubrir las oscurísimas artes de Conon y Arquímedes. Pero la Geometría de los indivisibles de Cavalieri fue solamente la infancia de una ciencia renaciente. Mejores soluciones aportaron tres hombres célebres: Fermat, encontrando el método de máximos y mínimos; Descartes, mostrando la razón de expresar por ecuaciones las líneas de la Geometría común (pero excluyó las trascendentes), y Gregorio de San Vicente, hallando muchas cosas valiosas ... Y sin embargo, nada quita de elogio merecidísimo de los descubrimientos. Siguen a éstos el escocés James Gregorio y el inglés Isaac Barrow, que enriquecieron admirablemente este tipo de ciencia con grandes teoremas.

25 G. W. Leibniz, Análisis Infinitesimal, Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los indivisibles e infinitos, Editorial Tecnos, S. A., 1987.

26 Ibid., página 17.

27 Ibid., página 19.

Además, Nicolás Mercator, de Holstein, matemático e ilustrísimo, que fue el primero, que yo sepa, que dio una cuadratura por serie infinita. Y no sólo realizó el mismo descubrimiento independientemente, sino que también lo perfeccionó con una razón universal un geómetra de profundísimo ingenio, Isaac Newton, que si diera a conocer sus pensamientos, los que entiendo que tiene, nos proporcionaría sin duda nuevos caminos para extraordinarios aumentos y tratados de la ciencia»[28].

El triángulo característico aparece como una gran luz, y el análisis se convierte en un juego o una broma: «Me correspondió a mí, entonces principiante en estos estudios, que desde un único aspecto de una demostración sobre la magnitud de la superficie esférica se me apareciera de repente la gran luz ... Hasta que finalmente encontré el verdadero suplemento del Algebra para las trascendentes, es decir, mi cálculo de los infinitamente pequeños, o diferencial o sumatorio o de cuadraturas, y, si no me engaño, es lo que llamo acertadamente Análisis de los indivisibles y de los infinitos, que, una vez encontrado, todo lo que antes me causaba admiración en este campo me parece un juego y una broma»[29].

Esta es la idea central que queremos fijar de una vez y para siempre: el cálculo diferencial e integral, considerado como algebra de diferencias y de sumas a escala infinita e infinitesimal, hace que el ejercicio del cálculo se reduzca a un juego o a una broma.

## LA REGLA DEL PRODUCTO

Para colocar un sólo ejemplo, el siguiente es uno de los más simples y brillantes resultados del método leibniziano. Tomemos dos variables x y y así como sus correspondientes diferenciales, *dx, dy*.Tanto el producto xy como las adiciones x+ *dx* y y + *dy* son auténticas variables, por lo que podemos calcular la diferencial de la variable xy calculando literalmente las diferencias del 'siguiente elemento menos el anterior':

$$d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy = xdy + ydx + dxdy$$

28 *Sobre una geometría altamente oculta...*, página 26.

29 Ibid., página 27.

Leibniz descarta la variable *dxdy*, dado que su contribución es despreciable, obteniendo la famosa regla del producto:

$$d(xy) = xdy + ydx$$

La cita textual de Leibniz es la siguiente: «*d(xy)* es la diferencia entre los valores adyascentes de xy, el cual hacemos uno xy y el otro *(x + dx)(y + dy)*. Entonces, *d(ydx xy) = (x + dx)(y + dy) - xy, ó xdy + ydx + dxdy,* y esto es igual a *xdy* + si la cantidad *dxdy* se omite, la cual es infinitamente pequeña con respecto a las otras cantidades, porque dx y dy se suponen infinitamente pequeñas (es decir, si el término de la sucesión representa lineas que aumentan o decrecen hasta el mínimo)[30].

Este nivel de claridad y simplicidad –dejando de lado el aspecto polémico del uso de infinitesimales– no ha podido ni podrá ser alcanzado por el cálculo convencional, basado en el concepto de límite. El anterior modo de obtención de la regla del producto ha sido desvirtuado y hasta ridiculizado, dada la utilización del lenguaje infinitesimalista en el procedimiento. Pero es lamentable que los detractores no reconozcan siquiera que la regla es rigurosamente cierta, bajo una determinada relación de equivalencia, como en su momento veremos.

## EL ESPLENDOR Y LA GLORIA

En el período que va desde el último tercio del siglo diez y siete, hasta mediados del siglo diez y nueve, el cálculo basado en el análisis de los infinitamente pequeños e infinitamente grandes, logró cohabitar con las principales teorías matemáticas de la época, a las que sirvió de paradigma. Es el reinado de Leibniz, Newton, los Bernouilli, Euler, Lagrange, d'Alambert, Fourier, Gauss y Cauchy, entre tantos.

Los principales fenómenos físicos o químicos, de diversos tipos, mecánicos, caloríficos, eléctricos, magnéticos o gravitacionales, entre otros, fueron analizados y explicados o nuevamente abordados y modelados matemáticamente a la luz del cálculo infinitesimal. Esto permitió que las relaciones esenciales de la naturaleza, estudiadas durante cientos de años, con la nueva herramienta matemática, se tradujeran en ecuaciones diferenciales.

30 H. J. M. Bos, «*Differentials, ...,*» Página 16.

El advenimiento del cálculo es mucho más que un hecho matemático: el cálculo está impreso en la cultura de Occidente. Hay una íntima relación entre el desarrollo del cálculo diferencial e integral y la precisión del reloj de péndulo, el complejo movimiento de la máquina de vapor y la locomotora, la armonía musical, la perfección de las armas de fuego, la navegación y la imprenta, el dominio de los fluídos, la inferencia estadística.

El cálculo con infinitesimales asocia lo finito con lo infinito, vincula lo discreto con lo continuo, emparenta lo algebraico con lo analítico y acerca la teoría al mundo de la experiencia. En el área estrictamente teórica, los fundadores del cálculo resolvieron la totalidad de los problemas de áreas, volúmenes, longitudes de curvas, centroides, momentos de inercia, así como de máximos y mínimos, ratas de cambio, velocidades, tangentes, arcos de curvas, curvaturas de superficies, y desarrollos de funciones en series infinitas y productos infinitos, tal y como se estudian en la actualidad en el aula de clase.

La base conceptual de este cálculo siempre fue el sistema numérico constituído por cantidades finitas, infinitesimales e infinitas, como puede verificarse por la observación simple en los ensayos, textos, libros y literatura de la época. Desde fines del siglo XIX en adelante, el cálculo como sistema y sus principales teorías y resultados y aplicaciones, permanecieron intactos pero, como veremos a continuación, su base conceptual fue drásticamente modificada.

## INCONSISTENCIAS DEL CÁLCULO CON INFINITESIMALES

Desde su mismo nacimiento, el cálculo infinitesimal puso en evidencia una serie de ambiguedades, inconsistencias lógicas e incertidumbres propias de la naturaleza de su objeto, que es lo concerniente a la infinitud, sea ésta infinita o infinitesimal. Veamos como explicaba Newton su método (Method of Fluxions, 1736), tomando un ejemplo prestado de un conocido autor[31]. Las fluentes son variables x, y, z, ... que dependen del tiempo. Las fluxiones designan la velocidad, y se simbolizan con un punto sobre las variables, o sea, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$,. Los momentos de fluxiones son representados por $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, siendo $o$ una cantidad de tiempo inifinitamente pequeña, por lo

31 D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics,* Dover Publications, Inc., 1948, 1967.

que su producto con la velocidad representa un desplazamiento espacial infinitamente pequeño. Newton procede de la siguiente forma. Supongamos dada una ecuación:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Producimos un desplazamiento infinitesimal, $x + \dot{x}o \quad y + \dot{y}o$. Al substituir en la ecuación original, obtenemos

$$x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}o\dot{x}o + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}o\dot{x}o + axy +$$
$$ay\dot{x}o + a\dot{x}o\dot{y}o + ax\dot{y}o - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}o\dot{y}o - \dot{y}^3o^3 = 0$$

Recordemos que la ecuación inicial es identicamente cero. Se cancela en el lado izquierdo y se dividen los términos restantes por cero,

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} + 3x\dot{x}\dot{x}o - a\dot{x}\dot{x}o$$
$$+ a\dot{x}\dot{y}o - 3y\dot{y}\dot{y}o + \dot{x}^3oo - \dot{y}^3oo = 0$$

Newton prosigue de la siguiente forma. Los últimos seis términos que están multiplicados por cero son casi nada en comparación al resto. Entonces se desprecian y queda la nueva ecuación,

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$$

El lector reconocerá en esta ecuación el resultado de calcular la derivada de las variables x, y respecto al tiempo. El problema reside en que se ha dividido por o suponiendo que esta cantidad no es cero, y al final, se ha evanecido la cantidad cero, como si ella lo fuera. Este enfoque, iniciado primeramente por Fermat y utilizado recurrentemente por Newton, Leibniz y sus seguidores, tenía que afectar los fundamentos del cálculo. De ahí que la pregunta: ¿Una cantidad infinitesimal es cero o distinta de cero? Y más generalmente: ¿Existen los infinitesimales? fue el escenario de las más encendidas y agrias disputas que durante décadas ennegreció el incuestionable progreso que había constituido el cálculo infinitesimal.

## EL OBISPO BERKELEY CONTRAATACA

La más importante y vigorosa exposición de las inconsistencias del naciente cálculo surgió por el lado filosófico, con el ensayo titulado The Analyst, or A Discourse Addresed to an Infidel Mathematician, escrito por George Berkeley (1656-1753), calificado por Cajori como «el punto de partida de toda la discusión filosófica de la nueva matemática, en Inglaterra, durante el siglo dieciocho». Hay una profusa bibliografía al respecto, de las cuales destacamos la de Young[32] y la de Struik,[33] aunque nosotros haremos uso del extenso ensayo filosófico de Robles[34].

Hacia 1734 Berkeley redacta y publica *The Analyst,* que es un ensayo considerado como «el catalizador que inicia el movimiento hacia la búsqueda de los fundamentos lógicos, sólidos y rigurosos del cálculo. Berkeley siente la obligación, pues un amigo suyo le comunica que un amigo común, el dr. Samuel Garth, ha muerto sin recibir los últimos auxilios espirituales y esto debido a la intervención de un matemático, quien convenció al moribundo de que la religión estaba plagada de misterios y sofismas, por lo que no era de confiar. Se asegura que el matemático en cuestión fué Edmund Halley (1656-1742)».[35]

Berkeley se pregunta si los fundamentos de la matemática son más firmes que los de la religión: «Aquel que pueda digerir una segunda o una tercera fluxión, o una segunda o tercera diferencia, no necesita, de veras, sentir pudor de cualquier asunto sobre la divinidad». Y añade: «Uno muy bien puede preguntarse si no sucederá que así como a otros hombres en otras investigaciones, con frecuencia los engañan las palabras o los términos, de igual manera ellos (los matemáticos) resultan maravillosamente engañados y persuadidos por sus propios y peculiares signos, símbolos o variables. Nada es más fácil que idear expresiones o notaciones para las fluxiones y para los infinitesimales de órdenes primero, segundo, tercero, cuarto y subsiguientes procediendo de la misma manera regular sin fin o límite: etc., o bien, *dx, ddx, dddx,* etc.»

32 R. M. Young, Op. Cit.

33 D. J. Struik, *A Source Book in Mathematics 1200-1800,* Princeton University Press, Princeton, New Yersey, 1969.

34 J. A. Robles, *Las ideas matemáticas de George Berkeley, obispo de Cloyne,* Universidad Nacional Autónoma de México, México 1993.

35 J. A. Robles, Op. Cit.

Igualmente, señala inconsistencias en la misma posición de Newton: «Pues suponer una cantidad disminuída infinitamente y rechazarla por tanto es, en efecto, rechazar un infinitesimal; y, ciertamente, se requiere tener una maravillosa agudeza de discernimiento para que seamos capaces de distinguir entre incrementos evanescentes y diferencias infinitesimales. Quizás podría decirse que la cantidad que se está disminuyendo infinitamente se hace nada y (así) nada se rechaza. Pero conforme a los principios aceptados es evidente que ninguna cantidad geométrica puede, por más divisiones o subdivisiones que sea, agotarse o reducirse a nada. Considerando las diversas artes y argucias (devices) que empleó el gran autor del método fluxionario, bajo cuán diversas luces situó sus fluxiones y por cuán diversas formas intentó demostrar lo mismo, uno estaría tentado a creer que él mismo sospechaba de la precisión de sus propias demostraciones y que ninguna noción le agradaba tanto como para apegarse constantemente a ella?»

En uno de sus más célebres pasajes, después de analizar uno a uno los razonamientos matemáticos de Newton, Berkeley concluye con el siguiente demoledor argumento: «Y, en verdad, hay razón para considerar que todos los intentos por establecer sobre un fundamento correcto la abstrusa y fina geometría y evitar la doctrina de las velocidades, momentos, etc., se hallarán impracticables hasta el tiempo en que se comprendan mejor que lo que hasta hoy parecen serlo, el objeto y la finalidad de la geometría. El gran autor del método de las fluxiones sintió esta dificultad y, por tanto, se permitió esas buenas abstracciones y metafísica geométrica sin las que vio que nada podía hacerse conforme a los principios aceptados [?] Ciertamente hay que reconocer que usó las fluxiones como el andamiaje de un edificio, como cosas que había que hacer de lado o eliminar tan pronto como se encontrasen líneas finitas que les fuesen proporcionales. Pero entonces, estos exponentes finitos se encuentran con ayuda de las fluxiones. Por tanto, cualquier cosa que se obtenga mediante tales exponentes y proporciones hay que adscribirlo a las fluxiones las que, por tanto, deben entenderse previamente. Y, ¿qué son estas fluxiones; las velocidades de incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitesimales, ni tampoco nada. ¿No podríamos denominarlos los espíritus de cantidades difuntas?»

Lo que Berkeley critica es la carencia de un fundamento lógico riguroso al cálculo de la época. El acepta las conclusiones verdaderas de los matemáticos y, aunque no ofrece alternativas ante la situación problemática planteada, brinda algunas explicaciones sobre la eficacia del procedimiento. Berkeley no acepta el procedimiento del cálculo que consiste, primero, en introducir los infinitesimales como algo existente, y luego, al final, eliminarlos como si no fueran nada: «Si con vistas a demostrar cualquier proposición se supone algo por medio de lo cual se alcanzan algunas otras cosas y si, posteriormente, lo que supuso se destruye o se rechaza mediante un supuesto contrario, en tal caso, todo lo que se alcanzó con el primer supuesto y fué consecuencia del mismo, debe también destruirse y rechazarse de tal manera que, de ese punto en adelante, no se le suponga más o se aplique en la demostración».

Su explicación de la eficacia del procedimiento, que de todos modos llega a un resultado verdadero, es debido a que se cometen errores por exceso y por defecto. El procedimiento no es muy científico, aunque es util: «Si sólo hubieses cometido un error, no habrías llegado a la solución verdadera del problema. Pero, por virtud de un doble error llegas, si no a la ciencia, sí a la verdad. Pues no puede hablarse de ciencia cuando procedes a ciegas y llegas a la verdad sin saber cómo o por qué medios».

## UNA ETAPA DE VANAS JUSTIFICACIONES

Las certeras críticas de Berkeley tuvieron tan hondas repercusiones, que varios grandes matemáticos de la época escribieron tratados de cálculo con el propósito de eliminar las inconsistencias, entre ellos Maclaurin y d'Alembert. Lagrange, otro de los grandes, intentó en su obra eliminar toda referencia a las diferenciales y a los infinitesimales, haciendo uso de las series de potencias.

Colin Maclaurin, en 1742, escribió un libro en dos volúmenes, *A Treatise of Fluxions,* en cuyo prefacio se siente el impacto producido por la crítica de Berkeley: «Una carta publicada en el año 1734 bajo el título de El Analyst fue lo que originó el siguiente Tratado y varias razones concurrieron para inducirme a escribir tan prolijamente sobre este Tema. El autor de ese texto había representado el Método de Fluxiones como si estuviera fundado en Razonamiento falso y lleno de Misterios. Sus Objecciones parecieron haber sido ocasionadas, en gran medida, por la Manera concisa en la que los Elementos de ese Método se habían descrito usualmente; y que una Persona de sus Habilidades los haya malentendido tanto me pareció una Prueba suficiente de que se requería una mayor Explicación de sus Fundamentos»[36].

El eminente matemático suizo, Leonhard Euler (1707-1783), quien encontró los más espectaculares resultados haciendo uso libre de cantidades infinitas e infinitesimales, no alcanza a explicar satisfactoriamente el método empleado. Esto escribe en su libro *Institutiones calculi differentialis:* «A quienes preguntan qué es en la matemática la cantidad infinitamente pequeña, les respondemos que realmente es = 0. Por tanto, no hay tantos misterios ocultos en este concepto, tal como usualmente se cree que los hay ...» «A fin de mostrar que la cantidad infinitamente pequeña es realmente cero, debemos primero responder la siguiente objeción: ¿por qué no caracterizamos siempre las cantidades infinitamente pequeñas mediante el mismo signo, 0, en lugar de usar símbolos particulares para designarlas?» «Es verdad que dos ceros cualesquiera son iguales, de tal forma que su diferencia es cero; sin embargo, puesto que hay dos métodos de comparación, uno aritmético y geométrico el otro, vemos esta diferencia entre ellos (dependiendo del origen de las cantidades que se comparan): la razón aritmética entre dos ceros arbitrarios es la igualdad, pero no así la razón geométrica. Esto puede entenderse mejor a partir de la proporción geométrica 2:1 = 0:0 en la que el cuarto término = 0 así como el tercero [?] «De aquí que si introducimos en el cálculo infinitesimal un simbolismo en el que denotemos mediante $dx$ una cantidad infinitamente pequeña, entonces $dx = 0$, así como $adx = 0$ (siendo a una cantidad arbitraria finita). A pesar de esto, la razón geométrica $adx : dx$ será finita, a saber, a:1 y ésta es la razón por la que estas cantidades infinitamente pequeñas $dx$ y $adx$ (aun cuando ambas = 0) no pueden confundirse una con la otra cuando lo que se investiga es su razón [?] «De esto se sigue la regla, aceptada por la mayoría de la gente, de que las cantidades infinitamente pequeñas se desvanecen en comparación con las finitas y, así, pueden rechazarse en lo que concierne a tales cantidades finitas».

Euler concluye así esta extensa cita que dejamos a la comprensión del lector: «La objeción de que el análisis de los infinitos olvida el rigor matemático desaparece, pues, de manera automática, ya que nada de lo que se rechaza es otra cosa que nada. De aquí podemos, con buena razón, afirmar

36 Citado por Robles.

que en esta exaltada ciencia es posible mantener el más elevado rigor matemático, tal como el que encontramos en los libros antiguos»[37].

Lagrange, en su *Théorie des fonctions analytiques* (1797), retoma la tesis de la compensación de errores: «Por ejemplo, al ver una curva como un polígono de un número infinito de lados infinitamente pequeños cada uno de ellos y cuya prolongación es la tangente de la curva, se está claramente haciendo una suposición falsa; pero el error se verá corregido en el cálculo por la omisión que allí se hace de las cantidades infinitamente pequeñas. Esto se puede hacer ver fácilmente en ejemplos, pero dar de ello una demostración general, tal vez sería difícil»[38].

Ya vimos que el mismo Leibniz, que además era filósofo, se preocupó profundamente por estudiar los fundamentos de su invención y procedió a independizar la posible existencia de las entidades infinitesimales de la propia justificación y validez del cálculo. La denominada ley de continuidad, que Leibniz enarboló para explicar el paso de las magnitudes finitas a las infinitesimales, la sostuvo como doctrina hasta su muerte[39].

No deja de resultar paradógico que, pasando por encima de sus inconsistencias y de las vanas justificaciones, el cálculo con cantidades infinitesimales e infinitas se desarrollara y convirtiera en la principal herramienta computacional estandarizada del siglo pasado.

## Expulsión de los infinitesimales

Nos hemos concentrado en mostrar que uno de los factores que llevaron a los matemáticos a dejar de lado los infinitesimales atañe a algunas de sus inconsistencias. Pero no es el único factor y posiblemente, no sea el más importante. Discernir los factores que produjeron el giro histórico requiere comprender la matemática como empresa humana. En últimas, esto es lo que más nos interesa mostrar: la matemática es una construcción humana, como todas y cada una de las cosas que construímos, incluyendo la sociedad en que vivimos. Y como en todos los proyectos que la comunidad mate-

37 Citado por Robles.

38 Citado por Robles.

39 C. B. Boyer, Op. Cit.

mática ha emprendido, la construcción del cálculo, desde el punto de vista histórico, ha atravezado períodos exitosos, cada uno con su propio rigor, tomando atajos y enrutándose por otras alternativas históricas; y por supuesto, no estando exenta de crisis y de errores. Esto ocurre con mucha frecuencia en la construción de modelos. El cálculo de Leibniz es un modelo de cálculo. Otro es el de Newton. Y el actual cálculo que se enseña en el aula de clases, que muchos creen que es el del verdadero rigor, también es otro modelo o mucho mejor, otro paradigma.

¿Cuales fueron las causas que llevaron a los matemáticos de la época a cambiar de paradigma? Hay una bibliografía abundante sobre el cambio del modelo infinitesimal a la época actual de la teoría de límites, en lo que ha sido denominado por algunos autores, la época del rigor[40]. De manera muy resumida, queremos relievar el que, a mediados del siglo pasado, grandes pensadores matemáticos se inclinaron paulatinamente por el método de los límites, para darle una base lógica al problema de la continuidad, sin apelar –aparentemente– a las infinitudes. Y en las postrimerías de dicho siglo, una combinación de circunstancias y de tensiones entre tendencias opuestas produjeron una crisis de los fundamentos de las matemáticas, que afectó a la totalidad del sistema.

En la lucha de tendencias, predominaron nuevas teorías –como la Teoría de Conjuntos, de Cantor– se presentaron nuevas construcciones aritméticas –como la Recta Real de Dedekind– y también se acordaron nuevos estándares de rigor, como los que impusieron Bolzano y Weierstrass.

## LA ÉPOCA DEL «RIGOR»

Un conjunto de circunstancias se conbinaron y produjeron un giro histórico en la construcción del cálculo, que ha sido denominado «época del rigor»[41], lo que ha merecido la atención de eminentes historiadores de la matemática, como Morris Kline[42]. Después de un par de décadas de profun-

40 C. B. Boyer, Op. Cit.

41 Y. Grattan-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*, The MIT Press, 1970.

42 M. Kline, *Mathematical Thought, from Ancient to Modern Times*, Tres Volúmenes, Oxford University Press, 1972.

das repercusiones de la obra de Fourier[43], se erigió el concepto de función, como nuevo paradigma. De acuerdo con Euler, una función es una variable determinada por una expresión analítica o fórmula de sumas, productos, raices y demás combinaciones algebraicas o trascendentes –exponenciales, logarítmicas, trigonométricas– de otra variable. «Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, de la manera que se quiera, de la cantidad variable y números o cantidades constantes»[44], establece Euler, y concluye: «De aquí que una función de una cantidad variable, así misma, será una cantidad variable». Y coloca la variable

$$az+b\sqrt{a^2-z^2}$$

como ejemplo de una expresión analítica, o sea, de una función. En cambio, la aparentemente inofensiva asignación que aparece en los libros de texto

$$f(x)=\begin{cases}0 & -1\leq x<0\\ 1 & 0<x\leq 1\end{cases}$$

no podría ser considerada así por Euler, quien describía una función como «la curva que se dibuja sin levantar la mano».

Esta situación cambiará radicalmente a partir de los estudios sobre el calor, que adelanta Fourier[45], quien demuestra que por más arbitraria que parezca la asignación funcional, siempre se puede expresar como serie trignonométrica cuyos valores convergen a los valores asignados por dicha función. De allí que, Fourier exprese una idea verdaderamente revolucionaria: «En general la función *f*(x) representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario ... Nosotros no suponemos que estas ordenadas están sujetas a una ley común; éllos se suceden unos a otros de cualquier manera que sea ...». El desarrollo en serie fue expuesto por Fourier con los estándares de rigor de la época, ya que, como posteriormente fue aclarado, la asignación no puede ser demasiado arbitraria. En la actualidad, el resultado obtenido por Fourier se expresa matemáticamente

43 J. B. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur, 1822*. Traducido por A. Freeman, Cambridge, 1878. *The Analytical Theory of Heat*, Dover Publications, Inc., New York, 1955.

44 L. Euler, *Introduction to Analysis of the Infinite*, Book I, Springer–Verlag, New York Inc., 1988

45 J. B. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur, 1822*. Traducido por A. Freeman, Cambridge, 1878. *The Analytical Theory of Heat*, Dover Publications, Inc., New York, 1955.

así: dada *x(t)* cualquier asignación de valores en el intervalo [-T, T], entonces, a dicha función se le asocia la serie,

$$x(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(2\pi t \frac{k}{2T}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k sen\left(2\pi t \frac{k}{2T}\right)$$

donde

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} x(t)\cos\left(2\pi t \frac{k}{2T}\right)dt,$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} x(t)sen\left(2\pi t \frac{k}{2T}\right)dt.$$

La serie asociada se denomina serie real de Fourier de *x(t)*, y *a* se denominan coeficientes reales de Fourier[46]. Fourier llegó a pensar que la serie siempre convergía a dicha función, lo que pronto fue refutado por Dirichlet[47], quien precisó con gran rigor que se requieren algunos criterios para que la igualdad pueda establecerse. Aún hoy, es un problema formidable dar una condición sobre *x(t)* para que la serie asociada sea convergente a dicha función. Cuando ello se garantiza, se dice que la función periódica *x(t)* se desarrolla en serie real de Fourier. En 1829 Dirichlet dio la versión definitiva de lo que se conoce hoy en día como función: y es una función de x cuando a cada valor de x en un intervalo dado le corresponde un único valor de y. Colocó como ejemplo de asignación arbitraria, lo que hoy se conoce como «Función de Dirichlet» que le asigna 1 a los racionales y 0 a los irracionales[48].

La transición entre los dos conceptos de función también está asociada a dos eminentes matemáticos. Cauchy y Riemann. Este último exhibió funciones con infinitos máximos y mínimos, que ni siquiera son integrables, entendiéndose integrables en el sentido de lo que hoy se conoce como la Integral de Cauchy Riemann. En sus lecturas, Riemann dio un ejemplo de

46 H. P. Hsu, *Analisis de Fourier,* Fondo Educativo Interamericano,1970.

47 C. Lanczos, *Discourse on Fourier Series,* Hafner Pub. Co., 1966.

48 M. Kline, *Mathematical Thought, from Ancient to Modern Times,* Tres Volúmenes, Oxford University Press, 1972.

función continua que no es diferenciable en ninguno de sus puntos, lo que su momento se consideró una verdadera patología.

Cauchy, además de sus grandes contribuciones a la matemática aplicada y al análisis de la variable compleja, logró penetrar de manera profunda en la naturaleza de la relación funcional y el cálculo con infinitesimales. En su Análisis Algebraico, que es la Primera Parte de su *Curso de Análisis*[49], Cauchy comienza su texto al igual que Euler y su *Introductio in Analysin Infinitorum,* con las consideraciones generales sobre las variables y funciones. Así, «Se llama cantidad variable a aquella que recibe sucesivamente varios valores diferentes los unos de los otros», y concluye: «Cuando los valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acabará por diferir de éste tan poco como se quiera, este último se llamará el límite de todos los demás». De modo que, para Cauchy, al concepto de variable está asociado el de sucesión y de límite. Y también, al concepto de función, está asociado el de asignación: «Para que una función de una sola variable esté completamente determinada, es necesario y suficiente que de cada valor particular atribuido a la variable se pueda deducir el valor correspondiente de la función». Cauchy llama simples a aquellas consideradas por Euler expresiones «analíticas» generalizando el concepto de función.

En relación al uso de infinitesimales, Cauchy introduce una modificación fundamental al enfoque leibniziano: «Decimos que una cantidad variable deviene infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de manera a converger hacia el límite cero». Cauchy distingue las cantidades infinitamente pequeñas por sus órdenes, lo que tiene una enorme aplicación, como veremos en su momento. A partir de estos conceptos, Cauchy define continuidad local de funciones, y luego, derivadas e integrales, en la Segunda Parte del Curso de Análisis denominada Lecciones sobre el cálculo infinitesimal.

En resumen, con las pruebas rigurosas sobre la convergencia de las series de Fourier adelantadas por Dirichlet, se logra una comprensión profunda de la naturaleza de la función. Y en efecto, la definición clásica de Euler fue sustituida –no sin una ardua polémica– por el nuevo concepto de función como asignación arbitraria de valores del dominio en valores del

49 A. L. Cauchy, *Curso de Análisis, [1821], Mathema,* Facultad de Ciencias, UNAM, 1994.

rango, sobre lo que abunda la bibliografía[50]. Este proceso de aritmetización del cálculo, o sea, de reducción de los principios del análisis a los más simples conceptos aritméticos, que separa a la matemática clásica de la matemática moderna, iniciado por Bolzano y luego Cantor, alcanza su máxima expresión en la fundamentación rigurosa del concepto de continuidad y de límite, con Dedekind y Weierstrass, entre otros.

## CONTINUIDAD Y LÍMITE

Bolzano[51] introduce, por primera vez, una concepción sobre el infinito que rompe una tradición milenaria, que ha sido la de reconocer el infinito como un atributo potencial de las magnitudes: siempre que se de una cantidad, hay otra cantidad mayor que la primera. Este infinito potencial fue sostenido así desde Euclides: hay más números primos que cualquier colección de números primos dada. El propio Gauss, en una carta a Schumacher[52], escrita en 1831, muestra el tono de la época: «Debo protestar muy vehementemente contra tu uso del infinito como algo consumado, porque esto jamás está permitido en la matemática. El infinito no es sino una figura del lenguaje ...». Ahora, con las investigaciones de Bolzano, el infinito adquiere estatus de infinito actual, o sea, como propiedad de los conjuntos o agregados: existen conjuntos infinitos. Para ello, Bolzano introduce la revolucionaria idea de que un conjunto es infinito, si se puede poner en correspondencia biunívoca con alguna de sus partes. Así, por ejemplo, el conjunto $N$ de los números naturales constituyen un agregado infinito, ya que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números pares, que es un subconjunto propio de $N$. Este ejemplo de un conjunto que puede ponerse en correspondencia con una de sus partes se remonta a Galileo, quien en boca de Salviati le demostró a Simplicio que «hay tantos números cuadrados como números, ya que son tantos como sus raices, y raíces son todo los números»[53]. Bolzano colocó las ideas germina-

50 A. F. Monna, «The concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue», *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 9, No. 1-5, 1972/73.

51 B. Bolzano, *Paradoxien Des Unendlichten, 1851, Las paradojas del Infinito,* Mathema, Facultad de Ciencias, UNAM, 1991.

52 T. Dantzig, *Number, The Language of Science,* The Free Press, The Macmillan Pub., Co., Inc., New York, 1954.

53 G. Galilei, *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias,* [1636], Editora Nacional, Madrid, España, 1981.

les para la construcción de una Teoría de Conjuntos por Georg Cantor[54], calificada por el historiador Bell como «la única matemática genuina desde los griegos»[55].

Como es universalmente conocido, es de la autoría de Cantor los números transfinitos, con sus cardinales y ordinales, la no numerabilidad de la recta real y la hipótesis del continuo, entre otros. Es menos conocida la profunda transformación que la teoría de Cantor produjo al introducirse y crecer en los principales campos de la matemática, modificando el desarrollo de las estructuras abstractas del álgebra, la lógica, los espacios, y posteriormente, la topología. Y es mucho menos familiar al lector lo paradógico que resulta la posición de Cantor ante los infinitesimales, los que le parecían francamente aberrantes y por tanto, inaceptables. Cantor, quien dio vida a los números transfinitos, no permitía siquiera que se hablara en broma de los números infinitamente pequeños. Ante la pregunta: ¿tienen existencia actual los infinitesimales? Eminentes matemáticos, contemporaneos a Cantor, como Paul du Bois-Reymond, respondían afirmativamente, e intentaron darles un estatuto teórico, similar al de los números transfinitos[56] los que, a su juicio, justificaban intrínsecamente la existencia de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande. Para el formalismo de Cantor, que sostenía la hipótesis del continuo –el primer cardinal no numerable– en una recta real donde sólo caben racionales e irracionales, introducir nuevos elementos de órden infinitesimal lo llevaría a serias inconsistencias, por lo que este tema espinoso lo tomaba tan en serio como la cuadratura del círculo.

## LA RECTA REAL

La construcción de la recta real es obra de Dedekind[57]. En efecto, este eminente matemático se propone extender el conjunto de los números racionales a un conjunto mayor, el de los reales, de modo que a cada real se le asocie un único punto de la recta geométrica y ésta quede completamente

54 G. Cantor, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers,* [1915], Dover Publications, Inc., New York, 1955.

55 C. B. Boyer, Op. Cit.

56 J. W. Dauben, Georg Cantor, *His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, 1979.

57 R. Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers,* Dover Publications, Inc. New York, [1901], 1963.

cubierta por los reales. Para ello, Dedekind procede de un modo más general, definiendo lo que significa un conjunto totalmente ordenado A y una partición ordenada en dicho conjunto, que consiste en dos subconjuntos P y Q de A, tales que su unión es A, su intersección es vacía, y cada elemento del primero es menor que cada elemento del segundo. La partición P y Q genera un salto, si P tiene un último elemento y Q tiene un primer elemento. Y genera un agujero, si P no tiene un último elemento ni Q tiene un primer elemento. El conjunto A se dice continuo si no existe partición alguna que le genere saltos ni agujeros. A partir de aquí, Dedekind construye los números reales mediante particiones de los racionales –llamadas cortaduras de Dedekind– que es algo así como llenar los agujeros que dejan los racionales, con números irracionales. Esta construcción no deja lugar a la existencia de otros números que no sean racionales o irracionales, lo que se constituye en el certificado de defunción de los infinitesimales.

Otro exponente del rigor de la época es Karl Weierstrass, profesor desde 1856 y durante treinta años, de la Universidad de Berlín. Su razonamiento extremadamente cuidadoso y preciso ha pasado a la historia como «rigor weiestrassiano». Weierstrass define, con el mayor cuidado del mundo, el límite de una sucesión y de una función, la continuidad de una función, la convergencia de las sucesiones y series de funciones, imponiendo los famosos épsilon y deltas como la política oficial que dominará en las matemáticas en los siguientes cien años.

A partir de Weierstrass, la versión oficial de la convergencia es la siguiente, como puede verificarse en los actuales libros de texto. La sucesión de valores reales $\{a_n\}$ se dice que converge a $A$ si dado cualquier $\in$ por pequeño que sea, existe un índice $n$ de la sucesión tal que, a partir de los índices $k$ mayores que ese $n$ la distancia de dichos términos de la sucesión con $A$ son menores que ese $\in$. De un modo más preciso, se dice que $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ cuando es verdadero el enunciado,

$$(\forall \in)(\exists n)(\forall k)(k > n \to |a_k - A| < \in)$$

Similarmente, dada una función *f(x)* de valores reales y un real a no necesariamente en su dominio, se dice que la función tiene como límite a A y se escribe $\lim_{x\to a} f(x) = A$ si ocurre que

$$(\forall \in)(\exists \delta)(o < |x-a| < \delta \to |f(x) - A| < \in)$$

Con la teoría de límites se logra recontextualizar el cálculo diferencial e integral originario en Leibniz y Newton, mostrando una solución radicalmente distinta a la diferencial y a la integral leibniziana: la doctrina oficial definirá la derivada como límite de un cociente y a la integral como límite de unas sumas parciales. Por ejemplo, la derivada de la función deviene en límite del llamado cociente de Newton,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Así mismo, se precisa el otro concepto fundamental del cálculo: la integral de la función. Barrow, Newton y Leibniz, en su época, encontraron –y utilizaron– la relación inversa entre la derivada o diferencial, y la integral. Para Newton, la integral es la fluente de una determinada fluxión, mientras que para Leibniz es la variable que se expresa como suma de diferencias –a escala infinitesimal– de otra determinada variable. En cambio, Cauchy establece el concepto de integral definida como límite de una suma parcial de una función continua. Posteriormente Riemann, después de una profunda reflexión sobre la convergencia de las series de Fourier, inventó la integral de Riemann –el integrando no necesariamente requiere ser continuo– lo que culminará con los trabajos sobre teoría de la medida conocida ahora como integral de Lebesgue.

## CRISIS DE LOS FUNDAMENTOS

Al finalizar el siglo, estalla la denominada crisis de los fundamentos, que durará varias décadas y de la que surgen como tendencias de la comunidad matemática el logicismo, el formalismo y el intuicionismo[58]. Es indudable que este es un contexto donde la matemática se enriquece y cobra su dimensión moderna, pero respecto al cálculo, como lo concibieron sus fundadores, el daño está hecho: los infinitesimales no cuentan.

Lo que se logra en rigor, se pierde en comprensión, como bien lo reconoce un familiar autor cuando afirma: «La experiencia muestra que los estudiantes no tienen la base psicológica adecuada para aceptar un estudio teórico de los límites y se resisten de manera formidable» y termina excla-

58 F. Vera, *Puntos Críticos de la Matemática Moderna*, Editorial Lozada, S.A., Bs. As., 1944.

mando: «Mi opinión es que la épsilon-delta debería quedar completamente fuera de un curso ordinario de cálculo»[59].

Resulta paradógico que el rigor que se introduce con el límite no lo sea tanto. El propio límite parecería ser un pseudoconcepto, ya que no existe como tal, sino como «límite de algo». Así, se define el límite de una sucesión, el límite de una función, el límite de sumas parciales genereradas por una partición, etc. Adicionalmente, el lenguaje épsilon-delta que se resume en la frase «para todo épsilon existe delta», superpone una formulación lógica en la estructura numérica, por el uso inevitable de los cuantificadores universales y existenciales. O sea que la resistencia de los estudiantes a comprender el «concepto» de límite, no sólo tiene una base psicológica y cognitiva, sino que es relativa a la arena movediza que está en la base del propio concepto de límite.

Una pregunta que surge de todo esto es: ¿por qué oponer radicalmente el límite a lo infinitesimal? ¿Acaso Cauchy no hacía uso de ambos términos? No es extraño entonces que eminentes matemáticos, preocupados por vincular el aspecto teórico al didáctico, hayan seguido el camino conciliatorio de Cauchy en sus textos. Los matemáticos rusos son un ejemplo de esta tendencia, como lo comprueba la obra de Aleksandrov, Kolmogorov y Lavrent'ev[60], y las cartas, que al final mencionaremos, de Luzín a Vygodskii[61].

Como ni siquiera la construcción matemática está exenta de pasión, la época denominada del rigor deja sentir un sabor inquisitorial en el esfuerzo por expulsar del paraiso matemático a las cantidades infinitamente pequeñas, cuyo único pecado era, precisamente, ser infinitesimales.

## REMINISCENCIAS INFINITISTAS

En el largo interregno transcurrido entre los fundadores del cálculo y nuestros contemporáneos, ¿que se hicieron los «espíritus de cantidades difuntas»?. Los conceptos infinitesimalistas se adhirieron a las dos áreas fun-

59 S. Lang, *Cálculo,* Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.

60 A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev, *Mathematics, Its Content, Methods, and Meaning,* The MIT Press, 1989.

61 N. N. Luzín, Cartas, "The evolution of ...", *The Mathematical association of America,* Monthly 107, january 2000.

damentales del cálculo, el *cálculo diferencial* y *el cálculo integral*. Y pese a los esfuerzos que se hicieron para desembarazarse de estos entes molestos, la matemática siguió haciendo uso de ellos.

Respecto al cálculo diferencial, ni siquiera el apellido *diferencial* de esta área ha podido dejarse de lado. Mucho menos el concepto de diferencial y las famosas notaciones leibnizianas *dx, dy,* cuyo cociente leibniziano

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

se mantiene, con la salvedad que hacen algunos autores, de que la parte izquierda es simbólica, ya que la «verdadera» entidad matemática es la derivada, que es la de la derecha. Curiosamente, siguiendo a Cauchy[62], las diferenciales se han aparejado con las derivadas, produciendo la extraña mezcla

$$dy = f'(x)dx$$

tan familiar en los libros de cálculo.

A propósito, la casi totalidad de los libros de cálculo se denominan Cálculo Diferencial e Integral, y utilizan copiosamente la notación infinitesimal –incluso, muchos libros se denominan Cálculo Infinitesimal[63]– aunque sus autores directamente expresan que las diferenciales no son, en realidad, infinitesimales. En relación al cálculo integral, la situación es mucho más dramática y afecta cotidianamente la ejecución de los programas curriculares. La notación universal

$$\int_a^b f(x)dx$$

es fiel copia de la notación original de Leibniz. Como ya hemos visto, para Leibniz esta expresión no es meramente simbólica, pues literalmente su contenido significa la operación de suma infinita de las áreas infinitesimales *f(x)dx*, donde *f(x)* es la altura del rectángulo cuya base es *dx*. Como todos los esfuerzos por expulsar esta notación han sido inútiles, en el aula de

---

62 Boyer, Op. Cit.

63 M. Spivac, *Cálculo Infinitesimal*, versión española, Ed. Reverté, S.A. 1978.

clase se ha legalizado este contrabando leibniziano, hasta el extremo de lo cómico, pues mientras el profesor dibuja las áreas infinitesimales leibnizianas, aclara que lo que está dentro de la integral es sólo un signo cuyo significado es la integral de Riemann o de Lebesgue.

El famoso libro de Courant y Robbins[64], que reconoce la gran contribución de Leibniz en el aspecto notacional, ataca frontalmente el lenguaje infinitesimalista: «Aunque lo infinitamente pequeño ejerce una cierta atracción para las almas especulativas, no ocupa ningún lugar en las matemáticas modernas. No se sirve a ningún propósito útil rodeando la clara noción de la integral con una neblina de frases sin sentido»[65]. Y también: «De cualquier manera, tuvieron que pasar casi cien años después de Newton y Leibniz para que fuera reconocido que el concepto de límite y nada más que eso es la verdadera base para la definicíon de la integral»[66]. Después de ocuparse extensamente del tema, lo autores concluyen: «... las diferenciales como cantidades infinitamente pequeñas son ahora deshonrosamente descartadas...».

Resumiendo, una de las consecuencias más notorias –y negativas, desde nuestro punto de vista– es que, al fundarse el análisis moderno, con Gauss, Cauchy, Bolzano, Dedekind, Weierstrass, Cantor, Riemann y Lebesgue, entre muchos grandes talentos, se descartó drásticamente el cálculo basado en infinitesimales, al cual se le opuso, como modelo antagónico, la teoría de los límites y la convergencia, con sus famosos épsilons y deltas, como se la conoce hoy, que se normatizaron en el aula de clase y que constituyen la doctrina oficial del cálculo.

Esta doctrina oficial sufrió un rudo golpe a inicios de la década de los 60, cuando uno de los más prominentes matemáticos del siglo, Abraham Robinson, reinventó una nueva teoría, que produjo el renacimiento de los infinitesimales.

64 R. Courant, H. Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, 1941.

65 Ibid, página 404.

66 Ibid, página 404.

## EL ANÁLISIS NO ESTÁNDAR

Desde la publicación del principal libro de Robinson,[67] el análisis matemático no es el mismo. Según el eminente historiador y su principal biógrafo, J. W. Dauben,[68] Robinson descubrió y desarrolló el análisis no estándar como una teoría rigurosa de los infinitesimales que une la lógica matemática con el gran cuerpo de la historia y la matemática moderna.

La denominación de no estándar a la teoría de Robinson, parte del reconocimiento de que ya se ha impuesto un análisis oficial, convencional ó estándar. La teoría va mucho más alla de los infinitesimales, pues su construcción utiliza lo que se conoce en lógica matemática como Teoría de Modelos. Básicamente, se definen lenguajes formales y se estudian estructuras matemáticas en las que dichos lenguajes son interpretados. Correspondientes a algunas fórmulas del lenguaje, se construyen modelos. Por ejemplo, el campo de los hiperreales es un modelo en el que se cumplen ciertas fórmulas que definen a los infinitesimales. Este enfoque lógico constituye –por ahora– un área sólo para especialistas en la materia, que debe ser brevemente descrita, dada sus revolucionarias consecuencias.

Robinson le otorga crédito a las ideas germinales del renombrado lógico Thoralf Skolem, quien en 1934 demostró que el sistema de los números naturales no podía ser caracterizado por ningún conjunto que tuviese sus mismas propiedades aritméticas, que fuesen formuladas en el cálculo de predicados de primer orden[69]. Concretamente, Skolem señaló lo siguiente: «La serie numérica está completamente caracterizada [?] por los axiomas de Peano, si consideramos el concepto «conjunto» o «función proposicional», como algo dado por adelantado, con un significado absoluto, independiente de todos los principios de generación o axiomas. Pero si se desea llevar a fondo el tratamiento axiomático, también, el razonamiento con conjuntos o con funciones proposicionales, entonces es imposible la caracterización única o completa de la serie numérica»[70].

---

67 A. Robinson, *Non-Standard Analysis,* North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1966, Revised edition, 1974.

68 J. W. Dauben, Abraham Robinson. *The Creation of Nonstandard Analysis, A personal and Mathematical Odyssey,* Princeton University Press, 1995.

69 W. A. J. Luxemburg, Prólogo al libro de Robinson.

70 Citado por Robles, página 347.

El resultado de Skolem causó una gran sorpresa, ya que se pensaba que los Axiomas de Peano para la aritmética tenían una naturaleza categórica. Skolem, en cambio, construyó una extensión propia de los números naturales que satisfacía todas las propiedades de los naturales expresables mediante las operaciones de adición y multiplicación. En otras palabras, Skolem construyó el primer ejemplo explícito de lo que ahora se llama modelos no estándares de la aritmética. Todo aquel que ha llevado un Curso de Cálculo sabe que éste comienza con los números naturales, de éstos se pasa a los enteros, luego a los racionales, y se procede a extender el sistema numérico con los irracionales y, en general, a los reales, con sus funciones, sus derivadas e integrales. En este glosario, los números infinitesimales e infinitamente grandes están omitidos, por supuesto. Si, de acuerdo a Skolem, hay un conjunto de enteros no estándar, es posible intentar proseguir como antes, haciendo extensiones a racionales no estándares y reales no estándares, con funciones no estándares, etc. El primer paso para la revolución numérica estaba dado.

## SE RECUPERA LA HONRA

En su Prefacio, Robinson dice lo siguiente: «En el otoño de 1960 se me ocurrió que los conceptos y métodos de la Lógica Matemática contemporanea son capaces de proveer un marco adecuado para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral por medio de los números infinitamente grandes e infinitamente pequeños»[71]. En el capítulo final de su libro[72], Robinson reivindica la idea original leibniziana del uso de cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes como elementos ideales, gobernados por las mismas leyes que las cantidades finitas, y sin embargo, aunque ficciones, extremadamente útiles para la invención, el descubrimiento y la construcción matemática.

Y podría parecer sorprendente que Robinson como Leibniz, tampoco cree en la existencia de totalidades infinitas. Al respecto, en uno de sus más interesantes escritos sobre aspectos conceptuales de la fundamentación de la matemática, nos dice: «Mi posición acerca de los fundamentos de la matemática se basa en las siguientes dos observaciones o principios:

71 Robinson, Op. Cit.

72 «Concerniente a la Historia del Cálculo», Robinson, Op. Cit.

«Las totalidades infinitas no existen en ningún sentido de la palabra (esto es, sea de manera realista o en idea). De manera más precisa, cualquier mención o supuesta mención de totalidades infinitas es, literalmente, carente de significado. «Sin embargo, hemos de continuar la tarea de la matemática «como siempre», esto es, hemos de actuar como si realmente existiesen las totalidades infinitas»[73].

Y también: «Me siento totalmente incapaz de captar la idea de una totalidad infinita en acto. A mí me parece que hay un abismo insalvable entre conjuntos o estructuras de uno, dos o cinco elementos, por una parte, y estructuras infinitas por la otra o, más precisamente, entre términos que denotan conjuntos o estructuras de uno, dos o cinco elementos y términos que pretenden denotar conjuntos o estructuras cuyo número de elementos es infinito»[74]. Y concluye, «Se sigue que debo considerar como carente de significado una teoría que se refiere a una totalidad infinita, en el sentido de que sus términos y oraciones no pueden poseer la interpretación directa, en una estructura en acto, que deberíamos esperar que tuvieran por analogía con situaciones concretas (p. ej. empíricas). Esto no es decir que, por tanto, una teoría así es inútil o que carece de importancia»[75].

De modo que el sentido del proyecto de Robinson es otro distinto a reinventar ideas extravagantes sobre el infinito. Se trata de una recontextualización de la lógica y del análisis, a los que se le imprime una nuevo sentido. Para comprender hacia adonde se dirige el análisis matemático en el futuro, dejémonos guiar por Kurt Gödel, quien en 1973, después de escuchar una conferencia de Robinson en 1973, en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, expresó lo siguiente: «Me gustaría señalar un hecho que me parece muy importante, aunque no haya sido explícitamente mencionado por el profesor Robinson, a saber, que el análisis no estándar simplifica frecuentemente las pruebas no sólo de teoremas elementales, sino también de resultados profundos. Por ejemplo, eso ocurre con la prueba de la existencia de subespacios invariantes para operadores compactos, dejando de lado el progreso en el resultado; y ocurre en otros casos aún en mayor medida. Esta situación debiera impedir la errónea y extendida consideración del análisis no estándar como una especie de extravagancia o

73 Citado por Robles, página 360.

74 Ibid, página 361.

75 Ibid, página 362.

moda de los lógicos matemáticos. Nada más alejado de la verdad. Más bien hay buenas razones para creer que el análisis no estándar, en una versión o en otra, será el análisis del futuro». «Una razón es la simplificación ya mencionada de las pruebas, pues la simplificación facilita el descubrimiento. Otra razón, todavía más convincente, es la siguiente: la aritmética empieza con los números naturales y procede mediante la ampliación sucesiva del sistema numérico con los números racionales, negativos, irracionales, etc. Pero el paso completamente natural después de los números reales, a saber, la introducción de los infinitesimales, ha sido simplemente omitido. Pienso que en los siglos venideros se considerará como algo sumamente extraño en la historia de la matemática que la primera teoría exacta de los infinitesimales se desarrollase 300 años después de la invención del cálculo diferencial. Estoy inclinado a creer que esta rareza tiene algo que ver con otra rareza relativa a la misma época, concretamente al hecho que tales problemas como el de Fermat, que pueden ser enunciados con diez símbolos de la aritmética elemental, son aún insolubles 300 años después que ellos han sido propuestos. Tal vez la omisión mencionada es grandemente responsable del hecho que, comparada al enorme desarrollo de las matemáticas abstractas, la solución de problemas numéricos concretos ha quedado muy rezagada»[76].

Las ideas de Robinson están influyendo poderosamente en la época. Existen métodos no estándares desde la lógica más abstracta hasta la educación matemática dirigida al aula de clase; la estadística y la probabilidad; el análisis funcional y las ecuaciones diferenciales; la física matemática, la teoría computacional de grupos, el análisis no lineal y muchos más. Es interesante que en la reciente edición del libro de Courant y Robbins, revisada por Y. Stewart[77], como una rectificación al tratamiento injusto que le dieron a las ideas infinitesimalistas, se incluya ahora un tema completo sobre el analisis no estándar.

76 Citado por Robinson, Prefacio a la Segunda Edición, Op. Cit.

77 R. Courant, H. Robbins, *¿What is Mathematics?* Revised by Y. Stewart, Oxford University Press, 1996.

## TENDENCIAS DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

El cálculo infinitesimal, o sea, el cálculo con infinitamente grandes e infinitamente pequeños, después de Robinson, se despliega en varias tendencias, de las cuales es prematuro –e innecesario– hacer un balance, aunque conviene presentar una cierta ilustración.

A partir de la construcción teórica de Robinson, se insinúan varias direcciones de investigación, que de una u otra forma repercuten en el aula de clase. Destacamos, en primer lugar, la que se ha delineado desde Nelson[78], que consiste en insertar tres nuevos axiomas en la teoría axiomática de los conjuntos de Zermelo-Fraenkel cuyas siglas son ZFC. Surge así la Teoría Interna de Conjuntos IST. Esta construcción tiene varios seguidores, como Robert[79] y varios otros exponentes en Francia quienes han editado textos escolares que sirven de base a cursos de cálculo.

Hay métodos de construcción de la recta no estándar, como los de Hurd-Loeb[80] y Lindstrom,[81] quienes obtienen el campo de los hiperreales –con tres tipos de cantidades, reales ordinarios, reales infinitos e infinitesimales– utilizando sucesiones numerables de reales ordinarios, identificadas entre sí mediante ultrafiltros. La idea es la siguiente: dos sucesiones se consideran equivalentes si el conjunto de subíndices en que difieren sus términos no es elemento del ultrafiltro. Con esta relación de equivalencia y las operaciones obvias de suma y producto de sucesiones, esta estructura es un campo linealmente ordenado, extensión del campo de los números reales, en el cual se hace extensivo el concepto de función y demás relaciones; en dicho sistema numérico se hace cálculo diferencial e integral como propuso Robinson, sin utilizar límites.

Algunas construcciones de cálculo infinitesimal las une el Principio de Transferencia, que significa que toda fórmula válida en los reales ordinarios se acepta válida en el nuevo modelo no estándar. Bajo este principio, una gran cantidad de resultados largos o tediosos del análisis clásico son demos-

78 E. Nelson, «Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis», *Bol. of the American Mathematical Soc.*, Vol. 83, Nov. 6, 1977.

79 A. Robert, *Analyse non standard (1985), Nonstandard Analysis,* John Wiley & Sons, 1988.

80 A. E. Hurd, P. A. Loeb, *An Introduction to Nonstandard Real Analysis,* Academic Press, Inc. 1985.

81 T. Lindstrom, *An Invitation to Nonstandard Analysis –Nonstandard Analysis and its Applications–,* Edited by N. Cutland, Cambridge University Press, 1988.

trados con una gran simplicidad y elegancia. Desde el punto de vista cognitivo, no es nada claro que estos métodos sean más atractivos en el aula de clase que los tradicionales; por el contrario, por su alto nivel de abstracción lógica, son inaccesibles para los físicos, los ingenieros y la gran mayoría de los estudiantes de licenciaturas, aunque varios autores hacen un esfuerzo de popularización en el pregrado y en ciertas instituciones de enseñanza básica, como se nota en Henle y Kleinberg[82].

Un debate que se dio en la Rusia de 1930, seguramente arrojará más luz sobre el problema de la enseñanza del cálculo moderno y el uso de infinitesimales. Recientemente, se conocieron las Cartas[83] que escribió el gran matemático ruso Luzín a Vygodskii –no el psicólogo, sino el matemático– a propósito de su libro sobre los Fundamentos del Cálculo Infinitesimal. Luzin le apoya su idea de enseñar el cálculo con infinitesimales, los que considera científicamente sustentables, contra la inclusión del concepto de límite, al que reconoce le produjo siempre una aversión, desde el punto de vista cognitivo. Hoy en día, algunos consideran que Luzín y Vygotskii se adelantaron unas décadas a la fundación del análisis no estándar.

Esta es precisamente la tendencia que nos interesa relievar, la que se orienta hacia la educación matemática, o sea que su énfasis es el proceso de enseñanza-aprendizaje, en el que se usa el análisis no estándar como herramienta. La idea es que, sin dejar de lado las construcciones lógicas o conjuntistas antes mencionadas, el renacimiento de los infinitesimales en la educación matemática combine varias metodologías con un objetivo cognitivo y didáctico. Este esfuerzo puede percibirse en cierta medida en Keisler[84] y en el mismo Henle y Kleinberg. Esta labor se encuentra reforzada por los grupos de investigación en México, con Imaz[85] y en Colombia con Takeuchi,[86] entre otros. La propia denominación de la actividad, el Cálculo Infinitesimal, que retoma las ideas originales de Leibniz y Newton, reafirman la inclinación de esta metodología.

82 J. M. Henle, E. M. Kleinberg, *Infinitesimal Calculus*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 1979.

83 N. N. Luzín, Cartas, "The evolution of ...", *The Mathematical association of America*, Monthly 107, january 2000

84 H. J. Keisler, *Elementary Calculus, Prindle*, Weber & Schmidt, Inc., 1976.

85 C. Imaz, «Infinitesimal models for Calculus», *Bol. Sociedad Matemática Mexicana*, Vol. 29, 2, 1984.

1 Y. Takeuchi, *Teoría de funciones no estandar*, Depto. de Matemática y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, 1983.

Capítulo 2

# El sistema numérico hiperreal

Como hay que comenzar por el principio, lo primero es el *número*. Todo cálculo tiene en su base un sistema numérico, o sea, un conjunto de números con operaciones y relaciones entre éllos, sobre el que se erigen y asocian los elementos que constituyen dicho cálculo. ¿Cuáles son nuestros números?. En los libros de cálculo es familiar hacer referencia a los números enteros Z, racionales Q y reales R, conocidos todos ellos con el nombre popular de *cantidades*. Pero, estas son estructuras aritméticas de baja complejidad. Se trata de incursionar ahora en un sistema de mayor complejidad, conocido con el nombre de sistema numérico hiperreal.

## OTROS NÚMEROS DISTINTOS DE LOS REALES ORDINARIOS

Es universalmente aceptado que la base numérica de los modelos infinitesimales de cálculo es el campo de los números reales extendidos, también llamada la *recta hiperreal* *R. Es inevitable colocarle el nombre de *hiperreal* para distinguirlo del más familiar nombre de *reales,* aunque a éstos se les puede llamar *reales ordinarios* y a aquellos se les podría denominar, genéricamente, reales. Llamarlos hiperreales es una cuestión temporal y provisional, porque en la medida en que sean adoptados en el aula de clase como un modelo viable, se les denominará a secas: números reales.

El conjunto *R es un campo totalmente ordenado, organizado como estructura aritmética, donde cohabitan tres tipos de números: los *infinitesimales* o infinitamente pequeños; los *finitos*, entre los cuales se encuentran los reales ordinarios; y los *infinitos*, entre éllos, los *enteros infinitos*, también conocidos con el nombre de *hiperenteros infinitos*. Estas cantidades y las operaciones aritméticas y funcionales que sobre ellas se erigen –suma, resta, multiplicación, división, raices y potencias, exponenciales y logaritmos, funciones trigonométricas, etc.– difieren de manera drástica del manejo convencional y tradicional que se conoce sobre los números reales que se enseñan en el aula de clase, que aquí siempre llamaremos *reales ordinarios*.

En el área de la matemática conocida como *Análisis no Estándar*[1], hay varias construcciones de $^*R$. Nosotros inicialmente consideraremos a $^*R$ como un conjunto dado, que es extensión de los reales ordinarios R, esto es, supondremos que existe un campo totalmente ordenado $^*R$ tal que $R \subset {}^*R$. Obviamente, más adelante indicaremos varios modos de su construcción, entre las cuales hay algunos enfoques conjuntistas[2]. También hay presentaciones de corte analítico[3], y otras que tienen un cierto sabor didáctico[4]. A aquellos escépticos de que se puedan manipular los hiperreales –o reales, a secas– con la misma seguridad como se usan los reales ordinarios, les advertimos que cualquier esfuerzo teórico por encontrarles una inconsistencia es inutil: ha sido demostrado que en su construcción, la intuición y el más exigente rigor es perfectamente compatible[5].

## INFINITOS E INFINITESIMALES

Aceptar que existe un campo totalmente ordenado $^*R$ tal que $R \subset {}^*R$ tiene profundas consecuencias lógicas y aritméticas. Como R es parte propia de $^*R$, ya contamos con un tipo de cantidad, que es la que siempre llamaremos reales ordinarios. Pero como existe al menos un elemento $^*r$ de $^*R$ que no es elemento de R, entonces es posible extraer algunas conclusiones sobre este extraño elemento. Por brevedad, como $^*r$ no puede ser 0, vamos a suponer $^*r > 0$. ¿Habrá un real ordinario u que esté comprendido entre 0 y $^*r$, esto es, que cumpla la condición $0 < u < {}^*r$? Si no lo hay, entonces $^*r$ es menor que todo real ordinario, y esto es precisamente lo que se denomina *infinitesi-*

1 Robinson A. *Non-Standard Analysis*, North-Holland Pub. Co. Amsterdam, 1966. Revised edition, 1974.

2 Robert A. *Analyse non standard (1985), Nonstandard Analysis*, John Wiley & Son, 1988

3 Takeuchi Y., *Métodos analíticos del análisis no estándar*, Universidad Nacional de Colombia, 1988.

4 Henle J. M., Kleinberg E. M. *Infinitesimal Calculus*, MIT Press, 1979.

5 Nelson E. *Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis*, Bol. of the American Mathematical Soc., Vol. 83, 1977.

*mal.* Por tanto, $^*r$ es un infinitesimal y ya tenemos otro tipo de cantidad distinta de las reales ordinarias.

Supongamos que no lo fuera, o sea que existe u ordinario tal que $0 < u < {}^*r$. O bien hay un real ordinario a la derecha de $^*r$, o no lo hay. En caso que lo haya, diremos que $^*r$ es *finito*, y llamemos s una cota superior. Tenemos pues, $0 < u < {}^*r < s$. El conjunto A de reales ordinarios menores que $^*r$ es no vacío, ya que $u \subset A$. Además, está acotado superiormente por s. Luego tiene una mínima cota superior que es un real ordinario. Llamémosla r. Similarmente, el conjunto B de reales ordinarios mayores que $^*r$ es no vacío, ya que $s \subset B$. Además , está acotado inferiormente por u. Luego tiene una máxima cota inferior que es un real ordinario. El par A, B es lo que se denomina *cortadura de Dedekind*[6] en los reales ordinarios. Por consiguiente, esta máxima cota inferior tiene que coincidir necesariamente con r. Como r es real ordinario $^*r \neq r$.

Puede ocurrir $^*r > r$. ¿Qué cantidad positiva es $^*r - r$? Obviamente, no existe un real ordinario positivo u que esté a la izquierda de $^*r - r$ porque la relación $0 < u < {}^*r - r$ nos lleva a concluir que $u + r < {}^*r$, luego $u + r \subset A$ y esto es imposible ya que r es la mínima cota superior. También puede ocurrir $r > {}^*r$. ¿Qué cantidad positiva es $r - {}^*r$? No puede existir un real ordinario positivo u que esté a la izquierda de $r - {}^*r$ porque la relación $0 < u < r - {}^*r$ nos lleva a concluir que $^*r < u + r$, luego $u + r \subset B$ y esto es imposible ya que r es la máxima cota inferior. Conclusión, la cantidad $\alpha = {}^*r - r$ es infinitesimal, y hemos demostrado que el hiperreal $^*r$ finito se separa en dos sumandos: el real ordinario r y el infinitesimal $\alpha$. En otras palabras, hemos demostrado que todo hiperreal finito $^*r$ es de la forma $^*r = r \pm \alpha$. Esta descomposición es única, porque si separamos a $^*r$ como $^*r = s + \beta$ entonces $r - s = \alpha - \beta$ y siendo $r - s$ un real ordinario y un infinitesimal, está obligado a ser el infinitesimal 0.

Queda otra posibilidad: el hiperreal $^*r$ que tomamos no está acotado superiormente por ningun real ordinario s. Esto quiere decir que es mayor que todo real ordinario, que es la definición de cantidad *infinita*. Y tenemos el tercer tipo de hiperreales, los infinitos. En conclusión, la existencia un campo totalmente ordenado $^*R$ tal que $R \subset {}^*R$ implica, necesariamente,

6 R. Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers,* Dover Publications, Inc. New York, [1901], 1963.

la existencia de cantidades de naturaleza aritmética distinta a la de los reales ordinarios: los infinitesimales, los finitos, y los infinitos.

## TRES TIPOS DE CANTIDADES

Para una familiaridad con el sistema numérico hiperreal son suficientes algunas definiciones y reglas, que expondremos a continuación. Hemos llamado infinitesimales, o también infinitamente pequeños, $\alpha$, $\beta$, $\varepsilon$, $\delta$, $\tau$, $\omega$, etc., –incluido el cero– aquellas cantidades que en valor absoluto son menores que cualquier real ordinario positivo. Dado un infinitesimal $\alpha$, se escribe $\alpha \approx 0$, y se dice que está *muy cerca de cero*. Es usual decir que $\alpha$ está «infinitamente cerca» a cero, pero evitaremos en lo posible usar esto porque, desde Cauchy, se ha insinuado que cero es un límite al que tiende o se aproxima $\alpha$, que es precisamente lo que se quiere evitar, ya que el infinitesimal no es una variable, sino una cantidad. En general, si tenemos dos hiperreales $a$, $b$ cualesquiera y ocurre que la diferencia $b - a$ es infinitesimal, decimos que $a$ está muy cerca de $b$ y se escribe $a \approx b$. (o como dicen muchos textos, $a$ está infinitamente cerca de $b$).

Otro tipo de cantidades son los reales infinitos M, N, P, Q, etc. que son aquellas en valor absoluto mayores que todo real ordinario, y por ende resultan ser inversos multiplicativos de los infinitesimales. En otras palabras, un número real distinto de cero es infinito si y sólo si su inverso multiplicativo es infinitesimal. Entre los reales infinitos, nos interesa destacar los enteros infinitos N, M, etc., sobre cuya existencia conviene más adelante profundizar, y a los que frecuentemente llamaremos *hiperenteros*.

Finalmente, otro tipo de números son los reales finitos, que son de la forma $r+\alpha$, donde $r$ es real ordinario y $\alpha$ es infinitesimal positivo, negativo o cero. Los finitos incluyen los reales ordinarios $s$, $t$, $u$, $v$, etc. que ocurren precisamente cuando $\alpha = 0$. Si $^*r$ es el hiperreal finito $^*r = r + \alpha$, el real ordinario $r$ se denomina *parte estándar* de $^*r$. Para seguir la notación tradicional, intervalos como (a, b), ó [a, b] significan, igual que siempre, conjuntos de hiperreales comprendidos entre los puntos extremos. Su *longitud* será b–a, que es general, un hiperreal.

La complejidad de los hiperreales no se puede minimizar. En efecto, el sistema de los hiperreales $^*R$ es tal que, dada una cantidad, cualquier expresión bien formada a partir de ella, debe ser otra cantidad. Esto parece obvio para la suma o el producto de infinitesimales, que es nuevamente infinitesimal; o para la suma y el producto de reales infinitos, que es nuevamente una cantidad infinita, como se puede demostrar. Igual ocurre para el producto de un real finito por un infinitesimal, que es infinitesimal. En cambio, no es inmediatamente digerible que si $N$ es entero infinito, $2^N$ sea un número entero hiperreal, como efectivamente lo es. Y también lo es el factorial $2^N$ de un entero infinito $N!$. De la misma forma, si α es infintesimal, $\log\alpha$, sen (α), son hiperreales, etc. La situación se torna más dramática si consideramos expresiones totalmente arbitrarias, como las siguientes. Sean a y b son infinitesimales y $N$ entero infinito, entonces

$$\frac{\pi+\sqrt{2}\,\alpha}{\sqrt[3]{5}-3^{\beta}}, \quad \log(N^{\alpha}), \quad \text{sen}\,\beta^{N}$$

tienen garantizada una existencia legítima, aunque a simple vista no sepamos que se trate de cantidades infinitas, finitas o infinitesimales. En general, todas las funciones y relaciones que podamos pensar sobre *R podrán manipularse con argumentos hiperreales y sus valores serán hiperreales. Pero esto no debe amedrentarnos, ya que el sistema numérico en consideración sigue idénticas reglas que su homólogo, el sistema numérico real R, y dichas reglas operan de modo similar en uno y en el otro. Así, por ejemplo, cada una de las operaciones aritmeticas como la suma, la resta, la multiplicación y la división, es compatible con las relaciones de orden del campo *R. Y mucho más generalmente, hay un principio denominado *principio de transferencia*[7], que garantiza que, siempre que se sigan algunas reglas, las proposiciones que son válidas en el campo numérico, R sigue siendo válida en el otro campo numérico *R.

7 Robinson A. *Non-Standard Analysis*, North-Holland Pub. Co. Amsterdam, 1966. Revised edition, 1974

## EL ÁTOMO DE UN REAL

Uno de los hechos más espectaculares de *R es que podemos definir *el átomo* de cada real ordinario como el conjunto de todos los hiperreales que están muy cerca a él. En otras palabras, siempre que $a$ sea real ordinario, se llama A($a$) el átomo de $a$, todos los $b$ tales que $a \approx b$. Como todo real finito tiene una parte estándar, dicho real pertenece al átomo de su parte estándar. La relación de pertenecer o no al mismo átomo, es una relación de equivalencia por lo siguiente: es claro que $a \approx a$, por cuanto $a - a = 0$. Además, si $a \approx b$, $a - b = \alpha$, $\alpha$ infinitesimal, luego $b - a = - \alpha$, infinitesimal. Finalmente, si $a - b = \alpha$ y $b - c = \beta$ entonces $a - c = a - \beta$, infinitesimal. Como vemos, el átomo A($a$) es el conjunto de todos los hiperreales finitos de la forma $a + \alpha$, donde $a$ es real ordinario y $\alpha$ es infinitesimal. Por consiguiente, como la distancia entre dos reales ordinarios distintos no puede ser infinitesimal, sus átomos tienen intersección vacía. Esto es un atributo único de los hiperreales, porque quiere decir que los átomos separan, en sentido estricto, a cada real ordinario de otro. Particularmente, todos los infinitesimales conforman el átomo de cero A(0).

Conviene aquí hacer un comentario sobre un hecho inesperado en los con‚untos hiperreales: se pueden exhibir conuntos acotados que no tienen mínimas cotas superiores ni máximas cotas inferiores. Por ejemplo, el átomo de cualquier real ordinario. Así, el átomo de 0 está acotado superiormente por cualquier real ordinario positivo, pero no existe el mayor de los infinitesimales, o el menor de los infinitesimales, o algo por el estilo. Esta propiedad, que es esencial del campo R y que lo hace *completo*, no se cumple en el campo *R.

La separación de cada real ordinario del otro por sus respectivos átomos, obedece ciertas reglas aritméticas. Cuando dos hiperreales se encuentran en dos átomos distintos, su suma y multiplicación siguen la propiedad aditiva y multiplicativa de sus partes estándares. Así, sea $r \in A(a)$, $s \in A(b)$, entonces $r = a + \alpha$, $s = b + \beta$, $r + s = a + b + (\alpha+\beta)$, luego $r + s \in A(a+b)$. Similarmente, si multiplicamos los dos hiperreales, $r \times s = a\,b + (a\beta + \alpha b + \alpha\beta)$, luego $r \times s \in A(ab)$. De igual modo, si $r \in A(1)$, entonces $1/r \in A(1)$, ya que, al hacer $r = 1 - a$, a positivo o negativo, tenemos que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\alpha} &= 1+\alpha+\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\\ &= 1+\beta\end{aligned}$$

## EL ÓRDEN DE MAGNITUD

El otro hecho singular, imposible de apreciar en el sistema de los reales ordinarios, es la existencia de diversos órdenes de magnitud entre las cantidades hiperreales, como podemos ver a continuación. Dados dos hiperreales cualesquiera *a, b*, donde, $b \neq 0$ diremos que *a* es *mucho menor* que *b*, (o también, que el *órden de magnitud* de *b* es mayor que el de *a*) y escribiremos $a << b$, si el cociente del primero por el segundo es infinitesimal,

$$a << b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} \approx 0$$

Descriptivamente, se puede decir que el denominador es tan grande en relación con el numerador, que el cociente sigue siendo infinitamente pequeño. Este formidable recurso de los hiperrreales, ya usado extensamente por Cauchy y que hemos citado de su *Curso de Análisis*[8], nos permite comparar todas las cantidades entre sí. Por ejemplo, un infinitesimal a es mucho menor que un real finito de la forma $r + \beta$ donde $r \neq 0$, ya que el cociente es nuevamente infinitesimal. Así mismo, todo real finito es mucho menor que cualquiera infinito, porque el cociente es infinitesimal. Observamos entonces, que los hiperreales están ordenados por órden de magnitud: infinitesimales << finitos << infinitos.

Pero este ordenamiento es mucho más profundo que lo que a primera vista se ve. En efecto, si a es infinitesimal, el infinitesimal $\alpha^2$ es mucho menor que él, o sea $\alpha^2 << \alpha$, porque el cociente del primero por el segundo es nuevamente infinitesimal. Como $\alpha^3 >> \alpha^2 >> \alpha$ al primero se le llama de *segundo órden de magnitud* en relación al tercero, etc. . Diremos que dos cantidades son de igual órden de mágnitud si su cociente es finito. En el campo R de los reales ordinarios todas las cantidades son del mismo órden, más no ocurre así entre los hiperreales. Tomemos, por ejemplo, *N* entero infinito, y los infinitesimales

$$\frac{1}{N+1} \approx 0, \frac{1}{N+2} \approx 0, \frac{N}{N^3+2} \approx 0, \frac{1}{N+1} \approx 0$$

8 A. L. Cauchy, *Curso de Análisis, [1821], Mathema,* Facultad de Ciencias, UNAM, 1994.

Si dividimos el primero por el segundo, obtenemos un hiperreal en el átomo de 1,

$$\frac{N+2}{N+1}=\frac{N}{N+1}+\frac{2}{N+1}=1+\alpha,$$

mientras que si dividimos el tercero por el cuarto, obtenemos un infinitesimal:

$$\frac{N+1}{N^3+2}\approx 0,$$

o sea que las dos primeras cantidades tienen igual órden de magnitud, mientras que la tercera es de menor magnitud que la cuarta. Esta cuestión crucial para la comparación de cantidades está fuera del alcance del cálculo tradicional.

## EL NÚCLEO DE UN INFINITESIMAL

Y en efecto, el comparar infinitesimales nos permite resolver definitivamente uno de los más importantes problemas teóricos que enfrentaron –infructuosamente– los fundadores del cálculo: la eliminación de infinitesimales de orden mayor que la unidad. Supongamos que tenemos el infinitesimal $\alpha+\alpha^2$. Es deseable eliminar el segundo sumando, para lograr la identificación $\alpha \equiv \alpha+\alpha^2$. Y en efecto, esto es lo que se venía haciendo desde Leibniz, declarándose que, en comparación con un infinitesimal, su factor cuadrático es «despreciable». El criterio para saber cuando una cantidad es o no despreciable, lo podemos resolver satisfactoriamente de la siguiente manera.

Sea A(0) el átomo de 0 y definamos allí la siguiente relación entre infinitesimales distintos de cero. $\alpha \cong \beta \;\leftrightarrow\; \frac{\alpha}{\beta}=1+\delta$, donde δ es otro infinitesimal. En otras palabras, diremos que dos elementos del átomo de cero son equivalentes si y sólo si el cociente está en el átomo de la unidad. Esta es una relación de equivalencia porque $\frac{\alpha}{\alpha}=1$. Además, si $\frac{\alpha}{\beta}=1+\delta$, entonces

$\frac{\beta}{\alpha}=1+\eta$. Finalmente, $\frac{\alpha}{\beta}=1+\delta$, $\frac{\beta}{\gamma}=1+\eta$, $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta}{\gamma}=(1+\delta)(1+\eta)=1+\lambda$. La clase de equivalencia de cada infinitesimal $\alpha$ la denominaremos *nucleo de* $\alpha$ y la escribiremos $N(\alpha)$.

Ahora, dado un infinitesimal, diremos que todo otro infinitesimal que sumado a él pertenezca a su nucleo, es *despreciable.* Por ejemplo, dado el infinitesimal $\alpha$, entonces $\alpha+3\alpha^2$ es elemento de $N(\alpha)$ porque $\frac{\alpha+3\alpha^2}{\alpha}=1+3\alpha$. Luego $3\alpha^2$ es despreciable en comparación con $\alpha$. Claro que el nucleo de $3\alpha^2$ estás bastante lejos del nucleo de $\alpha$, y un elemento de este nucleo tendría que ser, digamos, el infinitesimal $3\alpha^2-5\alpha^7$. Por tanto, $-5\alpha^7$ es despreciable en comparación con $3\alpha^2$.

La existencia de nucleos en un átomo tiene, además, un sabor didáctico. Muchos tienden a pensar que el átomo de cero es algo muy pequeño, pero es curioso que el interior del átomo, a su vez, se separa en toda una constelación de nucleos, uno por cada infinitesimal.

## La propiedad *arquimediana

Una de las principales características del viejo sistema de los números reales ordinarios es la *propiedad arquimediana:* dado $r > 0$, si $u$ es un real cualquiera, siempre existe un número natural $n$ tal que $u < nr$. Esto se puede describir diciendo que, por más pequeño que sea $r$, algún múltiplo entero de $r$ alcanza y sobrepasa a $u$, no importa cuan grande sea $u$. Particularmente, la unidad 1, sumada un número finito de veces, alcanza y sobrepasa a cualquier real, por más grande que sea. El campo hiperreal $^*R$ transgrede esta propiedad esencial del campo real ordinario. Por eso a $^*R$ se le denomina *campo no arquimediano.* Dicha transgresión la podemos comprobar de modo evidente: en el sistema numérico hiperreal, la unidad 1 jamás alcanzará a un real infinito mediante un múltiplo entero finito. Y también ocurre a escala infinitesimal: como todo múltiplo entero finito de un infinitesimal es infinitesimal, jamás un múltiplo entero finito de un infinitesimal alcanzará a un real ordinario.

La construcción de los hiperreales $^*$R tiene como una de sus repercusiones más impactantes el hecho de que si a $>0$ es un infinitesimal y $u$ es un hiperreal, existe un múltiplo $n$a de $\alpha$ tal que $u < n\alpha$, siempre que a $n$ se le permita ser un hiperentero. Y lo que es más sorprendente: este $n$ puede ser escogido de modo único y tal que $n\alpha \leq u < (n+1)\alpha$. En realidad, esta es una de las propiedades fundamentales del cálculo infinitesimal y se le denomina la *propiedad $^*$arquimediana* de los hiperreales.

Lo primero que tenemos que demostrar es la existencia misma de los hiperenteros, esto es, de enteros no finitos, ya que los finitos, obviamente, son hiperreales. Esto es muy sencillo, si aceptamos que las reglas válidas entre los reales, como la construcción de funciones, son también válidas entre los hiperreales. Recordemos del cálculo tradicional, la función que a cada real ordinario $u$ le asigna el mayor entero que es menor o igual a dicho real. Dicha función se denomina *la parte entera de u* y se escribe $[u]$. Ella cumple con la propiedad

$$u-1<[u]\leq u$$

Por consiguiente, existe una idéntica función en los hiperreales, que a cada hiperreal $u$ le asigna el mayor entero que es menor o igual a dicho hiperreal. Dicha función también la denominaremos *parte entera de u* y la escribiremos $[u]$. Veamos el comportamiento de tal función. Por ejemplo, si $u$ es infinitesimal positivo, entonces $[u] = 0$, pero si $u$ es infinitesimal negativo, entonces $[u] = -1$. En general, si $^*$r es hiperreal finito, necesariamente $^*$r se descompondrá como $^*\mathrm{r} = \mathrm{r} + \mathrm{a}$, luego $[^*\mathrm{r}] = [\mathrm{r}]$ si $\alpha$ es positivo y $[^*\mathrm{r}] = [\mathrm{r}] - 1$, si $\alpha$ es negativo. ¿Qué pasa si $^*$r es un hiperreal infinito? Necesariamente, $[^*\mathrm{r}]$ será un *entero* hiperreal, pero no puede ser finito. Estas cantidades son las hemos denominado *hiperenteros*. Es importante destacar que, dado que la función $[u]$ seguirá cumpliendo la desigualdad, para todo infinitesimal $0 < \alpha$ existe un hiperentero N tal que $0 < 1/\mathrm{N} \leq \alpha$, porque es suficiente tomar $N -1 = [1/\alpha]$. En otras palabras, a la izquierda de todo infinitesimal positivo hay un inverso de algún hiperentero.

Demostremos ahora la propiedad $^*$arquimediana de los hiperreales. Dado el infinitesimal $0 < \alpha$ y el hiperreal $u$, sea $N$ entero infinito tal que $\alpha \leq 1/N$. Supongamos por simplicidad, que $\alpha = 1/N$. Sea $[uN]$ el mínimo entero contenido en $uN$. Este cumplirá con la propiedad $uN - 1 < [uN] \leq uN$. Hagamos $n = [uN]$. Este $n$ es el buscado, ya que si $u\mathrm{N} - 1 < n \leq u\mathrm{N}$, entonces $u\mathrm{N} < n+1$, luego $n(1/N) \leq u < (n+1)(1/N)$; reemplazando $\alpha = 1/N$, tenemos $n\alpha \leq u < (n+1)\alpha$. Particularmente, $u < [u] + 1 = M$ implica que la unidad 1 puede alcanzar y sobrepasar a cualquier hiperreal $u$, sumándola un número hiperentero $M$ de veces.

Vamos a dar un ejemplo de cómo acercar múltiplos de infinitesimales a reales finitos. Sea $u = 1/3$, $N$ entero infinito y $a= 2/N$. Nos piden encontrar un múltiplo $na$ tal que $n\alpha \leq 1/3 < (n+1)\alpha$; esto es lo mismo que $2n/N \leq 1/3 < 2(n+1)/N$. Despejando $n$, esto implica que $n$ debe cumplir la condición $N/6-1 < n \leq N/6$. Por consiguiente, $n = [N/6]$. Hay que tener cuidado con los diversos órdenes de magnitud, porque el entero n puede ser infinito y sinembargo na sigue siendo infinitesimal. Tal es el caso $\alpha = 1/N^2$ para $N$ entero infinito. Sea $n = N$. De donde $na = N(1/N^2) = 1/N$, que también es infinitesimal.

## EL NÚMERO *e*

Dado $N$ entero positivo infinito, la expresión

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$$

consiste en un elemento del átomo de 1 que es elevado a la potencia $N$. Ello determina determina una cantidad hiperreal, que depende de $N$. Para calcularla, hacemos la expansión por el binomio de Newton[9]. De acuerdo a las reglas que operan en los hiperreales, similares a la de los reales, tenemos

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)+ \cdots + \frac{1}{N!}\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{N-1}{N}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{N!}$$

9 H. E. Taylor, T. L. Wade, *University Calculus*, John Wiley and Sons, Inc., 1962.

pero $N! \geq 2^{N-1} \quad n = 2,3,4,\ldots$, luego

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\cdots+\frac{1}{2^{N-1}}$$

teniendo en cuenta la suma de términos de la serie geométrica,

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N < 1+1+\left(1-\frac{1}{2^{N-1}}\right) < 3$$

luego dicho hiperreal es finito, porque es menor que el real ordinario 3. En efecto, si en vez de $N$ tomamos $M$, podemos verificar que la diferencia

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N - \left(1-\frac{1}{M}\right)^M$$

es infinitesimal, luego independiente de toda $N$ dicha cantidad está en un mismo átomo, cuya parte estándar existe y es el real ordinario que se denomina $e$. En realidad, puede demostrarse –y así lo hizo Euler– que se cumple la igualdad

$$e = \left(1+\frac{1}{N}\right)^N = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{N!}$$

## SUCESIONES CON SUBÍNDICES HIPERENTEROS

En el cálculo tradicional, se conoce como *sucesión* al ordenamiento de entidades de la forma

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

donde cada uno de los términos de la sucesión pueden ser elementos de un conjunto cualquiera. Cuando no existen los puntos suspensivos finales, la sucesión es finita. Y cuando existen los puntos suspensivos, lo que indica que el dominio de los índices es todo el conjunto de los número naturales, la sucesión se denomina infinita. En otras palabras, el subíndice $n$ es un entero finito, pero los puntos suspensivos indican que la sucesión tiene un «número infinito de términos». Un hecho sorprendente y crucial del sistema numérico hiperreal es que, dado el entero infinito $N$, también podemos numerar objetos en orden *sucesivo*, de 0 hasta $N$ de la forma

$$a_1, a_2, \cdots, a_N$$

sólo que ahora hay un número infinito de términos, donde sabemos cual es el primero, cual es el último, y dado uno de ellos, cual es el anterior y cual el siguiente. Algunos autores[10] denominan *sucesión hiperfinita* a este tipo de sucesiones, pero nosotros no lo utilizaremos para no crear confusión alguna.

Ejemplos

Podemos ordenar en forma de sucesión los números enteros $n$ comprendidos entre 1 y $N$, para $N$ entero infinito, así: $1,2,3,\cdots,n,\cdots,N$ y realizar la suma de ellos, con el familiar resultado:

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

Particularmente, si N es infinito, la cantidad $N(N+1)/2$ es un entero infinito, y además, $N(N + 1)$ es *entero infinito par,* ya que es divisible por 2.

Otro ejemplo es el número *e,* que acabamos de ver, que cumple con la identidad

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \quad + \frac{1}{N!}$$

## RECUBRIMIENTO INFINITESIMAL DE UN INTERVALO

El sistema numérico hiperreal permite algo jamás soñado con el viejo sistema numérico: recubrir un intervalo en el que se ordenen secuencialmente los reales ordinarios, de modo tal que cada uno quede *seguido* del

10 Y. Takeuchi, *Métodos Analíticos del Análisis no estandar,* Depto. de Matemática y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, 1988.

otro, pese a que, como todos sabemos éstos no son un conjunto numerable.

Para simplificar, tomemos el intervalo de la recta real ordinaria [0, 1], que contiene un primer elemento 0 y un último elemento 1. Se trata de ordenar todos los reales ordinarios de dicho intervalo de modo que haya un primer real que siga a cero, un segundo real que siga a éste, etc., y así sucesivamente, obtenéndose un ordenamiento *secuencial* de todos los reales. El método nos permitirá saber, dado uno de ellos, cual es el anterior y cual es el siguiente, hasta finalizar con el último real del intervalo que es el 1. Esta operación aritmética aparentemente imposible, se logra cuando apelamos al sistema de hiperreales, donde las sucesiones de este tipo, como hemos visto, son perfectamente posibles.

Visto el método un poco más de cerca, vamos a recubrir el intervalo de modo que haya una partición de subintervalos infinitesimales que lo 'pavimenten' por asi decirlo, donde cada número real ordinario estará comprendido unívocamente en un determinado 'mosaico' de la subdivisión. La 'pavimentación' del intervalo [0, 1] es la siguiente: se toma $N$ entero infinito con el infinitesimal $\alpha = \frac{1}{N}$, y se considera el conjunto de todos los múltiplos

$$\{n\alpha\}, 0 \leq n \leq N$$

El primero de ellos es cero y el último es 1. La sucesión así construida es

$$\begin{aligned} &a_0 = 0 \\ &a_1 = \alpha \\ &a_2 = 2\alpha \\ &\vdots \\ &a_{N-1} = (N-1)\alpha \\ &a_N = 1 \end{aligned}$$

Veamos que pasa con cada uno de los reales ordinarios del intervalo. Es evidente que todo real ordinario $u$ está comprendido en uno solo de los subintervalos

$$[0, \alpha) \cup [\alpha, 2\alpha) \cup \cdots \cup [n\alpha, (n+1)\alpha) \cdots \cup [(N-1)\alpha, 1)$$

donde asumimos que el extremo superior de cada intervalo pertenece al intervalo siguiente, para no contar dos veces los extremos. Hemos demostrado que existe uno y sólo un $n$ tal que

$$n\alpha \leq u < (n+1)\alpha$$

y en tal subintervalo sólo puede haber ese real y no otro, aunque haya intervalos donde no se encuentre localizado ningun real. La asignación, es unívoca, lo que no significa otra cosa que han sido colocados en *sucesión ordenada* –lo que pudo ser el sueño de Leibniz– la totalidad de los reales del intervalo. Sólo que el conjunto que *numera* a los reales es el conjunto de los hiperenteros $^*N$.

## CONSTRUCCIÓN DEL CAMPO DE LOS HIPERREALES

En todo momento hemos considerado la existencia de un conjunto *R, que es extensión de los reales ordinarios R, esto es, siempre hemos supuesto que existe un campo totalmente ordenado *R tal que R Ì *R. Ahora bien, preguntarse sobre su existencia es plantearse el problema de la construcción de sistemas numéricos diferentes a los reales ordinarios. Esto es lo que haremos ahora, y para ello mostraremos, de una manera muy breve y resumida, cómo se construyen los hiperreales, para lo cual, entre diversas alternativas, haremos uso de una exposición de Lindstrom[11].

Para su mayor comprensión, vamos a recordar cómo se construyen los reales ordinarios. Tenemos el campo de números racionales Q, con sus operaciones elementales de adición y multiplicación, y su relación de orden $<$. El plan es el siguiente: recordaremos cómo en los textos de cálculo se extiende Q a los reales R y mostraremos la gran similaridad que tiene esta extensión con la de los reales a los hiperreales *R.

Es sabido que uno de los modos de extender Q al campo R de los reales, es mediante sucesiones de Cauchy, que son sucesiones

11 T. Lindstrom, *An Invitation to Nonstandard Analysis –Nonstandard Analysis and its Applications*, Edited by Nigel Cutland, Cambridge University Press, 1988.

$$\{a_n\}=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots\},\quad a_n\in Q,\quad n\in N$$

donde cada uno de los términos es un número racional, que cumplen la condición de que la distancia entre los términos se hace cada vez más pequeña, para índices suficientemente grandes, o más precisamente,

$$\forall\in>0\quad \exists M\ni\quad \forall n,m>M\rightarrow a_n-a_m<\in$$

Hagamos ahora *C* el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales, y definamos la siguiente relación entre éllas: $\{a_n\}\equiv\{b_n\}$ si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$$

Esta es una relación de equivalencia que separa al conjunto *C* en clases de equivalencia. El conjunto de los reales *R* es precisamente el conjunto de todas estas clases de equivalencia de *C*. Designemos la clase de cada sucesión como $a_n$ . Se definen adición y multiplicación término a término,

$$\langle a_n\rangle+\langle b_n\rangle\ =\ \langle a_n+b_n\rangle,\qquad \langle a_n\rangle\cdot\langle b_n\rangle\ =\ \langle a_n\cdot b_n\rangle$$

La relación de orden se define como $\langle a_n\rangle<\langle b_n\rangle$ si existe un racional e > 0 tal que, para índices *n* suficientemente grandes, se cumple $a_n<b_n+\varepsilon$ . Finalmente, hacemos la identificación del racional *a* con la sucesión respectiva

$$a\ \rightarrow\ \{a,a,a,\ldots,a\ ,\ldots\}$$

Esto hace que el conjunto Q pueda ser considerado subconjunto propio de *R*. Un ejemplo de números reales que no son racionales son el par de sucesiones

$$\alpha=\left\{1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{4},\ldots\right\},\quad \beta=\left\{1,\tfrac{1}{2^2},\tfrac{1}{3^2},\tfrac{1}{4^2},\ldots\right\}.$$

Es obvio que la diferencia de cada una de éllas con cualquier racional distinto de cero no puede ser una sucesión que converja a cero. Obsérvese que ambas sucesiones están en la misma clase de equivalencia de cero, pese a que la segunda converge más rápidamente que la primera. En otras palabras, el proceso de construcción de los reales $R$ a partir de los racionales identifica sucesiones pero no distingue el comportamiento asintótico de cada sucesión. Esta cuestión esencial a la construcción de $R$, es algo que no ocurrirá en los hiperreales $^*$R.

Ahora mostramos cómo se construye el campo de los hiperreales. Primeramente, supondremos que existe una medida aditiva $m$ en los números naturales $N$, que asigna a cada subconjunto de números naturales las cantidades 0, 1, así:

$$1. \quad A \subset N \quad \rightarrow \quad m(A)=0 \quad \vee \quad m(A)=1$$
$$2. \quad m(N)=1. \quad m(A)=0,$$

siempre que $A$ tenga un número finito de elementos. Además,

$$3. \quad A \cap B = \varnothing \quad \rightarrow \quad m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

La medida $m$ separa a los subconjuntos de $N$ en dos clases de conjuntos: los *grandes*, que son aquellos cuya medida es 1; y los *pequeños* cuya medida es 0. Particularmente, todos los subconjuntos finitos son pequeños. Al final del capítulo, informaremos sobre la existencia de tales medidas. Ahora, tomamos todas las sucesiones de la forma

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}, \quad a_n \in R, \quad n \in N$$

donde, como es de esperarse, cada término debe ser un número real. Para identificar las sucesiones entre sí, haremos uso de la medida $m$, mediante la siguiente relación:

$$\{a_n\} \equiv \{b_n\} \quad \leftrightarrow \quad m(A)=1$$

donde $A$ es el subconjunto de aquellos índices $n$ en los cuales se cumple la identidad $a_n = b_n$. En otras palabras, aquellos índices donde los términos de ambas sucesiones difieren, constituyen un conjunto pequeño. Además de que, efectivamente, ésta es una relación de equivalencia, el conjunto $^*$R de todas las clases de equivalencia $a_n$ es verdaderamente un campo ordenado, con la suma y producto término a término entre sucesiones, y la relación de orden $\langle a_n \rangle < \langle b_n \rangle$ si y sólo si $m(A)$ = 1, donde $A$, el subconjunto de índices en los que se cumple la relación de órden $a_n < b_n$, es un subconjunto grande. Nuevamente, la asignación

$$a \quad \rightarrow \quad \{a, a, a, \ldots, a\ , \ldots\}$$

nos permite identificar el campo *R* como subconjunto del conjunto *R. Los elementos de R en *R se denominan *reales ordinarios*.

Como ocurre en la construcción de los reales *R*, la demostración de que *R cumple las propiedades de campo no deja de tener cuidado, ya que cada propiedad debe ser verificada que se cumple entre los representantes de las clases de equivalencia y que es independiente del representante que se selecciona. Además, hay que confirmar que la relación de orden es lineal y es consistente con la adición y multiplicación entre clases de equivalencia. Debido a lo apretado del resumen, estas demostraciones las dejaremos de lado, salvo la propiedad de que en *R no existen divisores de cero. Así, supongamos que el producto de dos hiperreales es cero. Tomando dos sucesiones de las clases de equivalencia,

$$\begin{aligned}
&\{a_n\} \times \{b_n\} \ \equiv \ \{0\} \leftrightarrow \quad m(C) = 1, \\
&C = \{n \mid \ a_n \times b_n = 0\} \\
&C = A \cup B \\
&A = \{n \mid \ a_n = 0\} \\
&B = \{n \mid \ b_n = 0\}
\end{aligned}$$

y como la medida *m* es aditiva entonces una de las dos condiciones *m(A)* = 1, *m(B)* = 1, o sea que alguna de las dos sucesiones es cero, que era lo que se quiería demostrar. Y ahora sí se distinguen las sucesiones de acuerdo a la rapidez de su convergencia. Más exactamente, las sucesiones

$$\alpha = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}, \quad \beta = \{1, 1/2^2, 1/3^2, 1/4^2, \ldots\}.$$

no pueden estar en la misma clase de equivalencia, porque el conjunto de índices en el que los términos son idénticos consiste de un solo elemento, y su medida es 0. O sea que $\alpha$ y $\beta$ representan hiperreales distintos. Recordemos que un hiperreal es infinitesimal si su valor absoluto es menor que algún real ordinario positivo, y es infinito si su valor absoluto es mayor que todo real ordinario. Como *R es una extensión del campo *R*, necesariamente tendrá tres tipos de elementos, infinitesimales, finitos e infinitos, lo que ha sido demostrado en el capítulo anterior. Precisamente, la clase de la sucesión $\{1,2,3,4,\ldots,\ldots\}$ es un hiperreal infinito, mientras que las sucesiones $\alpha$, $\beta$ arriba mencionadas, son ambos distintos infinitesimales. No está de más recalcar que la construcción de los hiperreales depende de la medida aditiva $m$ en consideración.

Hay un subconjunto $^*Z \subset {}^*R$ que nos resultará familiar: el de las clases de equivalencia de sucesiones tales que sus términos son enteros, salvo un subconjunto pequeño de índices. Más exactamente,

$$*Z = \{\langle a_n \rangle \mid \quad m(A) = 1\}$$
$$A = \{n \mid \quad a_n \in Z\}$$

Estos son precisamente los *hiperenteros*. Es sencillo demostrar que $^*Z$ es cerrado para la adición y multiplicación de hiperenteros. Como es de esperarse, el conjunto $^*Q$ de los *hiperracionales* será el de todos los cocientes de hiperenteros con denominador distinto de cero. Aunque la definición de $^*Z$ y $^*Q$ como subconjuntos de $^*R$ es rigurosa, resulta chocante el que ambos conjuntos aparecen ya dados como una restricción de $^*R$ y no como una construcción propiamente dicha. Hay otro hecho, desconcertante, y nada fácil de probar: el conjunto $^*Z$ es no numerable.

A esto se agrega, como veremos en el Apéndice, que hay sistemas numéricos que son dominios enteros y campos no arquimedianos muy similares a $^*Z$ y $^*Q$, respectivamente. Para evitar cualquier confusión, simpre que nos refiramos al campo de los hiperreales, se trata del campo $^*R$ aquí mencionado. Y siempre que hablemos del conjunto de los hiperenteros y de los hiperracionales, estaremos refiriéndonos a $^*Z$ y $^*Q$ como subconjuntos de $^*R$, respectivamente.

## MEDIDAS ADITIVAS Y ULTRAFILTROS

En muchos textos de análisis no estándar el campo de los hiperreales se construye haciendo uso de *ultrafiltros*, que es el artificio mediante el cual se identifican las sucesiones de reales ordinarios. Un filtro sobre el conjunto de los naturales $N$ es una colección de subconjuntos $F$ de $N$ que posee las siguientes propiedades:

1. $\varnothing \notin F$
2. $A, B \in F \rightarrow A \bigcap B \in F$
3. $A \in F \wedge B \subset A \rightarrow B \in F$

Un ejemplo de filtro es la colección de todos los subconjuntos de naturales tales que su complemento es finito. El filtro se llama *libre* si no posee conjuntos finitos. Un filtro es ultrafiltro si a él pertenece todo conjunto o su complemento en *N*. Dado un ultrafiltro libre F, la identificación de sucesiones de reales ordinarios se hace de la siguiente manera:

$$\{a_n\} \equiv \{b_n\} \quad \leftrightarrow \quad A \in F$$

donde *A* es el conjunto de índices en los que los términos de la sucesión son idénticos. En otras palabras, los índices en los que los términos, uno a uno, difieren, son «filtrados» por el ultrafiltro. La existencia de ultrafiltros es equivalente a la existencia de medidas aditivas como las utilizadas en la construcción de Linstrom. En efecto, sea F un ultrafiltro y *m* una función definida sobre los subconjuntos de naturales, así:

$$m(A) = 1 \quad \leftrightarrow \quad A \in F$$

es sencillo mostrar que *m* es una medida aditiva. Similarmente, dada *m*, seleccionamos la colección de subconjuntos *A* tales que *m(A)* = 1. Dicha colección es un ultrafiltro.

Capítulo 3

# Los elementos del cálculo

Los elementos del cálculo son, en su orden: la *variable*, la *diferencial*, la *función*, la *derivada* y la *integral*. Ellos son principios organizadores dado que configuran los centros de referencia donde se originan todos los demás conceptos y relaciones con las cuales se erige el cálculo infinitesimal. Los elementos están puestos en un determinado sistema numérico hiperreal. Puede parecer curioso el orden en que hemos colocado los elementos. ¿Por qué comenzar primero con la diferencial y seguir luego con la función?, lo más lógico sería considerar primero la función, luego la derivada y después la diferencial. Este es el *orden lógico* de los textos del cálculo tradicional.

Aquellos que lean nuestra interpretación histórica sobre el orígen del cálculo[1], encontrarán que la construcción teórica que hacemos se ajusta al *orden histórico* del surgimiento de dichos conceptos. El movimiento ascendente de los elementos organizadores del cálculo es el que a continuación seguiremos: iniciamos con el elemento *variable*, como sucesión de valores numéricos; de las diferencias de valores de la variable se obtiene el elemento *diferencial*; de relaciones entre variables en la asignación de valores se obtiene el elemento *función*; del cociente de diferenciales se llega al elemento *derivada* y de sumas como operación inversa de la diferencial, se construye el elemento *integral*.

## La variable

La *variable* es la piedra angular de nuestra teoría por cuanto, como acabamos de anunciar, alrededor del elemento *variable* se encadenan todos

1 *Capítulo I. Orígen, destierro y renacimiento de los infinitesimales.*

los demás. Una *variable u* es una sucesión ordenada de valores o datos numéricos o cantidades cualesquiera,

$$u = \{u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_N\}$$

donde $N$ es un entero positivo infinito, que llamaremos el *rango* de la variable, y cada $u_n$ es un hiperreal finito, infinito, o infinitesimal. Cuando se tiene una variable $u$, cada valor o cantidad $u_n$ es el *término* o *dato* en la *posición n*, también llamado el *índice* o *subíndice n*. Así, por ejemplo, podemos referirnos al *dato* $u_0$ de la posición cero, o si $N$ es infinito impar, al *dato de la mitad*, o el *último dato* $u_n$. Aunque usaremos el nombre de *subíndice*, estaremos tentados a utilizar el de *posición*, pues sugiere la idea de una variable que *recorre* una a una todas las posiciones, desde la primera hasta la última. En aras de la simplicidad y mientras no haya confusión, utilizaremos la notación tradicional de las sucesiones, tal y como se enseñan en el aula de clase:

$$u = \{u_n\}, \quad 0 \leq n \leq N$$

Esta notación significa que nuestra variable de la izquierda es idéntica a la sucesión de la derecha, que tiene como término general –en caso que pueda ser dado por una fórmula– al valor $u_n$.

El ejemplo más exitoso de variable –como lo veremos en todo el curso de la exposición– lo produce el recorrido de un infinitesimal fijo, mediante sus múltiplos enteros, durante todo un intervalo de la recta, como lo vimos en el capítulo anterior, en lo que denominamos 'pavimentación' del intervalo hiperreal [0, 1]. En efecto, se toma un entero infinito $N$, con el infinitesimal $\alpha = \dfrac{1}{N}$, y se considera el conjunto de todos los múltiplos

$$\{n\alpha\}, \quad 0 \leq n \leq N$$

Definimos la variable $x = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N\}$, donde

$$\begin{aligned}
&x_0 = 0\\
&x_1 = \alpha\\
&x_2 = 2\alpha\\
&\vdots\\
&x_{N-1} = (N-1)\alpha\\
&x_N = 1
\end{aligned}$$

El primer término de la variable es cero y el último es 1. Y esta notación de la variable x la mantendremos de ahora en adelante, aunque el intervalo sea más general, digamos $[a, b]$, donde los extremos son reales cualquiera y se escoja otro entero infinito, digamos $M$; en este caso, el término general es

$$x_m = \frac{m(b-a)}{M} + a$$

que se inicia en el valor $a$ y finaliza en $b$. Por supuesto, podemos exhibir otras variables, como la siguiente

$$u = \{x_0{}^2, x_1{}^2, x_2{}^2, x_3{}^2, \ldots, x_N{}^2\}$$

cuyos términos son el cuadrado de cada uno de los términos de la primera; también tiene 0 como término inicial y 1 como término final. En algunos momentos, porque lo consideremos imprescindible, definiremos variables que inician con la posición 1, como ocurre con la siguiente,

$$\begin{aligned}
&u = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_N\},\\
&u_1 = N\\
&u_2 = \frac{N}{2}\\
&u_3 = \frac{N}{3}\\
&\vdots\\
&u_N = 1
\end{aligned}$$

En otros, excluiremos la posición $N$ si se quiere que la variable se inicie en la posición 0 y recorra $N$ términos. Finalmente, serán de gran utilidad las variables que se inician en posiciones negativas, como la siguiente. Definimos Sea $x = \{n\alpha\}$ en el intervalo $[-T, T]$ dada por $\alpha = T/N$, y $-N \leq n < N$. También podemos definir $v$ así:

$$v^n = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

que recorre $2N$ posiciones cuyo valor es cero y luego 1. Obsérvese que el intervalo $[-T, T]$ no necesariamente tiene longitud finita, pues $T$ puede ser infinito.

Una *constante* $C$ es una variable de tipo

$$C = \{c, c, c, \ldots c\}$$

donde $c$ es una cantidad fija, o lo que es lo mismo, $C$ tiene el mismo dato en todas las posiciones.

A veces conviene distinguir las variables que no poseen datos infinitos. Si todos los $u_n$ cumplen la condición $u_n \leq M$ donde $M$ es real ordinario, diremos que $u$ es una *variable acotada*. Si una variable no posee ningún término infinitesimal se dice que tal variable se mantiene alejada de cero.

## LA DIFERENCIAL

Definiremos el elemento *diferencial* del siguiente modo. Cuando se tiene una variable $u$

$$u = \{u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_N\}$$

se puede construir una nueva sucesión cuyos términos son

$$du_0 = u_1 - u_0,\ du_1 = u_2 - u_1, \ldots\ du_{N-1} = u_N - u_{N-1}$$

Si los organizamos como datos o términos de una nueva variable, el rango de esta variable será $N$ - 1. Para recuperar el rango $N$, y en vista de que no existe el término $N+1$ de la variable $u$, supondremos que su último dato es *cero,* o sea $du_N = 0$. Como ya veremos, para nuestros propósitos es irrelevante cualquier cantidad que se coloque en el término final de la diferencial.

En resumen, la diferencial $du$ de la variable $u$ es la nueva variable de rango $N$

$$\begin{aligned} du &= \{u_1 - u_0, u_2 - u_1, u_3 - u_2, \ldots, u_N - u_{N-1}, 0\} \\ &= \{du_0, du_1, du_2, du_3, \ldots, du_N\} \end{aligned}$$

La idea que debe retener el lector es que toda variable tiene una diferencial y ésta siempre es una variable. La frase «toda variable tiene una diferencial» es ajena al cálculo que nos enseñan en el aula de clase. Lo que hace chocante a la frase es asociar mentalmente la diferencial a un concepto geométrico, que es el de *tangente*. En nuestro cálculo, la definición es estrictamente aritmética: la diferencial es simple y llanamente «diferencias de cantidades» sólo que dichas cantidades se pueden operar a escala infinitesimal.

En el área de las matemáticas llamada *ecuaciones en diferencias finitas*[2], se define el *operador de diferencias* como $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$. Se podría argumentar que éste es similar a nuestra diferencial. Pero no es cierto, porque la diferencial opera con sucesiones no finitas con valores hiperreales, lo que el operador de diferencias $\Delta$ no contempla.

Hay una importante relación –inversa– entre la variable $u$ y su diferencial $du$, en el sentido siguiente: supongamos que iniciamos con la diferencial de una variable,

$$\begin{aligned} &du_0 = u_1 - u_0, u_1 = u_0 + du_0 \\ &du_1 = u_2 - u_1, u_2 = u_1 + du_1 = u_0 + du_0 + du_1 \\ &du_2 = u_3 - u_2, u_3 = u_2 + du_2 = u_0 + du_0 + du_1 + du_2 \\ &\ldots\ldots. \\ &du_{N-1} = u_N - u_{N-1}, u_N = u_{N-1} + du_{N-1} = u_0 + du_0 + du_1 + du_2 + \cdots + du_{N-1} \\ &du_N = 0 \end{aligned}$$

2 S. Goldberg, *Introduction to Difference Equations,* Dover Publications, Inc., New York, 1958.

luego es posible recuperar –salvo el término inicial que es la condición inicial– la variable en términos de su diferencial,

$$u = \{u_0, u_0 + du_0, u_0 + du_0 + du_1, \cdots, u_0 + du_0 + du_1 + \cdots + du_{N-1}\}$$

Este hecho aritmético elemental permite intuir ya –lo hizo Leibniz– la relación recíproca que existe entre la variable y la diferencial.

## LA VARIABLE INDEPENDENDIENTE

Paradójicamente, aunque el concepto de *variable independiente* es uno de los más utilizados en el cálculo tradicional, muy rara vez se precisa de que se trata. La explicación más frecuente es espacial: la variable independiente es la que ha sido «despejada» y colocada a la derecha de la ecuación, mientras que a la izquierda está la variable «dependiente». Nuestro cálculo resuelve toda duda al respecto y facilita la comprensión total de dicho concepto. Una variable

$$u = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_N\}$$

es *independiente* si su diferencial *du* es una constante, lo que escribimos como $du = C = \{c\}$. Esto es equivalente a que en cada posición de la variable *du* la diferencia entre un dato y el anterior sea una constante no nula,

$$du = \{du_n\}, \quad u_{n+1} - u_n = c, \quad 0 \leq n < N, \quad du_N = 0 \quad c \neq 0.$$

Podemos desplegar los datos de la variable independiente, ya que

$$\begin{aligned}
&u_1 - u_0 = c, \quad u_1 = u_0 + c \\
&u_2 - u_1 = c, \quad u_2 = u_0 + 2c \\
&u_3 - u_2 = c, \quad u_3 = u_0 + 3c \\
&\cdots\cdots \\
&u_n - u_{n-1} = c, \quad u_n = u_0 + nc \\
&\cdots\cdots \\
&u_N - u_{N-1} = c, \quad u_N = u_0 + N c
\end{aligned}$$

Haciendo la substitución $u_0 = a$, toda variable independiente $u$ es de la forma

$$u = \{a, a+c, a+2c, a+3c, ..., a+Nc\}$$

donde $a$ es la condición inicial o primer dato. Si la variable $u$ tiene como primer dato $a = 0$, obtenemos que toda variable independiente es de la forma

$$u = \{0, c, 2c, 3c, ..., Nc\}, \quad u = \{nc\}, \quad 0 \leq n \leq N$$

Supongamos que N es entero infinito y hacemos la constante $c$ el infinitesimal $c = \alpha = \frac{1}{N}$, entonces el conjunto de todos los múltiplos

$$\{n\alpha\}, \quad 0 \leq n \leq N$$

es precisamente la variable $x = \{n\alpha\}$, siendo ésta –y no otra- la razón por la cual dicha variable se denomina independiente.

### *LA VARIABLE CONTINUA*

El concepto de *continuidad* que expondremos, verdadero núcleo de la teoría, es una ruptura con el concepto oficial de continuidad, que es el que estudiamos con detalle en el primer capítulo, y que opera en el ámbito de la matemática, desde Weierstrass, Cantor y Dedekind.

Recordemos que, de acuerdo a este último[3], una vez que define con todo rigor lo que significa un salto y un agujero en un conjunto linealmente ordenado, el conjunto se define como *continuo*, según Dedekind –si no tiene saltos ni agujeros. La situación que plantea nuestra definición de variable es radicalmente distinta. Por su propia definición, dada una variable, ésta produce un *salto* en cada uno de sus valores, ya que la sucesión es discreta aunque a escala infinitesimal. De modo que, cuando hablemos de continuidad, no estaremos hablando precisamente de la continuidad en el sentido de Dedekind sino de Leibniz y, en cierto sentido, de Cauchy, aun-

3 R. Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, Inc. New York, [1901], 1963.

que la polémica sobre el uso de la continuidad, en este último autor, sigue abierta y actual[4].

Nosotros diremos que una variable $u$ es *continua* si su diferencial $du$ recorre valores infinitesimales. Esto quiere decir que la diferencia entre cada dato y el anterior es infinitesimal,

$$du_n = u_{n+1} - u_n \approx 0$$

lo que escribimos como $du \approx 0$.

Nótese que si una variable es continua, su diferencial también es una variable continua, ya que las diferencias de infinitesimales son infinitesimales; en otras palabras, $ddu \approx 0$. Una vez que se tiene la propiedad de continuidad, ésta jamás se pierde. Como la variable continua toma valores en una sucesión infinita cuyos términos están separados infinitesimalmente, *la diferencial* es así mismo, la variable cuyos términos son infinitesimales. Esto permite aclarar el concepto de *continuidad* de Leibniz: el adjetivo *continuo* en la variable significa que su diferencial toma valores sucesivos infinitesimales. No vemos ningún misterio en la notación de nuestras variables con las que tradicionalmente se usan, si hacemos que asuman la forma *de sucesiones infinitesimales de cantidades diversas*, tal y como le gustaba decir a Descartes. Y en efecto, el concepto de continuidad deteminado por una sucesión de valores a escala infinitesimal, es lo que permite denominar a nuestra teoría como «cálculo discreto infinitesimal» o resumidamente *MicroCálculo*, que es el nombre que estamos utilizando.

### *LAS VARIABLES, COMO SE USAN*

Reiteramos que estamos interesados en variables construidas del modo siguiente. Consideremos un intervalo finito de la recta hiperreal $^*\mathbb{R}$, que podemos suponer el intervalo $[-T, T]$, donde $T$ es real finito, y el entero infinito $N$. Ya hemos visto que la variable x es independiente, porque es una expresión particular de toda variable independiente. Pero ahora vamos a profundizar más este enfoque, teniendo en cuenta que tanto x como su diferencial $dx$ serán

4 J. Hernandez, "El rigor de Cauchy y el Análisis Matemático", *Mathesis, filosofía e historia de la matemática*, Vol. IX, No. 2, Mayo 1993.

$$x=\left\{\frac{nT}{N}\right\}, \quad -N\leq n<N$$

$$dx_n=\frac{(n+1)T}{N}-\frac{nT}{N}=\frac{T}{N},$$

$$dx=\left\{\frac{T}{N}\right\}$$

Obsérvese que la diferencial $dx$ es una cantidad constante, luego x es una variable independiente. Pero además, como $T$ es finito, $T/N$ es infinitesimal, y por tanto, la diferencial es infinitesimal, o sea que también x es continua. Debido a que cada término de la diferencial es constante, abusando del lenguaje, podemos identificar todos ellos con el mismo símbolo $dx$ por lo que $dx = \{dx\}$. Sustituyendo,

$$x=\{0, dx, 2dx, 3dx, \ldots, Ndx\}$$

o también,

$$x=\{ndx\}$$

que es la expresión de la que a menudo haremos uso. Como ya hemos indicado, la variable x es una «pavimentación» del intervalo $[-T, T]$ considerado, siempre que $T$ sea finito. En caso que $T$ sea infinito, toda la recta quedará «pavimientada» por la variable independiente y continua x, siempre que $T$ sea mucho menor que $N$, o sea $T << N$, para que el cociente $T/N$ siga siendo infinitesimal.

### *Algebra de variables*

El álgebra de variables hace referencia a la manipulación simbólica y operativa de las variables. En la tradición del cálculo, si $u$, $v$ son variables, $u + v$ es una *operación*, mientras que $u^2$ es una *función*. Este hecho conduce a la confusión inevitable entre *variable* y *función*, confusión que muchos autores han logrado superar mediante simbologías artificiosas. Para nosotros, el álgebra de variables produce variables, sin que se requiera apelar al concepto de función.

Sean $u$ $v$, variables del mismo rango $N$ –que es un entero infinito que podemos fijar–. Definimos la nueva variable $u + v$ como suma de sucesiones,

$$u+v=\{u_n+v_n\}=\{u_0+v_0,u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3,\ldots,u_N+v_N\}$$

De la misma forma, definimos el producto y el cociente,

$$u\times v=\{u_n\,v_n\},\quad \frac{u}{v}=\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$$

donde el cociente, que es un producto de la primera variable por el inverso multiplicativo de la segunda, está bien definido siempre que todos los datos del denominador sean distintos de cero. El caso mas usual de producto es el de las potencias de la variable,

$$\begin{aligned}
&u=\{u_0,u_1,u_2,u_3,\ldots,u_N\}\\
&v=u\times u=u^2=\{u_0{}^2,u_1{}^2,v_2{}^2,\ldots,v_N{}^2\}\\
&w=a\,u^n=\{a\,u_0{}^n,a\,u_1{}^n,\ldots,a\,u_N{}^n\}
\end{aligned}$$

aquí, las variables pueden ser combinadas algebraicamente, formando los familiares polinomios en una variable. Por ejemplo, dado $x=\{ndx\}$, hacemos $y=3x^3-2x^2+x-1$.

## *Álgebra diferencial*

El álgebra diferencial consiste en el conjunto de relaciones que se establecen entre el álgebra de variables y la diferencial de una variable. La diferencial de una constante es cero, o más exactamente, es la variable cero, porque

$$C=\{c,c,c,\cdots,c\}\quad dC=\{0,0,0,\cdots,0\}=0$$

La diferencial asigna a una sucesión, una nueva sucesión y actúa como un *operador*. Por ello es perfectamente válido tomar diferenciales de sumas, y compararlas con sumas de diferenciales. Usando notación condensada, se obtiene

$$d(u+v)=\{d(u_n+v_n)\}=\{u_{n+1}+v_{n+1}-(u_n+v_n)\}=\{u_{n+1}-v_{n+1}+u_n-v_n\}=\{du_n+dv_n\}$$

por tanto

$$d(u+v)=du+dv$$

La siguiente es una de las relaciones más interesantes entre diferenciales de variables, que ya analizamos en el primer capítulo, pero que aquí cobra la mayor importancia, dado el interés histórico y la utilización práctica. Se trata de la regla de Leibniz, o regla de la diferencial del producto de variables. Para calcularla, sean $u$ y $v$ dos variables de rango $N$, entonces,

$$u=\{u_n\},\quad v=\{v_n\},\quad du=\{u_{n+1}-u_n\},\quad dv=\{v_{n+1}-v_n\}$$

y por consiguiente

$$udv=\{u_n(v_{n+1}-v_n)\},\quad vdu=\{v_n(u_{n+1}-u_n)\}$$
$$udv+vdu=\{u_nv_{n+1}-2u_nv_n+u_{n+1}v_n\}$$

De otra parte

$$dudv=\{u_{n+1}v_{n+1}-u_{n+1}v_n-u_nv_{n+1}+u_nv_n\}$$

sumando,

$$udv+vdu+dudv=\{u_nv_{n+1}-2u_nv_n+u_{n+1}v_n+u_{n+1}v_{n+1}-u_{n+1}v_n-u_nv_{n+1}+u_nv_n\}$$
$$=\{u_{n+1}v_{n+1}-u_nv_n\}=d(uv)$$

De modo que la regla del producto no sigue la fórmula tradicional que se estudia en el aula de clase. La verdadera regla que hemos establecido es

$$d(uv)=udv+vdu+dudv$$

El resultado anterior es estrictamente algebraico y ni siquiera depende del sistema numérico que se considere o del rango finito o infinito de $N$, como lo confirma el siguiente ejemplo un poco ridículo. Sean $u = \{a, b\}$ y $u = \{c, d\}$ dos variables de sólo dos términos cada una. De acuerdo a la definición de diferencial, tendríamos,

$$d(uv)=d(\{a,b\}\{c,d\})=d\{ac,bd\}=bd-ac,0\}$$

de otra parte,

$$udv+vdu+dudv=\{a(d-c),0\}+\{c(b-a),0\}+\{(b-a)(d-c),0\}=d(uv)$$

la regla de Leibniz, aún en este curioso caso, se cumple.

### LA VARIACIÓN

En los textos de cálculo se emplea el término *variación,* sin que haya una definición unificada sobre tal expresión. Siguiendo nuestro razonamiento sobre la variable considerada como sucesión, si $u$ es una variable, definimos la variación de $u$ como la nueva variable $u + du$ que no es otra cosa que la variable más un infinitesimal, en caso que la variable sea continua. El cálculo de la variación es el siguiente:

$$u=\{u_0,u_1,u_2,\dots,u_N\}$$
$$du=\{u_1-u_0,u_2-u_1,\dots,u_N-u_{N-1},0\}$$
$$u+du=\{u_1,u_2,u_3,\dots,u_N,u_N\}$$

La variación de una variable consiste en desplazar un lugar a la izquierda los términos de dicha variable, salvo el último término. Esta definición es útil para el cálculo siguiente.

### DIFERENCIAL DE LA VARIABLE INVERSA

Tenemos la variable

$$u=\{u_0,u_1,u_2,u_3,\cdots,u_N\}$$

y se nos plantea calcular la diferencial de la variable

$$\frac{1}{u}=\left\{\frac{1}{u_0},\frac{1}{u_1},\frac{1}{u_2},\frac{1}{u_3},\cdots,\frac{1}{u_N}\right\}$$

lo haremos aplicando reglas estrictamente algebraicas,

$$d\left(\frac{1}{u}\right)=\left\{d\,\frac{1}{u_n}\right\},$$
$$\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=-\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n u_{n+1}}$$
$$d\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{du}{u(u+du)}$$

donde el último valor de la diferencial es cero.

### IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES

La siguiente regla nos permite identificar variables de modo que se eliminen términos que se consideran despreciables, en el sentido de identificación de infinitesimales.

¿Cuando son iguales dos variables? Dadas

$$u=\{u_0,u_1,u_2,u_3,\dots,u_N\}$$
$$v=\{v_0,v_1,v_2,v_3,\dots,v_N\}$$

parece evidente identificarlas teniendo en cuenta los diversos órdenes de magnitud de sus valores, comparándolos término a término. Para que pueda darse tal comparación, es necesario que los términos sean hiperreales finitos. Así, toda variable se separa en la forma

$$u=r+\alpha$$
$$v=r+\beta$$

donde no es suficiente que coincidan sus partes reales ordinarias ya que

$$\alpha=\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N\}$$
$$\beta=\{\beta_0,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_N\}$$

Producimos la identificación $\alpha\equiv\beta \quad\leftrightarrow\quad \dfrac{\alpha}{\beta}\approx 1 \quad\leftrightarrow\quad \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\approx 1$. En otras palabras cada uno de los valores de la segunda variable respecto a la primera, son despreciables. Definimos entonces identidad de variables de la siguiente forma:

$$u \equiv v \quad \leftrightarrow \quad \alpha \equiv \beta \quad \leftrightarrow \quad \frac{\alpha_n}{\beta_n} \approx 1, \quad 0 \leq n \leq N$$

Así, por ejemplo

$$u = r + \alpha$$

$$v = r + \alpha + \alpha^2$$

entonces

$$u \equiv v$$

$$r + \alpha \equiv r + \alpha + \alpha^2 \cdot$$

Pero los resultados más interesantes, que a continuación abundan, no saltan a la vista.

Por la regla de Leibniz, la variable $y = xx = x^2$, tiene como diferencial

$$dy = 2xdx + dxdx$$

Pero,

$$\frac{2xdx + dxdx}{2xdx} = 1 + \frac{dx}{2x} \quad \rightarrow \quad 2xdx + dxdx \equiv 2xdx$$

donde hemos supuesto que la variable x es continua, para que efectivamente *dx* sea infinitesimal. O sea que podemos producir la identificación entre infinitesimales,

$$y = x^2 \quad \rightarrow \quad dy = 2xdx$$

que es exactamente lo que hizo Leibniz ¡y lo que siguen haciendo todos los que usan infinitesimales en el cálculo! Aplicando sucesivamente la regla del producto, y teniendo en cuenta las identificaciones de variables, se puede verificar que, en general, para potencias enteras,

$$du^n = nu^{n-1}du$$

Mucho más interesante es la regla de Leibniz para el producto, en general. Ya hemos visto que la siguiente es una igualdad algebraica entre variables:

$$d(uv) = udv + vdu + dudv$$

Ahora bien, comparemos la variable de valores infinitesimales $udv + vdu + dudv$ con la variable $udv + vdu$. Siempre que $u$ y $v$ sean valores reales ordinarios,

$$\frac{udv + vdu + dudv}{udv + vdu} = 1 + \frac{dudv}{udv + vdu} = 1 + \alpha$$

luego es válido identificar ambas variables, lo que demuestra que la igualdad algebraica inicial se convierte en la regla del producto,

$$d(uv) = udv + vdu$$

a escala infinitesimal.

¿Qué diferencia hay entre una variable como $uu$ y la variable $u(u+du)$? Prácticamente ninguna, siempre que $u$ sea continua y acotada, ya que

$$\frac{u(u+du)}{u^2} = 1 + \frac{du}{u} = 1 + \alpha$$

está en el átomo de 1, luego desde el punto de vista de clases de equivalencia, las variables $u(u+du)$ y $u^2$ son idénticas.

La consecuencia de esta identificación es inmediata, pues la diferencial de la inversa de una variable será

$$d\frac{1}{u} = -\frac{du}{u^2}$$

De aquí surge inmediatamente la regla leibniziana de diferenciación del cociente, siempre que se cumplan las identificaciones respectivas sobre tales variables,

$$d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

El cálculo tradicional no ha podido encontrar todavía una explicación adecuada a estos fenómenos, conocidos como *formas diferenciales*, y se ve obligado a construir teorías de alguna complejidad, para poder explicar fórmulas muy simples, como las anteriores.

## LA FUNCIÓN

En el cálculo tradicional se entiende por *función* –en el sentido de *función numérica de una variable real*, claro está– una relación determinada entre conjuntos numéricos X, Y, donde la *naturaleza funcional de la relación* consiste en asignar a cada elemento de X un único elemento de Y. La asignación puede hacerse, ya sea verbalmente, mediante una ley o regla, una tabla de valores, una expresión analítica, fórmula o ecuación, una gráfica o, las más de las veces, una correspondencia cualquiera. Pero, lo esencial del concepto moderno de función es el *carácter arbitrario* de la asignación.

Nosotros nos apartaremos un poco del sentido en que el cálculo, que se estudia en el aula de clase, le da a la función; la que vemos íntimamente asociada al concepto de variable y sólo determinada por la existencia de éstas. En cierta forma, nos acercaremos a la idea original de Leibniz, Newton y Euler. Para hacer corresponder el concepto de variable con la notación actual, de ahora en adelante usaremos las letras de variables a *x, y, z,* etc.

### *DEFINICIÓN DE FUNCIÓN*

Dadas dos variables x, y de la misma longitud o rango *N,* donde *N* es entero infinito, la pareja *(x, y)* ordenada secuencialmente, en el sentido de que a cada término de la primera variable se le asigna el término correspondiente de la segunda, recibe el nombre de *función*. Considerada la pareja en ese orden, diremos que x es el *argumento* o *variable del dominio* y y es la *variable del rango* o contradominio*;* también se dice que la variable y es *función* de la variable x. Esto lo escribiremos de la siguiente forma. Si tenemos las dos variables

$$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$$
$$y=\{y_1,y_2,\cdots,y_N\}$$

La pareja ordenada de las dos variables se puede simbolizar como

$$(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y_i = f(x_i)$$

donde la identidad es simbólica, en el sentido en que la letra $f$ de la derecha es un símbolo externo, y como letra de función no simboliza ninguna de las dos variables sino la relación u operación establecida entre éllas. Se puede pensar que se ha establecido una asignación $x \to y$ de la forma

$$\begin{aligned} &x_1 \to y_1 \\ &x_2 \to y_2 \\ &\dots \\ &x_N \to y_N \end{aligned}$$

Nótese que ésta es una correspondencia *multivaluada*, en su sentido más general, ya que es indiferente la multiplicidad de valores del rango en la asociación que se establece desde la variable del dominio. La compatibilidad de tal definición con la definición tradicional ocurre cuando la variable x cumple la condición

$$n \neq m \to x_n \neq x_m$$

en cuyo caso la asignación es univaluada. Cuando se tiene la función $y = y(x)$ se acostumbra decir que x es la variable independiente y x la variable dependiente. Pero hemos visto que esto es extremadamente ambiguo, en primer lugar, porque una variable es independiente cuando su diferencial es constante. Y no debe descartarse que dos variables sean independientes a la vez que sostienen una relación funcional.

Cuando la función es *(x, y)*, el par *(y,x)* se llama *función inversa* y se denota

$$\begin{aligned} &(x, y) \Leftrightarrow y = y(x) \\ &(y, x) \Leftrightarrow x = x(y) = y^{-1}(x) \end{aligned}$$

He aquí un resultado que no se corresponde con el cálculo convencional: toda función tiene una función inversa.

## LA DEPENDENCIA LINEAL

Vamos a develar el misterio que cubre el concepto de *dependencia li-* *neal*, exponiéndolo en su más amplia generalidad. Sean x, y dos variable cualesquiera,

$$x = \{x_n\} \quad y = \{y_n\}$$

donde $n = 0, 1, 2, ..., N$. Supongamos que $dx$ no se anula en ninguno de su términos. Diremos que y depende linealmente de x, si se cumple la relació

$$\frac{dy}{dx} = a$$

para un real fijo $a$. Se trata de determinar la naturaleza de la relación d dependencia, esto es, expresar la variable y, conocida la variable x y l constante $a$. Nótese que x es una variable cualquiera, y no necesariament una variable independiente, o sea que $dx$ no tiene por que ser constante.

Ya que

$$\frac{dy}{dx} = \left\{\frac{dy_n}{dx_n}\right\}$$
$$\frac{dy_n}{dx_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = a$$

entonces

$$y_{n+1} = y_n + adx_n, \quad y_0 = b$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned}
&y_0 = b \\
&y_1 = adx_0 + b \\
&y_2 = a(dx_0 + dx_1) + b \\
&\ldots \\
&y_n = a(dx_0 + dx_1 + \cdots + dx_{n-1}) + b = a(x_n - x_0) + b \\
&\ldots \\
&y_N = a(x_N - x_0) + b
\end{aligned}$$

De donde,

$$\{y_n\} = \{a(x_n - x_0) + b\}$$

o lo que es lo mismo,

$$y = a(x - x_0) + b$$

En particular, si el primer término de la variable x es cero, reconoceremos la fórmula tradicional de dependencia funcional lineal. En los cursos de cálculo se presenta esta relación, también llamada *función lineal* como si la variable x fuera independiente y la variable y dependiera de aquella. Pero, de acuerdo al álgebra diferencial

$$y = ax + b$$
$$dy = adx$$

por tanto, si x es independiente, *d*x es constante y también *d*y será constante, o sea que también y será independiente.

### Función continua

El concepto de continuidad, propio del elemento variable, puede ser extendido al elemento funcional, de la siguiente forma. Diremos que una función y = *f*(x) es *continua* cuando la variable y sea continua. Dicho de otro modo se dice que y = *f*(x) es continua, si y sólo si $dy = df \approx 0$. Obsérvese que x no tiene por que ser continua para que *f* lo sea.

Lo que aquí hemos llamado función continua es lo que en el cálculo se conoce como función *uniformemente* continua puesto que dicho concepto ha quedado definido para todo valor de la variable. Tradicionalmente, la definición de continuidad es puntual: se dice cuándo la función es continua en un punto, y se denota como continua la que es continua en todo punto del intervalo de su dominio. De allí que la negación de la continuidad en un punto es la *discontinuidad* en el punto. En otras palabras, una función *discontinua* no necesariamente implica la no continuidad en cada uno de los valores de la variable. Para armonizar la definición global con la local, procederemos de la manera siguiente: sea y = *f*(x) una función tal que x es una variable continua. Decimos que *f*(x) *es continua por la dere-*

*cha* en el valor $x_n$ si la cantidad $dy_n = y_{n+1} - y_n$ es infinitesimal. Similarmente, *f(x)* es *continua por la izquierda* en el valor si la cantidad $dy_{n-1} = y_n - y_{n-1}$ es infinitesimal. La función se dice continua en el valor $x_n$ si es continua a la izquierda y a la derecha de dicho valor. Así, una función *f(x)* será continua si en cada uno de los valores de la variable x es continua.

La diferencial de la variable inversa arroja luz sobre la continuidad uniforme. Desde el punto de vista del cálculo ordinario, si tomamos el intervalo (0,1] y la siguiente función definida en dicho intervalo: $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$, se nos dice que es obvio que la función es continua en cada x real ordinario, pero que dicha función no es uniformemente continua en el intervalo (lo que no es tan obvio).

A la luz de nuestro calculo, el problema es uno sólo, y queda resuelto completamente. Tomamos la variable x en el intervalo abierto (0, 1] definida por $x = \{dx, 2dx, 3dx, ..., Ndx\}$, donde la variable inversa es

$$\frac{1}{x} = \left\{\frac{1}{dx}, \frac{1}{2dx}, \frac{1}{3dx}, \cdots, \frac{1}{Ndx}\right\}$$

y el entero infinito *N* define la constante *d*x = 1/*N*. Calculemos el primer término de la diferencial de la variable inversa. Este es

$$\frac{1}{2dx} - \frac{1}{dx} = -\frac{1}{2dx}$$

Esta diferencia es infinita, porque *d*x es infinitesimal. Luego a dos valores infinitamente cercanos les corresponde dos valores infinitamente lejanos. No hay continuidad de la variable 1/x –mucho menos continuidad uniforme– mientras la variable se mantenga cerca de cero.

## DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

Aquí vamos a resolver una cuestión cardinal del cálculo, cual es la relación de las variaciones entre las variables. Dada la función y = *f(x)*, ¿qué efecto tiene la variación de x sobre la variación de y? Sabemos que la variación de x es x + *d*x mientras que la variación de y es y + *d*y. Ahora,

$$x=\{x_0,x_1,x_2,...,x_N\}$$
$$x+dx=\{x_1,x_2,x_3,...,x_N,x_N\}$$

$$y=\{y_0,y_1,y_2,...,y_N\}$$
$$y+dy=\{y_1,y_2,y_3,...,y_N,y_N\}$$

Obsérvese la correspondencia, término a término, entre x + *dx* y y + *dy*. Por tanto,

$$y+dy=f(x+dx)$$
$$dy=f(x+dx)-f(x)$$

Surge así una nueva función

$$df(x)=dy=f(x+dx)-f(x)$$

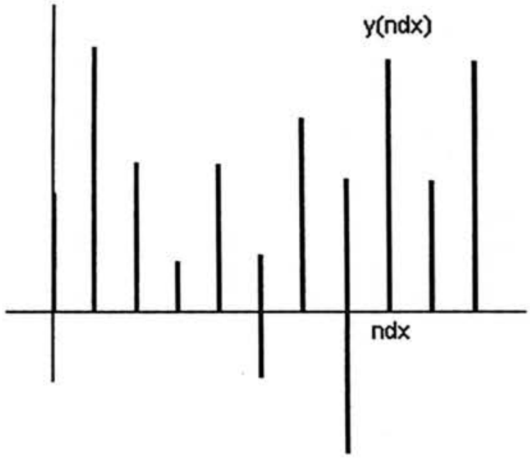
denominada diferencial de la función *f*, denotada *df*. Esta cuestión jamás podrá ser expresada con tanta simplicidad en los libros de cálculo tradicional.

## *FUNCIONES SOBRE EL DOMINIO CONTINUO*

Hasta ahora, la variable x ha sido arbitraria. Uno de los hechos más interesantes en la construcción de funciones es aquel que logramos al considerar parejas *(x,y)* donde la variable x, llamada la *abcisa*, recorre un intervalo [0,T], en el que la variable se define como $x=\{ndx\}$, $0\leq n\leq N$ y la variable y es la *ordenada* correspondiente. Esto permite escribir a la variable y como

$$y=y(x)=\{y_n\}=\{y(ndx)\}$$

donde definimos $y_n=y(ndx)$.




La variable x es independiente y continua, por lo que la función $y(x)$ será continua sobre el dominio $[0, T]$ una vez que y cumpla la condición

$$y((n+1))dx \approx y(ndx)$$

para todo $0 \leq n \leq N$. Esta situación nos permite verificar la similitud de algunas funciones que ha continuación construiremos, con las definiciones tradicionales.

### LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

En el dominio $[0, a]$, donde $x = ndx$, $dx = a/N$, $N$ infinito, estudiemos la función $y = y(x)$ que cumple con la condición

$$\frac{y((n+1)dx) - y(ndx)}{dx} = y(ndx)$$

donde el denominador del cociente es la constante $dx$. Despejando, y suponiendo que el valor de y en el dato $n = 0$, es $y(0) = b$,

$$y(0) = b$$
$$y(dx) = b\ (1+dx)\,y(0) = (1+dx)$$
$$y(2dx) = b\ (1+dx)\,y(dx) = (1+dx)^2$$
$$y(3dx) = b\ (1+dx)\,y(2dx) = (1+dx)^3$$
$$\ldots$$
$$y(Ndx) = b\ (1+dx)^N, \quad Ndx = a$$
$$y(a) = b\left(1+\frac{a}{N}\right)^N$$

Hagamos $Exp(x) = y(x)$. Esta es la expresión para la exponencial de cualquier real x, luego, la naturaleza funcional de la relación inicial está dada por la expresión

$$y(x) = Exp(x)$$
$$y(0) = b$$
$$Exp(1) = e$$

Observemos que el valor de la exponencial depende de *N*, que es el entero que determina el número de subdivisiones del intervalo. En otro lugar, hemos demostrado que *e* no es otro que la base de los logaritmos neperianos y que, para cada x finito, la exponencial es finita. Si queremos obtener valor reales ordinarios, se toma la parte estandar, que es independiente del entero *N*.

### *LA FUNCIÓN* SENO

En los libros de texto se encuentra la propiedad de la función trigonométrica *y(x)=seno(x)*, donde

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y$$
$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 1$$

pero muy pocos textos pueden construir la función *seno* como *serie de potencias* del modo tan sencillo como haremos a continuación. Mediante el cálculo del valor inicial

$$\frac{y(dx)-y(0)}{dx}=\frac{y(dx)}{dx}=1$$

La variable y*(ndx)* cumple las condiciones iniciales

$$\frac{d}{dx}\frac{(y((n+1)dx)-y(ndx))}{dx}=-y(ndx)$$

$$\begin{aligned}&y(0)=0\\&y(dx)=dx\end{aligned}$$

desarrollando la segunda derivada,

$$\frac{y((n+2)dx)-2y((n+1)dx+y(ndx)}{dx^2}=-y(ndx)$$

reagrupando términos, $y((n+2)dx)=2y((n+1)dx-(1+dx^2)y(ndx)$. Despejando cada término

$$\begin{aligned}&y(0)=0\\&y(dx)=dx\\&y(2dx)=1-dx^2\\&y(3dx)=1-3dx^2\\&y(4dx)=1-6dx^2+dx^6\\&y(5dx)=1-10dx^2+5dx^4\\&\ldots\end{aligned}$$

Si nos fijamos en los coeficientes de la derecha, podemos escribir

$$y(ndx)=ndx-\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}dx^3+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}dx^5-\cdots$$

pero al reemplazar x = *n*dx y expandir los factores del numerador, despreciando las cantidades infinitesimales según el método de substitución que hemos indicado, este es precisamente el desarrollo de *seno(*x*)* como serie de potencias,

$$sen(ndx) = ndx - \frac{(ndx)^3}{3!} + \frac{(ndx)^5}{5!} - \cdots$$

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Este desarrollo se ha logrado sin necesidad de calcular las *derivadas superiores* de la función.

## LA DERIVADA

Entramos ahora a estudiar otro de los conceptos fundamentales del cálculo, que hemos llamado *el elemento derivada*. En todos los textos, la derivada obedece al cálculo del límite de un cociente, llamado *cociente de Newton*. Para nosotros, siguiendo el viejo modelo leibniziano, la derivada se obtiene directamente del *cociente de diferenciales*. La derivada supone la función, porque para obtener el cociente de diferenciales se requieren dos variables, una en función de la otra.

Dada la función y = *f(x)*, donde x es una variable continua, (*d*x es infinitesimal), no necesariamente independiente, el cociente diferencial consiste en dividir la diferencial de la función por la diferencial *d*x así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

que es exactamente la operación que trescientos años atrás hacía Leibniz. Por supuesto, el cociente puede ser obtenido directamente como:

$$\frac{dy}{dx} = \left\{ \frac{dy_1}{dx_1}, \frac{dy_2}{dx_2}, \frac{dy_3}{dx_3}, \ldots, \frac{dy_N}{dx_N} \right\}$$

siempre que que todos los datos de *d*x sean distintos de cero, lo que es el caso cuando la variable x no sea independiente. Contra todo pronóstico del cálculo ordinario, dada una función cualquiera, siempre existe el cociente diferencial. En todo caso, los términos de la sucesión cociente serán finitos, infinitos o infinitesimales. La derivada *f'(x)* de una función y=*f(x)* se define como la parte estandar de cociente diferencial:

$$f(x) = {}^{0}\!\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

en caso de que exista. La derivada de una función difiere drásticamente del cociente diferencial puesto que siempre, siguiendo una regla universal, la existencia de la derivada supone una función de valores reales de la variable real. En otras palabras, siempre que x sea real ordinario, $f'(x)$ sera inequívocamente real ordinario. Cuando esto ocurre, se dice que la función $f(x)$ es derivable.

Comparando, obtenemos la importante identidad,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) + \alpha$$

y por tanto, podemos expresar la derivada en términos de diferenciales,

$$dy = y'(x)dx + \beta$$

donde β es un infinitesimal mucho menor que $dx$, o sea $\beta/dx$ sigue siendo infinitesimal. Recordemos, no debe confundirse jamás la derivada con el cociente diferencial, pues la derivada es una sucesión donde cada valor es un real ordinario y difiere del cociente en un infinitesimal. Y precisamente esta es una de las más lamentables amalgamas que ha introducido el cálculo tradicional, que aquí hemos logrado aclarar.

Ejemplo

Sea $y = ax+b$, donde $a$ es real ordinario. Sabemos que $dy = adx$, luego, si $dx \neq 0$, dividiendo por $dx$,

$$\frac{dy}{dx} = a$$

Aquí la constante $a$ es un real ordinario, luego la derivada de la función $y = ax+b$ es obviamente $y' = a$.

La función cuadrática es $y = x^2$, donde x es una variable cualquiera. Supongamos que esta variable es continua de modo que $dx$ es infinitesimal. La diferencial de la función es $dy = 2xdx + dxdx$, luego el cociente diferencial será

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx$$

Para x real ordinario, la parte estándar del cociente diferencial será 2x. Luego la derivada es $y' = 2x$.

### REGLA DE LA CADENA

Dadas dos parejas de funciones de la forma y = *f*(z), z = *g*(x), existe la *composición* $y = (f \circ g)(x)$ de las dos funciones. Supongamos que ambas funciones son derivables. Por tanto, para calcular de derivada de esta última función, nos fijamos en el cociente diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

Ambos factores de la derecha están bien definidos, porque corrersponden a sus respectivas funciones. Y además, es perfectamente lícito cancelar aritméticamente la diferencial *dz*, como en su tiempo hacía Leibniz. Sólo que todavía no tenemos la derivada, porque hay que separar la parte estándar.

Como existe la derivada tanto de la función y = *f*(z) como de z = *g*(x) tenemos que

$$\frac{dy}{dz} = y'(z) + \alpha$$
$$\frac{dz}{dx} = z'(x) + \beta$$

luego, reemplazando,

$$\frac{dy}{dx} = \left(y'(z) + \alpha\right)\left(z'(x) + \beta\right)$$
$$\frac{dy}{dx} = y'(z)z'(x) + \lambda$$
$$\lambda = z'(x)\alpha + y'(z)\beta + \alpha\beta$$

En esta descomposición, $y'(z)z'(x)$ es la familiar derivada de la función compuesta, dado que cada uno de sus valores es real ordinario y difiere del cociente diferencial en un infinitesimal λ.

### *DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA*

Dada la función y = *f(x)* y su función inversa x = *g(y)*, para calcular la derivada de la función inversa, se procede como hace trecientos años se hacía:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

El resultado es inmediato,

$$\frac{dy}{dx}=y'(x)+\alpha$$
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{y'(x)+\alpha}=\frac{1}{y'(x)}+\beta$$

invitamos al lector a obtener el mismo resultado, pero con los métodos del cálculo tradicional.

### *CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN DERIVABLE*

Dada una función *derivable* y = *f(x)*, donde las variables, como sabemos, son sucesiones arbitrarias de rango *N*, Vamos a suponer que la función posee derivada. El hecho que el cociente diferencial se mantenga en el átomo de un real ordinario, significa que, para algún real ordinario *r*,

$$\left|\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}\right|<r$$
$$|y_{n+1}-y_n|<r|x_{n+1}-x_n|$$

Como x es continua, el lado derecho es infinitesimal, luego el izquierdo es infinitesimal y la función será continua.

### DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Como hemos visto, la función exponencial de la variable x es

$$Exp(0) = 1$$
$$Exp(x) = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$$

para x en un intervalo [0, *T*], donde x = *n*dx, *d*x = *T*/*N*, *N* infinito. Para derivar dicha expresión como función compuesta, encontramos que

$$\frac{d(Exp(x))}{dx} = N\left(1 + \frac{x}{N}\right)^{N-1} \frac{1}{N} = Exp(x).$$

Y la derivada, que es la parte estándar del cociente diferencial, no depende del entero *N*. Así, la derivada de la función exponencial es ella misma. Dificil mayor simplicidad.

### DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para calcular la derivada de *sen(x)*, el cálculo tradicional supone la existencia de ciertos límites, que indican el comportamiento de las funciones

$$\frac{sen(x)}{x}, \quad \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

cerca de cero. Pero nosotros hemos calculado directamente que para todo valor de la variable x, sea este infinitesimal o finito, donde x = *n*dx está definida en el intervalo [0, π] y *d*x = π/*N*, y $0 \le n < N$, tenemos que

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

luego, para valores infinitesimales de x se cumplirá que

$$\frac{sen(\alpha)}{\alpha}=1-\frac{\alpha^2}{3!}+\frac{\alpha^4}{5!}-\cdots=1+\beta$$
$$\frac{\cos(\alpha)-1}{\alpha}=-\frac{\alpha}{2!}+\frac{\alpha^3}{4!}-\cdots=1+\delta$$

Consideremos la función y = *sen(x)*, y calculemos el cociente diferencial,

$$\begin{aligned} y_n &= sen(x_n) \\ dy = dy_n &= sen(n+1)dx - sen(ndx) \\ &= sen(ndx)\cos(dx)+\cos(ndx)sen(dx)-sen(ndx) \\ &= sen(ndx)(\cos(dx)-1)+\cos(ndx)sen(dx) \end{aligned}$$

luego, reemplazando x = *ndx* y dividiendo por el infinitesimal *dx*,

$$\frac{dy}{dx}=sen(x)\frac{\cos(dx)-1}{dx}+\cos(x)\frac{sen(dx)}{dx}=\cos(x)+\lambda$$

por tanto,

$$y'(x)=\cos(x)$$

### *Derivadas de orden superior*

El cálculo de la segunda derivada se hace, tradicionalmente, de la manera siguiente. Dada la función y = *y(x)* se obtiene la derivada *y'(x)* y se calcula la derivada de la derivada *(y'(x))'* lo que se denota así,

$$y''(x)=y^{(2)}(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$$

Por razones notacionales, se puede escribir $d(dy)=d^2y$, aunque cualquier estudiante puede atreverse a preguntar por el significado de «*la diferencial de la diferencial*». Si el estudiante quiere colocar en más dificultades al profesor, basta que le pregunte por el significado de *«el cuadrado de la diferencial dx»*. La respuesta siempre es: *«asi la escribían en el siglo pasado»*. Nosotros estudiaremos la segunda derivada y las derivadas de órden superior, a la luz del verdadero cálculo infinitesimal.

Procederemos así: si la función $y=y(x)$ es dos veces derivable, su primera derivada procede de un cociente diferencial y su segunda derivada se obtendrá de un segundo un cociente diferencial,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(x+dx)-y(x)}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}=y'(x)+\alpha$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{y(x+2dx)-2y(x+dx)+y(x)}{dx^2}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=y^{(2)}(x)+\beta$$

donde, en sentido estricto, el cuadrado de la diferencial $dx$ quiere decir exactamente la diferencial elevada al cuadrado. Para la tercera derivada y las derivadas de orden superior a ella, se procede de similar forma:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{y(x+3dx)-3y(x+2dx)+3y(x+dx)-y(x)}{dx^3}$$

La fórmula general para la derivada de todos los órdenes se obtiene de

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^n}=\frac{1}{dx^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}y\big(x+(n-k)dx\big)$$

Ejemplo

La siguiente es una operación poco creible en el cálculo tradicional

$$y=x^2$$
$$d^2y=d(dy)=(x+2x)^2-2(x+dx)^2+x^2$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2dx^2}{dx^2}=2$$

## LA INTEGRAL

La *integral* es el quinto y último de los *elementos*, donde los cuatro primeros ya estudiados son, la *variable*, la *diferencial*, la *función* y la *derivada*.

El elemento integral se define de la manera inversa que el de la diferencial. La diferencial es una resta en una sucesión de valores. La integral es una suma en una sucesión de valores. Tenemos una variable x, que es la sucesión,

$$x = \{x_n\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N\}$$

Llamamos *integral de* x a la variable que se obtiene sumando sucesivamente los términos de la variable x,

$$i(x) = \int x = \{x_0, x_0 + x_1, x_0 + x_1 + x_2, \cdots,\ x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N\}$$

El último término de la sucesión es la suma de todos los términos de la variable. Para mantener la notación tradicional, a esta suma se le llama *integral definida*, y es una constante. Como la integral es una variable de rango *N*, la integral definida la escribiremos como

$$i_N(x) = \int_0^N x = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_N$$

donde, en general, la variable es

$$i = \{i_n\}, \quad i_n = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Aparentemente, la integral definida guarda una analogía con las series; por lo que se podría argumentar que nuestra integral es idéntica al signo Σ tan familiar a las sumas. Pero no es cierto, porque la integral opera con sucesiones no finitas de valores hiperreales, lo que el operador Σ no contempla. Debemos ser ciudadosos en esta distinción, porque, en primer lugar, la integral que hemos definido tiene un término inicial y un término final. En segundo lugar, hay un número no numerable de términos. Y curiosamente, en los casos más interesantes, cada sumando es infinitesimal. De todas formas, vale la pena preguntarse: dado que *N* es un entero infinito, ¿estas sumas tienen algún sentido?.

Obviamente. Si la variable es la diferencial de otra variable, esto es, si x = *dz*, la suma siempre puede calcularse explícitamente, puesto que

$$\int x = \int dz = \{z_1 - z_0, z_2 - z_0, z_3 - z_0, \cdots, z_N - z_0\}$$

y basta conocer z para que la integral de x esté perfectamente determinada. Por ejemplo, la integral definida será

$$i_N(dz) = \int_0^N dz = z_N - z_0$$

que es la diferencia del último y el primer término de la variable z. En general, recordando que la variación de z es $z + dz = \{z_1, z_2, z_3, ..., z_N, z_N\}$, si hacemos la sucesión constante $z_0 = \{z_0\}$, obtenemos,

$$\int x = \int dz = z - z_0 + dz$$

Este resultado nos recuerda mucho el teorema fundamental del cálculo, pues dice que la integral de la diferencial de una variable es la misma variable (salvo un infinitesimal). Esta operación aritmética elemental permite intuir ya –lo hizo Leibniz– la relación recíproca que existe entre la variable, la diferencial y la integral.

Este es el momento para aclarar otra confusión lamentable que ha introducido el cálculo convencional. Cuando se tienen dos variables, una de las cuales depende funcionalmente de la otra, se produce un tipo muy particular de integral. Sea *u* = *f(v)*, entonces tenemos

$$\int u dv = \int f(v) dv$$

y esto no tiene más significado que el de integrar variables. La confusión reside en que a ambas se les llama «integral de una función» aunque en realidad es la integral de la función *f(v)* por la diferencial de la variable *u* (así esta no sea independiente). Así, si

$$u = \{u_n\} = \{u_0, u_1, u_2, u_3, ..., u_N\}$$

$$v = \{v_n\} = \{v_0, v_1, v_2, v_3, ..., v_N\},$$

tendremos

$$\int u dv = \int f(v) dv = \{u_0(v_1 - v_0), \cdots, u_0(v_1 - v_0) + u_1(v_2 - v_1) + \cdots + u_{N-1}(v_N - v_{N-1})\}$$

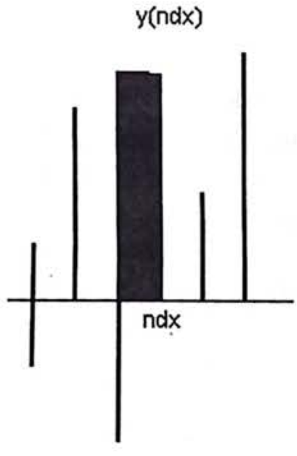
que es el cálculo de la integral del producto de una variable por la diferencial de otra variable, uno de tantos casos de integración. Pero la gente lo asocia como si fuera el único caso. Esto tiene que ver con el uso que se le da a la integral, como veremos acontinuación.

### *LA INTEGRAL, COMO SE USA*

El siguiente es un tipo de integral que usaremos como modelo. Consiste en fijar el intervalo [-*T*, *T*], donde la variable x la definimos como la sucesión

$$x = \{ndx\}, dx = \frac{T}{N}, -N \le n < N$$

con N entero infinito. Como *dx* es un infinitesimal constante, x es una variable continua e independiente en el intervalo numérico. Los valores de la sucesión x comienzan en -*T*, son estrictamente crecientes y terminan en *T*, exclusive. El rango de la variable es 2*N*, porque se excluye el último término. Sea y otra variable, que es función de la primera. Como x = {*n*dx}, la variable y(x)*d*x = y(*n*dx)*d*x representa geométricamente el *área infinitesimal* del rectángulo cuya altura es y(*n*dx) y su base es la cantidad constante *d*x, siempre que y(*n*dx) sea finito.



La integral de la función $y(x)dx$ será

$$i(ydx) = \int y(x)dx = \int y(ndx)dx$$

Como el intervalo es $[-T, T]$, la integral definida se define como

$$\int_{-T}^{T} y(ndx)dx = \sum_{n=-N}^{N-1} y(ndx)dx$$

Por comodidad, en algunas oportunidades consideraremos el intervalo $[0, T]$ y el rango de valores $0 \leq n < N-1$. En particular, si la variable y está *acotada* por $M$ finita, esto es, si $| y(ndx) | \leq M$,

$$\int_{-T}^{T} y(ndx)dx = \sum_{n=-N}^{N-1} y(ndx)dx \leq \sum_{n=-N}^{N-1} Mdx = M \sum_{n=-N}^{N-1} dx = 2MT$$

o sea que existe como cantidad finita. Y más generalmente, así como toda variable posee diferencial, toda variable posee integral.

### LA INTEGRAL ES UN PROMEDIO

Obsérvese que en este último caso, que es el más familiar, $dx$ es constante, y por tanto esta cantidad es factor común de la suma de todas las ordenadas $y(ndx)$, por lo que podemos escribir

$$\int_{-T}^{T} y(x)dx = dx \sum_{n=-N}^{N-1} y(ndx)$$

En dicho modelo, la integral de una función es exactamente el promedio de los valores de la función. La substitución siguiente es muy interesante,

$$\begin{aligned} &x = ndx, \\ &n = -N \rightarrow x = -T \\ &n = N-1 \rightarrow x = T - dx \end{aligned}$$

En otras palabras, podemos despejar $n$ para sus valores extremos $n = -N$ y $n = N$-1, y reemplazarlos en la suma, obteniendo la sugestiva fórmula

$$\int_{-T}^{T} y(x)dx = \sum_{x=-T}^{T-dx} y(x)dx$$

donde ambas expresiones están relacionadas con la variable independiente x y no con el subíndice $n$ de sus valores. El lado derecho sugiere que lo único que hay que hacer para que la suma se convierta en una integral es cambiar de símbolo de suma a símbolo de integral e ignorar un infinitesimal.

### *INTEGRAL DE LA FUNCIÓN CONSTANTE*

Para abreviar los cómputos, de ahora en adelante consideraremos la integral definida, que es el último término de la integral. Primeramente, integremos las funciones constantes en el intervalo $[0, T]$. Sea y una constante, $y = M$ real ordinario, $N$ cualquier entero infinito. Entonces,

$$\int_{0}^{T} Mdx = dx\sum_{n=0}^{N-1} M = dxM(N-1) = MT - \frac{MT}{N}$$

Para calcular el valor real ordinario que le corresponde a tal integral, observamos que $MT- MT/N$ siempre está en el átomo del mismo número real ordinario $MT$, independiente de $N$, siempre que $M$ sea finito. Luego podemos escribir, siguiendo la tradición,

$$\int_{0}^{T} Mdx = MT$$

Observemos cómo la suma de todas las abcisas de la función constante $y = M$ es $M(N\text{-}1)$.

### *INTEGRAL DE LA FUNCIÓN LINEAL*

Vamos ahora a integrar la función lineal $y = x$,

$$\int_{0}^{T} xdx = dx\sum_{n=0}^{N-1} y(ndx) = dx\sum_{n=0}^{N-1} ndx = dx^2\,\frac{(N-1)N}{2} = \frac{T^2}{N^2}\,\frac{(N-1)N}{2} = \frac{T^2}{2} - \frac{T^2}{2N}$$

Nuevamente, si $N$ es cualquier entero infinito, la cantidad de la derecha siempre está en el átomo de $T^2/2$. Para asociar un real ordinario a la integral, calculamos la parte estandar,

$$\int_0^T x dx = \frac{T^2}{2}$$

*INTEGRAL DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA*

Ya hemos indicado que en los libros de texto se encuentran serias dificultades para el cálculo directo de esta integral. En cambio, aquí el problema se resuelve de modo muy simple.

Sea $y = x^2$. Tenemos

$$\int_0^T x^2 dx = dx \sum_{n=0}^{N-1} (ndx)^2 = dx^3 \sum_{n=0}^{N-1} n^2 = dx^3 \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} = \frac{T^3}{3} - \frac{3T^3}{N} + \frac{T^3}{N^2}$$

y como todas estas cantidades están en el átomo de un real ordinario, independientes de la partición del intervalo por $N$,

$$\int_0^T x^2 dx = \frac{T^3}{3}$$

*INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN DISCONTINUA*

Definamos la siguiente función,

$$a(x) = a(ndx) = \begin{cases} 1 & n\ par \\ 0 & n\ impar \end{cases}$$

ella es discontinua en todo punto x=$ndx$, pues su diferencial

$$da = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

es real ordinario. Para $N$ entero infinito par,

$$\int_0^1 a(x)dx = dx\sum_{n=0}^{N-1} a(u) = \sum_{n=0}^{N/2} 1 = \frac{1}{N}\frac{N}{2} = \frac{1}{2}$$

¿No es sorprendente? Esta función es integrable. La integral es ½ porque sólo sobrevive el promedio de la mitad de las abcisas.

### *TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO*

Ahora abordaremos uno de los temas que hacen al fundamento del cálculo infinitesimal: la relación entre diferencial, derivada e integral. Para varios autores, los problemas que se presentan para una demostración convincente de este teorema en el salón de clase, son infranqueables. Por ejemplo, el libro de Henly y Kleinberg[5] ocupa cinco páginas, para demostrarlo cuando la función es continua. En nuestro modelo de cálculo, la demostración es extremadamente simple y se cumple para toda función. Recordemos que el teorema fundamental del cálculo TFC establece que, si en el intervalo [0, x] la función $z(t)$ tiene como derivada a $z'(t)$ entonces, la integral de dicha función cumple

$$\int_0^x z'(t)dt = z(x) - z(0)$$

y viceversa, la derivada de una integral es

$$\frac{d}{dx}\int_0^x z(t)dt = z(x)$$

Para encontrar una versión de tal teorema en nuestro modelo, hagamos $dt = x/N$, y supongamos que la función $z(x)$ posee derivada. La primera aseveración se demuestra en una linea[6]:

$$\int_0^x z'(t)dt = \int_0^x \left(\frac{dz}{dt} + \alpha\right)dt = \int_0^x \frac{dz}{dt}dt + \int_0^x \alpha dt = z(x) - z(0) + \alpha t$$

5 Henle J. M., Kleinberg E. M., *Op. Cit.*

y basta tomar la parte estándar. La demostración de la segunda aseveración también es muy simple. Si $t = ndt$, $t+dt = (n+1)dt$. Si $z = z(t) = z(ndt)$, entonces $z(Ndt) = z(x)$,

$$\int_0^x z(t)dt = \sum_{n=0}^{N-1} z(ndt)dt$$

Esta es una variable que tiene la diferencial,

$$d\int_0^x z(t)dt = \sum_{n=0}^{N} z(ndt)dt - \sum_{n=0}^{N-1} z(ndt)dt = z(Ndt)dt = z(x)dt$$

luego el cociente diferencial será

$$\frac{d}{dt}\int_0^x z(t)dt = z(x)$$

y así completamos el Teorema Fundamental del Cálculo.

### *INTEGRACIÓN POR PARTES*

Dadas dos variables cualesquiera $u$, $v$, donde $0 \le n \le N$, hemos obtenido la *regla de Leibniz*,

$$d(uv) = udv + vdu$$

por tanto,

$$udv = d(uv) - vdu$$
$$u_n dv_n = d(u_n v_n) - v_n du_n$$

sumando ambos lados

$$\sum_{n=0}^{N-1} u_n dv_n = \sum_{n=0}^{N-1} d(u_n v_n) - \sum_{n=0}^{N-1} v_n du_n$$

pero hemos visto que

6 W.M. Priestley, *Calculus: An Historical approach*, 1979, Springer-Verlag New York Inc.

conocemos una heurística que muestre el salto a la integral en el dominio continuo, como aquí lo haremos.

La fórmula de Abel se verifica fácilmente utilizando inducción sobre el rango $N$ ya que, para $N = 1$, efectivamente,

$$u_0(v_1 - v_0) = u_1 v_1 - u_0 v_0 - v_1(u_1 - u_0)$$

Ahora,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n(v_{n+1} - v_n) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(v_{n+1} - v_n) + u_N(v_{N+1} - v_N)$$

suponiendo la fórmula de Abel cierta para $N - 1$,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n(v_{n+1} - v_n) = u_N v_N - u_0 v_0 - \sum_{n=1}^{N} v_n(u_n - u_{n-1}) + u_N(v_{N+1} - v_N)$$

En los sumandos de la derecha, sumamos y restamos. Reagrupando,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n(v_{n+1} - v_n) = u_{N+1} v_{N+1} - u_0 v_0 - \sum_{n=1}^{N+1} v_n(u_n - u_{n-1})$$

que es lo que queríamos demostrar. Para hacer el tránsito al continuo, hacemos $N$ entero infinito, por lo que en verdad tenemos dos variables con sus respectivas diferenciales,

$$u = \{u_n\}, \quad v = \{v_n\}, \quad du = \{u_{n+1} - u_n\}, \quad dv = \{v_{n+1} - v_n\}, \quad 0 \le n \le N$$

y la fórmula de Abel queda así,

$$\sum_{n=0}^{N-1} u_n d_n v = u_N v_N - u_0 v_0 - \sum_{n=1}^{N} v_n d_{n-1} u$$

que es precisamente la fórmula de integración por partes.

7 A. Zygmund, *Trigonometrical series,* (1935), Dover Pub. 1955.

### *LA INTEGRAL IMPROPIA*

Cuando fijamos un intervalo [$-T$, $T$], suponemos que $T$ es finito y el número de subdivisiones $N$ es infinito. Pero esto es una suposición innecesaria. Podemos considerar $T$ mucho menor que $N$, o sea que $T/N$ es infinitesimal. Sabemos que esto se escribe $T << N$. Denominaremos *impropia*, la integral de la función $f(x)$ sobre el intervalo [$T$, $-T$] donde $T$ es infinito, y definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-T}^{T} f(x)dx = dx \sum_{n=-N}^{N-1} f(ndx)$$

Con el estudio del elemento integral finaliza la presentación de lo que hemos denominado MicroCálculo, y entramos a un tema fundamental de investigación, que son las aplicaciones, en las que se conjugan todos los resultados teóricos obtenidos.

Capítulo 4

# Aplicaciones del cálculo con infinitesimales

## La delta de Dirac como función

Hemos visto que toda función posee diferencial, es integrable y, además, los valores de la variable de la función pueden ser finitos, infinitos o infinitesimales. En una palabra, nuestras funciones podrían pensarse como *funciones generalizadas*. Es inobjetable que la más importante y popular función generalizada es la *delta de Dirac*. Por lo que ahora nos concentraremos sobre ella y las demás funciones generalizadas que se originan con ella, para mostrar la potencia y la gran aplicabilidad de nuestro modelo de cálculo infinitesimal.

La delta de Dirac es una construcción que nos permite analizar, a través de un período no muy largo de tiempo, las distintas adaptaciones conceptuales que se hacen de herramientas importantes de la matemática, que son utilizadas de acuerdo a los intereses de ciertas disciplinas y a sus contextos concretos de aplicación. Hay dos lecturas sobre la delta de Dirac. La del matemático puro, que la considera como *distribución*. Y la lectura del físico y del ingeniero quienes, desde su origen, la consideran como función. Nuestra propuesta consiste en volver al punto de partida, y definir la delta de Dirac como función, inmersa en el modelo de cálculo que proponemos. Al hacerlo así, nos colocamos en la dirección de las estrategias y de la heurística de la física y la ingeniería, donde la delta de Dirac funciona, es aplicable y se entiende.

Formulada por primera vez por el propio P.A.M. Dirac desde 1930, interesó vivamente a la comunidad científica, que la bautizó con el nombre de su autor. Desde entonces, la delta de Dirac ha tomado dos direcciones básicas: la primera, hacia su fundamentación matemática; la segunda, hacia su aplicación práctica. Estas dos direcciones se han entrelazado, pues quienes han dotado a la delta de Dirac de un corpus teórico se preocupan por tratar de mostrar su enorme campo de aplicación, mientras que aquellos que la aplican, tratan de darle una cierta fundamentación rigurosa.

## *LA FORMULACIÓN INICIAL DE DIRAC*

En su obra clásica, *The Principles of Quantum Mechanics*, P.A.M. Dirac[1] hace la siguiente consideración:

> *#15. 'Nuestro trabajo en ·#10 nos conduce a considerar cantidades que involucran una cierta clase de infinito. Para obtener una notación precisa que trate con estas infinitudes, introduciremos una cantidad d*(x) *dependiendo de un parámetro* x *que satisface las condiciones,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) = 0, \quad \delta(x) = 0, x \neq 0 \ldots$$

Dirac sabe que el objeto que ha descrito no es propiamente una función, por lo que, para darle un carácter más definido, dice «δ *(x)* no es una función de x de acuerdo a la definición matemática usual de una función, que requiere que una función tenga un valor definido para cada punto de su dominio, sino que es algo más general, la cual nosotros podemos llamar una «función impropia» para mostrar su diferencia de una función dada por la definición usual».

Hemos mostrado que hay dos contextos desde los cuales se formulan las teorías, los métodos y también las propuestas de aplicación de la delta de Dirac: el de la matemática pura y el de la física y la ingeniería. Del primero surge la delta de Dirac como *distribución*, y del segundo, la delta de Dirac como *función*. La primera es una visión descontextualizada. Se elabora la *teoría de distribuciones* que fundamenta a la delta de Dirac, y que va mucho más allá, pues involucra espacios de funciones, convergencia, operadores, teoría de la medida. En la teoría de distribuciones, la delta de Dirac es sólo *un ejemplo* de distribución.

1 P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (1934), Fourth Edition (Revised) Oxford at the Clarendon Press (1958).

La segunda es una visión sobre un contexto determinado. Domina el uso intensivo de la herramienta para su aplicación directa en la física o en el procesamiento de señales, aunque se le reviste de elementos teóricos que posibilitan una generalización. A continuación, presentamos de modo muy resumido la visión matemática rigurosa de las distribuciones, en cuyo contexto está inmersa la delta de Dirac.

### *LA TEORÍA DE DISTRIBUCIONES DE SCHWARTZ*

La teoría de distribuciones, que aquí describiremos, lleva el nombre de Schwartz desde la publicación de sus dos volúmenes[2], que produjeron una contribución enorme al análisis. Schwartz construye el espacio $D(R^n)$ de todas las funciones $\varphi$ que tienen derivadas de todos los órdenes y que se anulan fuera de una región acotada en $R^n$. A estas funciones $\varphi$ –las *funciones de prueba*– se les dota del siguiente criterio de convergencia: una sucesión de funciones de prueba $\{\varphi_m(x)\}$ converge a cero en $D$ si todas las funciones $\varphi_m(x)$ se anulan idénticamente fuera de la misma región acotada en $R^n$ y si las funciones $\varphi_m(x)$ y todas sus derivadas convergen uniformemente a cero. Así, el espacio $D(R^n)$ es un espacio vectorial topológico completo.

Se define ahora una distribución $T$ como una *funcional lineal continua* $<T,\varphi>$ sobre $\underline{D}(R^n)$. El espacio de todas las distribuciones se denota $D'(R^n)$. Por ejemplo, *la delta de Dirac* es la funcional lineal continua $<\delta, \varphi> = \varphi(0)$. La derivada $T'$ de una distribución $T$ se define como la funcional lineal continua $<T',\varphi> = - <T, \varphi'>$. En particular, la derivada $d'$ de la delta de Dirac es $<\delta',\varphi> = -\varphi'(0)$. La función de Heaviside, la delta de Dirac y sus derivadas, son sólo ejemplos de la derivación de distribuciones. Con esta construcción, Schwartz supera las inconsistencias y contradicciones creadas con el cálculo de operadores de Heaviside y la delta de Dirac.

Al sacar de su órbita original a la delta de Dirac, se produce su separación con el amplio campo de sus aplicaciones, el cual no ha requerido de tanta generalización. Por eso, se producen intentos de bajarla de las altas esferas y acercarla a los que cotidianamente la han utilizado en la heurística de la resolución de problemas en áreas como transformada de Laplace

2 L. Schwartz, *Théorie des distributions,* Tomo I, 1950. Tomo II, 1951. Paris: Hermann et Cie.

en circuitos lineales, transformada de Fourier en teoría de señales, mecánica cuántica, cálculo de la densidad de energía, convoluciones y el estudio de los espectros de frecuencia.

## *UN PUNTO DE ENLACE: LAS FUNCIONES GENERALIZADAS*

Uno de los primeros que observan la encrucijada que se abre con la teoría de distribuciones es George Temple[3] quien plantea: «La teoría de distribuciones es indudablemente de gran importancia práctica para los matemáticos aplicados, pero desafortunadamente para ellos, la teoría es muy abstracta, y en la palabras del Tratado de Schwartz, «Todas las partes de aspecto teórico de este libro exigen de un buen conocimiento de topología general y análisis funcional (espacios vectoriales topológicos)».

El propósito de Temple es, en sus propias palabras, hacer la teoría «accesible al físico y al ingeniero», y se propone *popularizarla* basándose en las ideas de Mikusínski[4]. Surge así el área de las *funciones generalizadas* como un punto de conexión entre el saber abstracto, que se distancia de su aplicación, con el saber concreto que, pese a las inconsistencias, funciona. El enfoque de Temple –seguido por otros, como Lighthill[5]– consiste en dejar de lado las distribuciones como funcionales lineales continuas y representar las *funciones generalizadas* en término de convergencia de *funciones ordinarias*. En su obra monumental sobre el tema, Gel'fand[6] afirma que el primero en usar las funciones generalizadas en la forma explícita actualmente aceptadas fue S. L. Sobolev en 1936, al estudiar la unicidad de las soluciones del problema de Cauchy para las ecuaciones hiperbólicas lineales.

3 G. Temple, F. R. S. «The theory of generalized functions,» *Proceedings of the Royal Society of London,* Vol., 228, March 1955.

4 J. G. Mikusínski, «Sur le méthode de géneralisation de Laurent Schwartz et sur la convergence faible» *Fundamenta Mathematicae*. vol. 35, 1948, pp. 235-239.

5 M. J. Lighthill, F. R. S., *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge, at the University Press, 1962.

6 I. M. Gel'fand, *et al.*, *Generalized Functions,* Tomos I, II, III, IV, V. Academic Press, New York and London, 1964.

### *HEURÍSTICA EN FÍSICA E INGENIERÍA*

Entendemos por heurística, las estrategias para resolver problemas, utilizadas frecuentemente por los físicos y los ingenieros; estrategias que incluyen el uso de analogías, la introducción de elementos auxiliares simbólicos y gráficos, la actividad basada en datos, la descomposición y recomposición de los problemas, el explotar recursivamente los problemas relacionados; y sobre todo, el no dar rodeos en aras del rigor, si la solución planteada es viable y funciona. De hecho, esto es lo que hace algunos años ha propuesto Polya[7] y ha retomado posteriormente Schoenfeld.[8]

Un ejemplo notable es el tratamiento heurístico de la delta de Dirac y la resolución de problemas en física e ingeniería. Ya hemos citado al propio Dirac. Tratamientos similares se encuentran en los conocidos libros de Alan Oppenheim[9] y Hwei P. Hsu,[10] para citar sólo un par de los textos de los currícula. En todos ellos se vislumbra la idea que deberíamos recuperar: la delta de Dirac es *una función*, aunque muchos se disculpen diciendo que en realidad no lo es.

### *UNA PROPUESTA DE CONSTRUCCIÓN*

Nuestra reflexión parte pues, de la forma como la utilizan los ingenieros, físicos y docentes, y de una experiencia continuada en el aula de clase. Allí, las distribuciones, o funciones generalizadas que se requieren, tienen *nombres propios*, y se reducen básicamente, a las siguientes: 1. La 'función' de Heaviside o *escalón unitario*; 2. La delta de Dirac, o *impulso unitario*; 3. La delta de Dirac periódica o *tren de impulsos*; 4. Las derivadas de estas 'funciones'. Ellas constituyen, por decirlo así, la *pequeña biblioteca de funciones especiales* –llámense distribuciones o funciones generalizadas– que en el aula de clases requiere un buen curso de *matemáticas avanzadas* para la física y la ingeniería.

La propuesta consiste en volver al punto de partida, y definir la delta de Dirac como *función*. Pero no es razón suficiente que su origen sea funcio-

---

7 G. Polya, *How to solve it* (2nd. ed.), New York, Dolbleday, 1957.

8 A. H. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Inc., 1985.

9 A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, *Signals ans Systems*, Prentice Hall International, Inc., 1983.

10 H. P. Hsu, *Analisis de Fourier*, Fondo Educativo Interamericano,1970.

nal. Se trata de que, en realidad, durante todo un trayecto de 60 años, los físicos e ingenieros así la han tratado y así ha funcionado, aunque siempre aclaran que en realidad no lo es.

Hemos anotado que al definir la delta como función, nos colocamos en la dirección de las estrategias y de la heurística de la físicos e ingenieros, donde la delta de Dirac funciona, es aplicable y se entiende. Debemos también anotar que le daremos una *definición rigurosa*, basada en nuestro modelo de cálculo infinitesimal, aunque ella se aparta ostensiblemente del que le dan Robinson y otros autores de textos de *análisis no estandar*[11].

Nuestro enfoque es muy cercano a los recientes aportes que se hacen en la *matemática educativa* para introducir el *cálculo infinitesimal* como parte de la enseñanza del cálculo en el aula de clase, como los de Imaz,[12] Takeuchi,[13] Salat,[14] entre otros. De todas formas, no puede haber la menor confusión entre la delta de Dirac tradicional y la nuestra, pues aunque son similares, ambas están inmersas en modelos de cálculo distintos.

## *La función delta de Dirac*

Ya es el momento de introducir la famosa delta de Dirac. Supongamos la variable $x = \{ndx\}$ definida en el intervalo $[-T, T]$ dada por $dx = T/N$, y $-N \leq n < N$. La *delta de Dirac* $\delta(x)$, también conocida como *impulso unitario* es una función de x, que tiene como variable $\delta$ la siguiente:

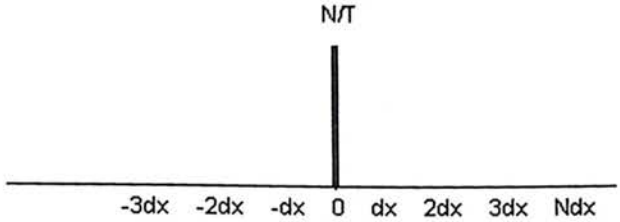
$$\delta(ndx) = \begin{cases} \dfrac{1}{dx} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

11 A. Robert, *Nonstandard Analysis*, John Wiley & Sons, 1985.

12 C. Imaz, «Infinitesimal models for Calculus», *Bol.Sociedad Matemática Mexicana, Vol.29, 2, 1984.*

13 Y. Takeuchi, *Teoría de funciones no estandar*, Universidad Nacional de Colombia, 1983.

14 R. S. Salat F., *Elaboración, prueba y análisis de un modelo infinitesimal de cálculo,* Tesis Doctoral, Depto. de Matemática Educativa, Cinvestav, 1993.




Nótese que, como x = {*ndx*}, la delta de Dirac que hemos definido es similar a su homóloga del dominio continuo, pues sabemos que $x \neq 0 \leftrightarrow n \neq 0$, luego

$$x \neq 0 \quad \rightarrow \quad \delta(x) = 0$$

Además, de acuerdo a nuestra definición de integral, también ocurre que, si x está definido en toda la recta real ordinaria, hacemos *T* infinito tal que *T/N* siga siendo infinitesimal, y por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \sum_{n=-N}^{N} \delta(ndx)dx = \delta(0)dx = \frac{dx}{dx} = 1$$

Pero, repetimos, esta similitud no puede ocultar el hecho de que la delta de Dirac tradicional y la que aquí hemos definido, difieren del modelo de cálculo que les sirve de contexto.

Uno de los mayores logros teóricos de nuestro modelo radica en la extremada simplicidad al presentar las propiedades de la delta de Dirac de un modo tal, que puede ser estudiada en un curso de cálculo de nivel elemental.

### *DERIVADA DE LA DELTA DE DIRAC*

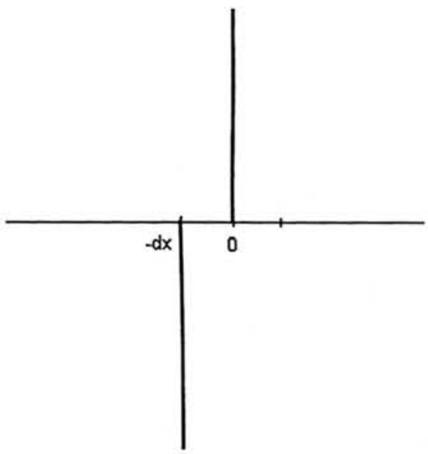
Como toda función, la delta de Dirac es diferenciable, siendo su diferencial

$$d\delta = \delta((n+1)dx) - \delta(ndx), \quad -N \leq n < N$$

salvo el último término, que es cero. Para el cálculo de la derivada de la delta de Dirac observamos el cociente diferencial,

$$\frac{\delta((n+1)dx)-\delta(ndx)}{dx}=\begin{cases}\frac{1}{dx^2} & n=-1\\ -\frac{1}{dx^2} & n=0\\ 0 & n\neq -1, n\neq 0\end{cases}$$

Obviamente, el cociente diferencial no asume valores finitos en 0, -1, por lo que la derivada propiamente existe en todos los valores de la variable x, salvo en 0 y -1, donde el cociente diferencial es hiperreal infinito. Así, la *derivada generalizada*, que identificaremos con tal cociente diferencial, se anula fuera de tales valores, y tiene como gráfica la siguiente:




Es interesante que, no sólo pueda graficarse la derivada de la delta de Dirac, lo que es común en los textos, sino que podamos calcular y graficar las derivadas de orden superior, como veremos a continuación.

### *DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR*

Fijémonos en la regla que hemos dado para calcular directamente la derivada de cualquier función y apliquémosla a la delta de Dirac. Según esta regla,

$$\delta^{(n)}(x)=\frac{1}{dx^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\delta\left(x+(n-k)dx\right)$$

Como sólo interesa el valor de la función en cero, encontramos aquellos $M$ en los que el argumento es cero,

$$Mdx+(n-k)dx=0$$
$$-n\leq M\leq n$$

Nuevamente, la enésima derivada generalizada de la delta de Dirac consiste en $2N+1$ valores en los infinitesimales sucesivos, en los que la derivada superior cambia de signo alternadamente.

### DERIVADA DEL ESCALÓN UNITARIO

Siguiendo la notación tradicional, se define el *escalón unitario u(x)* o *función de Heaviside* como

$$u(ndx)=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n>0\end{cases}$$

Para el cálculo del cociente diferencial, término a término, encontramos que la diferencial

$$du=u((n+1)dx)-u(x)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

y por tanto

$$\frac{du}{dx}=\frac{u((n+1)dx)-u(x)}{dx}=\begin{cases}\dfrac{1}{dx} & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

Pero ésta es precisamente la delta de Dirac. O sea que la derivada generalizada de la función de Heaviside es:

$$\delta(x)=\frac{du}{dx}.$$

Algunos textos emplean varias páginas para llegar a la misma conclusión.

Obsérvese la distinción entre diferencial y derivada generalizada. La diferencial de la función de Heaviside es una variable de valores reales finitos. En cambio, la derivada generalizada admite un valor infinito, o como se acostumbra a decir, un *salto al infinito*. Es el cociente diferencial de la función de Heaviside, no su diferencial, la delta de Dirac.

### *INTEGRAL DE LA DELTA DE DIRAC*

Si la delta de Dirac es la función

$$\delta(ndx) = \begin{cases} \dfrac{1}{dx} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

podemos integrar dicha función respecto a la variable x del modo siguiente:

$$\int \delta(x)dx = \sum_{-N}^{N} \delta(ndx)dx = \delta(0)dx = \frac{dx}{dx} = 1$$

La extremada simplicidad en la obtención del familiar resultado

$$\int \delta(x)dx = 1$$

contrasta con la complejidad de la *Teoría de Distribuciones*[15] o los artificios matemáticos que se requieren para demostrarlo[16].

15 L. Schwartz, *Théorie des distributions,* Tomo I, 1950. Tomo II, 1951. Paris: Hermann et Cie.

16 H. P. Hsu, *Analisis de Fourier*, Fondo Educativo Interamericano,1970.

## LAS DERIVADAS COMO SE USAN

Un aspecto esencial en el estudio de las funciones generalizadas es el cálculo de la integral del producto de sus derivadas con funciones ordinarias. Primeramente,

$$\int_{-T}^{T} f(x)\delta(x)dx = dx\sum_{n=-N}^{N-1} f(x)\delta(x) = dx f(0)\frac{1}{dx} = f(0)$$

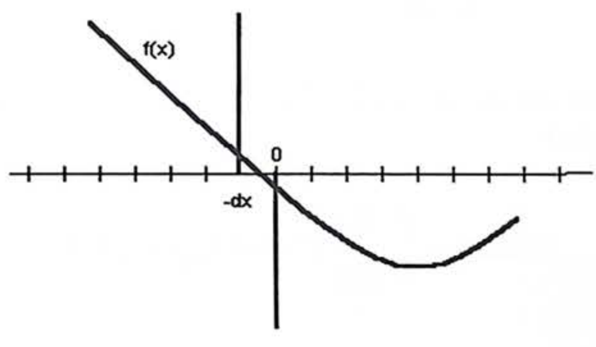
Hemos definido

$$\delta'(x) = \frac{\delta((n+1)dx) - \delta(ndx)}{dx} = \begin{cases} \dfrac{1}{dx^2} & n = -1 \\ -\dfrac{1}{dx^2} & n = 0 \\ 0 n \neq -1, & n \neq 0 \end{cases}$$

veamos el asunto crucial, la integral del producto de la derivada de la delta de Dirac por cualquier función *f(x)*, a la que sólo le pedimos que posea derivada en x = 0.

La siguiente figura es ilustrativa de una función *f(x)* a la que se interpone la derivada de la delta de Dirac. Los únicos valores de la función que sobreviven ante los dos impulsos, uno hacia arriba y el otro hacia abajo, serán los valores en –*dx* y en 0, esto es, *f(-dx)* y *f(0)*.

Al realizar los cálculos de la integral –que es una suma de valores– los valores se verán afectados por los coeficientes de cada impulso. El resultado, casi obvio, es el siguiente:



$$\int_{-T}^{T} f(x)\delta'(x)dx = dx\sum_{n=-N}^{N-1} f(ndx)\delta(ndx) = dx\{f(-dx)\delta(-dx) - f(0)\delta(0)\} = dx\left\{\frac{f(-dx)}{dx^2} - \frac{f(0)}{dx^2}\right\}$$

reemplazando

$$\int_{-T}^{T} f(x)\delta'(x)dx = -\frac{f(0)-f(-dx)}{dx} = -f'(0)$$

Los cálculos anteriores pueden hacerse extensivos para derivadas de orden superior.

### INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

Una aplicación interesante de las integrales impropias es el siguiente problema, que más adelante trataremos en su generalidad. Dada la función *f(x)*, verificar que

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(y-x)dx) \qquad \text{(A)}$$

Esto se demuestra muy facilmente. Para cada $0 \le k < N$,

$$f(kdx) = \frac{T}{N}\frac{N}{T}f(kdx).$$

Si consideramos la expresión

$$\frac{T}{N}\sum_{n=-N}^{N-1} f(ndx)\delta((n-k))dx) \qquad \text{(B)}$$

observamos que, en la suma (B) sólo sobrevive $n = k$, y en este caso, se cumple la identidad

$$f(kdx) = \frac{T}{N}\sum_{n=-N}^{N-1} f(ndx)\delta((n-k))dx) \qquad \text{(B)}$$

pero si hacemos x = *ndx*, y = *kdx*, la expresión (B) es precisamente la definición de *integral impropia*, que coincide con (A).

La anterior identidad se denomina *integral de convolución* y se escribe. $f(x) = f(x) * \delta(x)$ En su momento, estudiaremos el caso más general.

### SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

La solución de la siguiente ecuación diferencial está fuera del alcance de cualquier curso elemental de cálculo. Invitamo al docente resolver,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \delta(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Para nosotros, esto es un juego. Se trata de resolver la ecuación

$$\begin{aligned}
&\frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n}{dx^2} = \delta[ndx] \\
&y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + \delta[ndx]dx^2 \\
&y_1 = 0 \\
&y_2 = 0
\end{aligned}$$

despejando

$$\begin{aligned}
&y_1 = 0 \\
&y_2 = 0 \\
&y_3 = 0 \\
&\ldots \\
&y_{N-1} = 0 \\
&y_N = dx \\
&y_{N+1} = 2dx \\
&\vdots \\
&y_{N+N} = Ndx
\end{aligned}$$

pero x = {*ndx*}, luego la solución es

$$y(x)=\begin{cases}0x & <0\\ xx & \geq 0\end{cases}$$

## EL FENÓMENO DE NO UNICIDAD

La siguiente es una de interesante aplicación que le hemos encontrado a nuestro modelo de cálculo. Se trata de encontrar una explicación consistente y didáctica al fenómeno –aparente– de la no unicidad de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales. En los cursos elementales de ecuaciones diferenciales nos enseñan que el problema de valores iniciales

$$y'=f(y,t), \qquad y(t_0)=y_0,$$

tiene una solución, por ejemplo, si *f(y,t)* es una función continua. También sabemos que la unicidad de la solución no es siempre verdad, a menos que otra condición se le imponga a la función *f(y,t)*, por ejemplo, que la derivada parcial $\partial f/\partial y$ exista en el punto.

La ilustración usual en los libros de texto[17], es la siguiente: se propone la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dt}=2\sqrt{y}, \quad y(0)=0$$

y se le invita al lector que observe que, a simple vista, el par de funciones $y_1(t)=t^2$, $y_2(t)\equiv 0$ satisfacen ambas la ecuación diferencial con la misma condicion inicial. ¿Cual es la explicación de este fenómeno? En el ejemplo que nos ocupa, se calcula la derivada de *f(y, t)* respecto a la primera variable,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}$$

17 Edwards, J. R., C. H., Penny D. E., *Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., 1986.

que es claramente discontinua en el punto *(0,0)*. Dicen los autores citados: «Esto explica la existencia de dos soluciones diferentes $y_1(t) = t^2$, $y_2(t) \equiv 0$ cada una de las cuales satisface la condición inicial $y(0) = 0$ ».

Más aún. Como la solución $y(t) \equiv 0$ puede separarse de cero en cualquier momento a partir del valor $t = a$ en el eje de las abcisas, y seguir como $y(t) = (t-a)^2$ en realidad hay infinitas soluciones que cumplen la condición inicial en *(0, 0)*.

Pero el hecho de que $\partial f/\partial y$ no sea continua en *(0, 0)* lo único que nos permite concluir es que *no se garantiza la unicidad*, dejando que el *fenómeno de no unicidad* –o sea, por qué ocurre así– de la ecuación diferencial antes expuesta, siga sin explicación alguna.

El tema que nos ocupa es, efectivamente, brindar una explicación, que jamás hemos visto en otra parte, de por qué la no unicidad ocurre en el dominio real, y para ello haremos uso del cálculo infinitesimal.

## *UN NUEVO MODELO DE ECUACIÓN DIFERENCIAL*

Queremos primero, reformular el significado de encontrar una solución al problema de valor inicial, de la ecuación diferencial $y' = f(y,t)$, $y(0) = 0$, y después volver al ejemplo particular. Desde el punto de vista del cálculo infinitesimal, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t)$$

expresa una relación de igualdad entre un *cociente de cantidades infinitesimales,* que está a la izquierda, que debe cumplir con la función de dos variables, que está a la derecha.

Supongamos que estamos buscando una solución $y(t)$ en el intervalo $[0, a]$ y que este intervalo está sumergido en la recta hiperreal, como hemos venido analizando. Sea $N$ un número entero infinito, y $dt$ un infinitesimal definido por $dt = a/N$.

Considérese la sucesión $dt, 2dt, ..., Ndt$ como una partición infinitesimal de $[0, a]$, donde $0 \leq n \leq. N$. Sabemos que la variable temporal $t$ recorrerá cada uno de estos valores sucesivos, como si fuera una variable discreta sobre un número finito de puntos. Denotemos como

$$y_0, y_1, y_2, \cdots, y_N$$

los valores de la solución $y(t)$ que se busca en los puntos $0$, $dt$, $2dt$, ..., $Ndt$. De este modo, $y(0) = y_0$, $y(dt) = y_1$, $y(2dt) = y_2$, ..., $y(Ndt) = y(a) = y_N$. El elemento diferencial $dy$ recorre cada una de las cantidades $dy = y_{n+1} - y_n$ donde $n = 0, 1, ..., N$, mientras que la cantidad infinitesimal $dt = 1/N$ permanece constante.

Así, el problema de valor inicial $dy/dt = f(y,t)$, $y(0) = 0$, puede esquematizarse en la relación

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{dt} = f(y_n, ndt), \quad y_0 = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots,N;$$

que en realidad constituye un *nuevo modelo* de ecuación diferencial, desde el punto de vista del cálculo infinitesimal.

### SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE RECURRENCIA

De la ecuación anterior, se deduce la siguiente expresión recursiva

$$y_{n+1} = y_n + f(y_n, ndt)\, dt, \quad n = 1,2,\ldots,N$$

y puesto que $y_0 = 0$ es conocido, una solución definida –en teoría– puede ser construída, paso a paso, de la expresión de arriba.

Cambiemos la condición inicial anterior por el valor $y_0 = \alpha$, donde $\alpha$ es alguna cantidad positiva infinitesimal, en vez de $y_0 = 0$. Desde el punto de vista del dominio real ordinario, este cambio no puede ser discernido, pues se trata de cantidades infinitamente próximas.

Pero, ¿será cierto que la fórmula recursiva nos conduce a la misma solución? La respuesta es negativa. Para verlo, volvamos a nuestro ejemplo particular, donde la ecuación diferencial con valores iniciales es

$$\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

Para este caso, el esquema explicado nos conduce a la expresión recursiva

$$y_{n+1} = y_n + 2\sqrt{y_n}\,dt, \quad n = 0,1,2,\ldots,N,$$

Si inicializamos con $y_0 = 0$, ciertamente obtenemos $y_n = 0$ para todo $n$, y esta corresponde a la solución $y(t) = 0$. Pero si inicializamos con una cantidad infinitesimal, digamos, $y_0 = dt^2$, para simplicidad de los cálculos, obtenemos

$$\begin{aligned} y_0 &= dt^2 \\ y_1 &= dt^2 + 2dt^2 = 3dt^2 \\ y_2 &= 3dt^2 + 2\sqrt{3}dt^2 = \left(3 + 2\sqrt{3}\right)dt^2 \end{aligned}$$

y en general,

$$y_n = \left(k_n + 2\sqrt{k_n}\right)dt^2, \quad n = 1,2,\ldots,N,$$

donde $k_1 = 1$ y $k_{n+1} = k_n + 2\sqrt{k_n}$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

De la desigualdad siguiente, que se demuestra por inducción

$$\left(n - \sqrt{n}\right)^2 < k_n \leq n^2$$

puede concluirse que $k_n \to n^2$, en el sentido que $k_n/n^2 \to 1$ como $n \to \infty$. Por tanto, si valuamos la función $y(t)$ en la cantidad $a$ del intervalo $[0, a]$, tenemos que

$$y(a) = y_N = \left(k_N + 2\sqrt{k_N}\right)dt^2 \approx \frac{k_N N^2}{N^2}\,dt^2 = \left(Ndt\right)^2 = a^2,$$

o sea que hemos generado la solución $y(t) = t^2$.

Recordemos que, por simplicidad, hicimos $y_0 = dt^2$. Pero la expresión $k_n/n^2 \to 1$ es cierta siempre que $k_1 \leq 1$ Por consiguiente, si inicializamos en cualquier infinitesimal positivo $y_0 = a$, la solución que se genera sigue siendo $y(t) = t^2$. En conclusión, podemos ver que si discernimos las condiciones iniciales a escala infinitesimal, obtenemos la unicidad siempre que existan soluciones reales. *La no unicidad desaparece, quedando como un fenómeno sólo en el dominio real ordinario*. El caso de la unicidad real se garantiza cuando la solucion no es perturbada por variaciones infinitesimales en las condiciones iniciales.

En algún sentido, el campo real no es completo, puesto que puede detectar fenómenos para los cuales no tiene explicación explícita. Este es ciertamente un punto a favor de los modelos infinitesimales.

## LA CONVOLUCION Y SU TRÁNSITO AL CONTINUO

Dado que en repetidas ocasiones vamos a hacer uso de ella, nos ocuparemos someramente del tema de la convolución con el propósito de precisar el concepto y esclarecer su relación entre el discreto y el continuo. Sean $x(t)$ y $y(t)$ dos funciones de variable real, cuyo dominio es toda la recta real. El producto de convolución de funciones en el dominio continuo es una tercera función[18],

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\,y(t-s)\,ds$$

donde el dominio de la variable x, en caso de que la integral exista, es nuevamente toda la recta real. Las propiedades de la convolución de dos funciones son similares a las del producto ordinario de funciones, esto es, la operación es conmutativa, asociativa y distributiva. Sobre las condiciones de existencia de la integral, hay abundante literatura al respecto[19]. Como la operación de convolución se realiza entre funciones, también se llama producto de convolución, y dado que involucra una integral, algunos la

18 H. P. Hsu, *Analisis de Fourier*, Fondo Educativo Interamericano,1970.

19 G. B. Folland, *Fourier Analysis and Its Applications*, Wadsworth & Brooks/Cole, Mathematics Series, 1992.

denominan integral de convolución. Wiener utilizó el nombre de Faltung dado que «no hay otra palabra adecuada en inglés»[20].

La definición de convolución, así como sus propiedades y aplicaciones más importantes, se encuentran en los libros de análisis. Una de la consecuencias teóricas de gran interés es la proximación de funciones continuas mediante polinomios. En el análisis de Fourier, es una herramienta teórica fundamental. Y en ingeniería y física, sobre todo en el análisis de señales, sus aplicaciones son innumerables. Además de los problemas teóricos que anotaremos enseguida, en la comprensión de la convolución hay un problema didáctico, que es el que nos motiva a investigar el tema. Como puede observarse, en su definición se involucran dos variables, la del dominio $s$ de integración, y la variable $t$ de la operación propiamente dicha. Además, el producto de convolución es una integral, que para remate, está comprendida entre límites impropios. No es de extrañarse que el docente encuentre una aversión natural de los estudiantes al cálculo de la convolución. Y en efecto, los resultados que aquí obtendremos provienen de una reflexión en el aula de clase, donde hemos confirmado la extremada complejidad que involucra la comprensión cabal de dicho concepto.

## *CONVOLUCIÓN DE FUNCIONES CAUSALES*

Es posible simplificar el cálculo de la convolución, cuando las funciones son las denominadas causales, o sea, que se anulan en el intervalo negativo de la recta real. Por ello, varios libros de texto utilizan las ventajas de tal condición, y la dan como definición, para resolver ecuaciones diferenciales por el método de la transformada de Laplace[21]. Es lo que ahora examinaremos. Sean $x(t)$ y $y(t)$ tales funciones, esto es, $x(t) = 0$, $y(t) = 0$, para $t \leq 0$. Entonces,

$$s \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x(s) = 0$$
$$t - s \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \leq s \quad \Rightarrow \quad y(t-s) = 0$$

20 N. Wiener, *The Fourier Integral and certain of its applications*, Cambridge University Press, 1933. Dover Pub., Inc., S272.

21 Kreider, Kuller, Ostberg, *Ecuaciones Diferenciales*, Fondo Educativo Interamericano, SA, 1970.

Por consiguiente, dado que s es la variable de integración, la convolución se anulará fuera de los límites de integración [0, *t*], por lo que su cálculo se reduce a la integral

$$z(t)=x(t)*y(t)=\int_0^t x(s)y(t-s)ds$$

Esta es una simplificación asombrosa, porque desaparecen como por encanto los límites impropios de integración. Sin embargo, aunque la expresión anterior aparece como caso particular de la fórmula más general, vislumbra una cuestión teórica que vamos a profundizar: la variable temporal, que es la variable del dominio de la convolución, ocurre explícitamente en los límites de la integral. ¿Es este el único caso, o hay una fórmula mucho más general?

### LA CONVOLUCIÓN PERIÓDICA

Como puede verificarse, en algunos libros de texto aparecen otras versiones de la convolución. Esto se presenta cuando las funciones *x(t)* y *y(t)* son dos funciones periódicas de período *2T*, o lo que es lo mismo, cuando el dominio es un intervalo finito de la recta real, digamos *[-T, T]*. Se define el producto de convolución en dicho intervalo[22] como

$$z(t)=x(t)*y(t)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(s)y(t-s)ds$$

Aquí aparece una distinción esencial con el producto de convolución antes definido: la variable *s* del dominio de integración está determinada por los límites inferior y superior del intervalo *[-T, T]*. Para hacer evidente tal distinción, se le llama convolución periódica, o también convolución cíclica, a tal operación. Curiosamente, aparece el factor *1/2T* en la expresión de la convolución, sin que los autores expliquen satisfactoriamente la necesidad de tal factor. Es interesante que Wiener, en su afamado libro, lo que define es precisamente la convolución (cíclica) para funciones de período *2p:*

22 J. S. Walker, *Fast Fourier Transforms*, CRC Press, Inc., 1991.

«La cantidad

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(y-x)dx$$

se conoce como el Faltung de *f(x)* y *g(x)* (no hay una buena palabra en inglés) y la sucesión

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n b_{m-n}$$

como el Faltung de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$»[23]

Asombra en el texto que Wiener se ocupe simultáneamente de la convolución de sucesiones, aunque no mencione la íntima relación entre uno y otro concepto, lo que será posteriormente el centro de nuestra inverstigación. Volviendo a la convolución de funciones surge un doble interrogante: ¿Esta convolución (cíclica) es una restricción del producto de convolución antes definido? Y también ¿cuál es en general el dominio de la variable de la convolución?

Un ejemplo puede ayudar a aclarar varios de los interrogantes que hemos planteado. Walker[24] propone como ejercicio calcular la convolución de dos funciones definidas en el intervalo [-4, 4],

$$\begin{aligned} &x(t)=1 \quad y(t)=1 \quad |t|<0.5 \\ &x(t)=0 \quad y(t)=0 \quad 0.5<t<4 \end{aligned}$$

De acuerdo a la definición, hay que calcular la integral

$$\frac{1}{8}\int_{-4}^{4} x(s)y(t-s)ds=\frac{1}{8}\int_{-0.5}^{0.5} y(t-s)ds$$

cuya solución deja como un «ejercicio al lector». La solución no es tan evidente, ya que la función *y(t-s)* cuya variable del dominio es *s* está definida sobre el intervalo [-4+*t*, 4+*t*] y por tanto, la integral será no nula a partir de la condición 4+*t* = -4, o sea, *t* = -8; luego el dominio de la variable es el

23 N. Wiener, *Op. Cit.* Página 45.

24 J. S. Walker, *Op. Cit.* Página 112.

intervalo [-8, 8] y la convolución se separa en dos integrales, obteniéndose como solución del ejercicio,

$$x(t) * y(t) = \frac{1}{8}\int_{-4}^{4+t} ds = \frac{1}{8}(1+t), \quad -8 < t < 0$$

$$x(t) * y(t) = \frac{1}{8}\int_{-4+t}^{4} ds = \frac{1}{8}(1-t), \quad 0 < t < 8$$

Esta solución tampoco deja claro algo muy interesante: el dominio de la convolución de funciones sobre un intervalo finito siempre será el doble del dominio inicial.

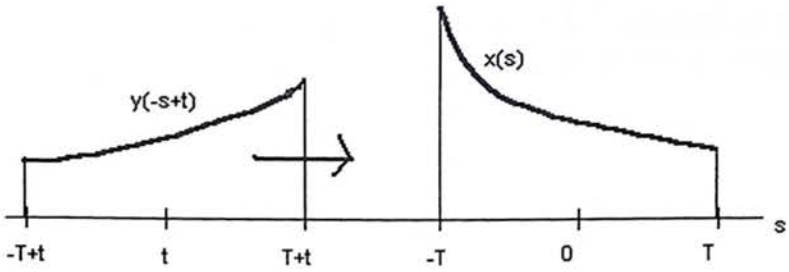
### *CONVOLUCIÓN DE FUNCIONES DE DURACIÓN FINITA*

A continuación, presentaremos una solución completa a los problemas planteados. Se ascostumbra a denominar «duración finita» a aquellas funciones que se anulan fuera de un intervalo finito –soporte compacto–. Nuestro enfoque será el siguiente. Mostraremos que si las funciones son de duración finita sobre el mismo intervalo, la operación de convolución puede simplificarse mediante dos integrales definidas[25]. Y si las funciones son periódicas –el dominio es un intervalo finito– la convolución periódica no será otra cosa (pese a su distinta apariencia) que la convolución usual. Primero vamos a suponer que ambas funciones están definidas en el intervalo finito [-T, T], fuera del cual tienen un valor nulo. En primer lugar, los límites de integración quedan delimitados de la manera siguiente:

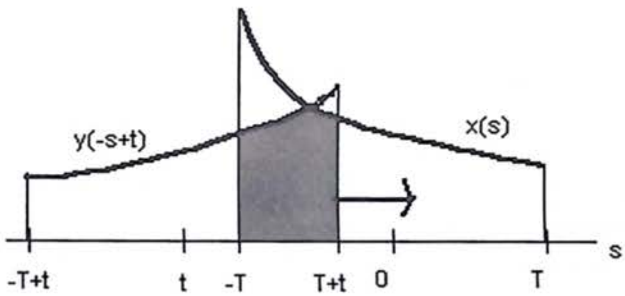
$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)y(t-s)ds = \int_{-T}^{T} x(s)y(t-s)ds$$

Como la variable del dominio de integración es s, si nos fijamos en la representación geométrica del dominio de tal variable, la función y(-*s*) es una reflexión de y(*s*) en torno al eje vertical. Para cada *t*, la función y(-*s*+*t*) = y(*t*-s) será nula fuera del dominio [-*T*+*t*, *T*+*t*] y constituye un desplazamiento hacia la derecha de la función y(-*s*) hasta el punto -*s*+*t*. De modo que se pueden representar ambas, como aparecen en la gráfica siguiente,

25 J. Hernandez, *Matemáticas Especiales*, Universidad Distrital, 1989.



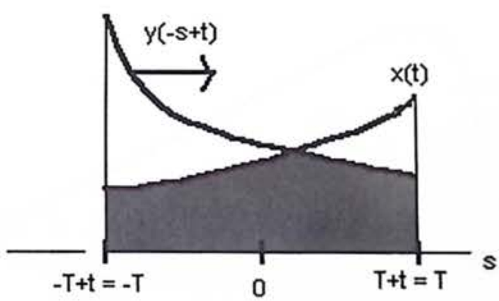

Donde x(s) está fija, y la función y(-s+t) viaja hacia ella, de derecha a izquierda. Mientras el punto $T+t$ se mantenga a la derecha de $-T$, no habrá contacto entre las funciones que van a convolucionar y por tanto su convolución tendrá valor nulo. El primer contacto entre ellas se produce cuando $T+t = -T$, o sea, en el punto $t = -2T$. Este será el punto inicial del dominio de la convolución. En la gráfica siguiente, el punto $T+t$ cruza $-T$ y se dirige hacia $T$,




La variable de integración $s$ se mantiene en el intervalo $[-T, T+t]$, por lo que la convolución se reduce a calcular la integral

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-T}^{T+t} x(s)\, y(t-s)\, ds$$

En la gráfica siguiente, mostramos el momento en que la convolución se produce exactamente en el dominio $[-T, T]$, lo que corresponde al cálculo del valor z(0),



donde los límites de integración obligan a la convolución a tener un valor nulo aún en los puntos -$2T$ y $2T$. La fórmula del producto de convolución queda, en todos los casos, como ya habíamos anunciado,

$$x(t) * y(t) = \begin{cases} \int_{-T}^{T+t} x(s)y(t-s)ds, & -2T \le t \le 0 \\ \int_{-T+t}^{T} x(s)y(t-s)ds, & 0 \le t \le 2T \end{cases}$$

Ejemplo

En el ejemplo siguiente, mostramos la eficacia de las fórmulas anteriores. Dadas las funciones x($t$) = $t$, y($t$) = 1, en el dominio [-1, 1], y nulas fuera del intervalo, calcularemos el producto de convolución. El dominio de la convolución será [-2, 2], y en el intervalo [-2, 0] la convolución es la integral

$$x(t) * y(t) = \int_{-1}^{1+t} s ds = \frac{(1+t)^2 - 1}{2}$$

En el intervalo [0, 2], la convolución es

$$x(t) * y(t) = \int_{-1+t}^{1} s ds = \frac{1-(1-t)^2}{2}$$

Hasta ahora hemos considerado funciones definidas en toda la recta que se anulan fuera de un intervalo finito. Pero este es el caso de las funciones periódicas, que pueden ser consideradas como un caso particular de las primeras. Luego, en realidad, los límites de integración de la convolución cíclica

$$\int_{-T}^{T} x(s)y(t-s)ds$$

son una apariencia de los verdaderos límites [-$T$, $T+t$] y [-$T+t$, $T$] de la convolución de funciones de duración finita. ¿Se debe multiplicar la convolución por el factor $1/2T$? Algunos autores[26] no lo consideran así. Nosotros veremos que es imprescindible este factor, desde el punto de vista del cálculo infinitesimal.

### LA CONVOLUCIÓN DISCRETA

Para concentrarnos en nuestro objetivo, estudiaremos la operación de convolución entre funciones de variables discretas, y luego concentraremos nuestra atención en la convolución discreta desde el punto de vista del cálculo infinitesimal, para mostrar que ella coincide con la convolución de dominio continuo, convirtiendo la operación de convolución en un ejercicio computacional.

Ya vimos que, por lo menos desde Wiener, se define la convolución de sucesiones. Modernamente, en varios libros de texto se define la convolución de sucesiones finitas de valores reales[27], que no son otra cosa que funciones de dominio discreto. Tal operación se lleva a cabo de la manera siguiente.

Se toman dos de tales sucesiones

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots, x_N$$
$$y_0, y_1, y_2, \cdots, y_m, \cdots, y_M$$

donde $0 \leq n \leq N$, $0 \leq m \leq M$, y se define la convolución como una nueva sucesión

$$\{z_n\} = \{x_n\} * \{y_n\}$$

conformada por los $N + M + 1$ términos

$$z_k = \sum_n x_n y_{k-n}$$

26 H. F. Davis, *Fourier Series and Orthogonal Functions*, Dover Publications, Inc., 1963, página 76.

27 E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall Inc., 1974.

donde cada uno de éllos se obtiene de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} z_0 &= x_0 y_0 \\ z_1 &= x_0 y_1 + x_1 y_0 \\ z_2 &= x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Los términos anteriores se obtienen de modo similar a los coeficientes del producto de dos polinomios, por lo que la convolución discreta se conoce también con el nombre de producto serial[28].

Obsérvese que la sucesión finita $\{y_{k-n}\}$ proviene de invertir el índice $n$ de la sucesión $\{y_n\}$ y desplazarlo hasta el índice $k$. Por tanto, como ilustran varios autores[29,30], el cálculo de la convolución discreta se puede realizar así: la segunda sucesión invertida y desplazada se coloca encima de la primera y se realizan las operaciones.

Por ejemplo, si la primera sucesión tiene 4 términos y la segunda cinco, la convolución tendrá 3 + 4 + 1 = 8 términos, y para calcular la convolución, se suman los productos de arriba por los de abajo, como en la figura,

$$\begin{array}{cccccccc} y_3 & y_2 & y_1 & y_0 & \rightarrow & & & \\ & & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array}$$

### *TRÁNSITO DEL DISCRETO AL CONTINUO*

Nosotros demostraremos a continuación, que la convolución discreta es la misma convolución continua, desde el punto de vista del cálculo infinitesimal.

Fijamos el intervalo [-*T*, *T*], tomamos un entero infinito *N* y subdividimos el intervalo en 2*N* partes iguales. Sea t la variable que cumple las condiciones

28 R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill Book Company, 1965.

29 E. O. Brigham, *Op. Cit.*

30 R. Bracewell, *Op.Cit.*

$$t = \{t_{-N}, \cdots, t_{-1}, t_0, t_1, \cdots, t_{N-1}\}$$
$$t_n = ndt, \quad -N \le n < N$$
$$dt = \frac{T}{N}$$

Dadas las funciones x(*t*), y(*t*), ellas se representan como sucesiones de 2*N* términos cuyos valores en la enésima posición *n* son

$$x(t_n) = x_n = x(ndt)$$
$$y(t_n) = y_n = y(ndt)$$

por tanto, podemos calcular la convolución discreta de las dos sucesiones de 2*N* términos $\{x_n\}, \{y_n\}$ siguiendo las reglas establecidas,

$$\{z_n\} = \{x_n\} * \{y_n\}$$
$$z_n = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} x_k y_{n-k}$$

donde seguimos la notación convencional, multiplicando cada uno de los términos de la convolución discreta por el factor correspondiente, que en este caso será 1/2*N*.

Luego, en el modelo de cálculo infinitesimal,

$$z(ndt) = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} x(kdt)\, y((n-k)dt)$$

reemplazando las variables *t = ndt, s = kdt* y teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{2N} = \frac{1}{2T}\frac{T}{N} = \frac{1}{2T}dt$$

tenemos nuevamente

$$z(ndt) = \frac{1}{2T} \sum_{k=-N}^{N-1} x(kdt)\, y((n-k)dt)dt$$

pero esta es precisamente la integral de convolución

$$z(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(s)\, y(t-s)\, ds$$

como previamente habíamos convenido.

En el modelo de cálculo infinitesimal, la convolución discreta, la convolución periódica y la convolución usual son una sóla, que asume diversas apariencias de acuerdo a las diversas escalas de las variables, sean éstas de escala finita o infinitesimal.

[illegible] se representan como [illegible] de

[illegible]

[illegible] discreta de las dos sucesio-
[illegible] las reglas establecidas.

[illegible]

[illegible] multiplicando cada uno de los [illegible] por el factor correspondiente, que en [illegible]

[illegible] de manera convencional,

$$[illegible] \sum [illegible] y((n-k)\Delta t)$$

[illegible] y tomando en cuenta que

[illegible]

$$[illegible] \sum [illegible] k)\Delta t)\Delta t$$

Capítulo 5

# Fourier, a la manera tradicional

Al estudiar el contenido básico de un curso de *Análisis de Fourier*, podemos distinguir un reducido número de conceptos que constituyen el *núcleo* de la teoría, y que de modo recurrente relacionan todos los demás aspectos que se tratan a lo largo de uno o dos semestres académicos, dándole la forma aparentemente coherente –aunque fragmentada– que le es tan familiar al docente y a los estudiantes de dicha materia. Nos proponemos identificarlos, enunciar sus propiedades, y determinar las operaciones y relaciones que se dan entre sí; esto nos permitirá, en primer lugar, tener un capítulo autónomo de la teoría de Fourier, que es el eje central de nuestro libro, al cual hagamos permanentemente referencia; en segundo lugar, al exhibir así la teoría, quedará al desnudo su división artificial y la enorme redundancia de sus conceptos; y finalmente, nos mostrará la necesidad de integrarla en una sóla teoría unitaria, que es la que en su momento expondremos como propuesta didáctica de nuestro modelo de cálculo infinitesimal.

## ENTIDADES DE LA TEORÍA

Cualquiera que tenga una visión global del análisis de Fourier en los primeros semestres de Universidad, coincidirá con nosotros en identificar las siguientes *entidades principales*, denominadas y simbolizadas así: la Serie de Fourier SF. La Transformada de Fourier TF, también conocida como Transformada Integral. Y la Transformada Discreta de Fourier TDF. Las dos primeras son propias del modelo continuo, mientras que la última se expone, por regla general, como parte del modelo discreto. En los textos, las entidades principales son expuestas en diferentes *versiones* (versión continua o discreta; versión real o compleja) y mediante una *simbología* heterogénea. Estas entidades están rodeadas de *propiedades* –linealidad, desplazamiento– y vínculos –relaciones de ortogonalidad– que concurren en el espacio donde están definidas. Y acompañan a estas entidades, algunas operaciones con diversas denominaciones; las más importantes son, la *modulación* –como un producto ordinario o composición funcional– y el producto de *convolución*.

Otras entidades complementarias son las *funciones especiales*, entre cuyos representantes más conocidos tenemos, la función de Heaviside o escalón unitario y sus combinaciones lineales, como el pulso unitario; la delta de Dirac o, impulso unitario y sus combinaciones lineales, como los trenes de impulso; algunas derivadas de tales funciones generalizadas. En la *Teoría de Señales*, hay algunas *cantidades* asociadas a las funciones que representan *señales* que son los contenidos físicos de dichas funciones *–energía, potencia–* de uso común en el aula de clase.

A primera vista, el lector distinguirá las entidades del dominio continuo de las entidades del dominio discreto, aunque no le puedan explicar cuales son los fenómenos propios de los modelos discretos y cuales de los continuos donde ellas hacen presencia. Dado un dominio, es una ardua labor distinguir el cúmulo de relaciones que guardan entre sí las entidades principales, sus operaciones y propiedades; las funciones especiales y las cantidades asociadas. En verdad, no es fácil saber cuales son propiedades de unas y cuales son propiedades de las otras.

## DIVERSAS APLICACIONES

De acuerdo al curso que se brinda, tienen lugar otras entidades que se asocian a las aplicaciones físicas. Por ejemplo, si en la exposición del tema hay un énfasis hacia los métodos matemáticos de la física, muy posiblemente se incluya un estudio de la *ecuación de la cuerda vibrante*, la *ecuación del calor*, u otras ecuaciones diferenciales parciales especiales. Si el área es computacional, emerge otra entidad muy importante, que es la Transformada Rápida de Fourier TRF, sobre la cual haremos una anotación parte.

Así mismo, no debemos dejar de mencionar que en un curso de análisis de Fourier de mayor aplicación, se incluyen otros temas como la *Transformada de Laplace,* los *Polinomios de Legendre* y las *Funciones de Bessel*. Si el énfasis es hacia la Ingeniería Electrónica, es inevitable la exposición del

*Teorema del Muestreo de Shannon*, la *transformada* Z u otras transformadas, como la *transformada de Walsh*, e incluso, un tema que cada día gana mayor atención, las *Wavelets*.

Los cursos de análisis de Fourier en la llamada *matemática pura* difieren drásticamente de los de pregrado que aquí analizamos, pues van dirigidos a la investigación y por ello tienen que profundizar cuestiones de *convergencia*, de los espacios donde los fenómenos ocurren, como los *espacios de Hilbert*. Los temas de especialización son diversos: *Teoría de Distribuciones*, o *Análisis Espectral*, *Teoría de la Aproximación*, *Estabilidad y Control*, *Teoría de Operadores*, entre tantos.

Volviendo a la consideración inicial, queremos rescatar la idea de que un curso básico de análisis de Fourier está estructurado en torno a los siguientes aspectos:

* *Entidades principales: Series y Transformadas.*
* *Propiedades: Ortogonalidad, Linealidad, Translación.*
* *Operaciones: Modulación, Convolución*
* *Relaciones recíprocas: Teorema de Convolución*
* *Aplicaciones: Desarrollo en series; Cálculo de Coeficientes, Estudio de Funciones Especiales, solución de Ecuaciones Diferenciales.*

A continuación, presentamos un listado de definiciones sobre las entidades y las operaciones y funciones especiales, las que restringiremos estrictamente al dominio unidimensional. Todas ellas, de una u otra forma, se encuentran expresadas o definidas en los libros de texto, cuya bibliografía abunda, con variaciones en los enunciados y heterogeneidad notacional. La bibliografía que señalamos sólo se refiere a los textos que posteriormente serán analizados. Este listado, repetimos, tiene como único objetivo mantener una notación unificada en todo el libro. Obviamente, las variables asumen valores sobre el campo de los números reales o los números complejos. Como sólo nos interesa el aspecto notacional, se dejarán de lado los aspectos de convergencia involucrados así como las condiciones de existencia de los conceptos. Escasamente, alguno de los resultados expuestos será demostrado.

## NOTACIÓN FUNCIONAL

Las reglas para la notación de funciones de valores reales sobre la variable del dominio real son las siguientes: se suponen dadas dos tipos de variables sobre los reales: la *variable tiempo* y la *variable frecuencia*. Las letras minúsculas x, y, z, se reservan como *letras de función* sobre el dominio temporal, mientras que las letras mayúsculas X, Y, Z, se reservan como letras de función sobre el dominio frecuencial. Las letras *t, f* se reservan para las variables temporales y frecuenciales de dominios contínuos y siempre van entre paréntesis redondos como *(t), (f)*, mientras que las letras *n, k* se reservan para las variables temporales y frecuenciales de dominio discreto y siempre van entre corchetes cuadrados, como *[n], [k]*. La letra *j* corresponde a la *unidad imaginaria* $j = \ -1$, y siempre el producto de la variable tiempo por la variable frecuencia se da en ese orden: o bien *t·f*, o bien *n·k*.

Una función *x(t)* en la variable temporal y de dominio contínuo sobre el intervalo real [-*T, T*], $T > 0$ se denomina *función periódica* de *período* 2*T*. La *extensión* de dicha función x*(t)* sobre toda la recta real se define así:

$$x(t+2T) = x(t), \quad t \in R$$

Siempre que se tenga tal dominio contínuo, se define la cantidad $\dfrac{1}{2T} = f_0$, y se le denomina la *frecuencia fundamental* de la función x*(t)* determinada por el período 2*T*.

## LA SERIE DE FOURIER SF

Sea x*(t)* una función periódica de período 2*T*. A dicha función se le asocia la serie

$$x(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi t\, k\, f_0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k sen(2\pi t\, k\, f_0)$$

o también

$$x(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(2\pi t \frac{k}{2T}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k sen\left(2\pi t \frac{k}{2T}\right)$$

donde

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} x(t)\cos(2\pi t\, kf_0)dt \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} x(t)sen(2\pi t\, kf_0)dt \quad k > 1$$

La serie asociada se denomina *serie real de Fourier* SF de *x(t)*, y los $a_k, b_k$ se denominan *coeficientes reales de Fourier*. Para que estos coeficientes existan, es suficiente que la función *x(t)* sea integrable. En cambio es un problema formidable dar una condición sobre *x(t)* para que la serie asociada sea *convergente* a dicha función. Cuando ello se garantiza, se dice que la función periódica x(t) *se desarrolla* en serie real de Fourier[1,2].

Siguiendo la tradición de la ingeniería, siempre denominaremos a *x(t)* la *forma de onda*, mientras que las funciones $sen(2\pi t\, k\, f_0)$, $\cos(2\pi t\, k\, f_0)$ se denominan *componentes armónicas*, donde $f_0$ es la *frecuencia fundamental*, *k* es la altura del *armónico* $k\, f_0$ y los coeficientes $a_k$, $b_k$ son las *amplitudes reales* correspondientes a tal armónico[3].

La *versión compleja* equivalente de la serie de Fourier es la siguiente: a la función periódica *x(t)* se le asocia la serie

$$x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp(j2\pi t\, kf_0)$$

donde

$$C_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\exp(-j2\pi t\, kf_0)dt \, .$$

1 C.Lanczos, *Discourse on Fourier Series*, Hafner Pub. Co., 1966.

2 J. S. Walker, *Fourier Analysis*, Oxford University Press, Oxford, 1988.

3 A. Papoulis, *Signal Analysis*, Mc Graw-Hill Book Co., 1977.

Esta serie se denomina *serie compleja de Fourier* de x(t), y los $C_k$ son los *coeficientes complejos de Fourier*. Cuando la serie converge a x(t), se dice que la función periódica *se desarrolla* en serie compleja de Fourier. La relación entre los coeficientes reales y complejos de Fourier es la siguiente:

$$C_k = \frac{1}{2}\left\{a_k - jb_k\right\}, \quad C_{-k} = \overline{C_k} = \frac{1}{2}\left\{a_k + jb_k\right\}$$

En ingeniería, los coeficientes complejos constituyen *el espectro discreto de frecuencia*. Recordemos que todo complejo z se puede expresar en función de su amplitud y su fase así: $z = z\exp(j\varphi)$

Como el coeficiente complejo contiene información sobre la *amplitud* $C_k$ y la *fase* $\varphi_k$ ambas cantidades se desdoblan en el *espectro discreto de amplitud* $C_k$ y *el espectro discreto de fase* $\varphi_k$ [4,5].

## LA TRANSFORMADA DE FOURIER TF

Sean *t, f* variables sobre toda la recta real. Dada la función x(t), se define la función *X(f)* como

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi t f)dt$$

en caso que tal integral exista. Se puede demostrar que, bajo ciertas condiciones, se puede invertir el proceso y

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\exp(j2\pi t f)df$$

La primera función *X(f)* se denomina *transformada integral de Fourier* TF (o simplemente transformada de Fourier) de x(t) y la segunda, *transformada de Fourier inversa* TFI.

4 H. P. Hsu, *Analisis de Fourier*, Fondo Educativo Interamericano, 1970.

5 A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, *Signals ans Systems*, Prentice Hall International, Inc., 1983.

Hay dos notaciones usuales para las funciones *x(t)* y *X(f)* así relacionadas. Al par

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

se le denomina *par transformado*. En algunos textos se usa el lenguaje de operadores. Se define $\Im$ como el operador

$$\Im\{x(t)\} = X(f)$$
$$\Im^{-1}\{X(f)\} = x(t)$$

donde el primero es el operador *transformada de Fourier*, y el segundo es el operador inverso. Salvo alguna alusión al tema, nosotros no haremos uso de tal simbolismo.

Siguiendo siempre la tradición en ingeniería, en ambos casos, a la *forma de onda x(t)* se le hace corresponder el *espectro continuo de frecuencia X(f)*. Este espectro, como su homólogo discreto, se desdobla en *espectro continuo de amplitud* $\|X(f)\|$ y *espectro continuo de fase* $\varphi_f$, que corresponde a la información de fase contenida en el espectro[6].

La anterior es la *versión continua* de la TF cuyo dominio es toda la recta real, pero bien puede ocurrir que la función *x(t)* se anule fuera de un intervalo finito:

$$|t| \geq 2T \rightarrow |x(t)| = 0$$

en cuyo caso se dice que la forma de onda x(*t*) es de *duración finita* y la transformada de Fourier es

$$X(f) = \int_{-T}^{T} x(t)\exp(-j2\pi tf)dt$$

Así mismo, si *X(f)* se anula fuera de un intervalo finito [-*W*, *W*]:

$$|W| \geq 2W \rightarrow |X(f) = 0|$$

en cuyo caso se dice que el espectro *X(f)* es de *banda limitada* y

$$x(t) = \int_{-W}^{W} X(f)\exp(j2\pi tf)df$$

6 E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall,Inc. ,1974.

## LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Para definir la transformada discreta de Fourier TDF necesitamos aclarar algunos aspectos previos. Dadas las diferencias notacionales en los textos, aquí seguiremos la que nos parece más cómoda[7] y que en su momento veremos como la más apropiada. Sea $T$ un número real positivo y $N$ entero positivo. Estas dos cantidades determinan dos dominios finitos. El primero es el *dominio temporal* y está determinado por el conjunto

$$\left\{\frac{nT}{N}\right\}, \quad -N \leq n < N$$

El segundo es el *dominio frecuencial* y está determinado por el conjunto

$$\left\{\frac{k}{2T}\right\}, \quad -N \leq k < N$$

ambos dominios tienen $2N$ elementos. Las funciones sobre ambos dominios se denotan, respectivamente,

$$x\left[\frac{nT}{N}\right], \quad X\left[\frac{k}{2T}\right]$$

y están relacionadas mediante las siguientes transformaciones:

$$X\left[\frac{k}{2T}\right] = \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1} x\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{2N}\right),$$

y

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] = \sum_{k=-N}^{N-1} X\left[\frac{k}{2T}\right]\exp\left(j2\pi\frac{nk}{2N}\right).$$

La primera función se denomina *transformada discreta de Fourier* y la segunda función se denomina *transformada discreta inversa de Fourier*. Aunque las funciones asumen un número finito de valores, la primera se

7 E. O. Brigham, *Ibid.*

sigue denominando *forma de onda*, mientras que la segunda es el *espectro de frecuencia*. Así mismo, el *par transformado* es

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] \leftrightarrow X\left[\frac{k}{2T}\right]$$

## RELACIONES DE ORTOGONALIDAD

Un acercamiento analítico a las series de Fourier nos permitirá concluir que hay una propiedad esencial de la familia de funciones trigonométricas –o exponenciales complejas– que es el que constituyen un *sistema ortogonal completo*. En la teoría de *Espacios Vectoriales,* esto es equivalente a que existe una *base ortogonal* relativa a la cual se expresan los demás vectores del espacio. En su versión compleja, la relación de ortogonalidad significa que familia

$$\{\exp(j2\pi tkf_0)\}$$

definida en el intervalo [-*T, T*], donde *k* es cualquier entero, posee la siguiente propiedad

$$k \neq l \rightarrow \int_{-T}^{T} \exp(j2\pi t(k-l))dt = 0$$

Es de importancia capital el que dicha relación de ortogonalidad se mantiene cuando el dominio es discreto. En otras palabras, también se cumple

$$k \neq l \rightarrow \sum_{n=-N}^{N-1} \exp\left(j2\pi\frac{n(k-l)T}{2N}\right) = 0$$

Esta es una relación *esencial*, pues está en la base de la existencia tanto de la serie de Fourier como de la transformada discreta de Fourier.[8]

8 J. S. Walker, *Fast Fourier Transforms*, CRC Press, Inc., 1991.

## LINEALIDAD Y TRANSLACIÓN

Las dos propiedades más destacadas que enlazan las entidades principales es la de linealidad y de translación –desplazamiento o *shifting*–, dependiendo su formulación de la versión continua o discreta que se haya empleado. Obsérvese primeramente que la transformada de Fourier posee la siguiente propiedad: si se suman dos funciones, la transformada de la suma es la suma de las transformadas. En otras palabras:

$$
\begin{aligned}
&x(t) \leftrightarrow X(f) \\
&y(t) \leftrightarrow Y(f) \\
&x(t) + y(t) \leftrightarrow X(f) + Y(f)
\end{aligned}
$$

La suma de funciones se denomina *superposición*, por lo que la anterior propiedad de linealidad se traduce así: *el espectro de frecuencia de la superposición de dos formas de onda es la superposición de los espectros de frecuencia correspondientes.* La propiedad de linealidad en la versión discreta es similar a la anterior:

$$
\begin{aligned}
&x[n] \leftrightarrow X[k] \\
&y[n] \leftrightarrow Y[k] \\
&x[n] + y[n] \leftrightarrow X[k] + Y[k]
\end{aligned}
$$

La demostración de dichas propiedades es bastante simple y se desprende de casi inmediatamente de la definición de las transformadas correspondientes. Así mismo, existe una propiedad conocida como translación o desplazamiento *–shifting–* que en el dominio continuo se enuncia así:

$$
\begin{aligned}
&x(t) \leftrightarrow X(f) \\
&x(t - t_0) \leftrightarrow X(f)\exp\left(-j2\pi t_0\right) \\
&x(t)\exp\left(j2\pi t f_0\right) \leftrightarrow X(f - f_0)
\end{aligned}
$$

La primera se denomina desplazamiento en el tiempo. La segunda, desplazamiento en la frecuencia. Hay una formulación análoga para el dominio discreto.

## MODULACIÓN Y CONVOLUCIÓN

La propiedad de desplazamiento en el tiempo de la transformada se refiere a un producto de una función con una exponencial compleja que es, en el dominio real, una operación de *modulación en amplitud* de la función original por la *portadora*, que en este caso es una sinusoide. Lo que dice la propiedad de desplazamiento es que el espectro de frecuencia de una forma de onda modulada es el espectro de frecuencia original, desplazado en el dominio de la frecuencia.

Un poco más generalmente, dadas dos formas de onda $x(t)$, $y(t)$, la *modulación en amplitud* de $x(t)$ mediante $y(t)$ consistirá en la operación matemática $z(t) = x(t)y(t)$ que es el producto ordinario de funciones. Esta denominación se debe a que si $x(t)$ representa una forma de onda, los valores de dicha función son *amplitudes* en cada posición temporal $t$. La versión discreta de la modulación en amplitud es similar a su homóloga continua, aunque hay que tener un poco de cuidado con el dominio, el cual debe ser idéntico para ambas funciones.

El *producto de convolución* de dos funciones $x(t)$, $y(t)$, está íntimamente ligado a las entidades principales del análisis de Fourier. Particularmente, hay *tres versiones* de la convolución, ya se trate de la entidad SF, de la entidad TF o de la entidad TDF. Así, hay una *convolución periódica*, una *integral de convolución* y una *convolución discreta*. En su orden, se definen de la siguiente manera.

En general, si $x(t)$, $y(t)$, son dos funciones cualesquiera, sobre el dominio temporal *integral de convolución*, como anteriormente hemos visto, es

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

Dadas dos funciones de dominio temporal $x(t)$, $y(t)$, periódicas de período $2T$, definimos la *convolución periódica*

$$z(t) = x(t) * y(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

La versión discreta de la convolución es la siguiente. Dadas dos funciones sobre el dominio discreto, la *convolución discreta* es la operación

$$z\left[\frac{nT}{N}\right]=x\left[\frac{nT}{N}\right]*y\left[\frac{nT}{N}\right]=\frac{1}{2N}\sum_{p=-N}^{N-1}x\left[\frac{(n-p)T}{N}\right]y\left[\frac{pT}{N}\right]$$

De manera similar, se define la convolución de dos funciones en el dominio frecuencial, sea este dominio continuo o discreto. Entre las entidades principales TF, TDF y las operaciones de modulación y convolución, existen íntimas relaciones, las más importantes, conocidas como *teoremas de convolución*. Uno de ellos es el *teorema de la integral de convolución*, que podemos enunciar del modo siguiente. Sean *x(t), y(t),* dos funciones cuyas transformadas de Fourier son, respectivamente *X(f), Y(f)*. Entonces

$$x(t)*y(t)\leftrightarrow X(f)Y(f)$$

Esto es, la transformada de Fourier de la convolución es la modulación de las transformadas. O también podemos decir que el espectro de la convolución en el tiempo es la modulación en frecuencia los espectros respectivos. El teorema de *convolución en el tiempo* es similar al teorema de *convolución en la frecuencia*

$$x(t)y(t)\leftrightarrow X(f)*Y(f)$$

que dice: la transformada de Fourier de la modulación es la convolución de las transformadas. O también, el espectro de la forma de onda modulada es la convolución de los espectros respectivos. El teorema de convolución discreta en tiempo y frecuencia es similar:[9]

$$x\left[\frac{nT}{N}\right]*y\left[\frac{nT}{N}\right]\leftrightarrow X\left[\frac{k}{2T}\right]Y\left[\frac{k}{2T}\right]$$

$$x\left[\frac{nT}{N}\right]y\left[\frac{nT}{N}\right]\leftrightarrow X\left[\frac{k}{2T}\right]*Y\left[\frac{k}{2T}\right]$$

9 E. O. Brigham, *Ibid.*

## FUNCIONES ESPECIALES

Con este nombre nos hemos referido a algunas funciones que se utilizan en el análisis de Fourier y que están estrechamente relacionadas con las entidades principales y las operaciones arriba estudiadas. Sólo mencionaremos las más familiares, porque las funciones especiales abundan –Polinomios de Legendre, Funciones de Bessel, Función Gamma, etc.[10] Las siguientes son las funciones que en su momento analizaremos y sobre las cuales presentaremos una formulación acorde con nuestro modelo de cálculo. Las listamos aquí con el único propósito de unificar la notación. La primera y a la cual hemos dedicado un capítulo completo es La *delta de Dirac* o también *impulso unitario*. En los textos de ingeniería hacen caso omiso de la teoría de las distribuciones y la definen como originalmente hizo su autor, o sea, $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$, y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

La delta de Dirac se utiliza indistintamente como 'función' de dominio temporal o 'función' de dominio frecuencial. La *función de Heaviside* en el tiempo es

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Dicha forma de onda se denomina *escalón unitario temporal*. El *pulso unitario* se define

$$p_d(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \dfrac{d}{2} \\ 1 & |t| < \dfrac{d}{2} \end{cases}$$

Su forma de onda se llama *pulso unitario de duración finita d*. Similarmente, se define el pulso unitario en el dominio de la frecuencia. Obviamente, el primero es *una forma de onda de e duración finita* mientras que el segundo representa una señal de *banda limitada*.

---

10 A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, *Opus cit.*

El *tren de impulsos* es un 'función' periódica de período $T$ que se construye como una superposición de impulsos unitarios $\delta(t-nT)$, desplazados una distancia $2T$ entre sí,

$$\delta_T(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

En el dominio discreto se define la *delta discreta de Dirac*

$$\delta\left[\frac{nT}{N}\right]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

Nótese que ésta sí es una función. La gran distinción con el dominio continuo reside, además, en la siguiente descomposición, de fácil demostración. Es sencillo confirmar que toda función del dominio discreto se expresa de la forma siguiente:

$$x\left[\frac{nT}{N}\right]=\sum_{p=-N}^{N-1}x\left[\frac{pT}{N}\right]\delta\left[\frac{(n-p)T}{N}\right]$$

donde la suma es una suma finita de $2N$ sumandos en el dominio discreto $\left\{\frac{nT}{N}\right\}$, $T$ es real finito y $-N \leq n < N$. Esto se demuestra evaluando la función directamente en cada valor del dominio.

Cualquier observador agudo se habrá fijado en que hay una relación persistente entre las entidades de la teoría y las operaciones de modulación y convolución. Si nos fijamos en los teoremas de convolución enunciados para las transformadas, éstos se extienden a las series de Fourier: las formas de onda se modulan o convolucionan de acuerdo a que los coeficientes de Fourier de las series respectivas se convolucionen o modulen. Y esta relación operacional se mantiene invariable, trátese de la transformada de Laplace, la transformada Z, la transformada de Hilbert o cualquier otra de dichas entidades.

## LA FÓRMULA DE PARSEVAL

Otro hecho curioso es que existe una relación general en todas las transformadas de Fourier, incluyendo las series de Fourier, que se denomina la *fórmula de Parseval*. Esta fórmula expresa un principio de conservación de la *energía o potencia* en la forma de onda o el espectro de frecuencia respectivo. Supongamos los siguientes pares de transformadas,

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$
$$y(t) \leftrightarrow Y(f)$$

entonces se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y(-f)\,df$$

lo que implica la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\| x(t) \right\|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\| X(f) \right\|^2 df$$

La anterior expresión es precisamente la *fórmula de Parseval*. Cualquiera de las dos cantidades representa la *energía*, desprendiéndose que la energía contenida en una forma de onda es idéntica –salvo constantes– a la energía contenida en el espectro de frecuencia. La coincidencia con la versión discreta despeja cualquier duda, pues ocurre que

$$\frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1}\left\| x\left[\frac{nT}{N}\right]\right\|^2 = \sum_{k=-N}^{N-1}\left\| X\left[\frac{k}{2T}\right]\right\|^2$$

Una anotación final. Cuando se asume que la delta de Dirac es una distribución, el cálculo de la transformada integral de Fourier de la delta de Dirac requerirá del conocimiento de la teoría de distribuciones. No obstante, en la mayoría de los textos se calcula directamente –aunque informalmente– arrojando el resultado

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

En cambio, en el dominio discreto, no hay ningún obstáculo en el cálculo, y es obvio que

$$\delta\left[\frac{nT}{N}\right] \leftrightarrow 1$$

solo que no tendría que deducirse, por más heurístitca que se utilice, que el resultado del discreto afirme teóricamente el resultado del continuo.

### *CUESTIÓN CRUCIAL*

Dado este cúmulo de relaciones entre dominios discretos y continuos, variables temporales y frecuenciales, transformaciones, entidades, propiedades, operaciones y funciones, surge la pregunta ¿no habrá una relación más profunda en la propia teoría que establezca definitivamente el vínculo completo entre todas las entidades y las operaciones, y entre el continuo y el discreto?

Y también, en general ¿no será que el continuo y el discreto están vinculados por una relación íntima que arrastra al análisis de Fourier discreto a una identificación con el análisis continuo? Y mucho más allá de la metáfora, como problema crucial ¿No es posible una construcción unificada, donde todas las entidades y operaciones sean piezas de una sola arquitectura de cálculo?

El propósito fundamental de nuestro libro es responder afirmativamente estas preguntas y para ello, presentamos un modelo de análisis de Fourier orientado rigurosamente a fundamentar la respuesta.

Capítulo 6

# Doloroso tránsito hacia la transformada

Vamos a mostrar cómo los más importantes libros de texto de análisis de Fourier para físicos e ingenieros hacen el tránsito de la serie de Fourier a la transformada de Fourier, con una heurística que da resultados exitosos, pero sin tener en cuenta las más elementales normas de rigor, lo que conduce a que el método entre en bancarrota.

## DE LA SERIE A LA TRANSFORMADA

Supongamos que la función periódica $x(t)$, de período $2T$ puede ser desarrollada como serie compleja de Fourier en el intervalo $[-T, T]$,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp\left(j2\pi t\, kf_0\right)$$

cuyo correspondiente coeficiente de Fourier es

$$C_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\exp\left(-j2\pi tkf_0\right)dt$$

donde $j$ es la unidad imaginaria, $T$ es un número real positivo, $k$ es un entero arbitrario y la cantidad fija $\dfrac{1}{2T} = f_0$ se denomina *frecuencia fundamental.*

Si la función no es periódica, debemos descartar el desarrollo en serie, porque esta operación será imposible. Pero queda otra posibilidad: plantear el problema de la transformada de Fourier. Para explicar la posibilidad de que exista la transformada integral, los libros de texto se preguntan ¿que pasa si *x(t)* es no periódica?. A continuación, mostraremos las diversas metodologías que utilizan el desarrollo en serie de Fourier arriba descrito, para llegar a la transformada de Fourier TF,

$$\hat{X}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi tf)dt$$

donde

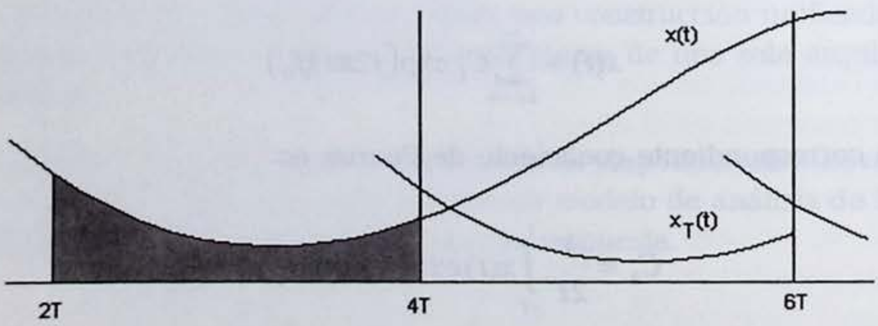
$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(f)\exp(j2\pi tf)df$$

es la transformada integral inversa de la primera.

Desde Fourier, de quien es la idea original[1], el método que siguen todos los libros de texto es el siguiente. Sea $x_T(t)$ una función de período $2T$ idéntica a *x(t)* en el intervalo [*-T, T*], de modo que podamos escribir

$$x(t)=\lim_{T\to\infty} x_T(t)$$

como lo indica la gráfica,




Entonces podemos expandir en serie de Fourier la familia de funciones periódicas

$$x_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp(j2\pi t\, kf_0)$$

1 W. A. Coppel, «J. B. Fourier. On the Ocassion of his two hundredth birthday,» *The American Mathematical Monthly,* Vol.76, pp. 474, 1969.

donde el coeficiente de cada función periódica es

$$C_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_T(u)\exp(-j2\pi u\,kf_0)du$$

sustituyendo,

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_T(u)\exp(-j2\pi u\,kf_0)du\right\}\exp(j2\pi t\,kf_0)$$

reemplazando la expresión $\frac{1}{2T} = f_0$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-T}^{T} x_T(u)\exp(-j2\pi u\,kf_0)du\right\}\exp(j2\pi t\,kf_0)f_0$$

Aquí viene, como popularmente se dice, la parte valseada del tango. Se trata, nada menos, de convertir esta expresión en la transformada integral de Fourier!. Esta proeza puede intentarse desde varios puntos de vista, de acuerdo a las creencias de cada uno de los autores de textos. Observemos que, básicamente, se trata de un paso al límite; dado que

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} x_T(t)$$

habría que hacer el cálculo del límite

$$\lim_{T\to\infty} x_T(t) = \lim_{T\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-T}^{T} x_T(u)\exp(-j2\pi u\,kf_0)du\right\}\exp(j2\pi t\,kf_0)f_0$$

Concentremos nuestra atención en el límite, o sea, en el hecho de que *T* tienda a infinito. Lo primero que los textos nos proponen aceptar es que si *T* tiende a infinito, ocurre simultaneamente la siguiente doble situación: el símbolo å de la suma en el rango $-\infty < k < \infty$ se convierte en el símbolo de la integral con dominio de integración $(-\infty, \infty)$ y la integral con dominio de integración $[-T, T]$ pasa a tener dominio de integración $(-\infty, \infty)$.

Si *T* tiende a infinito, hay dos grandes problemas que agravan la conversión de la serie en integral, y que de hecho la hacen imposible, desde todo punto de vista. En primer lugar, la cantidad $\frac{1}{2T} = f_0$, está bajo el símbolo de la integral, luego es natural que nos preguntemos ¿que pasa con $\frac{1}{2T} = f_0$ cuando el denominador $T$ tiende a infinito? En segundo lugar, la cantidad $kf_0$ también está bajo el simbolo de la integral, y sabemos que el entero $k$ recorre el intervalo infinito $-\infty < k < \infty$. ¿Que pasa con el doble límite $kf_0 = \frac{k}{2T}$, cuando $T$ tiende a infinito y $k$ es un entero arbitrario?

## PELIGROSO MALABARISMO

Vamos a mostrar cómo intentan sortear este doble imposible teórico, los textos *oficiales* de análisis de Fourier, al proponerse la conversión de las series de funciones periódicas en integrales de funciones no periódicas. Para las citas, debe recordarse que algunos textos utilizan la denominación de frecuencia fundamental como de la frecuencia angular mediante la sustitución $w_0 = 2\pi f_0$.

Para calcular los límites

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T},$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{k}{2T}, \forall k \in \mathrm{Z}$$

cosa de por sí ya absurda, porque si $k$ es entero, ambos límites son idénticos a cero, los libros de texto proceden de la siguiente forma. Leemos textualmente:

> *Ahora se hace que $T \longrightarrow \infty$,* y *así, $2\pi/T = w_0$, $w_0$ <u>se anula</u>. Sea $w_0 = \Delta w$; entonces la frecuencia de cualquier «armónico» $kw_0$ debe corresponder a la variable general de frecuencia que describe el espectro continuo. En otras palabras, $k \to \infty$ a medida que $w_0 = \Delta w \to 0$; tal que el producto es finito; esto es, $kw_0 = k\Delta w \to w$. ...*

*En el límite, $T \to \infty$, $\Delta w \to dw$, y la sumatoria se convierte en la integral sobre w...*[2].

Con este razonamiento, el autor anuncia que ha calculado los límites y que ha obtenido el resultado siguiente:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} = df$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{k}{2T} = f$$

donde *f* es la variable frecuencial del dominio continuo (recordemos que $w = 2\pi f$). Por supuesto, si tal es el resultado, sustituyendo el símbolo $\sum$ por el símbolo de integración donde el dominio de integración $[-T, T]$ pasa a $(-\infty, \infty)$ y reemplazando los límites imposibles, obtendríamos

$$x\ (t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x\ (u)\exp(-\,j2\pi u\, f\,)du\right\}\exp(\,j2\pi t\, f\,)df$$

expresión en donde la transformada de Fourier es

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\exp(-\,j2\pi uf\,)du$$

y por tanto, al sustituir, obtenemos la transformada integral inversa,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(f)\exp(\,j2\pi tf\,)df$$

El punto de vista expresado por muchos docentes que han expuesto a sus estudiantes este manejo, es que la heurística aquí utilizada pierde toda credibilidad. Aún el más inescrupuloso calculista sabe que si se hace tender T a infinito, el cociente $\dfrac{1}{2T} = f_0$ tenderá a cero. ¿Cómo puede convertirse esta expresión en *df*? De otra parte, ¿Cómo justificar que la expresión $kf_0$,

2 H. P. Hsu, *Analisis de Fourier*, Fondo Educativo Interamericano, 1970, pág. 73.

donde el índice $k$ recorre todos los enteros y la frecuencia fundamental se anula, el producto sea finito y se convierta en una variable continua?.

El esfuerzo que hacen los textos de ingeniería para mostrar que si el período se hace infinito, la frecuencia se vuelve una diferencial y el producto del enésimo armónico con la diferencial se convierte en la variable frecuencial, es una hazaña loable. Pero los argumentos son inaceptables. Y esta metodología hace parte del imaginario en los principales textos de análisis de Fourier, considerados como oficiales en los programas de pregrado. Así, por ejemplo, se llega a afirmar sin convencimiento,

> *«En el límite, cuando T —>∞, $w_0$ se vuelve* infinitamente pequeña *de modo que se le puede representar por dw»*[3].

O mucho más directo,

> *«Como $w_0$ —> 0, esto por definición converge a la integral de*
>
> *X(w)exp(jwt)...»*[4].

Algunos piden disculpas del paso de la serie de Fourier a la transformaa de Fourier, sugiriendo que pertenece a una matemática superior:

«Deseamos examinar esta expresión como $T \to \infty$. Esto involucra un proceso complicado, puesto que a la vez que $T$ se aproxima a $\infty$, $k$ se aproxima a $\infty$. Al proceso de límite involucrado no se le puede dar un riguroso tratamiento sin el uso de la matemática avanzada»[5].

No obstante, estos autores colocan el resultado,

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{2\pi}{T}\right)\to d\omega,$$

$$\lim_{\substack{T\to\infty,\\ n\to\infty}} n\left(\frac{2\pi}{T}\right)\to \omega$$

3 B. P. Lathi, *Introducción a la teoría y Sistemas de Comunicación*, Limusa, 1974, pág. 47.

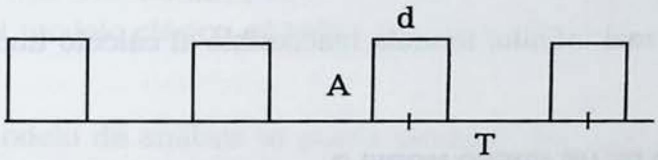
4 A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, *Signals ans Systems*, Prentice Hall International, Inc., 1983, pág. 188.

5 A. D. Poularikas, S. Seely, *Signals and Systems*, PWS Engineering, Boston, 1985, pág. 164.

para cuya comprensión, verdaderamente se requiere de alguna matemática superior! Otros, por una u otra razón, prefieren no involucrarse en tan embarazosa situación[6], o sin dar rodeos, definen directamente la transformada de Fourier[7].

## LA HEURÍSTICA, EN BANCARROTA

Para ilustrar los defectos que tiene tal heurística, hemos seleccionado el ejemplo de la conversión de la onda cuadrada periódica en onda cuadrada no periódica[8]. Los libros de texto proceden de la siguiente forma. Supongamos que tenemos un pulso periódico rectangular *x(t)* de amplitud *A*, con duración finita *d* y cuyo período es *T*. Esta forma de onda, denominada *onda cuadrada periódica* tiene como gráfica la siguiente:




Al desarrollar la serie de Fourier, el enésimo armónico o coeficiente complejo de altura armónica *n* es

$$C_n = A\frac{d}{T}\frac{sen\left(\dfrac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\dfrac{n\pi d}{T}\right)}$$

Así explica el autor la conversión de dichos coeficientes en transformada de Fourier:

> *Por tanto, si el período T aumenta, las amplitudes de todos los armónicos disminuyen. De lo anterior se concluye que en el límite, a medida que T se acerca al infinito, los armónicos se encuentran*

6 W. D. Stanley, *Digital Signal Processing*, Reston Pub. Co., Prentice-Hall Company, 1975, pág. 41.

7 E. O.Brigham, The Fast Fourier Transform and Its Applications, Prentice Hall, 1988, pág. 11.

8 H. P. Hsu, *Analisis de Fourier*, Fondo Educativo Interamericano, 1970, pág. 72

*infinitamente cercanos y son de amplitud infinitesimal, es decir, el espectro discreto se vuelve continuo.*

Lamentablemente, como puede verificarse al ojo, el acercamiento de $T$ al infinito arrastra inevitablemente al propio coeficiente $C_n$ a cero! (Lema de Riemann-Lebesque). El espectro discreto se vuelve continuo pero –!horror!– la transformada de Fourier se vuelve nula. El autor no podrá explicar jamás la conversión del armónico discreto al continuo porque sólo en un modelo de cálculo con verdaderos infinitesimales podrá demostrarse, como lo haremos en este libro, que la conversión del enésimo armónico $C_n$ en transformada de Fourier se logra rigurosamente mediante la fórmula

$$TC_n = \hat{X}(ndf) = \hat{X}(f)$$

donde $T$ es real infinito, fórmula inaccesible al cálculo tradicional.

## NECESIDAD DE UN NUEVO MODELO

En resúmen y volviendo al tema central, los textos más conocidos de ingeniería, para justificar el paso de la serie de Fourier a la integral de Fourier utilizan, sin explicarlos, desde argumentos *infinitesimalistas* hasta uso de *límites*, y sus mezclas. Además quieren reforzar la creencia de que con sólo mencionar la palabra *límite* se introduce el *rigor.*

Nadie pone en tela de juicio la existencia de demostraciones matemáticas rigurosas de la integral de Fourier. En el varias veces mencionado libro de Wiener[9] se encuentra una exhibición completa de la existencia y unicidad de la transformada de Fourier, demostrado primeramente por Plancherel[10]. Pero estas demostraciones son larguísimas, extremadamente complicadas[11] y para algunos, simplemente inaccesibles, como puede comprobarse ojeando el excelente libro de Koerner[12]. Para alivio de docentes y

9 N. Wiener, *The Fourier Integral and certain of its applications*, Cambridge University Press, 1933. Dover Pub., Inc., S272.

10 M. Plancherel, «Contribution a l'etude de la representation d'une fonction arbitraire par des integrales definies,». *Rendiconti di Palermo*, 30 (1910), pag.289-335.

11 C.Lanczos, *Discourse on Fourier Series,* Hafner Pub.Co., 1966.

12 T. W. Körner, *Fourier Analysis,* Cambridge University Press, 1988.

estudiantes de ingeniería, estas demostraciones están fuera del alcance del aula de clase. Al respecto, es interesante encontrar algunos textos[13] en los que la demostración rigurosa va precedida de una heurística similar a la de los ingenieros, para «motivar» la solución. Pero en realidad, no es el paso riguroso de la serie a la transformada lo que se ha demostrado, sino las condiciones de existencia de la transformada de Fourier, que es algo distinto. Porque, en el momento en que se haga el intento de convertir la serie en una transformada, aparece, de contrabando, el concepto de *infinitesimal*.

Aquí está el meollo del asunto. En la base de la heurística de la ingeniería está la imagen y la noción de *infinitesimal,* lo que es incompatible con el análisis tradicional. Nosotros planteamos claramente que no es posible conciliar la heurística con el rigor, porque no se puede convertir la serie trigonométrica en transformada integral, ya que la serie trigonométrica es periódica y la función cuya transformada se va a calcular no es periódica. Por consiguiente, en el modelo clásico, el rodeo que hacen los matemáticos es inevitable.

¿En que modelo de análisis se puede producir esta compatibilidad? La respuesta a las inquietudes de los ingenieros nos han conducido a hacer uso de un nuevo modelo de cálculo, que se ajusta perfectamente tanto a las aspiraciones de los ingenieros como a los requerimientos mínimos de la consistencia y del rigor de los matemáticos. Nuestra investigación se ha concentrado en retomar la pista dada por la heurística de la ingeniería, donde la serie de Fourier, mediante un absurdo pero eficaz lenguaje infinitesimalista, se convierte en integral de Fourier.

Dicho modelo hará preciso este lenguaje, y será tan viable, que garantizará todas las conversiones posibles entre la transformada discreta de Fourier, la serie de Fourier y la transformada integral de Fourier, ya que en tal modelo, como demostraremos, transformada de Fourier sólo hay una. En particular, la aspiración de los ingenieros de que, «si el período se hace infinito, la frecuencia se vuelve una diferencial y el producto del enésimo armónico con la diferencial se convierte en las variable frecuencial» es en nuestro modelo una verdad, tan sencilla de verificar, que parece un juego de niños. Nuestro modelo tiene una ventaja adicional. Al momento de los cómputos numéricos, funciona exactamente como lo hacen todos los computadores.

13 G. P. Tolstov, *Fourier Series,* Dover Pub. Inc., New York, 1962, pág. 181.

estudiantes de ingeniería, estas demostraciones están lejos del alcance del aula de clase. Al respecto, es interesante mencionar algunos textos[17] en los que la demostración rigurosa va precedida de una heurística similar a la de los ingenieros, para visualizar la paradoja. Pero en realidad, no es el paso intermedio de la serie a la transformada lo que se ha demostrado, sino los teoremas de existencia de la transformada de Fourier, que es algo diferente. Pues es en el momento en que se hace el intento de convertir la serie en una transformada, aparece, de contrabando, el elemento de impropiedad.

He aquí el meollo del asunto. En la base de la heurística de la ingeniería está la intuición y la noción de instantaneidad, lo que es incompatible con el análisis tradicional. Nosotros pensamos, además, que no se puede conciliar la heurística con el rigor, porque no se puede convertir la serie trigonométrica en transformada integral, ya que la serie trigonométrica es periódica y la función cuya transformada se va a calcular no es periódica. Por consiguiente, en el modo clásico, el rodeo que hacen los matemáticos es inevitable.

En qué modelo de análisis se puede producir esta conquista, que dé respuesta a las inquietudes de los ingenieros, nos han conducido al uso de un nuevo modelo de cálculo, que se ajusta tanto al espíritu de las aproximaciones de los ingenieros como a los requerimientos lógicos de la consistencia y del rigor de los matemáticos. Nuestra investigación se ha concentrado en retomar la paradoja dada por la heurística de la ingeniería, donde la serie de Fourier, mediante un método para calcular la integral infinitesimal, se convierte en integral de Fourier.

Dicho modelo hará posible este lenguaje, y con los signos, incorporamos todas las convenciones posibles entre la trigonometría de la serie de Fourier, la serie de Fourier y la transformada integral de Fourier, ya que en tal modelo, como comprobaremos, transformada de Fourier sólo hay una. Por otra parte, la separación de los ingenieros de [illegible] la mecánica se vuelve una diferencia [illegible] el producto del cálculo asociado con la dimensional se convierte en la variable [illegible] en nuestro modelo una verdad, tan sencilla de verificar que parece un juego de niños. Nuestro modelo tiene una ventaja adicional. Al contrario de los métodos numéricos existentes [illegible] todos los [illegible].

17 G. P. Tolstov, Fourier Series. Dover Publications, New York, 1962, pág. 187.

Capítulo 7

# El dominio de la señal

En el análisis de Fourier, poca importancia se le presta al estudio del dominio discreto y de las variables de tales dominios. Nuestra construcción, en cambio, se concentra en los dominios discretos temporales y frecuenciales y sus respectivas variables; mucho después, en el siguiente capítulo, veremos la representación funcional de la señal en tales dominios, donde mostraremos que el concepto de transformada de Fourier se origina en la propia transformación de los dominios y hereda, en cierta medida, las propiedades de intercambio entre el dominio discreto temporal y el frecuencial. Una vez se hace el tránsito al dominio continuo, o mejor, se produce la conversión al cálculo infinitesimal, de modo inevitable la *transformada discreta* se convierte en la *serie de Fourier,* y luego en *transformada integral,* quedando al descubierto el carácter unitario de la teoría de Fourier.

## El dominio discreto temporal

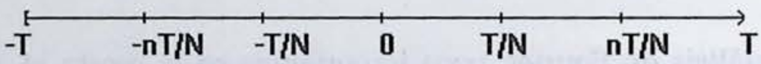
Dado el número real finito $T > 0$ y $N$ entero finito, llamaremos *dominio temporal –o dominio espacial–* al conjunto

$$\left\{\frac{nT}{N}\right\}=\left\{-\frac{NT}{N},\frac{(N-1)T}{N},\ldots,-\frac{2T}{N},-\frac{T}{N},0,\frac{T}{N},\frac{2T}{N},\ldots,\frac{(N-1)T}{N}\right\}$$

donde $-N \leq n < N$. Este es el *dominio discreto finito* de $2N$ elementos. Como el dominio está constituido por una sucesión de $2N$ cantidades y tal sucesión no es otra cosa que una variable, la llamaremos *variable temporal t,*

$$t=\{t_n\}=\left\{\frac{nT}{N}\right\}$$

En otras palabras, el dominio es la propia variable temporal que recorre cada una de las $2N$ *posiciones temporales* o *muestras*, a medida que $n$ asume $2N$ valores enteros, donde cada $t_n$ se le llama la *muestra* de la variable $t$ en la posición $n$. Una imagen gráfica del dominio temporal es la siguiente. El segmento de recta $[-T, T]$ se divide en $2N$ intervalos, cada uno de ellos de longitud $T/N$, de modo que el dominio temporal consiste en $2N$ muestras, desde $-T$ hasta $T$, excluida esta última muestra. La gráfica que se usa es




Algunos autores llaman a la cantidad $T$, la *duración* o, mucho mejor, el *período* del intervalo. En su momento veremos que el calificativo *temporal*, o *espacial* u otro cualquiera, depende del fenómeno representado, de acuerdo a que este se encuentre posicionado en el tiempo, en el espacio, o en cualquier otra entidad susceptible de cuantificarse y dotarse de unidad de medida. Siguiendo la notación de los ingenieros, nosotros preferiremos la denominación de *temporal* para el dominio, dado que es unidimensional. Pero una vez que consideremos el dominio bidimensional, el calificativo de *espacial*, es mucho más conveniente. Físicamente, la representación temporal está asociada al sonido, al ruido, a la voz humana; la espacial, al video, a las imágenes y a las gráficas.

Según la convención, en el dominio temporal, $T/N$ corresponde a la primera muestra en el tiempo positivo, $2T/N$ a la segunda, etc. Y así para las posiciones negativas. Por razones de conveniencia, la última muestra $T$ está excluida. A veces la variable $t$ está comprendida en el rango $0 \leq n < N$. En este caso, que estudiaremos como tema aparte, cada dominio tendrá $N$ muestras. Nosotros, siguiendo a los ingenieros, hemos introducido los dominios con posiciones negativas, positivas y cero, aunque la notación se hace más engorrosa. El número real $T/N$ siempre designa una fracción de la *unidad* de la entidad adecuada; si ésta es el tiempo, $T/N$ está medida en fracciones de segundo, horas, etc; si es el espacio, $T/N$ es una fracción de cm, $cm^2$, etc. Por razones obvias, a la cantidad $T/N$ se le denomina *intervalo de muestreo*, dado que es la primera muestra. Algunos llaman el intervalo de muestreo *resolución en tiempo*, aunque esta denominación es menos frecuente.

## EL DOMINIO DISCRETO FRECUENCIAL

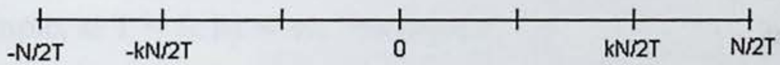
Todo dominio temporal conlleva otro dominio indisolublemente ligado a él, del siguiente modo. Sea $\{nT/N\}$ un dominio temporal o espacial. Desde el punto de vista aritmético, si $2T$ cubre la totalidad de las $2N$ muestras; su inverso $1/2T$ es «el número de veces que $2T$ cabe en la unidad». Así, $1/2T$ se convierte en una fracción de la nueva *unidad de medida*, universalmente denominada *hertz.* Como hay $2N$ muestras temporales o espaciales, la fracción $1/2T$ genera el nuevo dominio

$$\left\{\frac{k}{2T}\right\}=\left\{-\frac{N}{2T},-\frac{N-1}{2T},\ldots,-\frac{2}{2T},-\frac{1}{2T},0,\frac{1}{2T},\frac{2}{2T},\ldots,\frac{N-1}{2T}\right\}$$

donde $-N \leq k < N$. Este se denomina *dominio frecuencial* y, de la misma forma que la variable temporal, dicho dominio se puede identificar con la *variable frecuencial f* como sucesión de $2N$ valores

$$f=\{f_k\}=\left\{\frac{k}{2T}\right\}$$

La gráfica correspondiente es




En resumen, siempre que tengamos $T > 0$ y $N$ entero, podemos construir los *dominios asociados,*

$$\left\{\frac{nT}{N}\right\}\Leftrightarrow\left\{\frac{k}{2T}\right\}$$

cuyas variables correspondientes están relacionadas mediante la relación

$$t_n=\frac{nT}{N}$$

$$f_k=\frac{k}{2T}$$

$$t_n=\frac{nk}{2N}\frac{1}{f_k}$$

siempre que la frecuencia no sea cero. Esta es la verdadera relación inversa entre la frecuencia y el tiempo en el dominio discreto. Así, por ejemplo, en un dominio de 200 muestras ($N = 100$), la relación entre la posición octava negativa temporal y onceaba positiva frecuencial es $t_{-8} = -0.44\,\dfrac{1}{f_{11}}$. Esto quiere decir que si la onceaba posición frecuencial está a una altura, digamos, de 5000 hertz, necesariamente hay que medir 220 segundos negativos para localizar la octava muestra negativa.

En ingeniería, a la cantidad $N/2T$ se la llama *frecuencia de muestreo* y corresponde a la *frecuencia más alta* que alcanza la variable $f$. La primera posición frecuencial $1/2T$ se llama *resolución de frecuencia* o mejor aún, *resolución en frecuencia*. Ambas cantidades se miden en hertz. Así, en el ejemplo de arriba, supongamos que las 200 muestras temporales se escojen durante cinco segundos ($N = 100$); el intervalo de muestreo será 0.05 segundos, mientras que la resolución en frecuencia es de 0.1 hertz y la frecuencia de muestreo será de 10 hertz. Los estudiantes, acostumbrados al uso del dominio temporal, sienten una gran incomodidad ante el dominio frecuencial. Como veremos, este último tiene ventajas teóricas, prácticas y didácticas, por lo que vale la pena ejercitarse en su uso.

Ejemplo

Se requiere de un intervalo de muestreo de una centésima de segundo con 4 posiciones temporales. Por tanto, $N = 2$, $T/N = 1/100$, y el dominio temporal es $\{n/100\} = \{-1/50, -1/100, 0, 1/100\}$, donde $-2 \leq n \leq 1$. La frecuencia de muestreo será $2/2T = 50$ hertz. La resolución en frecuencia es $1/2T = 25$ hertz. El dominio frecuencial es $\{25k\} = \{-50, -25, 0, 25\}$, donde $-2 \leq k \leq 1$. El par de dominios asociados es

$$\left\{-\frac{1}{50}, -\frac{1}{100}, 0, \frac{1}{100}\right\} \Leftrightarrow \{-50, -25, 0, 25\}$$

Ejemplo

El par de dominios asociados más pequeño y distinto de $\{0\}$ ocurre cuando $2N = 2$. Dado que el intervalo de muestreo es $T/N = 1$ y la resolución de frecuencia es $1/2T = 1/2$; obtenemos los dos dominios

Ejemplo

$$\{-1,0\} \Leftrightarrow \left\{-\frac{1}{2},0\right\}$$

Un dominio de uso frecuente en ingeniería se obtiene cuando el intervalo de muestreo es la unidad, o sea $T/N = 1$. Como el intervalo de muestreo es un segundo, la frecuencia de muestreo es $1/2T = 1/(2N)$ hertz. El dominio temporal es $\{n\}$ y el frecuencial es $\{k/2N\}$, o sea

$$\{n\} \Leftrightarrow \left\{\frac{k}{2N}\right\}$$

Ejemplo

Con las siguientes instrucciones de *Mathematica,* se obtienen dominios temporales y frecuenciales.

```
Clear[temporal,frecuencial];
temporal[T_,M_]:=N[Table[n T/M,{n,-M,M-1}],2];
frecuencial[T_,M_]:=N[Table[k 1/2T,{k,-M,M-1}],2];
```

Por ejemplo, si T = 5, M = 40; obtenemos:

In[1]:=temporal[5,40]

Out[1]=

{-5.,-4.88,-4.75,-4.63,-4.5,-4.38,-4.25,-4.13,-4.,-3.88,-3.75,-3.63,-3.5,-3.38,-3.25,-3.13,-3.,-2.88,-2.75,-2.63,-2.5,-2.38,-2.25,-2.13,-2.,-1.88,-1.75,-1.63,-1.5,-1.38,-1.25,-1.13,-1.,-0.875,-0.75,-0.625,-0.5,-0.375,-0.25,-0.125,0,0.125,0.25,0.375,0.5,0.625,0.75,0.875,1.,1.13,1.25,1.38,1.5,1.63,1.75,1.88,2.,2.13,2.25,2.38,2.5,2.63,2.75,2.88,3.,3.13,3.25,3.38,3.5,3.63,3.75,3.88,4.,4.13,4.25,4.38,4.5,4.63,4.75,4.88}.

In[2]:=

frecuencial[5,40]

Out[2]=

{-4.,-3.9,-3.8,-3.7,-3.6,-3.5,-3.4,-3.3,-3.2,-3.1,-3.,-2.9,-2.8,-2.7,-2.6,-2.5,-2.4,-2.3,-2.2,-2.1,-2.,-1.9,-1.8,-1.7,-1.6,-1.5,-1.4,-1.3,-1.2,-1.1,-1.,-0.9,-0.8,-0.7,-0.6,-0.5,-0.4,-0.3,-0.2,-0.1,0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8, 0.9,1.,1.1,1.2,1.3,1.4,1.5,1.6,1.7,1.8,1.9,2.,2.1,2.2,2.3,2.4,2.5,2.6,2.7, 2.8,2.9,3.,3.1,3.2,3.3,3.4,3.5,3.6,3.7,3.8,3.9}

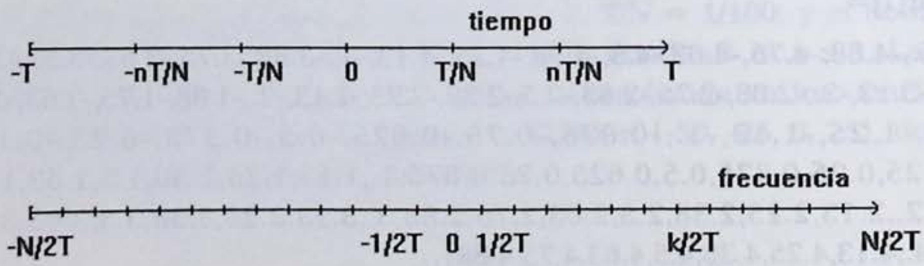
El intervalo de muestreo es de 0.125 segundos, mientras que la resolución en frecuencia es 0.1 hertz y la frecuencia de muestreo es de 4 hertz. Observemos que podemos indagar por la posición de una muestra, a partir de cualquier altura de frecuencia. Por ejemplo, queremos saber a cuantos segundos se ubica la muestra quinta negativa, dada la frecuencia en la posición 37, cuya altura es de 3.7 hertz. Por la relación tiempo-frecuencia, tenemos que

$$t_{-5} = \frac{(-5)(37)}{2\times 40}\,\frac{1}{f_{37}} = -0.625$$

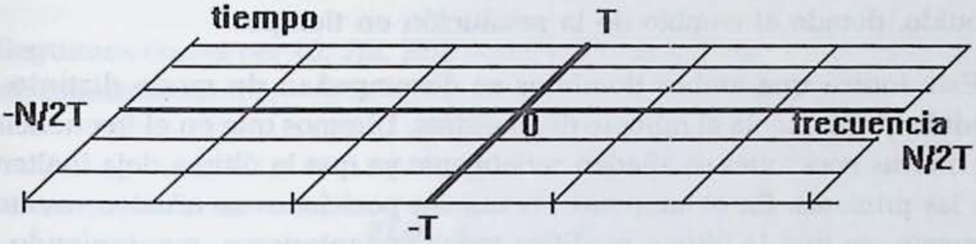
que corresponde al valor buscado.

## EL MODELO TIEMPO-FRECUENCIA

Tradicionalmente, las gráficas del dominio discreto temporal y frecuencial e dibujan por separado; de un lado, el dominio temporal a la izquierda o arriba; de otro lado, el dominio frecuencial a la derecha o abajo, como en la figura. Esta separación es paradigmática, pues corresponde a la visión de que una cosa es el fenómeno en el tiempo y otra es el fenómeno en la frecuencia (si es que esto último tiene significado).




Nuestra representación de ambos dominios es una sóla, y refleja el modelo unitario que nos proponemos construir, en el que el fenómeno se representa de modo indistinto, tanto en el tiempo, como en la frecuencia, siendo a veces más útil esta última representación que la primera. Como hemos visto, ambas variables están relacionadas, la una *como inversa* con la otra, lo que permite dibujar la siguiente figura:




Obsérvese que hemos fusionado las dos gráficas del dominio de tiempo y la frecuencia, en un sólo dominio bidimensional, que son los dos ejes *tiempo- frecuencia.* Así mismo, hemos colocado las posiciones temporales –o espaciales– en el eje vertical, en segundo plano, mientras que las posiciones frecuenciales están en primer plano, en el eje horizontal, para destacar el predominio de la representación en frecuencia. Por una razón visual, se han dibujado trazos continuos, aunque los dominios respectivos están constituidos por los puntos de intersección de las líneas en la gráfica.

## DOMINIO DE ALTA RESOLUCIÓN

Los términos «resolución en tiempo» y «resolución en frecuencia» nos indican que es necesario profundizar en la naturaleza de los dominios discretos temporales y frecuenciales y de sus relaciones recíprocas. Vamos a partir de la suposición de que sobre tales dominios se representan fenómenos, de los cuales se extraen observaciones o muestras, que de algun modo nos dan alguna información del fenómeno. Admitamos que hemos obtenido una serie de ellas, por ejemplo, $2N$ muestras. ¿Qué modificación se introducen en los dominios si los alteramos con una o más observaciones?

En el dominio frecuencial $\{k/2T\}$ tenemos $2N$ posiciones, donde cada una de las posiciciones frecuenciales está dada por $-N\text{-}1 \leq k < N$. ¿Que pasa si añadimos una muestra? Es evidente que el dominio frecuencial se modifica únicamente en el alcance de k, cuyo nuevo rango será $-(N+1) \leq k < N+1$. Al dominio se le añaden dos frecuencias, una a la izquierda y otra a la derecha, que son $f_{-N}, f_N$. No es tan evidente lo que ocurre en el dominio temporal. El período $2T$ permanece inalterable, o sea que las modificaciones ocurren dentro del intervalo $[-T, T]$. Ya que hay $2(N+1)$ muestras, el intervalo de muestreo o resolución en tiempo será $T/(N+1)$. El nuevo dominio temporal es $\{nT/(N+1)\}$. Las $2(N+1)$ posiciones temporales se han redistribuído, debido al cambio de la resolución en tiempo.

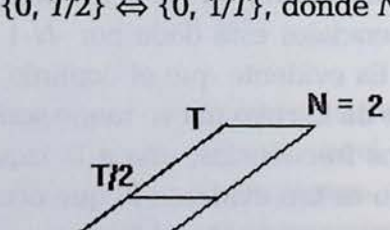
Esto indica que ambos dominios se desempeñan de modo distinto, a medida que aumenta el número de muestras. Diremos que en el frecuencial, las nuevas posiciones se añaden *serialmente* ya que la última deja inalterable las primeras. En el temporal, las nuevas posiciones se añaden *resolutivamente*, ya que la última modifica todas las anteriores, manteniendo el dominio fijo. Esto lo indicaremos diciendo que el dominio temporal se comporta de modo *resolutivo*.

La consecuencia es inmediata. Si añadimos un número muy grande de muestras, o sea, si hacemos $N$ muy grande, como $T$ es fijo, la frecuencia de muestreo $N/2T$ se hará muy grande, sin afectar el dominio de la frecuencia; en cambio, la resolución en tiempo $T/N$ se hará extremadamente pequeña, para que en el intervalo $[-T, T]$ puedan caber $2N$ muestras. Bajo estas condiciones, el dominio temporal se convierte en un dominio de alta resolución.

Hemos llegado entonces a la frontera de la relación entre los dominios temporal y frecuencial. La siguiente secuencia gráfica muestra el par de dominios asociados cuando se le añade un número muy alto de posiciones temporales, o sea, cuando el dominio temporal es de alta resolución. Obsérvese que en el dominio temporal, el período $2T$ siempre está fijo y las posiciones de la variable $t = nT/N$ van llenando el intervalo $[-T, T]$. En el dominio frecuencial, las posiciones de la variable $f = k/2T$ simplemente se mueven hacia las altas frecuencias. Para simplificar, sólo escribimos la parte positiva de los dominios asociados y dibujamos la parte positiva de la gráfica bidimensional.

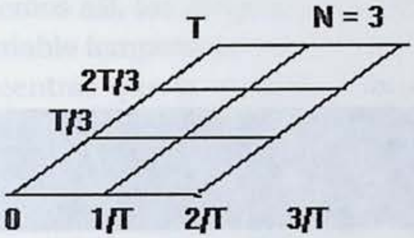
*Gráfica 1*

Iniciamos con el par $\{0, T/2\} \Leftrightarrow \{0, 1/T\}$, donde $N = 2$



*Gráfica 2*

Seguimos con el par $\{0, T/3, 2T/3\} \Leftrightarrow \{0, 1/T, 2/T\}$, para $N = 3$. El intervalo de muestreo es $T/3$.

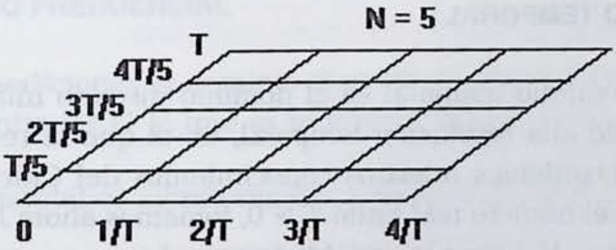



*Gráfica 3*

Hacemos $N = 5$. Obtenemos el par asociado

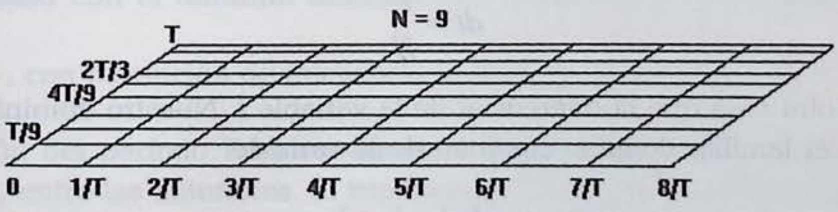
$\{0, T/5, 2T/5, 3T/5, 4T/5\} \Leftrightarrow \{0, 1/T, 2/T, 3/T, 4/T\}$

Nótese que $T$ se mantiene fijo.



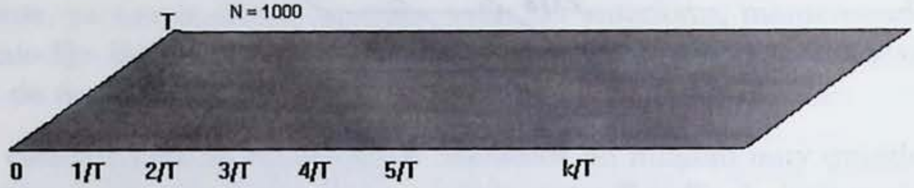

*Gráfica 4*

Hacemos $N = 9$. Mientras que en el dominio temporal se ha subdividido el intervalo fijo $[0,T]$ en 9 posiciones temporales, las posiciones frecuenciales se han movido hacia la derecha.




*Gráfica 6*

Hacemos N un entero muy grande, por ejemplo, $N = 1000$. El intervalo de muestreo *T*/256 es de tamaño inferior a un *pixel* del monitor del computador. La gráfica del computador sugiere que, en el dominio temporal, se ha llenado el intervalo continuo [0, *T*]. Por el lado del dominio frecuencial, la variable *f* recorre un número muy grande de posiciones *k*/*T*,




Este tipo de representación, que hemos llamado *alta resolución temporal*, aunque sigue siendo propia del dominio discreto, es el paso previo al dominio continuo, como vamos a ver.

## EL CONTINUO TEMPORAL

El dominio continuo temporal es el dominio discreto infinitesimal, esto es, el dominio de alta resolución temporal, en el que la resolución es un infinitesimal. Recordemos nuestros conocimientos del Cálculo con infinitesimales. Dado el número real finito $T > 0$, tomamos ahora $N$ entero infinito, donde $-N \leq n < N$. Como la variable temporal es

$$t = \{t_n\} = \left\{\frac{nT}{N}\right\}$$

el infinitesimal

$$dt = \frac{T}{N}$$

no es otra cosa que la diferencial de la variable *t*. Nuestro dominio temporal es el familiar dominio *continuo* de la variable

$$t = \{t_n\} = \{ndt\}$$

El infinitesimal *dt* es el *intervalo de muestreo* o *resolución en tiempo*, que mencionamos con anterioridad. En otras palabras, el intervalo de muestreo y por tanto, la resolución en tiempo, es infinitesimal. Ya que la cantidad $f_0 = \dfrac{1}{2T}$ sigue siendo finita, tenemos así, los dominios asociados $\{ndt\} \Leftrightarrow \{kf_0\}$. Lo notorio ahora es que la variable temporal asume sus valores en *el dominio continuo* limitado [-*T*, *T*], mientras que la variable frecuencial sigue asumiendo valores en el dominio discreto, aunque la resolución de frecuencia *N*/2*T* es infinita. Podríamos reescribir el par de dominios asociados en la forma

$$[-T, T] \Leftrightarrow \left\{\frac{k}{2T}\right\}$$

que sugiere una asociacion entre el dominio continuo limitado y el discreto ilimitado.

## EL CONTINUO FRECUENCIAL

¿Bajo qué condiciones el dominio discreto frecuencial puede convertirse en dominio continuo? O lo que es lo mismo, ¿bajo qué condiciones la frecuencia fundamental es infinitesimal? La frecuencia fundamental $f_0 = \dfrac{1}{2T}$ es finita porque la cantidad *T* es finita. De modo que será infinitesimal, si la cantidad *T* se hace infinita. Veámoslo paso a paso. Dupliquemos el intervalo limitado [-*T*, *T*] y analicemos las alteraciones que se producen cuando el dominio temporal es [-2*T*, 2*T*]. Como el intervalo de muestreo es el infinitesimal *dt* = T/N, para mantenerlo invariable, tenemos que duplicar el número de muestras. Ahora tenemos 4*N* muestras, con intervalo de muestreo 2*T*/2*N* = *T*/*N*. ¿Qué pasa con el dominio frencuencial? Obviamente, dicho dominio es $\left\{k\dfrac{f_0}{2}\right\}$, con resolución de frecuencia invariable, pues2*N*/4*T* = *N*/2*T*. La duplicación del período *T* ha conducido a que se intercalen 2*N* frecuencias nuevas, entre las anteriores. Si triplicamos el período *T* manteniendo fijo el intervalo de muestreo, se intercala el triple de frecuencias. Sea ahora *M* entero infinito. El período del nuevo intervalo es *MT*. El número de muestras temporales será $2MN$, por lo que el intervalo de muestreo se mantiene en $MT/MN = T/N = dt$.

En el dominio de la frecuencia, las cosas han cambiado radicalmente. Como $M$ es entero infinito, la resolución de frecuencia $1/MT$ es infinitesimal!. Recordemos que el dominio es la sucesión de valores

$$f=\left\{\frac{k}{2MT}\right\}=\left\{-\frac{MN}{2MT},-\frac{M(N-1)}{2MT},\dots,-\frac{2M}{2MT},-\frac{M}{2MT},0,\frac{M}{2MT},\frac{2M}{2MT},\dots,\frac{M(N-1)}{2MT}\right\}$$

¿No es esta acaso la definición de la variable $f$? La diferencial es la sucesión constante $df=\left\{\frac{1}{2T}\right\}$ y esta es precisamente la resolución en frecuencia infinitesimal, por lo que $f$ es una variable continua. Por tanto, la variable puede representarse como la sucesión $f = \{kdf\}$. El dominio frecuencial se ha convertido en un dominio continuo. Tanto el intervalo de muestreo $dt$ omo la resolución en frecuencia $df$ son ambos infinitesimales. Los domi-os asociados $\{ndt\}\Leftrightarrow\{kdf\}$ son ambos continuos.

## CONVERSIONES DEL DOMINIO

Dado que estas formas de desplegarse el dominio discreto en su conversión al continuo son cruciales para el análisis de Fourier que emprenderemos, volvemos sobre ellas nuevamente, para resumir las formas de conversión. Por el sólo hecho de considerar inmersos a $T$ y $N$ en un modelo de cálculo infinitesimal, los dominios temporales y frecuenciales discretos finitos se despliegan en las siguientes formas. Si $T$ es finito y $N$ finito, tanto el dominio temporal como el dominio frecuencial son discretos finitos

$$\left\{\frac{nT}{N}\right\}\Leftrightarrow\left\{\frac{k}{2T}\right\}$$

Si $T$ es finito y $N$ entero infinito, el dominio temporal es continuo, mientras que el dominio frecuencial es discreto,

$$\{ndt\} \Leftrightarrow \left\{ \frac{k}{2T} \right\}$$

Si $T$ es infinito y $N$ infinito mucho mayor que $T$, tanto el dominio temporal como el dominio frecuencial son dominios continuos, $\{ndt\} \Leftrightarrow \{kdf\}$.

Capítulo 8

# Componentes armónicas y espectrales

Vamos a detenernos en el estudio de las funciones sobre dominio discreto y de la que es quizá la función más importante en el análisis de Fourier: *la sinusoide real discreta* y *la sinusoide compleja discreta,* también llamada *componente armónica o espectral*. En efecto, ella da orígen a una familia de funciones que cumple con las relaciones de *ortogonalidad,* que la hacen candidata excepcional para generar la totalidad de las funciones periódicas discretas sobre un dominio dado. A esto se suma que tales funciones son formas de onda de cierto tipo de *señales* en sistemas de comunicación –por ejemplo, *osciladores armónicos*– donde expresan adecuadamente la 'respuesta interna' del sistema. En otras palabras, las sinusoides son funciones que representan señales físicas.

La cuestión se vuelve más interesante cuando se considera la exponencial compleja, que cubre a las sinusoides complejas periódicas. En este libro[1] hemos visto que la función exponencial compleja $\exp(j2\pi tf)$ aparece tanto en la *serie compleja de Fourier*, cuando $f = f_0$ es la frecuencia fundamental, como en la *transformada de Fourier*, cuando $f$ es variable de dominio continuo. Dicha función también se encuentra en la *transformada discreta de Fourier,* siempre que $t = n$ y $f = k$ sean enteros. Esta triple aparición no es casual y hay una abundante bibliografía donde se muestra la íntima relación entre unas y otras transformadas. Nosotros demostraremos que son una misma cosa.

1 Capítulo V. *Análisis de Fourier, a la manera tradicional.*

## FUNCIONES SOBRE EL DOMINIO DISCRETO

Vamos a abordar el estudio completo de las funciones sobre el dominio discreto tanto temporal como frecuencial y, muy especialmente, la conversión que ocurre con las sinusoides complejas, cuando introducimos infinitesimales. Recordemos que hemos construido dos dominios. El primero es el *dominio temporal –o espacial–* que se obtiene con un número real finito $T > 0$ y $N$ entero finito:

$$\left\{\frac{nT}{N}\right\}=\left\{-\frac{NT}{N},\frac{(N-1)T}{N},\ldots,-\frac{2T}{N},-\frac{T}{N},0,\frac{T}{N},\frac{2T}{N},\ldots,\frac{(N-1)T}{N}\right\}$$

donde $-N \leq n < N$. Este es un dominio discreto finito de $2N$ elementos. El segundo es el dominio frecuencial asociado,

$$\left\{\frac{k}{2T}\right\}=\left\{-\frac{N}{2T},-\frac{N-1}{2T},\ldots,-\frac{2}{2T},-\frac{1}{2T},0,\frac{1}{2T},\frac{2}{2T},\ldots,\frac{N-1}{2T}\right\}$$

con $-N \leq k < N$. O sea, tenemos dos dominios con sus respectivas variables de tiempo y frecuencia,

$$\left\{\frac{nT}{N}\right\}\Leftrightarrow\left\{\frac{k}{2T}\right\}$$

$$t_n=\frac{nT}{N}$$

$$f_k=\frac{k}{2T}$$

Las reglas que siempre seguiremos para la notación de funciones son las siguientes: aquellas cuya variable es la *variable tiempo* y aquellas cuya variable es la *variable frecuencia*. Las letras minúsculas *x, y, z,* se reservan como letras de función sobre el dominio temporal, mientras que las letras mayúsculas *X, Y, Z,* se reservan como letras de función sobre el dominio frecuencial.

Lo usual es que las letras *t* y *f* se reserven para las variables temporales y frecuenciales de dominios contínuos y se coloquen entre paréntesis redondos como *(t), (f)*, mientras que las letras *n, k* se reserven para las variables temporales y frecuenciales de dominio discreto y van entre corchetes cuadrados como *[n], [k]*. Cuando se introduzcan infinitesimales, unificaremos la notación.

## PARES TRANSFORMADOS

Con la notación acordada, una función x sobre el dominio discreto temporal {n*T/N*} asume los 2*N* valores $x[n]=x\left[\frac{nT}{N}\right]$, que constituyen su *forma de onda*. Dichas funciones se suman y multiplican por constantes de la manera usual, dotanto al conjunto de todas éllas, de una estructura de espacio vectorial.

Una función *X* sobre el dominio discreto frecuencial {*k*/2T} asume los 2N valores $X[k]=X\left[\frac{k}{2T}\right]$, que es el *espectro de frecuencia*. De modo similar, todas éllas constituyen un espacio vectorial con la suma y multiplicación usual por una constante. Para seguir con la tradición, siempre supondremos que los valores de las funciones son números complejos, y a cada uno de ellos, mientras no haya confusión, se les denominan *muestras* del dominio respectivo.

El problema fundamental del *análisis discreto de Fourier* es asociarle de modo biunívoco, a cada forma de onda un espectro de frecuencia, de modo que siempre exista un *par transformado*

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] \Leftrightarrow X\left[\frac{k}{2T}\right]$$

Donde una de ellas se denomina la *transformada discreta de Fourier* de la otra. Nuestras investigaciones se proponen descifrar la naturaleza de dicha transformación, primero en términos discretos, y luego a escala infinitesimal, así como las reglas que la rigen. A continuación, brindaremos algunos ejemplos de representación funcional en dominios de tiempo y frecuencia, con valores reales o complejos. El símbolo *j* siempre denota la unidad imaginaria $j^2 = -1$.

Ejemplo

En el par de dominios asociados. {-1, 0} $\Leftrightarrow$ {-1/2, 0} podemos definir

$$z[-1] = j$$
$$z[0] = -1 + 2j$$

o también

$$Y\left[-\frac{1}{2}\right] = 3 - \frac{1}{3}j$$
$$Y[0] = 5$$

Ejemplo

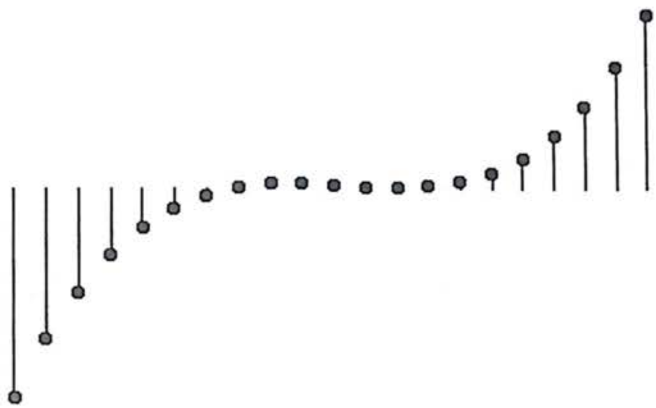
Supongamos que el par de dominios asociados es {-1/50, -1/100, 0, 1/100} $\Leftrightarrow$ {-50, -25, 0, 25}. Dada una función x de dominio temporal cuyos valores son

$$x\left[-\frac{1}{50}\right] = 3 - 2j$$
$$x\left[-\frac{1}{100}\right] = 5$$
$$x[0] = 1 + j$$
$$x\left[\frac{1}{100}\right] = \frac{2}{3} + 3j$$

se considerará impropio usar la letra de función X para una definición arbitraria sobre el dominio frecuencial, ya que X es una *letra reservada* para el espectro de frecuencia de x en el dominio de la frecuencia y éste aún no lo sabemos.

## GRÁFICA DE FUNCIONES DISCRETAS

En casi todos los textos se ha uniformizado la gráfica para las funciones de dominio discreto. Supongamos que *x[n]* es una de ellas. Consiste en unir el valor *n* de la abcisa con el valor *x[n]* de la ordenada mediante un segmento de recta y, en algunas ocasiones, rellenando con un círculo la ordenada, como en la figura.



## PERIODICIDAD DISCRETA

En la teoría tradicional de las funciones reales de variable real, una función x*(t)* es periódica de período *2T* si, para todo real ordinario *t* se cumple $x(t+2T)=x(t)$. Es sencillo verificar que si *2T* es período, entonces *2nT* también lo será y por consiguiente se cumple $x(t+2nT)=x(t)$ para todo *n* entero ordinario, positivo o negativo. En caso que exista un real ordinario *P* que sea período positivo y sea el menor de todos los períodos positivos, *P* se denomina *período fundamental*. La función constante, por ejemplo, es periódica de cualquier período y su período fundamental es cero. Es cierto que toda función continua periódica que no sea la función constante posee período fundamental positivo, pero no es sencilla la demostración.

Veamos ahora el concepto de periodicidad en el dominio discreto. Vamos a concentrarnos en los familiares dominios discretos finitos, $\{nT/N\}$, $\{k/2T\}$. Extenderemos periódicamente cada una de las funciones funciones x*[nT/N]*, X*[k/2T]* así,

$$x\left[\frac{nT}{N}+2T\right]=x\left[(n+2n)\frac{T}{N}\right]=x\left[(n+2n)\frac{T}{N}\right]$$

$$X\left[\frac{k}{2T}+\frac{N}{T}\right]=X\left[\frac{k}{2T}\right]=x\left[(k+2n)\frac{N}{2t}\right]$$

La primera función es de período $2T$ en el dominio del tiempo, y la segunda, de período $N/T$ en el dominio de la frecuencia. Como $T$ es fijo, se acostumbra decir en general que las funciones de dominio discreto *son periódicas de período 2N,* esto es, que se repiten cada $2N$ valores, queriendo decir realmente que los períodos son $2T$ y $N/T$, respectivamente.

## LA EXPONENCIAL COMPLEJA PERIÓDICA

La componente fundamental del análisis de Fourier es la *función exponencial compleja* o también *sinusoide compleja*, que en casi todos los libros de texto aparece como la expresión de la forma

$$\exp(j2\pi tf)$$

Dicha función depende de dos parámetros $t$ y $f$, donde $j$ es la conocida unidad imaginaria, $t$ designa la variable temporal del dominio continuo, y $f$ la variable frecuencial del dominio continuo. Ambos parámetros hacen de la exponencial compleja una *familia de funciones*, de acuerdo a los valores que asuman $t$ y $f$. Obviamente, los valores de la función son, en general, número complejos. La sinusoide compleja se desdobla en un par de funciones de valores reales debido a la *fórmula de Euler*,

$$\exp(j2\pi tf) = \cos(2\pi ft) + jsen(2\pi ft)$$

¿Cuales son las relaciones entre $t$ y $f$ que hacen periódica a la sinusoide en su dominio? Siempre que $f_0 = \dfrac{1}{2T}$ sea una frecuencia fija que llamaremos *fundamental*, la periodicidad en el dominio temporal de la función $\exp(j2\pi tf_0)$ es un hecho muy conocido. Es suficiente tomar el dominio $[-T, T]$, y el período de la sinusoide compleja será $2T$, ya que

$$\exp\bigl(j2\pi(t+2T)f_0\bigr) = \exp\bigl(j2\pi t\, f_0 + j2\pi\bigr) = \exp\bigl(j2\pi t\, f_0\bigr)$$

Si fijamos el período $2T$ la frecuencia fundamental no puede ser otra. Supongamos que hay una frecuencia distinta de cero $f = F$ para la cual la sinusoide de dominio temporal es periódica con un período $2T$. Entonces

$$\begin{aligned} &\exp(j2\pi(t+2T)F) = \exp(j2\pi tF) \\ &= \exp(j2\pi tF)\exp(j2\pi 2TF) \end{aligned}$$

cancelando a ambos lados y teniendo en cuenta la identidad

$$\exp(j2\pi 2TF) = 1 \Rightarrow 2TF = k \times 1 \Rightarrow F = f_0 = \frac{1}{2T}$$

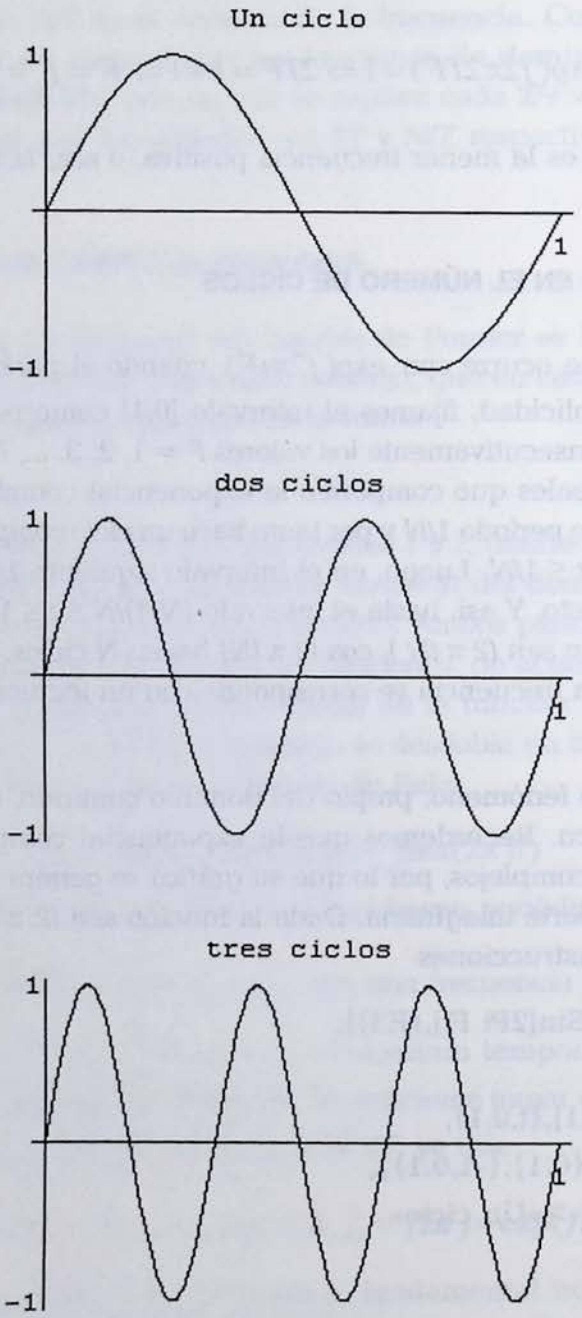
ya que $k = 1$ es la menor frecuencia positiva, o sea, la fundamental.

## INCREMENTO EN EL NÚMERO DE CICLOS

Veamos lo que ocurre con $\exp(j2\pi tF)$ cuando el parámetro $F$ se incrementa. Por simplicidad, fijamos el intervalo [0,1] como período y hacemos que $F$ asuma consecutivamente los valores $F = 1, 2, 3, ..., N, ...$ Cada una de las sinusoides reales que componen la exponencial compleja, *sen (2 π tN ), cos (2 π tN )* tiene período $1/N$ y por tanto hace un *ciclo completo* en el intervalo continuo $0 \leq t \leq 1/N$. Luego, en el intervalo siguiente $1/N \leq t \leq 2/N$, hará otro ciclo completo. Y así, hasta el intervalo $(N-1)/N \leq t \leq 1/N$. En el intervalo [0,1] la función *sen (2 π tN ), cos (2 π tN)* hacen $N$ ciclos. En conclusión, el incremento de la frecuencia se corresponde con un incremento en el número de ciclos.

Este conocido fenómeno, propio del dominio continuo, se puede graficar con *Mathematica*. Recordemos que la exponencial compleja es una función de valores complejos, por lo que su gráfica se genera seleccionando su parte real o su parte imaginaria. Dada la función *sen (2 π tF),* y $F = 1, 2, 3$, definimos las instrucciones

```
lista = Table[Sin[2Pi Ft],{F,3}];
Plot[
    Part[lista,1],{t,0,1},
    Ticks->{{0,1},{-1,0,1}},
    PlotLabel->»Un ciclo»
];
```




Y así, sucesivamente. Similar situación ocurre cuando el intervalo es [$-T$, $T$] y el incremento de la frecuencia es en múltiplos enteros de $1/2T$.

## PERIODICIDAD DE LA FRECUENCIA

La situación cambia radicalmente cuando la familia de sinusoides $\exp(j2\pi tf)$ se restringe al dominio discreto

$$\left\{\frac{nT}{N}\right\}, \quad -N \le n < N$$

Allí obtenemos la familia de sinusoides de dominio discreto

$$\exp\left[j2\pi\frac{nT}{N}f\right]$$

que depende del parámetro *f*. Fijemos *f* = *F* y aumentemos ahora progresivamente la frecuencia desde *F*= 0 hasta *F* = *N*/*T*. Cuando *F* = 0, tenemos la sinusoide inicial

$$\exp\left[j2\pi\frac{nT}{N}0\right]=1$$

que es constante en su dominio. ¿Que esperamos encontrar, a medida que la frecuencia se incrementa? Cuando *F* = *N*/*T*, nuestra función será

$$\exp\left[j2\pi\frac{nT}{N}\frac{N}{T}\right]=\exp[j2\pi n]=1$$

que es la misma sinusoide inicial. Por consiguiente, en cada uno de los múltiplos de la frecuencia fijada, la familia se repite nuevamente. Este es el *fenómeno de periodicidad de la frecuencia,* fenómeno único del dominio discreto, que constituye uno de los fundamentos teóricos del *análisis discreto de Fourier.* Observemos más de cerca el crecimiento en la frecuencia desde 0 hasta *N*/*T*. Cuando *F* está a *mitad de camino*, *F* = *N*/2*T*. Este valor de la frecuencia corresponde a la sinusoide

$$\exp\left[j2\pi\frac{nT}{N}\frac{N}{2T}\right]=\exp[j\pi n]=-1$$

O sea que en la altura de la frecuencia *F* = *N*/2*T* encontramos la sinusoide inicial con signo contrario. Si mantenemos *f* en el rango $-N/2T \le f \le N/2T$, cualquier valor en el intervalo de la siguiente mitad $N/2T \leq f \leq N/T$ es de la forma $f + N/2T$, que corresponde a la sinusoide

$$\exp\left[ j2\pi \frac{nT}{N}\left( f + \frac{N}{2T} \right)\right] = \exp\left[ j2\pi \frac{nT}{N} f \right]\exp[j\pi n]$$
$$= -\exp\left[ j2\pi \frac{nT}{N} f \right]$$

¿Que ha ocurrido? la frecuencia $f$ se ha incrementado desde 0 y los *ciclos aumentan*, alcanzando su máximo crecimiento en $N/2T$; y a partir de allí, la sinusoide se repite con signo negativo hasta $N/T$, o lo que es lo mismo, mientras la frecuencia crece desde $N/2T$ hasta $N/T$, los *ciclos decrecen* hasta que se llega a la misma sinusoide original.

## RELACIÓN ENTRE DOMINIO DISCRETO Y PERIODICIDAD

Ahora podemos concluir nuestro estudio de la sinusoide compleja discreta. Para que la función $\exp\left[ j2\pi \frac{nT}{N} f \right]$ sea periódica de período $2N$ en su dominio, se tiene que cumplir necesariamente

$$\exp\left[ j2\pi \frac{(n+2N)T}{N} f \right] = \exp\left[ j2\pi \frac{nT}{N} f \right] \Rightarrow \exp[j2\pi(2nT)f] = 1$$

y esto sólo es posible si $(2T)\ f = k$, o sea que $f$ está restringido a la condición

$$f = \frac{k}{2T}$$

Pero esta es precisamente la condición de que la variable pertenezca al dominio frecuencial discreto $\left\{ \frac{k}{2T} \right\}$. A su vez, acabamos de ver que la frecuencia $f$ repite periódicamente a la familia de sinusoides, a partir de la posición frecuencial $k = N$. Por tanto, los dominios asociados

$$\left\{\frac{nT}{N}\right\} \Leftrightarrow \left\{\frac{n}{2T}\right\}$$

son los *únicos dominios discretos* para los cuales la familia de sinusoides complejas es *dóblemente periódica* en el tiempo y en la frecuencia. Reemplazando los valores temporales y frecuenciales de ambos dominios,

$$\exp\left[ j2\pi \frac{nT}{N} \frac{k}{2T} \right] = \exp\left[ j2\pi \frac{nk}{2N} \right]$$

Obsérvese que en la expresión del lado izquierdo aparecen los valores de ambas variables del dominio, mientras que en el lado derecho desaparecen, dado que se cancela *T*.

Nuestra principal conclusión es la siguiente: hemos construido una familia de funciones discretas sobre un par de dominios discretos en los cuales cada función es *doblemente periódica* en ambos dominios, y éstos son *los únicos* en los cuales dicha familia es doblemente periódica. Para cada posición frecuencial, las sinusoides complejas son *formas de onda,* porque están definidas en el dominio temporal. Para cada posición temporal, las sinusoides complejas son *espectros de frecuencia,* porque están definidas en el dominio frecuencial.

## COMPONENTES ARMÓNICAS Y ESPECTRALES

Es usual referirse a las sinusoides con el nombre de componentes y también, de componentes armónicas. Esta denominación aparece asociada a la de componentes espectrales. El nombre de componente que recibe la exponencial compleja periódica y las sinusoides surge del lugar que ellas ocupan en la descomposición de funciones. Y en efecto, como ya se ha expuesto repetidamente, el análisis de Fourier es en últimas el proceso mediante el cual las funciones se descomponen en sinusoides.

Para unificar una denominación, nosotros llamaremos *componente armónica* a las sinusoides que intervienen como componentes en la descomposición de las funciones discretas temporales. Y llamaremos *componente espectral* a las que intervienen intervienen como componentes en la descomposición de las funciones discretas frecuenciales.

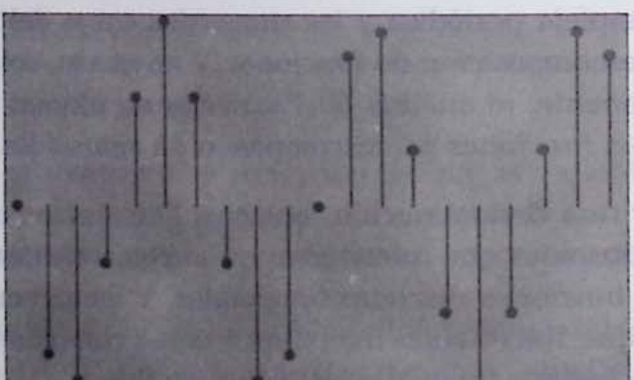
Las gráficas de las componentes armónicas y espectrales dependen, en gran medida, de su representación en el dominio real, dado que son funciones con valores complejos. Mediante un sencillo procedimiento en *Mathematica* para generar gráficas de funciones de dominio discreto, podemos ilustrar el fenómeno de periodicidad en la frecuencia, siempre que tomemos la parte real de la exponencial compleja. Para éllo, utilizaremos la familia de sinusoides discretas $sen[2\pi\ nk/2N]$. Fijaremos un dominio de $N = 10$, con $-10 \leq n < 10$. Ya que en las gráficas es irrelevante el valor de $T$, hagamos $T/N = 1$. Para cada frecuencia $k$, tenemos una sinusoide con valores $sen[p\ nk/10]$ así,

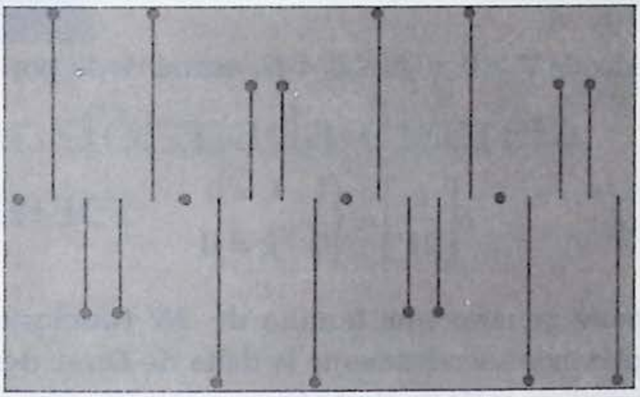
**lista = Table[Sin[(πn k)/10],{n,-10,9}]**

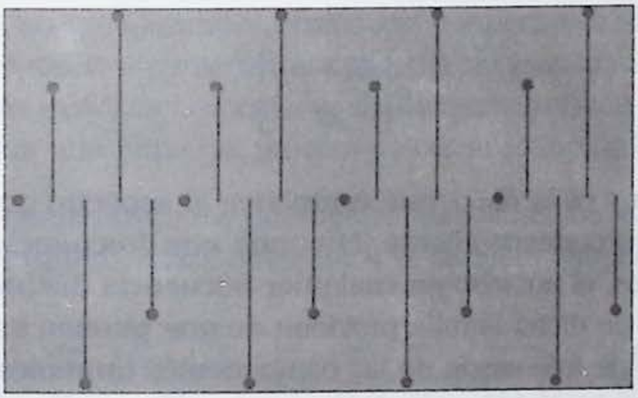
Cualquier gráfica de éllas se genera definiendo **Part[lista, m]**, donde m = -10, -9, ...8, 9. La instrucción completa es la siguiente:

```
GraficaF=Show [Graphics [{
    PointSize [0.02],
        Table [{Line [{
            {n,0},{n,Part [lista, F]}}],
                Point [{n,Part [lista, F]}]
                    },{n,-10,9}]}] ];
```

Las siguientes son gráficas en el tiempo, correspondientes a frecuencias k = 3, 6, 8,







## ESPECTRO DE LA COMPONENTE ARMÓNICA

cuando se fija una frecuencia *p,* élla contribuye a constituir una componente armónica

$$\exp\left[ j2\pi\frac{np}{2N}\right]$$

en el dominio discreto temporal. Si observamos cuidadosamente tal forma de onda, ella está determinada únicamente por el nivel frecuencial *p*, puesto que todos los demás elementos que constituyen dicha componente armónica son conocidos. Parecería natural asociarle a tal forma de onda un espectro de frecuencia que sea precisamente aquella función de dominio discreto frecuencial que sólo asume un valor único precisamente en dicha frecuencia. Pero tal función no es otra que la delta discreta de Dirac.

La *delta de Dirac* discreta, o *impulso unitario* discreto, en el dominio frecuencial $\left\{\frac{k}{2T}\right\}$, donde $T > 0$ y $-N \leq k < N$, estará dada por

$$\delta\left[\frac{k}{2T}\right] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Esto nos permite generar una familia de $2N$ funciones de dominio frecuencial, desplazando sucesivamente la delta de Dirac desde la frecuencia negativa más baja $p = -N$, hasta la frecuencia más alta $p = N-1$. Tenemos así la familia

$$\delta\left[\frac{(k-p)}{2T}\right]$$

La frecuencia $p$ es la única que contribuye al espectro de frecuencia del impulso unitario correspondiente. Ninguna otra frecuencia contribuye, o en otras palabras, el impulso en cualquier frecuencia distinta de $p$ es cero. La importancia de dicha familia proviene de que pueden ser interpretadas como espectros de frecuencia de las componentes armónicas. En otras palabras, estableceremos la asociación

$$\exp\left[j2\pi\frac{np}{2N}\right] \Leftrightarrow \delta\left[\frac{(k-p)}{2T}\right]$$

Esta es la esencia del *análisis discreto de Fourier*: el par constituido por una sinusoide y su correspondiente impulso unitario, es un *par transformado*. El primero es la componente armónica, el segundo es la componente espectral. La componente armónica es forma de onda en el dominio temporal. La componente espectral es espectro de frecuencia en el dominio frecuencial.

Lo que acabamos de ver es la primera y fundamental correspondencia entre forma de onda y espectro de frecuencia. Dicha correspondencia no sólo es exacta teóricamente, sino que en la realidad física, las señales de formas de onda sinusoidal en el dominio temporal, se corresponden con espectros que son impulsos unitarios en el dominio frecuencial.

# Capítulo 9

# La transformada discreta de Fourier

Hemos llegado al *punto de encuentro* de los dos grandes pilares del análisis discreto hasta ahora estudiados: los dominios discretos temporales y frecuenciales, y las componentes armónicas y espectrales sobre tales dominios. Esto nos permitirá construir el concepto de transformada discreta de Fourier, concepto que muchos autores simplemente utilizan como punto de partida y no como una parte del proceso de construcción de la transformada.

Haremos un resumen de los principales resultados. Dado el número real finito $T > 0$ y $N$ entero finito, obtenemos el dominio temporal

$$\left\{\frac{nT}{N}\right\}=\left\{-\frac{NT}{N},\frac{(N-1)T}{N},\ldots,-\frac{2T}{N},-\frac{T}{N},0,\frac{T}{N},\frac{2T}{N},\ldots,\frac{(N-1)T}{N}\right\}$$

donde $-N \leq n < N$, cuya variable del dominio es

$$t=\{t_n\}=\left\{\frac{nT}{N}\right\}$$

El dominio temporal genera otro dominio

$$\left\{\frac{k}{2T}\right\}=\left\{-\frac{N}{2T},-\frac{N-1}{2T},\ldots,-\frac{2}{2T},-\frac{1}{2T},0,\frac{1}{2T},\frac{2}{2T},\ldots,\frac{N-1}{2T}\right\}$$

donde $-N \leq k < N$. Este se denomina *dominio frecuencial* cuya variable es

$$f=\{f_k\}=\left\{\frac{k}{2T}\right\}$$

Sobre el dominio temporal, una función x asume los 2N valores

$$x\left[\frac{nT}{N}\right]$$

los que constituyen su *forma de onda*. Mientras que una función $X$ sobre el dominio discreto frecuencial asume los $2N$ valores

$$X\left[\frac{k}{2T}\right]$$

los que se constituyen *el espectro de frecuencia*. Hemos mostrado que el problema fundamental del *análisis discreto de Fourier* es asociarle de modo biunívoco a cada forma de onda un espectro de frecuencia, de modo que siempre exista un *par transformado*

$$\left.x\left[\frac{nT}{N}\right]\right\} \Leftrightarrow \left.X\left[\frac{k}{2T}\right]\right\}$$

Donde una de ellas se denomina la *transformada discreta de Fourier* de la otra. En la resolución de tal problema fundamental, un avance sustancial ha sido construir sobre tales dominios una familia de $2N$ funciones

$$\exp\left[j2\pi\frac{np}{2N}\right]$$

donde éstos son los *únicos dominios discretos* para los cuales la familia de sinusoides complejas es *dóblemente periódica* en el tiempo y en la frecuencia, y lograr asociarles la familia de $2N$ impulsos periódicos

$$\delta\left[\frac{(k-p)}{2T}\right]$$

Esta familia es el espectro de frecuencia de las componentes armónicas. En otras palabras, hemos establecido la asociación

$$\exp\left[j2\pi\frac{np}{2N}\right] \Leftrightarrow \delta\left[\frac{(k-p)}{2T}\right]$$

queriendo decir con ello que el par constituido por una sinusoide compleja y su correspondiente impulso unitario es un *par transformado.* O sea que el problema fundamental del análisis de Fourier que es, repetimos, asociarle a cada forma de onda un espectro de frecuencia, ha sido completamente resuelto para las componentes armónicas. Ahora veremos que esta correspondencia es suficiente para resolver en su totalidad el problema general.

Dado que vamos a hacer algunos cálculos, para hacer claridad teórica y simplicidad de la notación, simbolizaremos la familia de componentes armónicas indexadas por cada posición frecuencial $k$ como

$$\Phi_k\left[\frac{nT}{N}\right]=\exp\left[j2\pi\frac{nk}{2N}\right]$$

De modo similar, simbolizaremos la familia de componentes espectrales respectivas trasladadas hasta la frecuencia $p$ como

$$\Psi_p\left[\frac{k}{2T}\right]=\delta\left[\frac{k-p}{2T}\right]$$

En los dominios asociados, hay $2N$ componentes armónicas y $2N$ componentes espectrales, respectivamente. La notación es muy conveniente, ya que coinciden uno a uno los subíndices, de modo que el par transformado es

$$\Phi_p\left[\frac{nT}{N}\right]\Leftrightarrow\Psi_p\left[\frac{k}{2T}\right]$$

O lo que es lo mismo, $\Phi_p \Leftrightarrow \Psi_p$, donde la segunda es el espectro de la primera, y ésta la forma de onda de la segunda. El subíndice $p$ es siempre la altura de la frecuencia.

Ejemplo

Ejemplo. Sea $T = 4$ y $N = 2$. Tenemos los dominios asociados

$$\{-4,-2,0,2\}\Leftrightarrow\left\{-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},0,\frac{1}{8}\right\}$$

Para cada altura de la frecuencia $p$ = -2, -1, 0, 1, hay cuatro componentes armónicas con sus cuatro componentes espectrales respectivas. Las cuatro formas de onda, con sus respectivos valores complejos son

$$\Phi_{-2}[2n] = \exp[-j\pi n] = \{1,-1,1,-1\}$$
$$\Phi_{-1}[2n] = \exp\left[-j\frac{\pi n}{2}\right] = \{-1, j, 1, -j\}$$
$$\Phi_{0}[2n] = \exp[0] = \{1,1,1,1\}$$
$$\Phi_{1}[2n] = \exp\left[j\frac{\pi n}{2}\right] = \{1,-j,-1, j\}$$

Los espectros de frencuencia respectivos (impulsos unitarios) son:

$$\Psi_{-2}\left[\frac{k}{8}\right] = \{1,0,0,0\}$$
$$\Psi_{-1}\left[\frac{k}{8}\right] = \{0,1,0,0\}$$
$$\Psi_{0}\left[\frac{k}{8}\right] = \{0,0,1,0\}$$
$$\Psi_{1}\left[\frac{k}{8}\right] = \{0,0,0,1\}$$

Los pares transformados son

$$\{1,-1,1,-1\} \Leftrightarrow \{1,0,0,0\}$$
$$\{-1, j, 1, -j\} \Leftrightarrow \{0,1,0,0\}$$
$$\{1,1,1,1\} \Leftrightarrow \{0,0,1,0\}$$
$$\{1,-j,-1, j\} \Leftrightarrow \{0,0,0,1\}$$

donde entre corchetes están los valores de cada una de las componentes valuadas en sus dominios respectivos.

## EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Recordemos cual ha sido el problema planteado para asociar formas de onda a espectros de frecuencia. Se trata de establecer la asociación

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] \Leftrightarrow X\left[\frac{k}{2T}\right]$$

Nosotros hemos exhibido una colección $\Phi_p$ de componentes armónicas y una colección $\Psi_p$ de componentes espectrales de modo que a cada una de las primeras le corresponde exactamente una y sólo una de las segundas. Hemos resuelto el problema principal planteado, al menos para 2N funciones. Ahora veremos, como ya anunciamos, que esto nos permite resolver el problema para todas las funciones, o sea, podemos generar todas las funciones discretas de dominio temporal, con sus pares transformadas respectivas de dominio frecuencial. Recordemos algunos conceptos del álgebra lineal. Sean

$$a_{-N},\cdots,a_1,a_0,a_{1,}a_2,\cdots,a_{N-1}$$

coeficientes reales o complejos. La función de dominio discreto

$$\sum_{p=-N}^{N-1} a_p \Phi_p$$

es una *combinación lineal* de las 2$N$ componentes armónicas, y representa una nueva función que se denomina *superposición lineal* de las componentes armónicas. Este nombre se deriva del llamado *principio de superposición,* mediante el cual, se supone que la representación de los fenómenos se superpone linealmente en una descomposición. Esta combinación lineal es claramente una forma de onda sobre el dominio temporal. La respectiva función de dominio frecuencial,

$$\sum_{p=-N}^{N-1} a_p \Psi_p$$

es la candidata natural para asociarla como transformada de la primera, o sea que definimos

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_p \Phi_p \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} a_p \Psi_p$$

Donde los coeficientes son reales o complejos. En otras palabras, siempre que tengamos una forma de onda mediante una representación como la siguiente,

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] = \sum_{p=-N}^{N-1} a_p \Phi_p \left[\frac{nT}{N}\right]$$

le asociamos el espectro de frecuencia

$$X\left[\frac{k}{2T}\right] = \sum_{p=-N}^{N-1} a_p \Psi_p \left[\frac{k}{2T}\right]$$

Ejemplo

Sea $T = 4$, $N = 4$. Los dominios asociados son

$$\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\} \Leftrightarrow \left\{-\frac{1}{2},-\frac{3}{8},-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},0,\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right\}$$

La función $sen[(3\pi/2)n]$ de dominio temporal está definida sobre el primer dominio asumiendo los valores {0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1}. ¿Cual es su par transformado? Por la fórmula de Euler,

$$sen\left[\frac{3\pi}{2}n\right] = -\frac{j}{2}\exp\left[j2\pi\frac{n(-6)}{8}\right] + \frac{j}{2}\exp\left[j2\pi\frac{n(6)}{8}\right].$$

La forma de onda es combinación lineal de las dos componentes armónicas cuyas alturas de frecuencias son $p$ = -6, 6, que corresponden a $\Phi_{-2}$, $\Phi_2$. En otras palabras,

$$sen\left[\frac{3\pi}{2}n\right] = -\frac{j}{2}\Phi_{-2} + \frac{j}{2}\Phi_2$$

Por consiguiente, su espectro de frecuencia es la misma combinación lineal de las componentes espectrales respectivas, $\Psi_{-2}$, $\Psi_2$

$$sen\left[\frac{3\pi}{2}n\right] \Leftrightarrow -\frac{j}{2}\Psi_{-2}\left[\frac{k}{8}\right] + \frac{j}{2}\Psi_{2}\left[\frac{k}{8}\right]$$

o también,

$$\{0,-1,0,1,0,-1,0,1\} \Leftrightarrow \left\{0,0,-\frac{j}{2},0,0,0,\frac{j}{2},0,\right\}$$

donde ambas expresiones son los valores de las funciones de dominio temporal y frecuencial, respectivamente.

Ahora demostraremos que toda función del dominio discreto temporal o frecuencial, es siempre una combinación lineal de las componentes armónicas o espectrales. En otras palabras, toda forma de onda y todo espectro de frecuencia se descomponen siempre como combinación lineal de las componentes armónicas y espectrales, respectivamente.

## LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

La razón por la cual los $2N$ impulsos unitarios $\Psi_p, -N \le p < N$ se denominan componentes espectrales es que, efectivamente, toda función de dominio frecuencial se descompone como:

$$X\left[\frac{k}{2T}\right] = \sum_{p=-N}^{N-1} X\left[\frac{p}{2T}\right]\delta\left[\frac{k-p}{2T}\right]$$

donde cada componente de la suma es un impulso unitario. Ya vimos que la demostración es inmediata, puesto que si en el lado derecho $p \neq k$, el impulso es cero, y sólo sobrevive el valor de la función en $p = k$. Reemplazando,

$$X\left[\frac{k}{2T}\right] = \sum_{p=-N}^{N-1} X\left[\frac{p}{2T}\right]\Psi_p\left[\frac{k}{2T}\right]$$

esto significa que todo espectro de frecuencia es una superposición de componentes espectrales. Pero precisamente el principio de superposición nos permite asociar formas de onda con espectros de frecuencia teniendo en cuenta los coeficientes de las componentes espectrales. Por consiguiente, a todo espectro de frecuencia se le puede hacer corresponder una forma de onda, definiendo

$$x\left[\frac{nT}{N}\right]=\sum_{k=-N}^{N-1} X\left[\frac{k}{2T}\right]\Phi_k\left[\frac{nT}{N}\right]$$

donde hemos sustituido $p$ por la variable frecuencial $k$.

El par transformado en el dominio del tiempo, será la superposición de las componentes armónicas con los mismos coeficientes de las componentes espectrales,

$$x\left[\frac{nT}{N}\right]=\sum_{k=-N}^{N-1} X\left[\frac{k}{2T}\right]\exp\left[j2\pi\frac{nk}{2N}\right]$$

A la forma de onda se le denomina *transformada discreta –inversa– de Fourier* del espectro de frecuencia dado. Dice claramente que, siempre que se tenga un espectro de frecuencias, se puede recuperar su forma de onda. Vamos a demostrar que se puede invertir la expresión, o sea que toda forma de onda posee un espectro de frecuencia cuya transformada es la forma de onda dada.

## ORTOGONALIDAD DE LAS COMPONENTES ARMÓNICAS

Recordemos que la familia de componentes armónicas es

$$\Phi_k\left[\frac{nT}{N}\right]=\exp\left[j2\pi\frac{nk}{2N}\right]$$

Esta familia tiene una propiedad muy interesante: la suma de los valores de cada componente armónica es

$$\sum_{n=-N}^{N-1}\Phi_0\left[\frac{nT}{N}\right]=2N$$

$$\sum_{n=-N}^{N-1}\Phi_k\left[\frac{nT}{N}\right]=0, \quad k\neq 0$$

Es claro para $k = 0$, porque cada valor es la unidad y se suman $2N$ valores. Supongamos ahora que $k \neq 0$. Entonces, como $-N \leq k < N$, ningun valor de la componente armónica puede ser la unidad. Apliquemos un resultado conocido de la serie genométrica, que dice lo siguiente: dado $a$ real o complejo,

$$\sum_{n=-N}^{N-1} a^n = \begin{cases} 2N & a=1 \\ \dfrac{1-a^{2N}}{1-a} & a \neq 1 \end{cases}$$

La componente armónica se puede escribir como

$$\Phi_k\left[\frac{nT}{N}\right] = \exp\left[j2\pi\frac{k}{2N}\right]^n$$

reemplazando esta expresión en la serie geométrica, cuando $k \neq 0$,

$$\sum_{n=-N}^{N-1} \Phi_k\left[\frac{nT}{N}\right] = \frac{1-\exp[j2\pi k]}{1-Exp\left[j2\pi\dfrac{k}{2N}\right]} = 0$$

ya que el numerador es 0 y el denominador es $\neq 0$. La siguiente propiedad de la familia de componentes armónicas es un resultado directo de la propiedad anterior, y es efectivamente una relación esencial entre ellas. Se trata de la *relación de ortogonalidad* entre dos componentes armónicas cualesquiera $\Phi_p$, $\Phi_k$

$$\sum_{n=-N}^{N-1} \Phi_k\left[\frac{nT}{N}\right] \Phi_p\left[\frac{nT}{N}\right] = \begin{cases} 2N & k = p \\ 0 & k \neq p \end{cases}$$

donde en la segunda componente armónica se ha tomado el *conjugado* del valor complejo. Esta relación es muy sencilla de verificar, dado que

$$\sum_{n=-N}^{N-1} \Phi_k\left[\frac{nT}{N}\right] \Phi_p\left[\frac{nT}{N}\right] = \sum_{n=-N}^{N-1} \exp\left[j2\pi\frac{n(k-p)}{2N}\right] = \sum_{n=-N}^{N-1} \Phi_{k-p}\left[\frac{nT}{N}\right]$$

y se aplica el resultado anterior a la última expresión.

## UNICIDAD DE LA CONSTRUCCIÓN

Ahora iniciamos con una forma de onda arbitraria $x\left[\frac{nT}{N}\right]$ y nos preguntamos cual es su espectro de frecuencia $X\left[\frac{k}{2T}\right]$. Teniendo en cuenta que la transformada discreta –inversa– de tal espectro es la forma de onda dada,

$$
\begin{aligned}
x\left[\frac{nT}{N}\right] &= \sum_{k=-N}^{N-1} X\left[\frac{k}{2T}\right]\Phi_k\left[\frac{nT}{N}\right], \\
x\left[\frac{nT}{N}\right]\Phi_p\left[\frac{nT}{N}\right] &= \sum_{k=-N}^{N-1} X\left[\frac{k}{2T}\right]\Phi_k\left[\frac{nT}{N}\right]\Phi_p\left[\frac{nT}{N}\right] \\
\sum_{n=-N}^{N-1} x\left[\frac{nT}{N}\right]\Phi_p\left[\frac{nT}{N}\right] &= \sum_{n=-N}^{N-1}\sum_{k=-N}^{N-1} X\left[\frac{k}{2T}\right]\Phi_{k-p}\left[\frac{nT}{N}\right] \\
&= \sum_{k=-N}^{N-1}\left\{\sum_{n=-N}^{N-1}\Phi_{k-p}\left[\frac{nT}{N}\right]\right\} X\left[\frac{k}{2T}\right] = 2NX\left[\frac{k}{NL}\right]
\end{aligned}
$$

Por las relaciones de ortogonalidad, sólo sobrevive el coeficiente que corresponde a $k = p$; substituyendo la componente armónica,

$$X\left[\frac{k}{2T}\right] = \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1} x\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left[-j2\pi\frac{nk}{2N}\right]$$

La función de la izquierda se denomina *transformada discreta de Fourier* de la función de la derecha. Así pues, hemos construido la doble relación fundamental entre forma de onda y espectro de frecuencia:

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] = \sum_{k=-N}^{N-1} X\left[\frac{k}{2T}\right]\exp\left[j2\pi\frac{nk}{2N}\right]$$

$$X\left[\frac{k}{2T}\right] = \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1} x\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left[-j2\pi\frac{nk}{2N}\right]$$

por lo que se puede llamar, con toda propiedad, *par transformado* al par

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] \Leftrightarrow X\left[\frac{k}{2T}\right]$$

Podemos resumir todos los resultados en un sólo enunciado. Dada una forma de onda en el dominio discreto temporal queda determinado su espectro de frecuencia en el dominio discreto frecuencial. La segunda función se denomina *transformada discreta de Fourier* TDF de la primera. La primera función se denomina *transformada discreta –inversa– de Fourier* TDFI de la segunda.

Por construcción, una transformada es la inversa de la otra y ambas funciones se llaman *par de transformadas*.

## Conservación de la energía

En la teoría de señales, la forma de onda representa una señal determinada en el dominio del tiempo. A tal forma de onda le está asociada una *cantidad* que expresa la *energía* contenida en la señal. Esta cantidad es insensible al modo como se represente la señal, en el sentido siguiente: la energía se conserva, ya que su medición arroja el mismo resultado si se usa la forma de onda o el espectro de frecuencia.

Como en su momento veremos, algunos autores[1] definen la energía como un «*constructo*» o *cantidad principal* del modelo, esto es, como algo esencial que vincula al modelo matemático con la entidad física representada. La energía contenida en la forma de onda, se define como la cantidad

$$E[x]=\sum_{n=-N}^{N-1}\left\|x\left[\frac{nT}{N}\right]\right\|^2$$

De la misma forma, la energía contenida en el espectro de frecuencia correspondiente es

$$E[X]=\sum_{k=-N}^{N-1}\left\|X\left[\frac{k}{2T}\right]\right\|^2$$

1 D. Slepian, «On Bandwidth» *Proceedings of the IRE*, Vol. 64, No. 3, March. 1976.

Para encontrar la relación entre las dos cantidades, se demuestra una relación más general entre forma de onda y espectro de frecuencia, que se denomina *fórmula de Parseval*. Dadas dos formas de onda y sus espectros de frecuencia respectivos, se tiene

$$\sum_{n=-N}^{N-1} x\left[\frac{nT}{N}\right] y\left[\frac{nT}{N}\right] = 2N^2 \sum_{k=-N}^{N-1} X\left[\frac{k}{2T}\right] Y\left[\frac{k}{2T}\right]$$

Esto se debe a que el espectro de frecuencia es la transformada discreta –inversa– de Fourier de la forma de onda y podemos substituir:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-N}^{N-1} x\left[\frac{nT}{N}\right] y\left[\frac{nT}{N}\right] = \\
&\sum_{n=-N}^{N-1} \sum_{k=-N}^{N-1} X\left[\frac{k}{2T}\right] \exp\left[j2\pi\frac{nk}{2N}\right] \sum_{p=-N}^{N-1} Y\left[\frac{p}{2T}\right] \exp\left[-j2\pi\frac{np}{2N}\right] \\
&= \sum_{k=-N}^{N-1} \sum_{p=-N}^{N-1} X\left[\frac{k}{2T}\right] Y\left[\frac{p}{2T}\right] \sum_{n=-N}^{N-1} \exp\left[j2\pi\frac{n(k-p)}{2N}\right] \\
&= 2N^2 \sum_{k=-N}^{N-1} X\left[\frac{k}{2T}\right] Y\left[\frac{k}{2T}\right]
\end{aligned}$$

igualando las dos formas de onda,

$$\sum_{n=-N}^{N-1} \left\| x\left[\frac{nT}{N}\right] \right\|^2 = 2N^2 \sum_{n=-N}^{N-1} \left\| X\left[\frac{k}{2T}\right] \right\|^2$$

O sea que *el principio de conservación de la energía* se expresa como

$$E[x] = 2N^2 E[X]$$

Con esto concluye nuestro estudio sobre la transformada discreta de Fourier.

Capítulo 10

# Serie y transformada

Por regla general, la transformada discreta de Fourier se deduce de las series de Fourier mediante un proceso de discretización del dominio continuo. Así mismo, en los textos de ingeniería se hace el tránsito de las series de Fourier a la transformada integral de Fourier, utilizando un lenguaje infinitesimalista, que se beneficia con la intuición que provee aunque, como ya vimos, rompe con las más elementales normas del rigor. Aqui haremos el proceso directo de conversión entre las entidades: en el modelo de cálculo infinitesimal que hemos llamado MicroCálculo, la transformada discreta de Fourier evoluciona de modo natural hacia la serie de Fourier y ambas, hacia la transformada integral.

## ENTIDADES DRAMÁTICAMENTE DISTINTAS

Hemos mostrado que en el modelo clásico, la transformada discreta de Fourier TDF asocia a cada función *x[nT/N]* sobre el dominio discreto finito temporal una función *X[k/2T]* sobre el dominio discreto finito frecuencial. De otra parte, la serie de Fourier SF es el desarrollo en serie trigonométrica con coeficientes $C_k$ de las funciones periódicas x*(t)* de período *2T* sobre el intervalo [*-T, T*]. Finalmente, la transformada integral de Fourier TF hace corresponder, a funciones x*(t)* sobre la recta real, que se denomina dominio continuo temporal, funciones *X(f)* de dominio continuo frecuencial. La diferencia entre los tres enunciados es dramática: el primero consiste en una suma que ocurre en el dominio discreto finito; el segundo consiste en una serie sobre el dominio continuo limitado, y el tercero consiste en una integral que ocurre en el dominio continuo ilimitado.

Bajo el MicroCálculo se cumple una relación tan íntima entre los dominios temporales y frecuenciales, sean estos discretos o continuos, que la asociación entre la transformada discreta de Fourier, la serie de Fourier y la transformada integral de Fourier se sigue la una de cualquiera de las otras dos. La transformada de Fourier es una sóla, o sea, es cualquiera de las tres.

Utilizaremos en lo posible la notación unificada que ya antes hemos presentado, sobre las entidades TDF, SF y TF, siguiendo los textos conocidos de Bracewell[1], Brigham[2], Hsu[3], Lathi[4], y Walker[5].

Como hemos descrito con anterioridad, las tres entidades son, en su orden: la transformada discreta de Fourier TDF,

$$X\left[\frac{k}{2T}\right] = \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1} x\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{2N}\right),$$

donde

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] = \sum_{k=-N}^{N-1} X\left[\frac{k}{2T}\right]\exp\left(j2\pi\frac{nk}{2N}\right),$$

la serie compleja de Fourier SCF,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp(j2\pi\, t\, kf_0)$$

donde

$$C_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\exp(-j2\pi\, t\, kf_0)dt$$

y la transformada de Fourier TF,

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi t f)dt$$

1 R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill Book Company, 1965.

2 E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall,Inc., 1974.

3 H. P. Hsu, *Analisis de Fourier*, Fondo Educativo Interamericano,1970.

4 B. P. Lathi, *Introducción a la teoría y Sistemas de Comunicación*, Limusa, 1974.

5 J. S. Walker, *Fast Fourier Transforms*, CRC Press, Inc., 1991.

donde

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\exp\left(j2\pi tf\right)df$$

Es evidente que las tres entidades son, como ya lo hemos explicado, dramáticamente distintas. No es lo mismo una suma finita, que una suma infinita, y una integral. A favor de la unidad de los tres conceptos juega el que una suma finita se puede convertir en suma infinita como límite de una sucesión; y que una suma infinita, en el límite, es una integral. En contra, ya hemos presentado argumentos que consideramos abrumadores. Lo que sí puede ser sorpresivo es el anuncio de que, bajo cierta condición, los tres entidades son idénticas entre sí. Y esto es lo que nos disponemos a mostrar a continuación.

## LA HEURÍSTICA EN LA INGENIERÍA

Admitiendo que las tres entidades son en cierta forma autónomas, los textos de ingeniería y de física hacen un enorme esfuerzo para lograr el tránsito de unas a otras, aunque sea de modo aproximativo. En la búsqueda de relaciones entre las tres entidades, es preciso reconocerlo, obtienen un éxito considerable. Así, por ejemplo, si se tienen funciones periódicas, parecería legítimo convertir el período finito en *período infinito*, con lo que intentan –a un alto costo, como vimos– obtener transformadas de funciones no periódicas, mediante límites. En este contexto y con un manejo poco escrupuloso de los límites, las variables discretas se vuelven variables continuas y las frecuencias discretas se vuelven frecuencias «infinitesimales».

También es usual expresar las funciones periódicas discretas como muestras vecinas de funciones periódicas continuas, con lo que la serie de Fourier se convierte, bajo ciertas condiciones, en transformada discreta de Fourier.

Si nos fijamos bien, en la base de dicha heurística está la imagen y la noción de *infinitesimal*. El error de estos textos es tratar, con una ingenuidad que conmueve, de hacer compatible los *infinitesimales* con el análisis convencional. Aquí surgen los obstáculos que impiden conciliar la heurística con el modelo clásico de análisis. Por más que se intente, no se puede *pasar al límite* de la transformada discreta a la serie de Fourier ni de ésta a la transformada integral, ya que la suma de la transformada discreta es finita, la serie de Fourier es periódica, y la función cuya transformada de Fourier se va a calcular no es periódica.

Vamos a recontextualizar el proceso anterior, mostrando que la heurística que siguen los ingenieros es legítima, siempre que se haga en un modelo de cálculo infinitesimal, como el nuestro.

## EL MODELO DE CÁLCULO

El modelo que proponemos y sobre el cual se erigirá el análisis de Fourier consiste, en primer lugar, en el par de dominios

$$\left\{\frac{k}{2T}\right\}=\left\{-\frac{N}{2T},-\frac{N-1}{2T},\ldots,-\frac{2}{2T},-\frac{1}{2T},0,\frac{1}{2T},\frac{2}{2T},\ldots,\frac{N-1}{2T}\right\}$$

$$\left\{\frac{k}{2T}\right\}=\left\{-\frac{N}{2T},-\frac{N-1}{2T},\ldots,-\frac{2}{2T},-\frac{1}{2T},0,\frac{1}{2T},\frac{2}{2T},\ldots,\frac{N-1}{2T}\right\}$$

donde $-N \leq n, k < N$, $T > 0$ y $N$ entero. Así, las sucesiones de valores de los dominios son variables, en el sentido que le hemos dado a la variable en el capítulo III. Las variables serán

$$t=\left\{\frac{nT}{N}\right\},\ f=\left\{\frac{k}{2T}\right\}$$

En segundo lugar, la familia de componentes armónicas complejas y su correspondiente familia de impulsos unitarios que constituyen los *pares transformados*

$$\exp\left[j2\pi\frac{np}{2N}\right]\Leftrightarrow\delta\left[\frac{(k-p)}{2T}\right]$$

están definidas sobre dominios hiperreales, aunque inicialmente, estos sean hiperreales finitos.

En tercer lugar, las cantidades $T$ y $N$ pueden llegar a ser, en un momento determinado, cantidades hiperreales, finitas, infinitas o infinitesimales. El centro de nuestra argumentación es que las diversas relaciones cuantitativas entre las cantidades hiperreales $T$ y $N$ son las únicas que determinarán, en cada caso, la transformada discreta de Fourier, las series de Fourier o la transformada integral.

Este resultado es verdaderamente espectacular y, creemos, totalmente original. Para decirlo con una metáfora, las tres entidades TDF, SF y TF serán las formas que asume un sólo operador, de acuerdo a las relaciones entre T y N y a las reglas de transformación de los dominios asociados.

Entre todas las posibilidades de *T* y N, consideraremos las tres siguientes, que ya hemos estudiado en otro lugar[6]. Si *T* es finito y *N* entero finito, tenemos los dominios discretos finitos de 2N elementos. Ambas variables *t* y *f* son discretas, ya que su rango $2N$ es finito. Si *T* es finito y *N* es entero infinito, $T/N$ es infinitesimal, luego $t = ndt$, donde $T/N = dt$; obsérvese que *t* es una variable *continua*, mientras que *f* es una variable discreta, esto es, *f* es variable independiente aunque $df = 1/2T$ no es infinitesimal.

Finalmente, si *T* es infinito y $T << N$, no sólo $T/N = dt$ es infinitesimal, sino que $1/2T$ es infinitesimal,luego $f = kdf$, donde $1/2T = df$. En este tercer caso, los dominios los escribiremos como $\{ndt\} \Leftrightarrow \{kdf\}$, que corrresponde a ambas variables continuas *t* y *f*.

Repetimos: en el MicroCálculo, la transformada discreta de Fourier es la serie de Fourier y ésta la transformada integral de Fourier, dependiendo de las relaciones cuantitativas de *T* y *N*, tomadas en el orden en que las hemos presentado.

## CONVERSIÓN DE LA EXPONENCIAL COMPLEJA

Uno de los procesos funcionales de conversión del discreto al continuo más interesantes y útiles es el de la exponencial compleja discreta doblemente periódica, en exponencial compleja sobre el dominio continuo. Ya hemos visto que en el par de dominios $\left\{\frac{nT}{N}\right\} \Leftrightarrow \left\{\frac{k}{2T}\right\}$, la exponencial compleja sobre ambos dominios discretos

$$\exp\left[j2\pi\frac{nT}{N}\frac{k}{2T}\right] = \exp\left[j2\pi\frac{nk}{2N}\right]$$

6 Capítulo VII, Conversiones del dominio, *El dominio de la señal.*

es periódica tanto en el primer dominio como en el segundo. Hacemos la primera conversión, considerando el dominio continuo temporal, con $T$ finito y $N$ entero infinito, donde $t$ es la variable *continua*, $t = \{ndt\}$, donde $T/N = dt$; la exponencial se convierte en

$$\exp\left[ j2\pi \frac{nT}{N}\frac{k}{2T} \right] = \exp\left[ j2\pi\, ndt \frac{k}{2T} \right] = \exp\left[ j2\pi t\, \frac{k}{2T} \right]$$

La exponencial sigue siendo periódica sobre el dominio temporal, pero la periodicidad en el dominio frecuencial se ha perdido, porque ahora $k$ recorre infinitas posiciones frecuenciales, dado que $N$ es entero infinito.

Hacemos la segunda conversión, considerando tanto el dominio continuo temporal como el dominio continuo frecuencial, con $T$ infinito y $T << N$. No sólo $T/N = dt$ es infinitesimal, sino que $1/2T$ es infinitesimal, luego $f = \{kdf\}$, donde $1/2T = df$. La exponencial se convierte en

$$\exp\left[ j2\pi t\, \frac{k}{2T} \right] = \exp\left[ j2\pi tkdf \right] = \exp\left[ j2\pi tf \right]$$

La exponencial pierde también su periodicidad en el dominio temporal. Si nos fijamos en ambas partes reales e imaginarias, la conversión de la sinusoide es muy sugestiva, y no la puede explicar el análisis tradicional. Así, por ejemplo,

$$sen\left( 2\pi \frac{nk}{2N} \right) \Rightarrow sen\left( 2\pi t \frac{k}{2T} \right) \Rightarrow sen(2\pi tf)$$

Esta conversión, como se verá enseguida, es esencial para explicar el paso del discreto al continuo en el análisis de Fourier.

## LA TRANSFORMADA DISCRETA SE CONVIERTE EN SERIE DE FOURIER

Vamos a iniciar el tránsito de la transformada discreta a la serie de Fourier.

Para ello, vamos a suponer que un cierto fenómeno se representa con una función $x\left[ \frac{nT}{N} \right]$, que consiste en el listado de muestras de $2N$ valores de x sobre el dominio temporal. Supongamos que este mismo fenómeno se representa con otro listado de muestras, $X\left[\dfrac{k}{2T}\right]$, constituido por $2N$ valores de $X$ sobre el dominio frecuencial correspondiente. Admitamos que las reglas de transformación de unos valores en otros está dada por la transformada discreta de Fourier,

$$X\left[\frac{k}{2T}\right]=\frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1}x\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{2N}\right),$$

y la transformada inversa

$$x\left[\frac{nT}{N}\right]=\sum_{k=-N}^{N-1}X\left[\frac{k}{2T}\right]\exp\left(j2\pi\frac{nk}{2N}\right).$$

Como $\dfrac{nk}{2N}=\dfrac{nT}{N}\dfrac{k}{2T}$, definimos la frecuencia fundamental $f_0=\dfrac{1}{2T}$. Sustituyendo en la expresión de la transformada discreta

$$X[kf_0]=\frac{1}{2T}\sum_{n=-N}^{N-1}x\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{nT}{N}kf_0\right)\frac{T}{N}$$

Si $T$ es finito y $N$ es entero infinito, $T/N$ es infinitesimal, luego podemos perfectamente considerar la variable $t=\{ndt\}$, donde $T/N = dt$. Mientras que el dominio temporal se convierte en $\{ndt\}$; el dominio frecuencial sigue como $\{kf_0\}$. Volviendo nuevamente al cálculo de la transformada discreta de Fourier de la función dada,

$$X[kf_0]=\frac{1}{2T}\sum_{n=-N}^{N-1}x[ndt]\exp(-j2\pi ndtkf_0)dt$$

Pero esta expresión nos es muy familiar. Recordemos que, dada una función $y(ndx)$, la integral de la función $y(x)$ respecto a $x$, si existe, es

$$\int_{-T}^{T}y(x)dx=\sum_{n=-N}^{N-1}y(ndx)dx$$

Por tanto,

$$X[kf_0] = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x[t]\exp\left(-j2\pi tk f_0\right)dt$$

y este es nada más ni nada menos que el coeficiente de Fourier del desarrollo en serie de Fourier de dicha función, o sea:

$$C_k = X[kf_0]$$

donde *k* es finito, aunque nosotros hemos obtenido una expresión mucho más general, ya que *k* puede ser entero infinito. La transformada discreta inversa de Fourier es

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] = \sum_{k=-N}^{N-1} X\left[\frac{k}{2T}\right]\exp\left(j2\pi\frac{nk}{2N}\right)$$

Nuevamente, reemplazando

$$x[ndt] = \sum_{k=-N}^{N-1} C_k \exp\left(j2\pi ndt\, k\, f_0\right)$$

luego,

$$x[t] = \sum_{k=-N}^{N-1} C_k \exp\left(j2\pi tkf_0\right)$$

el lector reconocerá en esta expresión el desarrollo de la función en serie de Fourier, ya que *N* es un entero infinito y define los límites de la sumatoria así,

$$x[t] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp\left(j2\pi tkf_0\right)$$

## La serie de Fourier se convierte en transformada de Fourier

Finalmente, si *T* es infinito y *T* es mucho menor que *N*, $T << N$, no sólo $T/N = dt$ es infinitesimal, sino que $1/2T$ es infinitesimal, lo que nos permite definir la nueva variable continua

$$f = \left\{ \frac{k}{2T} \right\} = \{kdf\}, \quad df = \frac{1}{2T}$$

En este caso, los dominios los escribiremos $\{ndt\} \Leftrightarrow \{kdf\}$, corresponden a ambas variables continuas *t* y *f*. Arriba, el coeficiente de Fourier ha sido expresado como

$$C_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \exp(-j2\pi tkf_0) dt \, .$$

Hacemos la substitución

$$\hat{X}(f) = 2TX[kdf] = 2TC_k \, .$$

O sea que

$$\hat{X}(f) = \int_{-T}^{T} x(t) \exp(-j2\pi tkdf) dt \, .$$

Como *T* es infinito y $\{kdf\} = f$, esta integral asume la forma

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi tf) dt$$

que es precisamente la *transformada integral de Fourier*. Finalmente, de acuerdo a la serie de Fourier

$$x[t] = \sum_{k=-N}^{N-1} C_k \exp(j2\pi tkf_0)$$

Reemplazando,

$$x[t] = \sum_{k=-N}^{N1} 2TC_k \exp(j2\pi tkdf) \frac{1}{2T}$$

$$x[t] = \sum_{k=-N}^{N-1} \hat{X}[f] \exp(j2\pi tkdf) df$$

Nuevamente, de acuerdo a las reglas de integración, esto no es otra cosa que una integral, por lo que se obtiene la expresión

$$x[t]=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{X}[f]\exp(j2\pi tf)df$$

que es la *transformada inversa de Fourier*. Las conversiones entre las tres entidades ha tomado sólo unas cuantas páginas. Y en realidad, poco hemos innovado, porque hemos seguido casi al pié de la letra la heurística empleada por los textos de ingeniería[7].

Lo único original es el modelo de cálculo, que produce una simplicidad tal que, recordando las palabras de Leibniz, el análisis de Fourier parece una broma o un juego.

## DEL DISCRETO AL CONTINUO

Vamos a hacer un resumen. Por el sólo hecho de considerar inmersos a $T$ y $N$ en un modelo de cálculo infinitesimal, los dominios temporales y frecuenciales se despliegan en las siguientes formas.

1. *Si T es finito y N finito, en el dominio* $\left\{\frac{nT}{N}\right\}\Leftrightarrow\left\{\frac{k}{2T}\right\}$, *la transformada asume la forma de transformada discreta de Fourier.*
2. *Si T es finito y N infinito, en el dominio* $\{ndt\}\Leftrightarrow\left\{\frac{k}{2T}\right\}$, *la transformada asume la forma de serie de Fourier.*
3. *Si T es infinito y N infinito mucho mayor que T, en el dominio* $\{ndt\}\Leftrightarrow\{kdf\}$, *la transformada asume la forma de transformada integral de Fourier. Naturalmente, la serie de Fourier y la transformada integral de Fourier de las funciones respectivas sólo pueden existir de acuerdo a ciertas* condiciones de convergencia, *tema que no es de interés aquí..*

7 H. P. Hsu, *Analisis de Fourier*, Fondo Educativo Interamericano,1970.

## ORTOGONALIDAD EN EL DOMINIO CONTINUO

Nos proponemos llegar a la propiedad de ortogonalidad de las exponenciales complejas continuas por la vía discreta, esto es, partiendo del principio de ortogonalidad de las exponenciales complejas discretas. Recordemos que hemos denotado a la familia de exponenciales periódicas o componentes armónicas como

$$\Phi_k\left[\frac{nT}{N}\right] = \exp\left[j2\pi\frac{nk}{2N}\right]$$

y hemos demostrado la *relación de ortogonalidad* entre dos componentes armónicas cualesquiera $\Phi_p, \Phi_k$

$$\sum_{n=-N}^{N-1} \Phi_k\left[\frac{nT}{N}\right]\bar{\Phi}_p\left[\frac{nT}{N}\right] = \begin{cases} 2N k = p \\ 0 k \neq p \end{cases}$$

Ahora, consideremos el dominio continuo [*-T, T*], donde cada componente armónica es periódica de período 2*T*. De la anterior expresión,

$$\frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1} \Phi_k\left[\frac{nT}{N}\right]\bar{\Phi}_p\left[\frac{nT}{N}\right] = \begin{cases} 1 & k = p \\ 0 & k \neq p \end{cases}$$

o también, dado que $nT/N = dt$,

$$\frac{1}{2T}\sum_{n=-N}^{N-1} \Phi_k[ndt]\bar{\Phi}_p[ndt]dt = \begin{cases} 1 & k = p \\ 0 & k \neq p \end{cases}$$

recordando que $t = \{ndt\}$,

$$\frac{1}{2T}\sum_{n=-N}^{N-1} \Phi_k[t]\bar{\Phi}_p[t]dt = \int_{-T}^{T} \Phi_k[t]\Phi_p[t]dt = \begin{cases} 1 & k = p \\ 0 & k \neq p \end{cases}$$

que es precisamente !la relación de ortogonalidad de las componentes exponenciales periódicas en dominio continuo! Siempre se dice que la propiedad de ortogonalidad no es un atributo sólo del continuo, sino del discreto. Pues bien, aquí lo hemos demostrado.

## TRANSFORMADA DE LA DELTA DE DIRAC

Dado el interés que tiene la delta de Dirac como una de las principales funciones generalizadas, seguiremos paso a paso el conjunto de transformaciones que ocurren en su tránsito del discreto al continuo. Supongamos que expresamos la delta de Dirac periódica en el dominio temporal discreto, o en otras palabras, que ella es la forma de onda,

$$\delta\left[\frac{nT}{N}\right]=\begin{cases}\frac{N}{T}n=0\\ 0n\neq 0\end{cases}$$

Si $T$ es finito y $N$ infinito,

$$\delta[ndt]=\begin{cases}\frac{1}{dt}n=0\\ 0n\neq 0\end{cases}$$

Para calcular la transformada discreta de la función δ, procedemos así:

$$\Delta\left[\frac{k}{2T}\right]=\frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1}\delta\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{2N}\right)=\frac{1}{2N}\frac{N}{T}=\frac{1}{2T}$$

O sea que su espectro de frecuencia es constante. ¿Cual es el desarrollo en serie de la delta de Dirac periódica? Muy sencillo. Utilizando la fórmula similar para el coeficiente de Fourier

$$\Delta[kf_0]=\frac{1}{2T}\sum_{n=-N}^{N-1}\delta[ndt]\exp(-j2\pi ndtkf_0)dt$$

como sólo sobrevive el valor correspondiente a la posición $n = 0$, nuevamente

$$\Delta[kf_0]=\frac{1}{2T}$$

porque el coeficiente de Fourier coincide con la transformada discreta, sólo que el dominio temporal es continuo. De modo que la serie de Fourier es

$$\delta[t]=\frac{1}{2T}\sum_{k=-N}^{N-1}\exp(-j2\pi tkf_0)$$

Esta suma puede separarse en dos partes. Cuando $k = 0$, y cuando $k \neq 0$. En el segundo caso, se anulan los *senos* y se preservan los *cosenos*, luego

$$\delta[t] = \frac{1}{2T} + \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{\infty}\cos(2\pi t k f_0)$$

Hay que tener mucho cuidado en el cálculo de la transformada integral de la función δ, dado que la transformada es el múltiplo $2T$ del coeficiente de Fourier, donde $T$ es infinito y $T << N$. Como $\Delta[kf_0] = \Delta[kdf] = \frac{1}{2T}$, entonces,

$$\hat{\Delta}(f) = 2T\Delta[kdf] = 1.$$

Este resultado es francamente impresionante, puesto que corresponde al cálculo de la transformada integral de Fourier de la *delta de Dirac* de dominio continuo, $\hat{\Delta}(f) = 2T\,\Delta[f] = 1$, que es una expresión exacta, aunque de muy difícil explicación en un libro de texto convencional.

Dado el interés que tiene la delta de Dirac como una de las principales [illegible] [illegible], [illegible] que aparece el [illegible] de transfor-[illegible] [illegible]. Supongamos que [illegible] la delta de Dirac periódica en el dominio temporal discre-[illegible]

[illegible]

es,

Si T es finito y N infinito,

[illegible]

Para [illegible]

$$\Delta\left[\frac{k}{2T}\right] = \frac{1}{2N}\sum \delta\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{2N}\right) = \frac{1}{2N}\frac{N}{T} = \frac{1}{2T}$$

O sea que el espectro de frecuencia es constante. ¿Y cuál es el desarrollo en serie de la delta de Dirac periódica? Muy sencillo. Utilizando la fórmula similar para el coeficiente de Fourier

$$\Delta[f_k] = \frac{1}{2T}\sum \delta(nt)\exp(-j2\pi nkf_s)dt$$

como sólo subsiste el valor correspondiente a la posición n = 0, tenemos:

$$\Delta[f_k] = \frac{1}{2T}$$

porque el coeficiente de Fourier coincide con la transformada discreta, sólo que el dominio temporal es continuo. De modo que la serie de Fourier es:

$$\delta(t) = \frac{1}{2T}\sum \exp(-j2\pi k t f_s)$$

Capítulo 11

# La onda cuadrada y su transito al continuo

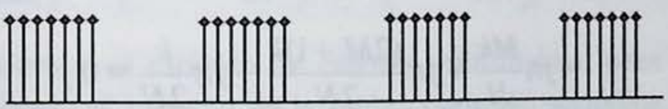
Vamos a colocar un ejemplo típico para un taller experimental en el aula de clase. Mostraremos cómo de la manera más natural posible, la onda cuadrada periódica realiza el tránsito desde el discreto hasta el continuo. Esta es una ilustración de que se puede convertir la transformada discreta de Fourier en serie de Fourier y ambas, en la transformada integral de Fourier, conciliando mínimas normas de rigor con la didáctica.

## La onda cuadrada periódica discreta

Sea $T$ finito, $N$ entero finito y $M$ entero que cumple $0 < M < N$. *La onda cuadrada periódica discreta de duración* $2M$ es la función p[nT/N] definida como

$$p\left[\frac{nT}{N}\right] = \begin{cases} 0 & -N \le n < -M \\ 1 & -M \le n \le M \\ 0 & M < n < N \end{cases}$$

La gráfica es



Su transformada discreta $P[k/2T]$ es[1,2]

1 E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall, Inc. ,1974.

2 B. P. Lathi, *Introducción a la teoría y Sistemas de Comunicación*, Limusa, 1974.

$$P\left[\frac{k}{2T}\right]=\frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1} p\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{2N}\right)=$$

$$\frac{1}{2N}\sum_{n=-M}^{M}\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{2N}\right)=$$

$$\frac{1}{2N}\exp\left(j2\pi\frac{Mk}{2N}\right)\sum_{n=o}^{2M}\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{2N}\right)$$

La suma de la derecha se puede calcular del modo siguiente:

$$\sum_{n=o}^{2M}\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{2N}\right)=\frac{1-\exp\left(-j2\pi\frac{(2M+1)k}{2N}\right)}{1-\exp\left(-j2\pi\frac{k}{2N}\right)}$$

Como 2 j sen $\alpha$ = exp (ja) - exp (-j$\alpha$), tenemos que exp (j$\alpha$) (-2 j ) sen $\alpha$ = 1 - exp (j2$\alpha$). Haciendo $\alpha$ = -j$\pi$ (2M+1)k/2N y sustituyendo,

$$\frac{1-\exp\left(-j2\pi\frac{(2M+1)k}{2N}\right)}{1-\exp\left(-j2\pi\frac{k}{2N}\right)}=\frac{-2j\exp\left(-j\pi\frac{(2M+1)k}{2N}\right)sen\left(\pi\frac{(2M+1)k}{2N}\right)}{-2j\exp\left(-j\pi\frac{k}{2N}\right)sen\left(\pi\frac{k}{2N}\right)}$$

y como

$$-j\pi\frac{Mk}{N}+j\pi\frac{(2M+1)k}{2N}-j\pi\frac{k}{2N}=0\,,$$

la transformada discreta de Fourier es

$$P\left[\frac{k}{2T}\right]=\frac{1}{2N}\,\frac{sen\pi\,\frac{(2M+1)k}{2N}}{sen\,\frac{\pi k}{2N}}$$

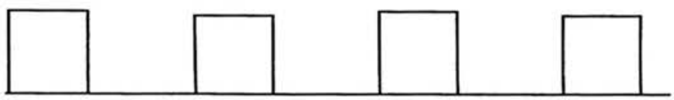
Obsérvese que $P[k/2T]$ no depende explícitamente de $T$ sino de la duración de la onda dada por $2M$ y del número de elementos $2N$ del dominio. La variable $k$ se mantiene estrictamente en el rango $-N \leq k < N$.

## CONVERSIÓN EN ONDA PERIÓDICA CONTINUA

Vamos a dejar de lado, por un momento, el dominio discreto, para considerar ahora la *onda cuadrada periódica de dominio continuo* y *duración 2a* que está representada por la función

$$p_a(t) = \begin{cases} 0 & -T \leq t < -a \\ 1 & -a \leq t \leq a \\ 0 & a < t < T \end{cases}$$

La gráfica es



Para calcular los coeficientes de Fourier[3] verificamos que

$$C_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} p_a(t) \exp\left(-j2\pi t \frac{k}{2T}\right) dt = \frac{1}{2T} \int_{-a}^{a} \exp\left(-j2\pi t \frac{k}{2T}\right) dt$$

si $k \neq 0$,

$$C_k = -\frac{1}{j2\pi k} \left\{ \exp\left(-j2\pi a \frac{k}{2T}\right) - \exp\left(j2\pi a \frac{k}{2T}\right) \right\} = \frac{1}{\pi k} sen 2\pi a \frac{k}{2T}$$

Ahora utilizaremos el modelo de cálculo infinitesimal para unir los dos procesos, realizando el tránsito de la onda cuadrada periódica discreta a la onda cuadrada periódica de dominio continuo, mediante la conversión de la transformada discreta de Fourier en serie de Fourier. Volvamos a la expresión de la transformada discreta

3 R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill Book Company, 1965.

$$P\left[\frac{k}{2T}\right]=\frac{1}{2N}\frac{sen\pi\,\dfrac{(2M+1)k}{2N}}{sen\,\dfrac{\pi k}{2N}}$$

Mantengamos *T* finito y hagamos *N* entero infinito. La variable temporal *t* opera en el continuo $t=\{ndt\}$, donde *dt* es una cantidad infinitesimal. La última posición temporal de dicha variable donde la onda no se anula es $a = Mdt$, para $0 < a < T$, y $M < N$. Ahora, una consideración crucial. A diferencia de *n*, que es cualquier entero hiperreal, para la frecuencia sólo interesa la altura k finita, ya que vamos a calcular el k-ésimo coeficiente de la serie de Fourier. Teniendo en cuenta que $a = Mdt$, $2a = 2Mdt$, por tanto,

$$2M=2a\frac{N}{T}$$

$$2M+1=2a\frac{N}{T}+1$$

$$(2M+1)\frac{k}{2N}=\frac{ak}{T}+\frac{k}{2N}$$

Reemplazando en la transformada discreta $P[k/2T]$, obtenemos,

$$P\left[\frac{k}{2T}\right]=\frac{1}{2N}\frac{sen\left(\pi a\dfrac{k}{T}+\dfrac{k}{2N}\right)}{sen\pi\,\dfrac{k}{2N}}$$

En la expresión anterior, como *N* es infinito y *k* es finito, $k/2N$ es infinitesimal, y como la función *seno* es continua, su valor en $\pi ak/T+k/2N$ estará infinitamente cerca de su valor en $\pi ak/T$. De otra parte, como $\pi k/2N$ es infinitesimal, el valor del *seno* en tal argumento estará infinitamente cerca de tal argumento. Por eso,

$$P\left[\frac{k}{2T}\right]=\frac{1}{2N}\frac{sen\left(\pi a\dfrac{k}{T}+\dfrac{k}{2N}\right)}{sen\pi\,\dfrac{k}{2N}}\approx\frac{1}{2N}\frac{sen\pi a\,\dfrac{k}{T}}{\pi\,\dfrac{k}{2N}}=\frac{1}{\pi k}\,sen2\pi a\,\frac{k}{2T}$$

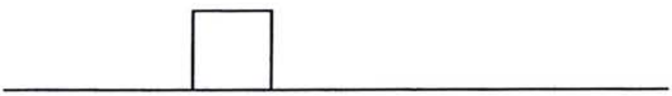
Pero este es !precisamente el coeficiente de Fourier del pulso periódico sobre el dominio continuo!.

## CONVERSIÓN EN ONDA CUADRADA NO PERIÓDICA

Finalmente, vamos a considerar *la onda cuadrada no periódica p(t)* de dominio continuo y de duración finita $2a$. Su representación funcional es

$$p\ (t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < -a \\ 1 & -a \le t \le a \\ 0 & a < t < \infty \end{cases}$$

La gráfica correspondiente es:



Nuevamente, de acuerdo al método tradicional, la transformada *P(f)* de Fourier de *p(t)* es

$$P(0)) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = 2a$$

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\exp(j2\pi tf)dt = \int_{-a}^{a} \exp(j2\pi tf)dt =$$

$$\frac{1}{-j2\pi f}\{\exp(-j2\pi af) - \exp(j2\pi af)\} = \frac{1}{\pi f} sen 2\pi a f = 2a \frac{sen 2\pi af}{2\pi af}$$

Ahora, con el método indicado, nos disponemos a hacer el tránsito de la onda cuadrada periódica a la onda cuadrada no periódica. Para ello, recordemos nuevamente que

$$P\left[\frac{k}{2T}\right] = C_k = \frac{1}{\pi k} sen 2\pi a \frac{k}{2T}$$

Hacemos $T$ infinito, y lo escogemos de modo tal que $T/N$ siga siendo infinitesimal, o sea, $T << N$. Obviamente, como $T/N = dt$, se preservan todos los cálculos hechos anteriormente. Recordemos que la variable $f = k/2T$. Pero ahora $1/2T$ es infinitesimal y $k$ es cualquier entero hiperreal, luego $1/2T = df$, por lo que $f=kdf$. Entonces

$$2T\,P[kdf] = \frac{2T}{\pi k} sen 2\pi akdf = \frac{1}{\pi kdf} sen 2\pi akdf$$

y dado que la función *seno* es continua, $\text{sen}2\pi akdf \approx \text{sen}2\pi af$. Reemplazando,

$$P(f) = 2T\,C_k \approx \frac{1}{\pi f} sen 2\pi a f$$

Pero !ésta es la transformada de Fourier del pulso no periódico!. Hay dos fórmulas de conversión que no deben pasar inadvertidas: $C_k = P[kdf]$, que convierte la transformada discreta de Fourier en serie de Fourier; y $P(f) = 2T\,C_k$, que convierte la serie de Fourier en transformada integral de Fourier.

Capítulo 12

# La transformada discreta de Laplace

Uno de los operadores más conocidos en el análisis matemático es la transformada de Laplace. Es tal la transformación que ocurre con las funciones bajo su dominio, que las operaciones de derivación e integración del Cálculo se convierten en operaciones algebraicas de multiplicación y división, lo que facilita enormemente la solución de cierto tipo de ecuaciones diferenciales. La transformada de Laplace es un operador del dominio continuo, y no se conoce una versión discreta, como sí hemos visto en el caso de la transformada discreta en el análisis de Fourier. Aquí tenemos la oportunidad de inventarla, y demostrar que bajo un modelo infinitesimal de cálculo, la transformada discreta de Laplace no es otra cosa que la transformada de Laplace. Esperamos que el lector juzgue la ventaja didáctica de tal enfoque, hasta ahora, sólo accesible a los especialistas en la materia.

## La transformada de Laplace

Como es de todos sabido[1], la transformada de Laplace es el operador L que actúa sobre funciones $x(t)$ de dominio continuo $[0, \infty)$ convirtiéndolas en funciones $X(s) = \mathrm{L}\{x(t)\}$ del mismo dominio, donde

$$X(s) = \int_0^\infty x(t) \exp(-ts) dt$$

Esta integral existe para un conjunto muy apreciable de funciones, particularmente, para las llamadas de orden exponencial, que son aquellas que cumplen la condición

1 C. H. Edwards, Jr., D. E. Penney, *Ecuaciones diferenciales Elementales con Aplicaciones*, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., 1986.

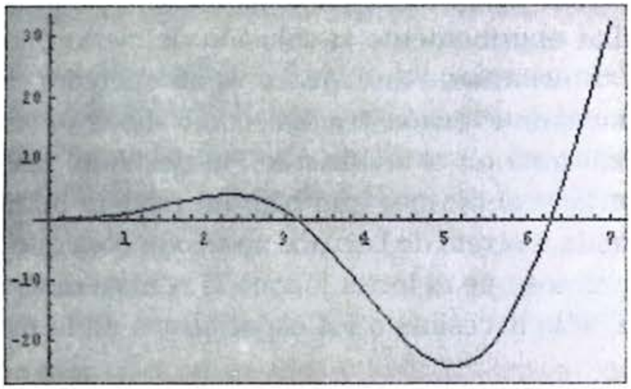
$$x(t) \leq A\exp(at), \quad 0 \leq t < \infty$$

Fácilmente se puede verificar que satisfacen tal condición las funciones polinomiales y racionales, las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas y sus combinaciones. El siguiente ejemplo muestra el cálculo de la transformada de Laplace de la función, mediante el programa *Mathematica,* función que llamaremos *entrada,*

```
entrada[t_]:=t^2 Sin[t]
```

La gráfica de *entrada* en el intervalo [0, 7] es la siguiente:

```
Plot[entrada[t],{t,0,7}]
```




La transformada de Laplace de tal función la llamaremos *prueba*,

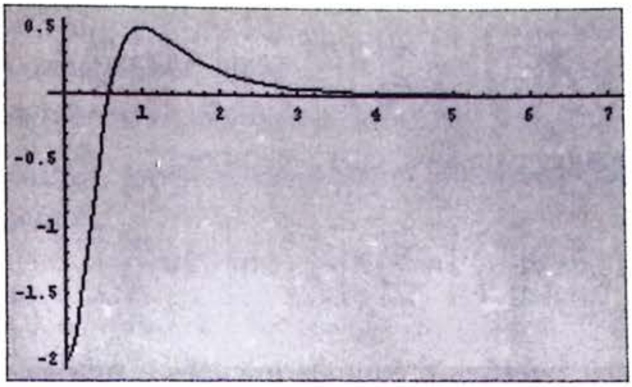
```
<<Calculus'LaplaceTransform'
prueba[s_]:=LaplaceTransform[entrada[t],t,s]
```

Cuya transformada de Laplace es, efectivamente,

$$\frac{8s^2}{\left(1+s^2\right)^3}-\frac{2}{\left(1+s^2\right)^2}$$

La gráfica de *prueba* en el mismo intervalo [0,7] es,

```
Plot[prueba[s],{s,0,7}]
```




Nos hacemos la pregunta: ¿podemos hacer tales transformaciones por medios discretos? O más exactamente: ¿existe la transformada discreta de Laplace?

## La transformada discreta de Fourier

Para aclarar más el par de preguntas formuladas, vamos a actuar de modo análogo, haciendo uso del análisis de Fourier hasta ahora estudiado. Recordemos que la transformada de Fourier es el operador $\Im$ que actúa sobre funciones $x(t)$ de dominio continuo $(-\infty, \infty)$ convirtiéndolas en funciones $X(f) = \Im\{x(t)\}$ del mismo dominio, donde

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi tf)dt$$

También hemos visto que existe una versión discreta de la transformada de Fourier, denominada transformada discreta de Fourier, que ahora es conveniente definirla en el dominio real positivo. Sea $T > 0$ un real cualquiera y $N$ un entero positivo; seleccionemos del intervalo $[0, T]$ el dominio discreto de $N$ números reales $\{nT/N\}$. De otra parte, del intervalo $[0, N/T]$, seleccionemos el dominio discreto $\{k/T\}$, donde $0 \leq n, k, < N$. Tenemos así los dos dominios usuales, el primero, temporal, y el segundo, frecuencial.

Dada una función de dominio discreto temporal $x[nT/N]$ con $N$ muestras, se define la transformada discreta de Fourier a la función $X[k/T]$ de dominio frecuencial positivo,

$$X\left[\frac{k}{T}\right]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left[-j2\pi\frac{nk}{N}\right]$$

La transformación inversa es, como siempre,

$$x\left[\frac{nT}{N}\right]=\sum_{k=0}^{N-1}X\left[\frac{k}{T}\right]\exp\left[j2\pi\frac{nk}{N}\right]$$

Podemos reducir nuestras preguntas iniciales a una sola pregunta: ¿Es posible construir una versión discreta de la transformada de Laplace que cumpla un papel similar al que cumple la versión discreta de la transformada de Fourier?

## La transformada discreta de Laplace

Volvamos nuevamente a la definición de transformada de Laplace. Obsérvese que en la expresión

$$X(s)=\int_0^\infty x(t)\exp(-ts)dt$$

podemos suponer que la variable $s$ hace el papel de variable de la frecuencia; como el dominio temporal lo sigue recorriendo la variable $t$, mantendremos los dominios discretos temporal y frecuencial $\{nT/N\}$ y $\{k/T\}$, respectivamente. Ahora, el exponente de la exponencial es el producto $t\times s$ de ambas variables, por lo que en la versión discreta tendrá que corresponderse con el producto $(nT/N)(k/T)$. Teniendo en cuenta que

$$\frac{nT}{N}\frac{k}{T}=\frac{nk}{N}$$

dada una función x$[nT/N]$ del dominio temporal, definiremos *la transformada discreta de Laplace* XL$[k/T]$ como la función discreta

$$XL\left[\frac{k}{T}\right]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left[-\frac{nk}{N}\right]$$

Hemos utilizado la expresión XL para distinguir la transformada discreta de Laplace de la transformada discreta de Fourier. El parecido de aquella con ésta es grande, salvo que la segunda asume valores reales, no complejos.

Vamos a colocar un ejemplo. Supongamos que tenemos dominios de sólo dos valores, digamos,

$$\left\{0, \frac{1}{2}\right\}, \quad \{0,1\}, \quad T=1, \quad N=2, \quad 0 \leq n, k < 2,$$

Toda función sobre el primer dominio tendrá valores $x[0], x\left[\frac{1}{2}\right]$. Entonces, la transformada discreta de Laplace es la función sobre el segundo dominio,

$$XL[0]=\frac{1}{2}x[0]+\frac{1}{2}x\left[\frac{1}{2}\right]$$
$$XL[1]=\frac{1}{2}x[0]+\frac{1}{2}x\left[\frac{1}{2}\right]\frac{1}{e}$$

Aparentemente, esto no brinda mucha información. Pero podemos colocar un ejemplo de mayor complejidad, utilizando nuevamente *Mathematica*, para mostrar la ventaja teórica y didáctica que tiene el método anterior.

## La versión discreta del continuo

Consideremos los dominios temporal y frecuencial

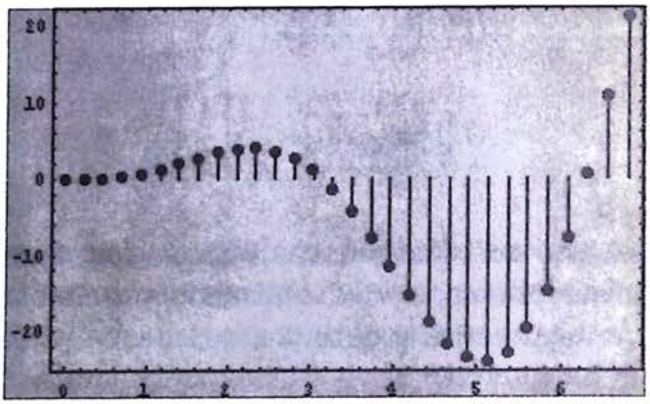
$$\left\{\frac{7n}{30}\right\}, \left\{\frac{k}{7}\right\}, \quad T=7, \quad N=30, \quad 0 \leq n, k < 30$$

y al primero como dominio de la función $\left(\frac{7n}{30}\right)^2 sen\frac{7n}{30}$ que es la versión discreta de la familiar función de dominio continuo $t^2\, sent$, cuya gráfica y transformada de Laplace ya hemos calculado y graficado. Llamaremos *ejemplo* a dicha función.

```
ejemplo[n_]:=(7n/30)^2 Sin[7n/30]
```

Su gráfica es,

```
Show[
Graphics[{PointSize[0.02],
Table[{Line[{{n 7/30,0},{n 7/30,ejemplo[n]}
}],
Point[{n 7/30,ejemplo[n]}]},{n,0,29}]
}],PlotRange->All,Frame->True];
```



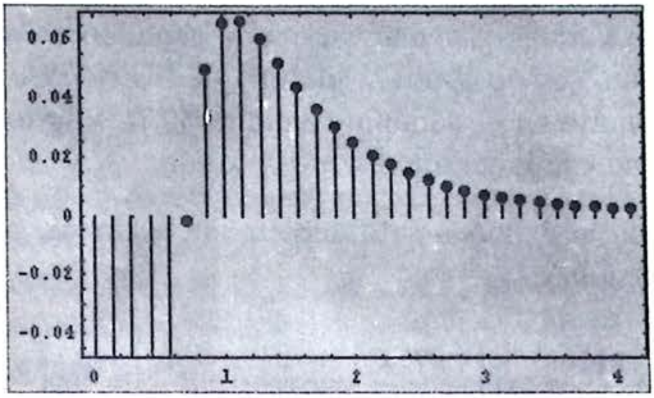

Para calcular su transformada discreta de Laplace, llamémosle *núcleo* al factor exponencial,

```
nucleo[{n_,k_}]:=Exp[(-n k)/30]
```

La transformada discreta de Laplace será la función llamada *discreto*, definida por,

```
discreto[k_]:=1/30Sum[ejemplo[n]nucleo[{n,k}],
{n,0,29}]
```

Su gráfica es




Nótese el parecido de ambas gráficas con sus homólogas continuas. El lector puede abundar en ejemplos, utilizando las mismas instrucciones de *Mathematica* y cambiando sólo las funciones de dominio discreto con sus respectivas transformadas.

## TRÁNSITO DEL DISCRETO AL CONTINUO

La demostración de que la transformada discreta de Laplace, en el límite, es la transformada de Laplace, puede ser extremadamente simple o supremamente difícil. Todo depende, de lo que entendamos por *el límite*. En lo que a nosotros respecta, usaremos el *MicroCálculo*, que utiliza infinitesimales para producir el tránsito de los modelos discretos a los modelos continuos de cálculo.

Como es usual, el punto de partida será el par de dominios determinados por $T > 0$ y $N$ entero; definiremos las variables discretas $t$ y $s$ como las variables que recorren los $N$ valores sucesivos de tales dominios,

$$t = \left\{ \frac{nT}{N} \right\}, \quad s = \left\{ \frac{k}{T} \right\}, \quad 0 \leq n, k < N$$

Si $T$ es finito y $N$ entero finito, como hasta ahora hemos supuesto, tenemos los dominios discretos finitos de $N$ elementos. Ambas variables $t$ y $s$ son discretas. En cambio, una nueva situación se produce si mantenemos $T$ como real finito pero hacemos N entero infinito; en ese caso, el cociente $T/N$

será infinitesimal, lo que hemos denotado como $T/N = dt$; por tanto, la variable temporal estará dada por los valores sucesivos $t = \{ndt\}$. Obsérvese que $t$ es una variable *continua* del intervalo continuo $[0, T]$, mientras que $s$ sigue siendo una variable discreta, ya que la cantidad $1/T$ es un real ordinario. En resumen, como $t$ asume cada uno de los valores $ndt$, el dominio temporal se convierte en el dominio continuo, $[0,T]$, y la función $x(ndt)$ ya no es discreta sino continua, esto es, $x(t) = x(ndt)$.

Los cambios en la exponencial también son notables, pues ocurrirá la siguiente conversión,

$$\exp\left[-\frac{nk}{N}\right] = \exp\left[-\frac{nT}{N}\frac{k}{T}\right] = \exp\left[-ndt\frac{k}{T}\right] = \exp\left[-t\frac{k}{T}\right]$$

El tránsito de la transformada discreta de Laplace del dominio discreto al continuo, será,

$$XL\left[\frac{k}{T}\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[ndt]\exp\left[-ndt\,\frac{k}{N}\right] = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} x(t)\exp\left(-t\frac{k}{T}\right)dt$$

Pero la suma de la derecha no es otra cosa que una integral definida sobre el intervalo $[0, T]$, por lo que podemos considerar, para cada $k$ un coeficiente dado por,

$$C_k = XL\left[\frac{k}{T}\right] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\exp\left(-t\frac{k}{T}\right)dt$$

Recordemos que la variable temporal $t$ recorre el intervalo finito $[0, T]$. Para calcular la transformada de Laplace, es necesario considerar el intervalo $[0, \infty)$. Para ello, hacemos ahora $T$ real infinito y $N$ entero infinito tal que el cociente $T/N$ todavía siga siendo infinitesimal.

Como $1/T$ es infinitesimal, hacemos $1/T = ds$, por lo que la variable $s$ recorrerá cada uno de los valores $kds$, y el dominio frecuencial discreto se convierte en dominio continuo de integración $[0, \infty)$. Hacemos ahora el cambio crucial,

$$X(s) = TC_k$$

reemplazando, obtenemos la transformada de Laplace,

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \exp(-ts) dt$$

que es el resultado que queríamos mostrar, que explica la conversión de la transformada discreta de Laplace en transformada de Laplace.

## Desarrollo en serie de Laplace

El paso intermedio mediante el cual el dominio discreto temporal se convierte en dominio continuo temporal ha producido una nueva situación que no podemos dejar pasar desapercibida. Se trata del coeficiente

$$C_k = XL\left[\frac{k}{T}\right] = \frac{1}{T}\int_0^{T} x(t) \exp\left(-t\frac{k}{T}\right) dt$$

que sugiere la aparición de una serie asociada a la función original *x(t)*. Esta situación no es extraña, ya que en el análisis de Fourier, hay un proceso muy similar cuando la transformada discreta se estudia como discretización de la serie de Fourier y ésta como paso intermedio de la transformada de Fourier. En efecto, hay una profunda relación entre la transformada discreta de Laplace y la transformada discreta de Fourier, como se puede ver a continuación. Dado que la transformada discreta de Laplace es

$$XL\left[\frac{k}{T}\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x\left[\frac{nT}{N}\right] \exp\left[-\frac{nk}{N}\right]$$

evaluemos la transformada discreta en el dominio complejo, sobre la recta imaginaria $j2\pi k$. Entonces,

$$XL\left[j2\pi\frac{k}{T}\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x\left[\frac{nT}{N}\right] \exp\left[-j2\pi\frac{nk}{N}\right]$$

Pero la expresión de la derecha no es otra cosa que la transformada discreta de Fourier de la función original. Luego,

$$XL\left[j2\pi\frac{k}{T}\right] = X\left[\frac{k}{T}\right]$$

y como la transformada discreta de Fourier tiene transformada inversa, obtenemos la expresión

$$x\left[\frac{nT}{N}\right]=\sum_{k=0}^{N-1} XL\left[j2\pi\frac{k}{T}\right]\exp\left[j2\pi\frac{nk}{N}\right]$$

que es !la fórmula de la transformada discreta inversa de Laplace! De allí que, si quisiéramos obtener un desarrollo en serie de la función original, necesariamente el coeficiente

$$C_k = XL\left[\frac{k}{T}\right]=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\exp\left(-t\frac{k}{T}\right)dt$$

que corresponde a una transformación inversa en la serie de Fourier, tendría que evaluarse en,

$$C_{j2\pi k} = XL\left[j2\pi\frac{k}{T}\right]=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\exp\left(-j2\pi t\frac{k}{T}\right)dt$$

El lector reconocerá en esta expresión, el *k*-ésimo coeficiente de Fourier de la respectiva serie de Fourier de la función *x(t)*. En otras palabras, la serie de Laplace, correspondiente a la transformada discreta de Laplace, existe, y no es otra cosa que la familiar serie de Fourier.

## Capítulo 13

# Muestreo y recuperación de señales

Uno de los resultados más espectaculares de la teoría de señales en el que las series de Fourier y la transformada de Fourier muestran toda su potencialidad, es el llamado *teorema del muestreo de Shannon*. Básicamente, dice que toda señal de duración finita y banda limitada puede reconstruirse a partir de un número finito de sus muestras. Además de sus extensas aplicaciones, se han abierto intensas polémicas sobre algunas situaciones paradójicas creadas por el hecho de que, matemáticamente, no es posible que una señal sea simultáneamente de duración finita y banda limitada.

Tradicionalmente, el teorema del muestreo se estudia como un fenómeno de reconstrucción del continuo por medios discretos. Pero nosotros vamos a llegar mucho más allá. Precisamente, uno de los principales resultados originales, que aquí publicamos, es que el origen mismo del teorema del muestreo es discreto y que es posible realizar su conversión del discreto al continuo, a la luz del MicroCálculo.

### El enunciado de Shannon

El teorema del muestreo como fue enunciado por Shannon es el siguiente:

> ***Teorema:*** *Si una función f(t) no contiene frecuencias superiores a W cps, está completamente determinada dada sus ordenadas en una serie de puntos separados 1/2W segundos entre sí*[1].

1 C. E. Shannon, «Communication in the presence of noise» *Proceedings of the Institute of Radio Engeniers IRE*, vol. 37 #1, jan. 1949, pags. 10-21.

Mucho más recientemente[2], al conocerse similares contribuciones de diversos autores, este resultado ha sido denominado teorema WKS del muestreo, en honor a Whittakers, Shannon y Kotel´nikov. Como en los textos de análisis de Fourier existen muchas diferencias notacionales, es necesario aquí mantener una sóla, que es lo que hemos venido haciendo, pero es interesante que el lector lea directamente las fuentes bibliográficas, dada la diversidad de temas que están involucrados.

Siguiendo al autor y a algunos de estos textos[3,4,5] podemos formular el teorema así: sea $x(t)$ una función tal que existe su transformada de Fourier $X(f)$ y ésta cumple con la condición $|X(f)| = 0$ fuera del intervalo $[-W, W]$, entonces $x(t)$ se puede expresar como

$$x(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x\left[\frac{q}{2W}\right] \frac{Sen\pi(2Wt-q)}{\pi(2Wt-q)}$$

Los puntos $x[q/2W]$ se denominan las *muestras* de la función en el tiempo $q/2W$ (precisamente colocamos la letra $q$ como muestra temporal, para distinguirla de la letra $t$, que corresponde a la variable de todo el intervalo de tiempo). La frecuencia $W$ se llama el *ancho de banda*. La funciones $x(t)$ para las cuales su espectro cumple $|X(f)| = 0$ siempre que $|f| \geq W$, se denominan *señales de banda limitada* y se dice que son *recubiertas* por sus muestras. El intevalo crítico en el dominio de la frecuencia $[-W, W]$ por fuera del cual no se garantiza el recubrimiento, se denomina *intevalo de Nyquist*.

## LA PARADOJA DEL ANCHO DE BANDA

El propio Shannon, en el artículo mencionado, involucra a un tipo de señal denominada de *duración finita*, que consiste en aquellas funciones $x(t)$ que se anulan fuera de un intervalo $[0, T]$. Y afirma:

---

2 A. J. Jerri, «The Shannon Sampling Theorem-Its various Extensions and Applications: A Tutorial Review» *Proceedings of the IEEE*, vol. 65, No. 11, nov. 1977.

3 E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice Hall, 1988.

4 H. P. Hsu, *Analisis de Fourier*, Fondo Educativo Interamericano,1970.

5 G. B. Folland, *Fourier Analysis and Its Applications*, Wadsworth & Brooks/Cole, Mathematics Series, 1992.

> *Si la función está limitada al intervalo temporal T y las muestras están espaciadas 1/2W segundos entre sí, habrá un total de 2TW muestras en el intervalo ... ... Entonces podemos decir que cualquier función limitada al ancho de banda W y al intervalo temporal T puede ser especificada dando 2TW números.*

¿Existe una función de duración finita y banda limitada que no sea la función nula? Por un resultado de Palay y Wiener[6], la respuesta es negativa. Básicamente, esto se debe a que la transformada de Fourier de toda función de banda limitada puede extenderse analíticamente al dominio complejo, de modo que si se anula en un intervalo temporal, se anula en toda la recta[•]. Resulta paradógico que, teóricamente, no es posible que exista una función de duración finita y banda limitada, y en la práctica, todas lo sean, como lo comprueba el procesamiento digital de señales, que hace ampliamente aplicable el teorema del muestreo[7]. El lector interesado puede seguir la intensa y productiva polémica en los trabajos de Slepian[8].

## DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL MUESTREO

La demostración es muy similar en todos los libros de texto. Además de la descripción que presentamos, recomendamos seguir la de Hubbard[9]. Dado que *X(f)* se anula fuera del intervalo [-*W, W*], su transformada de Fourier inversa es

$$x(t) = \int_{-W}^{W} X(f)\exp(j2\pi tf)df$$

Por otro lado, como *X(f)* sólo está definida en el intervalo [-*W, W*], podemos extenderla periódicamente a toda la recta definiendo $X(f + 2W) = X(f)$. Esto nos permite desarrollarla como serie compleja de Fourier en el dominio de la frecuencia, con su respectivo coeficiente de Fourier,

6 R. E. A. C. Palais, N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Am. Math. Soc., 1934.

• En próximo capítulo explicamos esta extensión analítica.

7 J. Monforte, «The Digital Reproduction of Sound» *Scientific American*, 251 (6): 78, 1986.

8 D. Slepian, «On Bandwidth» *Proceedings of the IRE*, Vol. 64, No. 3, March. 1976.

9 B. B. Hubbard, *The World According to Wavelets*, A K Peters, Wellesley, Mass. 1996.

$$X(f)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}C_q\exp\left(-j2\pi\frac{q}{2W}f\right),$$

$$C_q=\frac{1}{2W}\int_{-W}^{W}X(f)\exp\left(j2\pi\frac{q}{2W}f\right)df$$

Obsérvese la similitud de dicho coeficiente de Fourier con el valor de la función x*(t)* en el tiempo muestreado *q/2W*, que produce la identidad

$$x\left[\frac{q}{2W}\right]=\int_{-W}^{W}X(f)\exp\left(j2\pi\frac{q}{2W}f\right)df=2WC_q$$

La expansión en serie de Fourier puede reescribirse como

$$X(f)=\frac{1}{2W}\sum_{q=-\infty}^{\infty}x\left[\frac{q}{2W}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{q}{2W}f\right)$$

por lo que, al reemplazar en la función x*(t)* esta expansión, se obtiene

$$x(t)=\frac{1}{2W}\int_{-W}^{W}\left\{\sum_{q=-\infty}^{\infty}x\left[\frac{q}{2W}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{q}{2W}f\right)\right\}\exp(j2\pi tf)df$$

$$=\frac{1}{2W}\sum_{q=-\infty}^{\infty}x\left[\frac{q}{2W}\right]\left\{\int_{-W}^{W}\exp\left(j2\pi\left(t-\frac{q}{2W}\right)f\right)\right\}df$$

$$=\sum_{q=-\infty}^{\infty}x\left[\frac{q}{2W}\right]\frac{Sen2\pi W\left(t-\frac{q}{2W}\right)}{2\pi W\left(t-\frac{q}{2W}\right)}$$

o si se prefiere, reordenando los términos entre paréntesis, la expresión familiar

$$x(t)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}x\left[\frac{q}{2W}\right]\frac{Sen\pi(2Wt-q)}{\pi(2Wt-q)}$$

tal y como lo estableció Shannon.

## VERDADERO IMPACTO EN LA COMUNICACIÓN

El verdadero impacto del teorema del muestreo de Shannon es en la teoría de la comunicación, ya que las señales de banda limitada cuya información está registrada en un continuo, se pueden reemplazar por una sucesión discreta de sus muestras sin que haya pérdida sensible de la información. Esto es la base para la digitalización de señales. Entre otras aplicaciones, permite trasmitir miles de conversaciones telefónicas simultáneas por el cable de fibra óptica. Los *Compact Disks* están digitalizados bajo el mismo principio. Una de las extensas aplicaciones se encuentra en la tecnología de procesamiento de voz humana.

El procesamiento digital que ocurre en este último caso, es el siguiente. Al emitirse una expresión, frente al sensor –micrófono– del dispositivo digital, la materia sonora es registrada en dígitos binarios, con una frecuencia fija –la resolución de frecuencia– y un nivel de digitalización –cuantificación– que representan las muestras de voz tomadas durante muy pequeños intervalos fijos de tiempo. Como la materia muestreada tiene una duración finita, el total de dígitos registrados como cadena numérica, también es finito.

Experimentalmente, se puede comprobar que, en los humanos, las cuerdas vocales vibran a frecuencias que no sobrepasan un promedio superior a 5.500 ciclos por segundo (1 cps = 1 hertz). Por tanto, si una función representa la voz humana, esta función tiene una banda limitada a 5500 hertz y, como hemos visto, esta es la clave de la reconstrucción ya que será suficiente tomar el doble de muestras –11000 muestras– cada segundo para que la señal de voz sea reconstruída, o sea, que no se pierda la información. Aún 8000 muestras es una buena frecuencia de muestreo (intervalo crítico o de Nyquist, para la voz humana). El CD, que debe recuperar con alta calidad la totalidad de las frecuencias auditivas –no sólo las de voz– procesa la señal a 44000 muestras por segundo.

En el procesamiento de la imagen o en cualquier otro caso, la situación sólo difiere técnicamente de la naturaleza de la señal física, a la que por medios experimentales debe calculársele el intervalo de Nyquist. En la actualidad, casi todos los dispositivos digitales poseen programas de reconstrucción de la señal original, basados en el teorema del muestreo de Shannon y en la transformada rápida de Fourier, trátese de computadores, televisores, multimedia, cámaras de video, sismógrafos, tomografía computarizada, etc.

Si el fenómeno representado en el continuo es reproducible por medios discretos, surge la gran pregunta: ¿no podrá representarse este fenómeno desde el mismo discreto? Y mucho más allá: cual es la relación entre la versión discreta y la formulación de Shannon del teorema del muestreo? Aquí van a concentrarse nuestros esfuerzos con el MicroCálculo, en demostrar que hay un teorema del muestreo discreto, y que éste es exáctamente el mismo que el de Shannon, siempre que el fenómeno se inscriba en un modelo de cálculo con infinitesimales.

## MUESTREO EN EL DOMINIO DISCRETO

En la actualidad, existe una versión discreta del teorema del muestreo[10]. Lo original de nuestro enfoque es que la formulación la conduciremos hacia el modelo de cálculo infinitesimal, lo que permitirá, por vez primera que sepamos, descifrar el origen discreto del teorema del muestreo, o lo que es lo mismo, la posibilidad de realizar su tránsito del discreto al continuo. Queremos retener un par de conceptos que, de modo reiterado, hemos utilizado todo el tiempo. En primer lugar, dada $x[nT/N]$ una función de valores complejos sobre el dominio temporal $\{nT/N\}$, la función $X[k/2T]$ de valores complejos sobre el dominio frecuencial $\{k/2T\}$, está determinada por la relación

$$X\left[\frac{k}{2T}\right]=\frac{1}{2N}\sum_{k=-N}^{N-1}x\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{2N}\right),$$

donde

$$x\left[\frac{nT}{N}\right]=\sum_{k=-N}^{N-1}X\left[\frac{k}{2T}\right]\exp\left(j2\pi\frac{nk}{2N}\right).$$

10 W. Cooley, P. A. W. Lewis, P. D. Welch,. «The Finite Fourier Transform», *IEEE Transactions on audio and electroacoustics*, Vol. AU-17, No. 2, June 1969.

denominadas *transformada discreta de Fourier* y *transformada discreta inversa,* respectivamente. En segundo lugar, dado que los dominios son finitos de $2N$ elementos, podemos extender periódicamente tales funciones, para $n$ y $k$ enteros cualesquiera,

$$x\left[\frac{nT}{N}+2T\right]=x\left[\frac{nT}{N}\right],$$

$$X\left[\frac{k}{2T}+\frac{N}{T}\right]=X\left[\frac{k}{2T}\right]$$

La primera función es de período $2T$ en el dominio del tiempo, y la segunda, de período $T/N$ en el dominio de la frecuencia. El más relievable ejemplo de periodicidad que hemos visto es el de las *funciones exponenciales complejas discretas,* que al cumplir la condición

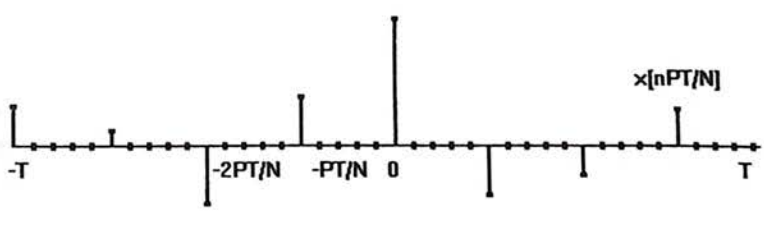
$$\exp\left(j2\pi\frac{(n+2N)k}{2N}\right)=\exp\left(j2\pi\frac{n(k+2N)}{2N}\right)=\exp\left(j2\pi\frac{nk}{2N}\right)$$

donde $n$ y $k$ son enteros cualesquiera, serán periódicas de período $2N$, en cada una de las variables $n, k$.

## FUNCIONES MUESTREADAS Y PERIODICIDAD

Supongamos que $N$ es entero finito y se puede factorizar como $N = MP$. Los dominios tendrán $2MP$ elementos. Una función $x[nT/N]$ se denomina *función muestreada –con 2M muestras–* si cumple la condición $x[nT/N] = 0$, cuando $n \neq qP$, $-M \leq q < M$. El calificativo de *función muestreada* proviene de que sus valores consisten en $P$-1 ceros consecutivos, salvo las $2M$ *muestras* que corresponden a los valores $x[qP/N]$, en el rango $-M \leq q < M$.

Dicha función se verá así en su dominio,



El espectro de frecuencias $X[k/2T]$ de una función muestreada se calcula del modo siguiente: cuando $n \neq qP$, los valores temporales de la función son nulos. Sea $n = qP$, entonces, para n = -**N**, tenemos $q = -M$. Para $n = N\text{-}1$, $q = M\text{-}1$. Aplicando la transformada discreta de Fourier y sustituyendo,

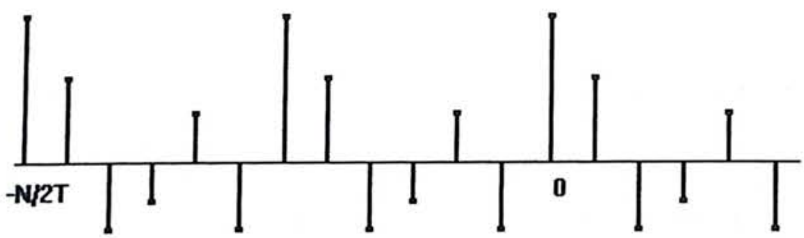
$$X\left[\frac{k}{2T}\right] = \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1} x\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{2N}\right)$$

$$= \frac{1}{2N}\sum_{q=-M}^{M-1} x\left[\frac{qPT}{N}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{qPk}{2N}\right)$$

Como $P/N = 1/M$, para $-N \leq k < N$, obtenemos

$$X\left[\frac{k}{2T}\right] = \frac{1}{P}\frac{1}{2M}\sum_{q=-M}^{M-1} x\left[\frac{qT}{M}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{qk}{2M}\right)$$

La expresión de la derecha es una función periódica de período $2M$. Aquí obtenemos un resultado de gran interés. La función muestreada tiene un espectro que se repite periódicamente P veces en su propio dominio discreto. En la figura, el dominio $\{k/2T\}$ se divide en P partes, en cada una de las cuales se repiten los $2M$ valores $X[k/2T]$.




## DOBLE RELACIÓN ENTRE PERIODICIDAD Y MUESTREO

El recíproco también es verdadero: si la transformada discreta de Fourier de la función $x[nT/N]$ es periódica de período $2M$ en su dominio discreto, necesariamente $x[nT/N]$ es una función muestreada –con $2M$ muestras–.

Para demostrarlo, supongamos que $X[k/2T]$ es periódica de período $2M$, donde $N = MP$. Sabemos que, en general, $x[nT/N]$ cumple

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] = \sum_{k=-N}^{N-1} X\left[\frac{k}{2T}\right]\exp\left(j2\pi\frac{nk}{2N}\right)$$

donde $-N \leq n,\ k < N$. Como $k$ es la variable de la frecuencia, separamos los $2N = 2MP$ elementos del dominio $\{k/2T\}$ en $P$ partes. Entonces $k$ se puede reemplazar por $k = a + bM$, donde $-M \leq a < M$, $-P \leq b < P$. La suma simple se separa en una suma doble

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] = \sum_{a=-M}^{M-1}\sum_{b=-P}^{P-1} X\left[\frac{a+bM}{2T}\right]\exp\left(j2\pi\frac{n(a+bM)}{2N}\right)$$

$$= \sum_{a=-M}^{M-1}\sum_{b=-P}^{P-1} X\left[\frac{a}{2T}\right]\exp\left(j2\pi\frac{na}{2N}\right)\exp\left(j2\pi\frac{nb}{2P}\right)$$

$$= \sum_{a=-M}^{M-1} X\left[\frac{a}{2T}\right]\exp\left(j2\pi\frac{na}{2N}\right)\sum_{b=-P}^{P-1}\exp\left(j2\pi\frac{nb}{2P}\right)$$

pero $n \neq qP \Rightarrow \sum_{b=-P}^{P-1} \exp\left(j2\pi\frac{nb}{2P}.\right) = 0$, luego $x[nT/N] = 0$ para $n \neq qP$, es una señal muestreada con $2M$ muestras.

De lo anterior se desprende que para construir una función muestreada con $2M$ muestras, es suficiente tomar una función cualquiera –su espectro– sobre un conjunto de $2M$ elementos, repetir $P$ veces sus valores, y calcular su transformada discreta inversa de Fourier. Intercambiando los papeles, es muy sencillo demostrar que hay una reciprocidad en los resultados: si en el dominio temporal se tiene una función periódica, la transformada discreta de Fourier es una función muestreada en el dominio frecuencial.

De aqui se evidencia la doble relación entre periodicidad y muestreo en el dominio discreto: a toda señal discreta muestreada temporalmente le corresponde un espectro de frecuencias periódico. A toda señal periódica en el dominio temporal le corresponde un espectro de frecuencias muestreado.

## EL TEOREMA DEL MUESTREO DISCRETO

La doble relación entre periodicidad discreta y muestreo determina un sorprendente resultado de interpolación, muy similar al teorema de Shannon, que podría denominarse *versión discreta del Teorema del Muestreo de Shannon*, y es el que vamos a estudiar a continuación. Para formularlo, tenemos que precisar primeramente, lo que significa *ancho de banda* en el dominio discreto, siguiendo la idea original de Cooley[11]. Supóngase que la función $x[nT/N]$ que representa una señal, tiene un espectro de frecuencias que cumple con la condición $X[k/2T] = 0$, para $|k| > M$, donde $M \leq N$. Como $M/2T$ es una frecuencia por encima de la cual el espectro $X[k/2T]$ es cero, a $M/2T$ le llamaremos el *ancho de banda* de la señal. De ahora en adelante, supondremos que el entero $M$ cumple la condición $N = MP$. Fijemos pues una función de la cual sólo sabemos que en el dominio de la frecuencia es de banda limitada.

Como $X[k/2T] = 0$ para $|k| > M$, entonces, sean cuales sean los valores de la función, ellos necesariamente se expresan como

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] = \sum_{k=-M}^{M} X\left[\frac{k}{2T}\right] \exp\left(j2\pi\,\frac{nk}{2N}\right)$$

Ahora aplicamos las relaciones entre muestreo y periodicidad, que hemos encontrado con anterioridad. Como la banda de frecuencias de $X[k/2T]$ está limitada al rango $-M \leq k < M$, podemos pensar que tal espectro de frecuencias es periódico de período $2M$, el cual se copia $P$ veces en su dominio frecuencial. La función correspondiente, en el dominio temporal será muestreada con $2M$ muestras. Por lo que podemos intentar recuperar cada uno de los $2N$ valores de la función original a partir de sus valores temporales en las $2M$ muestras $x\,[qPT/N] = x\,[qT/M]$.

Para ello, reemplazamos

$$X\left[\frac{k}{2T}\right] = \frac{1}{P}\,\frac{1}{2M} \sum_{q=-M}^{M-1} x\left[\frac{qT}{M}\right] \exp\left(-\,j2\pi\,\frac{qk}{2M}\right)$$

en la primera expresión de $x[nT/N]$,

---

11 Cooley, *et al.*

$$x\left[\frac{nT}{N}\right]=\sum_{k=-M}^{M}\frac{1}{P}\frac{1}{2M}\sum_{q=-M}^{M-1}x\left[\frac{qT}{M}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{qk}{2M}\right)\exp\left(j2\pi\frac{nk}{2N}\right)$$

teniendo que en cuenta que $N = MP$,

$$-\frac{qk}{2M}+\frac{nk}{2N}=\frac{(n-qP)k}{2N}$$

Si utilizamos la notación tradicional de W para el ancho de banda, y hacemos $W = M/2T$, encontramos que $T/M = 1/2W$. Reordenando,

$$x\left[\frac{nT}{N}\right]=\frac{1}{2N}\sum_{q=-M}^{M-1}x\left[\frac{q}{2W}\right]\sum_{k=-M}^{M}\exp\left(j2\pi\frac{(n-qP)k}{2N}\right)$$

Esta última expresión es la versión discreta del teorema del muestreo de Shannon. La totalidad de los $2N$ valores de la función se reconstruyen con sólo sus $2M$ valores en cada una de las $2M$ muestras. Además de lo impresionante del resultado, se resalta de todo esto que la longitud de la muestra en el dominio del tiempo es $\frac{T}{M}=\frac{1}{2W}$, que es, ni más ni menos, el *intervalo de Nyquist* del que tanto se habla en el toerema del muestreo en el dominio continuo. Como puede verse, dicho intervalo es un atributo del dominio, una vez se fije un ancho de banda, no de la función de banda limitada.

## ORÍGEN DISCRETO DE LA VERSIÓN CONTINUA

Estamos a un paso de demostrar nuestro resultado fundamental: el teorema del muestreo, cuya formulación inicial se ha hecho en el dominio continuo, proviene del dominio discreto. Más exactamente, la versión discreta del teorema del muestreo se convierte en la formulación continua, una vez que se adopte el modelo de cálculo infinitesimal. Para demostrarlo, partiremos de una función $x(t)$ que cumple las condiciones expuestas por Shannon, esto es, definida en todo el intervalo temporal y de banda limitada cuyo ancho de banda $W$ es finito. Desde el punto de vista del cálculo infinitesimal, la escala de frecuencias ocurre en el continuo $\{kdf\}$, donde el infinitesimal $df$ es la resolución de frecuencia para un dominio temporal continuo $\{ndt\}$ con $T$ infinito. Escojamos las cantidades hiperreales de modo que $W = M/2T$, para un $M$ entero infinito del mismo orden de infinitud de $T$, de modo que el ancho de banda $W$ se mantenga finito. Con este ancho de banda, extendemos periódicamente el espectro de frecuencias $P$ veces, con $P$ entero infinito, donde $N = MP$ y necesariamente ocurrirá que $T << N$.

Recordemos que al asumir como continuos ambos dominios temporales y frecuenciales, debemos tener cuidado de seguir la regla de substitución de la transformada integral de Fourier. La versión discreta del teorema del muestreo es

$$x\left[\frac{nT}{N}\right]=\frac{1}{2N}\sum_{q=-M}^{M-1} x\left[\frac{q}{2W}\right]\sum_{k=-M}^{M} \exp\left(j2\pi\,\frac{(n-qP)k}{2N}\right)$$

donde las variables están definidas en el par de dominios $\{ndt\}\Leftrightarrow\{kdf\}$, por lo que

$$x[ndt]=\frac{1}{P}\frac{1}{2M}\sum_{q=-M}^{M-1} x\left[\frac{q}{2W}\right]\sum_{k=-M}^{M} \exp\left(j2\pi\,\frac{(n-qP)k}{2N}\right)$$

Ahora,

$$\frac{1}{2M}=\frac{1}{2W}\frac{1}{2T}, \qquad \frac{(n-qP)k}{2N}=\left(\frac{nT}{N}-\frac{q}{2W}\right)\frac{k}{2T}$$

luego

$$x[ndt]=\frac{1}{2W}\sum_{q=-M}^{M-1} x\left[\frac{q}{2W}\right]\sum_{k=-M}^{M} \exp\left(j2\pi\left(ndt-\frac{q}{2W}\right)kdf\right)df$$

pero la primera suma de la derecha es una serie mientras que la última suma es precisamente una integral definida en el intervalo [-$W$, $W$], o sea,

$$x(t)=\frac{1}{2W}\sum_{q=-\infty}^{\infty} x\left[\frac{q}{2W}\right]\int_{-W}^{W} \exp\left(j2\pi\left(t-\frac{q}{2W}\right)f\right)df$$

Esta última integral se resuelve facilmente, por lo que pondremos directamente la solución,

$$\int_{-W}^{W} \exp\left( j2\pi\left( t - \frac{q}{2W} \right)f \right)df = \frac{Sen2\pi W\left( t - \frac{q}{2W} \right)}{2\pi W\left( t - \frac{q}{2W} \right)}$$

sustituyendo,

$$x(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x\left[ \frac{q}{2W} \right] \frac{Sen\pi(2Wt-q)}{\pi(2Wt-q)}$$

y este es nada menos que el teorema del muestreo en el dominio continuo, con lo que culmina nuestra demostración.

Capítulo 14

# El principio de incertidumbre

El *Principio de Incertidumbre* ha desempeñado un importante papel en el desarrollo de la mecánica cuántica y en el progreso del pensamiento filosófico moderno. Fue formulado por Werner Karl Heisenberg (1901-1976), físico y Premio Nobel alemán, que desarrolló un sistema de mecánica cuántica cuyo principio ha ejercido una profunda influencia en la física y en la filosofía del siglo XX. Entre las formulaciones dadas por su autor, citamos una muy popular: «Una partícula puede tener una posición o puede tener una velocidad, pero en sentido estricto no puede tener las dos»... «Podemos distribuir como queramos la incertidumbre, pero nunca podremos eliminarla».

En algunos textos se enuncia el principio de incertidumbre diciendo que no se puede determinar la posición y la velocidad de un cuerpo simultáneamente. O también, que al comportarse el electrón como una onda, es imposible conocer en forma simultánea su posición exacta y su velocidad, por lo tanto, sólo existe la probabilidad de encontrar un electrón en cierto momento y en una región dada en el átomo, denominando a tales regiones como niveles de energía.

Esta indeterminación no es accidental o técnica. Heisemberg habla de una incertidumbre o imprecisión, esencial o absoluta, y afirma: «Es ley de la Naturaleza que no podamos conocer con exactitud el estado actual de ningún corpúsculo». Y no es por la imprecisión de los instrumentos que se produce la indefinición sino «por la misma naturaleza de las cosas».

Entre tantas circunstancias que rodean el principio de incertidumbre de Heisenberg, hay una que muestra su profunda relación con la transformada de Fourier de una función, cuando ambas se localizan como fenómenos temporales y frecuenciales, simultáneamente. El principio establece que cualquier información que se obtenga temporalmente es a costa de la pérdida de control de la información frecuencial y viceversa, la localización y concentración de frecuencias de la señal en un entorno conduce a la dispersión de la información en el otro entorno temporal. El principio de incertidumbre se sostiene sobre una base heurística, es de profunda repercusión filosófica y apunta al corazón del problema: el modelo matemático en las ciencias exactas.

Es tal la trascendencia y a la vez, tal su aplicación práctica, que resulta casi un misterio el que su estudio no sea centro de interés en el aula de clase, especialmente en de todo curso de análisis de Fourier. Los docentes apenas lo mencionan, como si fuera algo que sólo compete a los especialistas en mecánica cuántica.

La siguiente es una presentación resumida del principio de incertidumbre. Una exposición más profunda está fuera del alcance de este y de muchos libros. Dos investigadores que han escrito un tomo completo sobre el principio de incertidumbre, se cuidan de aclarar en el prólogo:

> *En total, las confirmaciones, refutaciones, adaptaciones y metamorfosis de este principio heurístico fundamental son tan numerosas que ellas podrían llenar varios volúmenes del tamaño de éste*[1].

Nuestro propósito es contribuir en la búsqueda de la base discreta del principio de incertidumbre, esto es, lo relativo a su formulación por medios discretos, y de ser posible, de la conversión de su expresión discreta hasta el continuo, teniendo en mente nuestro modelo de cálculo infinitesimal.

## REVISIÓN DE LOS CONCEPTOS DE DURACIÓN
### FINITA Y BANDA LIMITADA

Para comenzar, debemos precisar aun más dos conceptos que hemos venido utilizando en todo el libro, y que están muy ligados al principio de incertidumbre. Ya hemos anunciado, a propósito del teorema del muestreo de Shannon, que es imposible que una función distinta de cero, sea simultáneamente de duración finita y banda limitada. Y como el principio de incertidumbre trata de la relación simultanea entre ambas condiciones,

1 V. Havin, B. Jöricke, *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, 1994.

desde el punto de vista de la construcción del modelo, significa que tales conceptos de *duración finita* y *banda limitada* debemos considerarlos definidos de modo provisional.

Recordemos que, dado el par transformado en el dominio continuo $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ se dice que $x(t)$ tiene *duración finita* $2T$ si se cumple $x(t) = 0$ para $|t| \geq T$, y se dice que $x(t)$ es de *banda limitada* $2W$ si se cumple $X(f) = 0$, para $|f| \geq 0$.

Supongamos simultáneamente las dos condiciones:

$$x(t) = 0, \quad |t| \geq T,$$
$$X(f) = 0, \quad |f| \geq W.$$

Con anterioridad dijimos que una serie de resultados debido a Wienner, Palay y Hardy[2] muestran que es imposible cumplir simultáneamente ambos requerimientos. La idea de la demostración es la siguiente: la transformada inversa de Fourier de una función de banda limitada $2W$

$$x(t) = \int_{-W}^{W} X(f) \exp(j2\pi tf)\, df$$

es una función extremadamente suave, debido precisamente a que dicha integral es sobre un intervalo cerrado y acotado. En efecto, tal integral no sólo posee todas las derivadas sino que, si se hace $t = z$, donde $z$ es la variable del plano complejo, la función

$$x(z) = \int_{-W}^{W} X(f) \exp(j2\pi zf)\, df$$

resulta analítica en todo el plano complejo (función *entera*). Esto es de gran importancia: la suavidad de una función $x(t)$ está medida por la rapidez con que su transformada $X(f)$ decaiga. Como en nuestro caso $X(f)$ muere fuera del intervalo $[-W, W]$, la función $x(t)$ es analítica, y por tanto, la condición $x(t) = 0$ para $|t| \geq T$ implica que $x(t)$ es idénticamente cero.

2 H. Dym, H. P. McKean, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, New York and London, 1972.

Conclusión: sólo la función cero cumple simultáneamente la doble condición de tener duración finita y banda limitada. Matemáticamente, el principio de incertidumbre ni siquiera puede ser enunciado ya que, salvo la solución trivial, no tiene sentido sostener ambas condiciones.

## CONCENTRACIÓN Y DISPERSIÓN DE LA INFORMACIÓN

Dicho en otras palabras, los conceptos de duración finita y de ancho de banda deben ser revisados, a la luz de la pregunta ¿que tan concentrado o disperso se encuentra un fenómeno representado por la función *x(t)*?

Esto se puede resolver de muchas maneras. Una de ellas, la más común, es relacionarlo con la función cuadrática, que muestra un fuerte grado de *dispersión* en la vecindad del origen. Por consiguiente, si la función

$$(t-a)^2$$

tiene como centro $t = a$, la cantidad

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t-a)^2\|x(t)\|^2 dt$$

es una medida de qué tan dispersa está la función x*(t)* en una vecindad de $t = a$. Como la energía contenida en x*(t)* se mide por la cantidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt\ ,$$

la relación entre la primera y la segunda cantidad es una medida de cómo se distribuye la energía en el tiempo. Cuando esta relación es grande, quiere decir que la información está dispersa en la vecindad de $t = a$. Cuando esta relación es muy pequeña, de alguna forma indica que hay un alto grado de concentración de la información en torno a dicho punto. Por tanto, si denotamos a esta relación con el símbolo Δt, la cantidad

$$\Delta\tau^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(t-a)^2\|x(t)\|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty}\|x(t)\|^2 dt}$$

mide la *dispersión de la información en el entorno temporal de* $t = a$. Así mismo, si ω es una frècuencia determinada, podemos medir la *dispersión en el entorno frecuencial,* para el contenido de información frecuencial *X(f)*, como la cantidad Δw,

$$\Delta\omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(f-a)^2\|X(f)\|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty}\|X(f)\|^2 df}$$

Bajo estas condiciones, el principio de incertidumbre se puede formular matemáticamente así: si x*(t)* representa una señal de energía finita, siempre se cumple

$$\Delta\tau\,\Delta\omega \geq \frac{1}{4\pi}.$$

La cantidad del lado derecho se ajusta, de acuerdo a que 2π sea o no sea factor de la transformada de Fourier. Así, por ejemplo, unas veces[3] el resultado se enuncia como $\Delta t\,\Delta\omega \geq 1/4$; en Hubbard[4], $\Delta t\,\Delta\omega^3 \geq 1/16\pi^2$, mientras que en otros[5], es similar al nuestro. Para demostrar este resultado, seguiremos a Folland, aunque los pasos son similares en los libros de Bracewell y en Dym-McKean. Como no es necesario entrar en detalles, simplificaremos, suponiendo que la función x*(t)* de valores complejos, es cuadrado integrable –energía finita– continua y suave por trozos. También supondremos que *t* x(*t*) y x´(*t*) tienen energía finita. Hagamos primero a = ω = 0. Integrando por partes,

3 G. B. Folland, *Fourier Analysis and Its Applications*, Wadsworth & Brooks/Cole, Mathematics Series, 1992.

4 B. B. Hubbard, *The World According to Wavelets*, A K Peters, Wellesley, Mass. 1996.

5 R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill Book Company, 1965.

$$\int_A^B t\overline{x(t)}x'(t)dt = t\|x(t)\|^2\Big|_A^B - \int_A^B \left(\|x(t)\|^2 + tx(t)\overline{x'(t)}\right)dt,$$

luego

$$\int_A^B \|x(t)\|^2 dt = -2\,\mathrm{Re}\int_A^B \overline{tx(t)}x'(t)dt + t\|x(t)\|^2\Big|_A^B$$

dado que tanto x(*t*) como t x(*t*) y x´(*t*) tienen energía finita, las integrales de ambos lados existen si se hacer tender *A*—>-∞ y *B*—>∞. Esto hace que se anule la segunda integral del lado derecho, obteniéndose

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt = -2\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{tx(t)}x'(t)dt\,.$$

Ahora se van a aplicar dos resultados muy importantes: la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y la fórmula de Parseval. La desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que, para dos funciones x(*t*), y(*t*) de energía finita, siempre se cumple

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}dt\right\|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt\,.$$

La fórmula de Parseval establece que, si x(*t*)< ⇔ >*X*(*f*), y(*t*)< ⇔ >*Y*(*f*) son pares transformados, donde x(*t*), y(*t*) tiene energía finita,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\overline{y(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\overline{Y(f)}df\,.$$

Por consiguiente, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt\right\|^2 \le 4\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, x(t)^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \|x'(t)\|^2 dt$$

y por la fórmula de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|x'(t)\|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\overline{x'(t)} dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (j2\pi f) X(f)(-j2\pi f)\overline{X(f)} df =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (2\pi f)^2 \|X(f)\|^2 df$$

reemplazando en la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \|X(f)\|^2 df \leq$$

$$4\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \|x(t)\|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi f)^2 \|X(f)\|^2 df$$

despejando

$$1 \leq \frac{4\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \|x(t)\|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi f)^2 \|X(f)\|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \|X(f)\|^2 df}$$

obteniéndose la relación que buscábamos

$$\Delta\tau\Delta\omega \geq \frac{1}{4\pi}$$

La fórmula anterior ha sido obtenido en el caso particular $a = \omega = 0$. En general, para $t = a$, $f = \omega$, basta hacer el cambio de variables

$$z(t) = \exp(-j2\pi\omega t)x(t+a).$$

En Hubbard[6], se demuestra directamente que la función *z(t)* satisface las hipótesis de *x(t)* y se verifica que el par de cantidades $\Delta t$, $\Delta\omega$ no se modifican, luego la relación subsiste.

6 B. B. Hubbard, *The World According to Wavelets*, A K Peters, Wellesley, Mass. 1996.

## LA INCERTIDUMBRE EN MECÁNICA CUÁNTICA

Muchos textos se refieren directamente al resultado anterior como *principio de incertidumbre de Heisenberg* aunque, como hemos visto, es un resultado del análsis de Fourier. Pero la ambigüedad tiene una explicación. Esto se debe a que, en realidad, ambos coinciden, porque en mecánica cuántica, la derivación del principio es muy similar a la del análisis de Fourier, como veremos a continuación.

La teoría cuántica se propone resolver los problemas relativos a los haces de electrones, tratándolos, no tanto como *ondas* puras o como *partículas* puras, sino como *paquetes de ondas* confinadas en pequeñas regiones. El paquete de ondas está representado por la *función de onda* $\psi$, la que se propone como solución de la *ecuación de Schrödinger* para el sistema. En ausencia de fuerzas externas, la ecuación de Schrödinger es

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\alpha \nabla^2 \psi .$$

A diferencia de una partícula, el paquete de ondas no tiene una posición precisa, sino que se extiende sobre una región finita. Y a diferencia de una onda, tampoco tiene una longitud de onda precisa, sino un ancho de banda finito. Las variables que se consideran son, entre otras, la *posición t* y el *momentum p,* que son variables conjugadas.

El principio de Heisenberg establece que la posición y el momento no pueden ser medidos, simultáneamente, con precisión arbitraria. Es posible comprobar matemáticamente este principio de un modo similar que en el análisis de Fourier. La idea es la siguiente[7]: la función de onda $\psi(t)$ de valores complejos y cuadrado integrable, está normalizada en el intervalo donde la probabilidad de localización de la partícula es igual a 1,

$$\int \|\psi(t)\|^2 dt = 1$$

o sea que $|\psi(t)|^2$ se interpreta como la densidad de probabilidad de que la partícula se encuentre en la posición $t$. Por otra parte, la transformada de

7 G. B. Folland, *Fourier Analysis and Its Applications*, Wadsworth & Brooks/Cole, Mathematics Series, 1992.

Fourier $\Psi(p)$ de la función de onda y es esencialmente la densidad de probabilidad para el momento $p$ de la partícula.

Para que efectivamente la función $|\Psi(p)|^2$ actúe como densidad de probabilidad para el momento, la transformada $\Psi(p)$ de la función de onda $\Psi(t)$ se define como

$$\Psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \psi(t) \exp\left(-j\hbar^{-1} tp\right) dt$$

Así, puede verificarse que también

$$\int \left\| \Psi(p) \right\|^2 dp = 1.$$

Con esto, se puede demostrar que

$$\Delta\tau\,\Delta\omega \geq \frac{\mathrm{h}^2}{4}$$

## INCERTIDUMBRE EN DOMINIOS DISCRETOS

Hay un par de problemas teóricos que queremos comentar, cuales son, la formulación del principio de incertidumbre desde el dominio discreto y la posibilidad de transitar del discreto al continuo dejando invariante su formulación inicial.

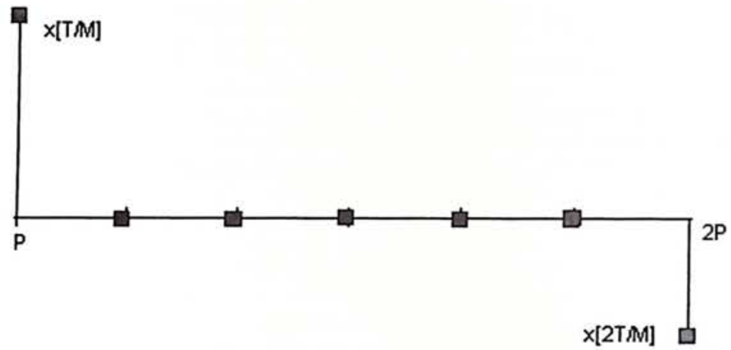
Volvamos atrás, al Capítulo XII, donde hemos analizado las relaciones temporales-frecuenciales en el dominio discreto, a propósito del Teorema del Muestreo. Veremos que es desde allí donde se vislumbra una relación de incertidumbre entre las funciones concentradas temporalmente y las concentradas frecuencialmente. Recordemos que en el análisis discreto de Fourier, se cuenta con dos dominios de un número finito de $2N$ elementos, el primero temporal, y el segundo frecuencial, asociados así,

$$\left\{\frac{nT}{N}\right\} \Leftrightarrow \left\{\frac{k}{2T}\right\}$$

Ahora vamos a hacer una partición de cada dominio. Supongamos que $N$, entero finito se puede factorizar como $N = MP$. Los dominios tendrán $2MP$ elementos. La función de dominio temporal la hemos denominado *función muestreada* –con $2M$ muestras– si cumple la condición

$$x\left\{\frac{nT}{N}\right\}=0, \quad n\neq qP, \quad -M\leq q<M$$

Tendremos $P$-1 ceros consecutivos, salvo las $2M$ muestras que corresponden a los valores de la función en el rango $-M \leq q < M$.




El espectro de frecuencias $X[k/2T]$ de una función muestreada lo hemos calculado expresamente, pues cuando $n \neq qP$ los valores temporales de la función son nulos. Como sólo pueden ser distintas de cero las muestras en $n = qP$,

$$X\left[\frac{k}{2T}\right]=\frac{1}{2N}\sum_{q=-M}^{M-1}x\left[\frac{qPT}{N}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{qPk}{2N}\right)$$

Como $P/N = 1/M$, para $-N \leq k < N$, hemos obtenido

$$X\left[\frac{k}{2T}\right]=\frac{1}{P}\frac{1}{2M}\sum_{q=-M}^{M-1}x\left[\frac{qT}{M}\right]\exp\left(-j2\pi\frac{qk}{2M}\right)$$

Sabemos que la expresión de la derecha es una función periódica de período $2M$. Este es un resultado extremadamente importante, imposible de formular en el dominio continuo sin utilizar la *teoría de distribuciones*! La función muestreada tiene un espectro que se repite periódicamente $2M$ veces en el dominio discreto. Y el recíproco también es verdadero: si la transformada discreta de Fourier de la función $x[nT/N]$ es periódica de período $2M$ en su dominio discreto, necesariamente $x[nT/N]$ es una función muestreada –con $2M$ muestras–. La reciprocidad es doble: si en el dominio temporal se tiene una función periódica, la transformada discreta de Fourier es una función muestreada en el dominio frecuencial. Resumiendo, a toda señal discreta muestreada temporalmente le corresponde un espectro de frecuencias periódico. A toda señal periódica en el dominio temporal le corresponde un espectro de frecuencias muestreado.

En esta doble relación recíproca ya se esconde una noción de incertidumbre, porque, supongamos ahora que tenemos una señal muy concentrada en el dominio frecuencial, digamos, en torno al origen. ¿Qué quiere esto decir? Que en el dominio discreto, en un rango $-M \leq q < M$, se encuentra la totalidad de la función, por lo que podemos suponer que el resto de valores es nulo,

$$X\left\{\frac{k}{2T}\right\}=0, \quad -N \leq k < -M, \quad M \leq k < N$$

Como sabemos, esta condición es suficiente para que la función esté distribuida en su totalidad en el dominio temporal, pues en su dominio frecuencial puede ser interpretada como periódica de período $2M$. Se produce así una fórmula fundamental, (teorema discreto del muestreo) que hace a la naturaleza de la señal concentrada en la frecuencia, cuales es

$$x\left[\frac{nT}{N}\right]=\frac{1}{2N}\sum_{q=-M}^{M-1} x\left[\frac{q}{2W}\right]\sum_{k=-M}^{M} \exp\left( j2\pi \frac{(n-qP)k}{2N}\right)$$

donde, como es usual, $M/2T$ se ha reemplazado por el ancho de banda W, luego $T/M = 1/2W$.

Esta es la forma de onda de la señal cuya información está concentrada en la frecuencia. Nótese que cada uno de sus $2N$ valores está determinado por $2M$ valores cuya distancia entre sí en el dominio es $1/2W$ (intervalo de Nyquist). La forma de onda está dispersa en todo el dominio, porque sólo depende de los valores en cada $q/2W$. Y entre más concentrado esté el espectro de frecuencias, mayor dispersión habrá en la forma de onda. Lo que quiere decir que aún desde el dominio discreto hay una relación de incertidumbre en la determinación de la información simultánea en el tiempo y la frecuencia.

riodo 2M en su dominio discreto, consecuencia de $2M/N$ en una función que intuitivamente con 2M muestras. La periodicidad se dijo antes en el dominio temporal como una función periódica, la transformada discreta de Fourier es una función que tiende en el dominio frecuencial. Es así como a toda señal discreta muestreada temporalmente le corresponde un espectro de frecuencias periódico. A toda señal periódica en el dominio temporal le corresponde un espectro de frecuencias muestreado.

Con este último resultado podemos ya, se encuentra una teoría de muestreo, porque, supongamos ahora que tenemos una señal muy concentrada en el dominio frecuencial, digamos, en torno al origen. ¿Qué quiere esto decir? Que en el dominio discreto, en un rango $-M \le q < M$ se encuentra la totalidad de la función, por lo que podemos suponer que el resto de valores es nulo,

$$X\left(\frac{k}{2T}\right) = 0, \quad -N \le k < -M, \quad M \le k < N$$

Como sabemos, esta condición es suficiente para que la función esté distribuida en su totalidad en el dominio temporal, pues en su dominio frecuencial puede ser interpretada como periódica de período 2M. Se produce así una fórmula fundamental, llamada de muestreo, que hace a la naturaleza de la señal concentrada en la frecuencia, cuál es

$$x\left[\frac{nT}{M}\right] = \frac{1}{\sqrt{2M}} \sum_{k=-M}^{M-1} X\left[\frac{k}{2T}\right] \exp\left(j2\pi \frac{(n-q)k}{2M}\right)$$

donde, como es usual, $M/2T$ se ha reemplazado por el ancho de banda $W$, luego $T/M = 1/2W$.

Esta es la forma de partir de la señal cuya información está concentrada en la frecuencia. Nótese que cada uno de sus 2N valores está determinado por 2M valores cuya distancia entre sí en el dominio es $1/2W$ (intervalo de Nyquist). La forma de señal está descrita en todo el dominio, porque sólo depende de los valores en cada $q/2W$. Y cuanto más concentrada está el espectro de frecuencias, mayor separación habrá en la señal de datos. Lo que quiere decir que aún desde el dominio discreto hay una relación de incertidumbre en la información de la señal en simultánea en el tiempo y la frecuencia.

Capítulo 15

# La voz humana en el salón de clase

Culminamos nuestra investigación con un estudio de la voz humana en el salón de clase, que es lo más apropiado que hemos considerado para la construcción de significados. El análisis de Fourier de la materia sonora es lo más parecido al análisis de señales en el dominio discreto infinitesimal. En efecto, la materia sonora se representa en un dominio discreto de alta resolución, con un intervalo de muestreo de una fracción tan extremadamente pequeña de tiempo, que para los efectos prácticos, puede ser considerada como un infinitesimal.

Vamos a concentrarnos en una materia tan sugestiva como la voz humana –y no la imagen visual o la música, por ejemplo– por razones de simplificación y de cómputo. El procesamiento de imagen es bidimensional, y escapa al estudio que hemos emprendido. Y la música, en general, requiere de intervalos de muestreo propio de los *Compact Disks,* fuera del alcance del computador ordinario. Aquí pondremos en acción todos los conceptos, resultados y aplicaciones del estudio que hemos emprendido y del modelo hemos diseñado.

La idea que vamos a presentar es muy simple. La señal de voz se modela como una colección de muestras que representan la materia sonora, las que pueden manipularse y procesarse mediante el análisis de Fourier en el dominio discreto, del cual se requiere apenas un mínimo conocimiento en el aula de clase. La bibliografía es abundante. Aquel que quiera profundizar el tema, puede consultar a los expertos, como Flanagan[1] y Holmes[2], entre otros.

---

1 J. L. Flanagan, *Speech Analysis, Synthesis, and Perception,* 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1972.

2 J. N. Holmes, *Speech Synthesis,* Mills & Boon Limited, 1972.

En el computador, con el recurso de *Mathematica*, la voz digitalizada pasa por varios estadios, desde su captura y reproducción, hasta su modificación y distorsión, mostrándose en que condiciones se preserva el contenido de la información y en que otras condiciones se cambia. Los fenómenos se explican en el dominio frecuencial, mediante el análisis espectral y cepstral. Esperamos que el problema formulado en la pregunta: ¿es un instrumento adecuado el *modelo discreto* para la comprensión de la matemática de la señal y para el entendimiento de la voz humana? tenga una respuesta afirmativa.

## DIGITALIZACIÓN DE LA VOZ

Muchas veces hemos grabado un fragmento de voz u otro tipo de sonido, frente a un micrófono, en una reproductora de cassettes. Para el investigador y oyente, es evidente que, salvo su disfrute musical, es poco lo que matemáticamente puede hacer con los fragmentos impresos en la cinta. En cambio, hay una diferencia notable si ese trozo de materia sonora se captura en el computador. Lograda su conversión digital, la señal leída puede ser graficada, distorsionada, modificada, y por supuesto, reproducida nítidamente, permitiéndole al estudioso de ese campo una mayor comprensión para la investigación de las más profundas relaciones y mecanismos internos de la voz humana, mediante modelos discretos del análisis de Fourier.

Para muchos resulta una verdadera sorpresa que un fragmento de voz pueda ser atrapado en el computador y convertido en una sucesión finita de números enteros, apta para la manipulación. Una vez se logra, a medida que esta sucesión es sometida a algunas transformaciones, podemos preguntarnos sobre la suerte que corren las distorsiones y modificaciones correspondientes de la voz original. Nuestra sorpresa aumenta cuando escuchamos los nuevos sonidos reproducidos ¿que es lo que hace que la información portadora de significado, se mantenga o se pierda?

El estudio de la voz, utilizando el paquete *Mathematica*[3] requiere de un computador personal con tarjeta digitalizadora de sonido, micrófono y parlante respectivo, que son las componentes de los computadores personales. Hemos prescindido de las explicaciones sobre los comandos de

3 *Mathematica,* Wolfram Research. Licencia legal, Proyecto MAT, Universidad Distrital, Bogotá, Colombia.

*Mathematica*. En cambio, haremos algunas explicaciones técnicas sobre el procesamiento de voz humana. Salvo un par de oportunidades, evitamos los argumentos matemáticos y las demostraciones.

## La señal de voz representada en números

Al emitirse una expresión, cualquiera que sea, frente al micrófono del computador, la materia sonora es registrada en dígitos binarios, que representan las muestras de voz tomadas durante muy pequeños intervalos fijos de tiempo. Ya que la expresión emitida tiene una duración finita, el total de dígitos registrados también es finito.

El hecho más relevante, que hace del procesamiento de señales una de las más excitantes disciplinas, radica en que la sucesión de muestras recolectadas por el computador depende exclusivamente de dos parámetros: el *intervalo de muestreo* o *frecuencia de muestreo,* y la *escala de codificación* de la señal. Dadas la frecuencia y la escala , podemos digitalizar la voz. Y, escogidos adecuadamente, ámbos parámetros determinan teórica y prácticamente todas las características del contenido original de la voz digitalizada.

La frecuencia de muestreo *W* se mide en *hertz*, que en nuestro caso es el número de muestras en la unidad de tiempo. Así, la unidad de tiempo es el segundo y la unidad de frecuencia es el hertz. El inverso de la frecuencia de muestreo 1/*W* es el *intervalo de muestreo*. Ya hemos visto que, por el Teorema del Muestreo[4], es suficiente tomar como intervalo de muestreo el doble de la frecuencia *W* más alta de la señal, para que ésta sea enteramente reconstruída. Esta cantidad es el *intervalo de Nyquist*.

Como la voz humana no sobrepasa un promedio de frecuencias superiores a 5.500 hertz, es suficiente tomar 11000 muestras cada segundo (aunque puede ser un poco menos, digamos, 8K hertz), para que la voz pueda ser recuperada. Naturalmente, se pueden tomar frecuencias más altas, pero por razones económicas y de cómputo, nosotros siempre supondremos que la frecuencia de muestreo es $W = 11000$ hertz.

---

4 *Ensayo,* Capítulo 12.

Hemos denominado a la señal en el dominio temporal su *forma de onda*. Ya que el intervalo de muestreo es $1/11000 = 90.9 \times 10^{-6}$, esto equivale a decir que extraemos $N$ muestras de voz cada 90.9 microsegundos aproximadamente. Un intervalo temporal de menos de 100 microsegundos es imperceptible, no digamos para el oído humano, sino para instrumentos de alta precisión. Es metafórica y prácticamente, un infinitesimal.

Los lingüístas le llaman *morfemas* a las palabras, mientras que a las unidades básicas que constituyen las palabras le llaman *fonemas*[5]. Para dar una idea de la relación entre la voz muestreada y la unidad de tiempo, podemos pensar que el *microsegundo* es el orden de muestreo de una señal, mientras que el *milisegundo* es el orden de duración de un fonema y el *segundo* es el orden de duración de la palabra. Esto nos brinda una referencia aproximada del manejo de las unidades en el procesamiento de voz.

Hasta ahora sólo hemos hablado de la frecuencia de muestreo. Veamos el segundo parámetro, la *escala de codificación*, que es el número de niveles (bits) en los cuales la voz es *digitalizada*. En el computador, las muestras de voz son, en realidad, intensidades de corriente. Así, la forma de onda puede verse como una gráfica en la que el eje de las abcisas es el tiempo (en microsegundos) y el eje de las ordenadas es la intensidad de corriente (en volts o ampères). Supongamos que la máxima intensidad de voltaje con que el computador toma muestras, es 6 volts. Si la escala de codificación de los valores en el eje de ordenadas es $K = 2^8 = 256$, la unidad de medida de las muestras será 6/256. O sea que todas las muestras recorren el rango de valores comprendidos en los 256 niveles de codificación

$$\left\{0, \frac{6}{256}, 2\frac{6}{256}, \cdots, 255\frac{6}{256}\right\}$$

Sea $x\left[\frac{nT}{N}\right]$ el valor o muestra de la señal en alguna posición termporal. Entonces, necesariamente, habrá un único $p$ tal que

$$p\frac{6}{256} \leq x\left[\frac{nT}{N}\right] < (p+1)\frac{6}{256}$$

5 C. F. Hockett, *Curso de Lingüística Moderna*, Eudeba, 1971.

A esta muestra se le asocia el número entero *p*. Así, los valores muestreados variarán en el rango {0, 255}, o si se quiere, en valores positivos y negativos del rango {-128, +127}.

El último paso tiene que ver con la naturaleza binaria de la codificación. El computador, entre los 256 bytes, asocia a cada muestra un byte, desde el nivel 00000000 hasta el nivel 11111111. En general, dado $\log_2 K$, habrá un total de *K* bytes para digitalizar cada muestra de voz. La señal así codificada se denomina *señal digital*. Obviamente, nosotros siempre utilizaremos la representación en números enteros y no su equivalente binario.

Como hay varias opciones de frecuencia de muestreo para el procesamiento digital, digamos, 11*K*, 22*K* y 44*K* para la frecuencia de muestreo, y 8 bits, 16 bits o 32 bits para la codificación. Recomendamos la opción de 90.9 milisegundos como intervalo de Nyquist (11*K* hertz) y 8 bits (256 niveles de codificación).

En general, si $A_n$ es una sucesión finita de número enteros, $T/N$ el intervalo de muestreo y *K* la escala de codificación, la asociación

$$\text{Voz} \Leftrightarrow \{A_n, T, N, K\}$$

básicamente indica que a un segmento de voz se le asocian sus parámetros fundamentales. Siempre que las muestras originales provengan de la captura de voz, en cualquier computador del mundo, los datos introducidos con este modelo reproducirán el segmento de voz original.

## UNA ORACIÓN CONVERTIDA EN 23316 ENTEROS

Para comenzar, hemos grabado una expresión sonora con significado en español. Se trata de la expresión «*hola Carlos, como te va*». Ahora interviene *Mathematica*. Existe un recurso de este programa, que permite leer y escribir archivos de datos. De este recurso, escogeremos el comando **ReadList [«archivo»,tipo]**, que es el que leerá nuestro archivo de datos «hola.dat». El estudio de la señal de voz en *Mathematica* se inicia con la lectura del archivo de datos «hola.dat», al que *Mathematica* lo convierte en una lista que por brevedad llamaremos la lista *hola*

hola = ReadList[«c:\wnmath22\hola.dat»]+128;

Hemos sumado 128 a la lista para que los 256 valores que oscilan entre -128 y 127 oscilen entre 0 y 255. Calculamos el número de muestras de la lista

Length[hola]

23316

Tenemos una primera información sobre la duración de la señal. Como ha sido muestreada con una frecuencia de 11K hertz, o sea, 90.9 microsegundos de separación entre muestras, la señal dura:

N[23316 90.9 1/(10^6), 2]

2.12

O sea que estas $2N = 23316$ muestras, con intervalos de 90.9 microsegundos de duración, corresponden a una señal de voz de duración $2T = 2.12$ segundos. La lista *hola*, que es el nombre del archivo de la expresión sonora «*hola Carlos, cómo te va?*» está representada en el dominio temporal $\{nT/N\}$ por la función $x[nT/N]$, y en el dominio frecuencial {k/2T}, por la función $X[k/2T]$, donde $T/N = 90.9$ ms, $N = 11658$. Reemplazando, $1/2T = 1/(2.12) = 0.4717$ hertz, luego

$$x[90.9\ n] \leftarrow hola \rightarrow X[0.4717\ k]$$

donde $116580 \leq n, k < 11658$. La función de la izquierda representa la forma de onda y la de la derecha, el espectro de frecuencia de la señal de voz.

Observemos algunos elementos de *hola*, para verificar que, efectivamente, consiste en un listado de números enteros. Las siguientes 51 muestras están comprendidas entre las posiciones 2550 y 2600

Take[hola,{2550,2600}]

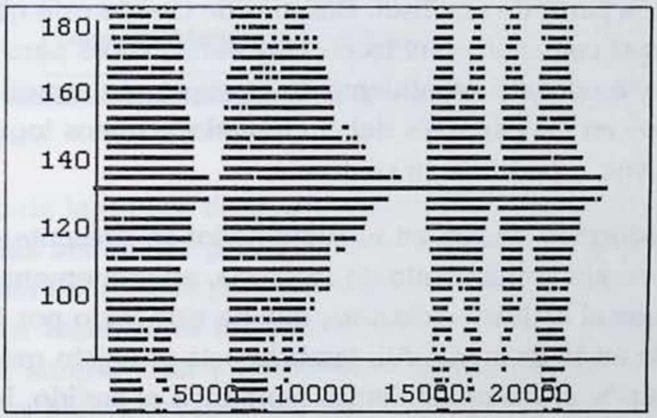
{116, 107, 122, 131, 134, 140, 146, 146, 152, 152, 155, 167, 170, 170, 167, 158, 149, 140, 140, 140, 128, 125, 128, 113, 98, 110, 113, 107, 116, 125, 128, 125, 134, 143, 140, 146, 149, 149, 143, 134, 125, 122, 110, 107, 104, 107, 110, 107, 101, 107, 104}

Así, por ejemplo, la muestra 2550 de voz es x[2550´90.9] = 116, mientras que la muestra 2600 es x[2600´90.9] = 104. Estas amplitudes enteras siempre están comprendidas entre $0 \leq x[nL] < 256$.

## GRÁFICA DE LA VOZ

Hagamos una gráfica de la señal de voz representada en *hola*. Dado que se insertan 23316 puntos en un espacio muy pequeño, es de esperarse que se brinde poca información sobre la señal, salvo que ella aparece como una mancha de color grisaseo. Pero precisamente, esta gráfica tiene la ventaja de que nos da una idea global de la señal representada.

ListPlot[hola];




Gráfica. Oración *«Hola, Carlos, como te va»*

La gráfica de la señal de voz muestreada *«Hola, Carlos, como te va»*, está distribuída en cinco áreas distintas, una para cada palabra (morfema). En el eje de las abcisas, podemos hacer un cálculo rudimentario sobre el rango de las muestras en cada una de las cinco partes. La siguiente es una tabla aproximada, a simple vista, sobre la distribución de las palabras en los 2.12 segundos de duración de la oración completa, teniendo en cuenta que la duración de una muestra es 90.9 microsegundos y que en la gráfica del computador, $n$ varía en el dominio temporal $0 \leq n < 23316$.

| Palabra | Muestras | Duración |
|---|---|---|
| */Hola/* | 0 ≤ n ≤ 5000 | 0.45 segundos |
| */Carlos/* | 5000 ≤ n ≤15000 | 0.90 segundos |
| */como/* | 15000 ≤ n ≤ 18000 | 0.27 segundos |
| */te/* | 18000 ≤ n ≤ 20000 | 0.18 segundos |
| */va/* | 20000 ≤ n ≤ 23316 | 0.30 segundos |
| Total 5 | 0 ≤ n < 23316 | 2.10 segundos |

Cuadro. Morfemas, número de muestras y duración.

Como ya habíamos indicado, el orden de duración de las palabras es el de fracciones de segundo. La gráfica, de un vistazo, nos ha facilitado la comprensión inicial de la estructura fonológica de la señal de voz capturada.

## DESPUÉS DE LA IMAGEN, EL SONIDO

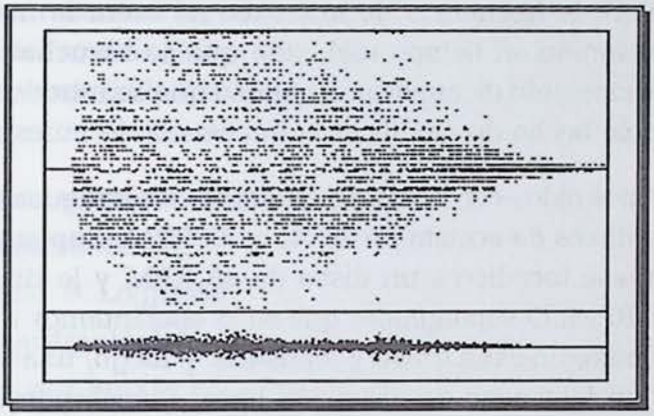
Queda una sombra de duda. ¿Será la gráfica anterior realmente la representación visual de la señal sonora? Esta duda puede ser despejada por *Mathematica*. Recordemos que el comando **ListPlay** [ *lista* ] crea un objeto gráfico sonoro, a partir de una lista. Después de creado este objeto, el lector puede ejecutar el comando en el ícono **Play** varias veces para convencerse. Efectivamente, escuchará repetidamente la expresión sonora «*Hola, Carlos, como te va*» en los parlantes del computador. Hemos logrado la reproducción de la voz, a partir de su captura.

La reproducción de voz en el computador se presenta con dificultades técnicas, de almacenamiento de memoria, aparentemente insalvables. Recordemos que el archivo «hola.dat», que ha sido leído por *Mathematica*, está localizado en la memoria. Allí también está el objeto gráfico que acabamos de crear. Si ahora pretendemos reproducir el sonido, la memoria se puede agotar, cuando apenas comenzamos nuestro estudio. Para evitar problemas de memoria, hagamos un archivo mucho más pequeño, que sólo contenga la expresión «*Hola*». Para ello, eliminamos los trozos de voz que corrresponden a «*...Carlos, como ve va*» y leemos nuevamente en *Mathematica*,

```
hola = ReadList[«c:\wnmath22\hola.dat»]+128;
Length[hola]
4760
N[4760 90.9 1/(10^6) ]
0.43
```

Este archivo de una sóla palabra es el que utilizaremos de ahora adelante. Obsérvese que *hola* se ha reducido a $2N = 4760$ muestras y $2T = 0.43$ segundos de duración, que es una estimación muy cercana a la del *Cuadro de morfemas* (la aproximación que hicimos fué de 5000 muestras y 0.45 segundos de duración). Ahora esta lista puede ser reproducida sin ninguna dificultad en el computador. Escúchese,

```
ListPlay[hola,SampleRate-> 11000];
```



Al presionar el ícono Play, se escucha «hola»

A diferencia de la gráfica de la oración «*Hola Carlos, como te va*», donde están separadas las cuatro palabras, el objeto gráfico «*Hola*» consiste de una sóla palabra constituída por los fonemas /o/, /l/, /a/ (h es sorda). Como la duración de los fonemas es del orden de los milisegundos, es muy difícil distinguirlos a simple vista y practicamente imposible penetrar en su estructura con las anteriores gráficas. Precisamente, los próximos pasos nos dotarán de una metodología para resolver el problema de penetrar en la palabra a escala de sus fonemas.

## REPRODUCCIÓN DE LISTAS DE DATOS

Los archivos de datos no necesariamente tienen que ser listas de números enteros. En efecto, *Mathematica* lee todo archivo de datos de números reales, organiza y correlaciona linealmente los valores de abcisas y ordenadas, y reproduce el sonido correspondiente con el comando **ListPlay**. De modo que si los datos de *hola* los amplificamos o los trasladamos con una constante, la voz no presenta ninguna distorsión, y seguiremos escuchando «*hola*». En otras palabras, si la lista $H$ representa una señal de voz y la reemplazamos por la lista a $H + b$, donde $a$, $b$ son números reales, no se altera la reproducción de la misma señal de voz.

Una modificación en la frecuencia de muestreo alterará los resultados. Por eso (aunque no es necesario) hemos colocado en el comando ListPlay la opción **SampleRate** —> 11000, que es la frecuencia de muestreo de los objetos sonoros de *Mathematica*, para enfatizar que ellos son escuchados en *tiempo real*. Si la frecuencia de muestreo no fuera la indicada, no se reproduciría el sonido en tiempo real, sino que se escucharía una distorsión. Este es el momento de analizar el cambio que se introduce en la señal «hola» por el solo hecho de modificar la frecuencia de muestreo.

Todos hemos oído –con nostalgia, algunos– los antiguos tocadiscos reproductores de discos de acetato de 78, 45 y 33 RPM. Supongamos que reproducimos en ese tocadiscos un disco de 45 RPM y le disminuímos su velocidad a 33 RPM. O supongamos que se la adelantamos a 78 RPM. Escuchamos, primero, una voz grave y lentísima, y luego, una voz chillona y veloz. Este es un fenómeno de distorsión lineal (lineal, porque hemos variado la frecuencia en un múltiplo). Las señales siguen siendo inteligibles, aunque distorsionadas.

Lo mismo ocurre cuando en *Mathematica* se reproduce el sonido de la lista de datos con diferentes frecuencias de muestreo mediante la opción **SampleRate —>** *r*. Invitamos al lector a que reproduzca la señal, con frecuencias $r = 5500$, 11000 y 22000, para que aprecie la distorsión del sonido.

## LA RAÍZ CUADRADA DE «HOLA»

Una modificación bastante distinta puede esperarse si directamente intervenimos la lista *hola*, realizando algunas operaciones en ella. Por ejemplo, si es cierto que toda lista de datos puede ser reproducida ¿como suena la raiz cuadrada de *hola*? A continuación, usamos los operadores y los comandos respectivos, para jugar al álgebra del sonido.

El operador **Sqrt** tiene atributo **Listable**, o sea que penetra en la lista «*hola*» y produce una nueva lista de raices cuadradas de cada uno de sus elementos. Truncamos con dos decimales (El comando **ListPlay** reorganiza los valores de dos decimales en el rango de 256 bits y los convierte automáticamente a enteros)

```
raizCuadradaHola = N[Sqrt[hola],2];
ListPlay[raizCuadradaHola];
```

La misma gráfica y ... el mismo sonido familiar «*hola*». Esto es inesperado. Parece una coincidencia que la expresión «*hola*» sea su propia raíz cuadrada. Le proponemos al lector que eleve al cuadrado la lista y escuche la reproducción del sonido. Otra vez se oye «*hola*». Puede extraer el logaritmo o tomar los inversos de la lista y escuchar. De nuevo «*hola*». Las instrucciones son

```
cuadradoHola = hola^2
ListPlay[cuadradoHola];
logaritmoHola = Log[hola]
ListPlay[logaritmoHola];
inversoHola = 1/hola
ListPlay[inversoHola];
```

Para que no quede la duda de que la expresión «hola» es muy especial, recomendamos cambiar la lista inicial y repetir el experimento. Confirmará que, en los tres casos, la raiz cuadrada, el cuadrado, el inverso multiplicativo y el logaritmo de cada una de ellas se reproducía como la misma voz original. Para confirmar que no hay error técnico en el experimento realizado, logramos conseguir una modificación que arruina completamente la señal de voz. Se trata de la transformación de *hola* por la función trigonométrica *seno*. En efecto, la lista **Sin[hola]** se oye como puro ruido. Esto seguramente se debe a que élla oscila muchas veces, a medida que avanza en las 4760 muestras. Pero si escuchamos **Sin 2p[hola/4740]**, que está limitada al intervalo donde la función es monótona, no se observa cambio alguno y se reproduce exactamente *hola*. Esto nos permite conjeturar que las palabras son invariantes ante perturbaciones dadas por funciones suaves y monótonas.

Las experiencias descritas merecen una reflexión. ¿Qué tipo de materia es la voz, cuyo objeto matemático que la representa puede ser sometido a modificaciones sin que se altere la expresión sonora ni cambie su significado? ¿Qué transformaciones podemos hacerle que modifiquen su contenido? Para responder estas preguntas, tenemos que penetrar un poco más en la estructura de la señal representada.

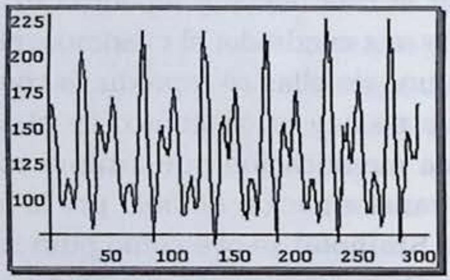
## PARTÍCULAS "ELEMENTALES" DEL FONEMA

La palabra *«hola»* está representada en una lista de 4760 datos numéricos. Consideremos un segmento contenido en un pequeño número de muestras; por ejemplo, escojamos al azar 300 que correspondan a un fragmento del fonema /o/. Nuestra nueva lista se denominará «fonemaO»

```
FonemaO = Take[hola,{901,1200}];
Length[fonemaO]
300
```

La gráfica siguiente corresponde al segmento de 300 muestras del fonema /o/. Para que la forma de onda se visualice mejor, con la opción **PlotJoined —> True,** se ha hecho la gráfica continua.

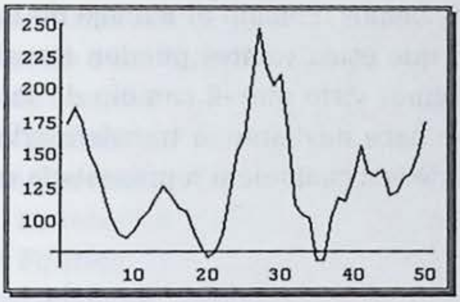
```
ListPlot[fonemaO, PlotJoined->True];
```




Fragmento del fonema /o/. 300 muestras. 27.3 milisegundos.

Se observa cierta periodicidad del segmento de señal que representa el fonema /o/. El período se puede calcular aproximadamente en la gráfica. Del total de 2000, las primeras 50 parecen ser muy representativas. Esto quiere decir que 50 muestras se repiten con cierto rango de aproximación, unas 40 veces, hasta integrar el fonema /o/. O sea que hay un grupo de muestras aún más pequeño que el fonema, con las que podemos intentar reconstruírlo. Es como si fueran las *partículas «elementales»* del fonema. Como el fonema es periódico, los especialistas llaman a estas muestras *el tono*. Con la gráfica de los 50 valores, en dominio continuo, podemos mirar el tono,

```
particulaO = Take[hola,{901,950}];
ListPlot[particulaO,PlotJoined—>True];
```



Forma de onda de un tono. 50 muestras y 4.99 milisegundos.

Construímos una lista con 40 copias de la lista «particulaO», que llamamos «nuevoFonema» y reproducimos el sonido

nuevoFonemaO=Flatten[ Table[ParticulaO,{i,40}]];

ListPlay[nuevoFonemaO];

Como es de preeverse, no se escucha claramente el fonema /o/. La lista *nuevoFonemaO* no es la misma que la lista *fonemaO*, pues en la primera hay 50 valores repetidos 40 veces, mientras que en la segunda, verdaderamente no se repiten los 50 valores ni una sola vez. Si hubiéramos guardado algunas reglas elementales de reconstrucción, se hubiera realizado una *síntesis de voz humana* –al menos, hubiéramos sintetizado un fonema–. Pero, cuales son las reglas de reconstrucción que deben seguirse para que no se pierda la información?

Entramos ahora en un ámbito distinto del que nos hemos movido –el dominio temporal y las formas de onda– para pasar al dominio frecuencial y al análisis espectral, que es el terreno en el que pueden resolverse las principales preguntas planteadas.

## EL ESPECTRO DE FRECUENCIAS

Vamos a hacer el análisis de Fourier de la señal representada en la lista «*hola*». Hacer «análisis de Fourier» significa que descomponemos esta señal en sus componentes de frecuencia o componentes espectrales, para analizar las contribuciones armónicas de cada una de las frecuencias que intervienen, así como aquellas que no contribuyen a la *forma de onda* de la señal.

Hasta ahora nos hemos limitado al manejo de valores en el dominio del tiempo. Sabemos que estos valores pueden transformarse al dominio de la frecuencia. Y hemos visto que el cambio de los datos temporales a datos frecuenciales se hace mediante la transformada discreta de Fourier TDF. Sea *S* una señal de voz cualquiera representada en el par de dominios asociados

$$\{90.9n\} \leftrightarrow \left\{\frac{k}{(90.9)2N}\right\}$$

donde $0 \leq n,\ k < N$, por las funciones x[90.9 ***n***], X[*k*/(90.9 2*N*)}, donde *N* aún no se ha escogido. Entonces

$$X\left[\frac{k}{90.9(2N)}\right] = \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1} x[90.9n]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{2N}\right)$$
$$x[90.9n] = \sum_{k=-N}^{N-1} X\left[\frac{k}{90.92N}\right]\exp\left(j2\pi\frac{nk}{2N}\right)$$

Tenemos que calcular las cantidades X[*k*/(90.9 2*N*)]. Para realizar los cálculos, hay que determinar el número de muestras 2*N*. Hasta ahora hemos manejados tres archivos distintos. Por ejemplo, en nuestro archivo inicial 2*N* = 23316 muestras, en el archivo más pequeño «*hola*», 2*N* = 4760. En el archivo «*fonemaO*», 2*N* = 300. ¿Cual es la *N* que seleccionaremos para los cálculos de la TDF? La respuesta a esta pregunta involucra dos cuestiones; una de tipo técnica, que se refiere al número de operaciones a realizar, y la otra de tipo teórica, que veremos a continuación.

El asunto técnico es el siguiente. De la fórmula de la TDF se puede verificar que el valor de *X* en la posición frecuencial *N-k,* es el mismo que el valor del conjugado de *X* en la posición *k,* o sea,

$$X\left[\frac{(N-k)}{NL}\right] = \overline{X\left[\frac{k}{NL}\right]}.$$

Esto hace que los cálculos se simplifiquen a la mitad. Aún así, el número de operaciones en las que interviene la TDF es muy grande. Para nuestra lista «hola», la matriz de la transformada discreta tiene tamaño $23316^2$, $4760^2$, o $300^2$, de acuerdo a los distintos valores de $N$. Si grabáramos largas cadenas de señales de voz, los cálculos serían casi imposibles de realizar. Por eso, no podemos pensar que las anteriores instrucciones de la TDF se realizan directamente. En realidad, la factibilidad de estos cálculos, en fracciones de segundos, se resuelve mediante el algoritmo denominado *transformada rápida de Fourier* TRF. Cuando en *Mathematica* se utilizan comandos como **Fourier[lista], InverseFourier[lista]** en realidad se está aplicando la transformada rápida de Fourier, de modo que la selección de N no constituye un problema técnico.

En cambio, la cuestión teórica que vamos a ver a continuación, es de la mayor importancia en el análisis de Fourier.

## SEGMENTOS ESTACIONARIOS DE LA SEÑAL

A veces se piensa que, si se tiene la forma de onda de la señal, el sólo cálculo de la transformada discreta de Fourier nos arroja una valiosa información sobre la señal. Esto es impreciso y puede ser la fuente de graves confusiones. Es cierto que cuando hay que hacer estimativos globales, como el cálculo de la potencia, de la densidad de energía, o manipulaciones de ciertos fenómenos (eco, reverberación, cepstrum, predicción lineal, etc.) es indispensable el análisis espectral de la totalidad de la señal. Pero esto no siempre ocurre así. Una señal de voz, de cierta duración, cuya forma de onda es extremadamente caprichosa y aleatoria, tendrá un espectro de frecuencia global que de poco o nada sirve calcular. El análisis de Fourier es eficaz en la medida en que estudia segmentos donde la forma de onda guarda cierta homogeneidad, o sea, es *estacionaria*, y nos permite hacer una evaluación de las diversas informaciones que nos brinda cada segmento estacionario de señal.

La voz humana, como podemos notarlo a simple vista en la gráfica de «*Hola, Carlos, cómo te va?*» es aleatoria, y cada segmento de palabra difiere del otro *en su forma*. Por eso, aunque técnicamente los cálculos sean realizables, poco sentido tiene encontrar el espectro completo de frecuencia. El método consiste en segmentar el dominio en un número determinado de *ventanas* (*windows*), hacer análisis espectral en cada ventana y luego, consolidar globalmente la información local. La solución completa de tal problema, en realidad, pertenece a algo que no consideraremos, al *análisis wavelets*[6].

El número de ventanas y de muestras por ventana está determinado por la naturaleza de la señal en consideración. Si la señal es la voz humana, se considera que unas 50 a 60 muestras es *estacionario*. Y el fonema /o/ que analizamos es estacionario en las 300 muestras que tomamos. Si limitamos el análisis de fourier a una lista como la de «fonemaO», donde $N = 300$ elementos, no sólo se simplifican los cálculos y se hacen más visibles las gráficas, sino que se cumple un requisito teórico fundamental.

Para la lista *fonemaO*, $T/N = 90.9$ ms, $2N = 300$, luego, la resolución de frecuencia es 11000/300 » 36.7 hertz. Los dominios son $\{90.9\text{ n}\}$ <—> $\{36.7\,k\}$, donde -150 £ $\boldsymbol{n} < 150$. La transformada discreta y discreta inversa de Fourier es

$$X[36.7k]=\frac{1}{300}\sum_{n=-150}^{149}x[90.9n]\exp\left(-j\pi\frac{nk}{300}\right)$$
$$x[90.9n]=\sum_{k=150}^{149}X[36.7k]\exp\left(j\pi\frac{nk}{300}\right)$$

## ESPECTRO DE FRECUENCIA DE UN FONEMA

Los dos comandos **Fourier[lista], InverseFourier[lista],** de *Mathematica* realizan la transformada rápida de Fourier. Con el primero se obtiene una nueva lista de números complejos, cada uno de los cuales contiene información de la amplitud y la fase en cada nivel de frecuencia de la señal. El segundo comando realiza el proceso inverso. Como vamos a hacer varias operaciones que requieren de números reales, primero debemos convertir los elementos enteros de la lista «fonemaO» en números reales

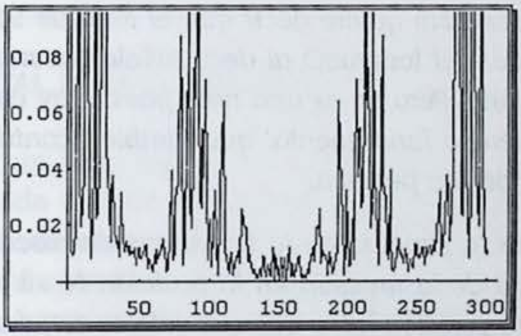
fourierFonema = Fourier[N[fonemaO]];

los 300 datos de la lista «fourierFonema» son números complejos, que contienen tanto la amplitud (módulo del complejo) como la fase (argumento del complejo). En el estudio de las señales, la fase es un factor secunda-

6 B. B. Hubbard, *The World According to Wavelets*, A. K. Peters, Wellesley, Mass. 1996.

rio, dado que cuando escuchamos una voz, el oído retiene la amplitud y es insensitivo a la fase. Por eso, nos interesa el espectro –de amplitud– de frecuencia, constituído por los valores absolutos de las muestras complejas,

```
espectroFonema = Abs[fourierFonema];
ListPlot[espectroFonema,PlotJoined->True];
```




Espectro de amplitud del fragmento de fonema.

En la gráfica, el segmento de voz está representado en el dominio de la frecuencia. Es una gráfica muy distinta de la forma de onda. En ella, para cada frecuencia en el eje de las abcisas, se tiene un valor (o amplitud) en el eje de las ordenadas que es en realidad la intensidad con que dicha frecuencia contribuye a la forma de onda de la señal analizada. La importancia del análisis espectral reside en el contenido de información del que es portador. O mucho mejor, el contenido de información que porta la señal reside en su espectro de frecuencia. Como la resolución de frecuencia es de $11000/300 = 36.6703$ hertz, el valor de cada muestra en el dominio de la frecuencia es aproximadamente 36.7 hertz, distribuídas las 300 muestras en un ancho de banda total de $11K$ hertz.

De la observación directa del espectro, se puede concluir lo siguiente, relativo al contenido de información de la señal:

1. *Muy cerca del origen, tambien llamada la* banda de bajas frecuencias, *hay una fuerte contribución de ellas, concentrándose en torno de la muestra 25. Luego, disminuyen en intensidades hasta acercarse a la muestra 3*25 = 75, en torno a la cual se encuentra nuevamente una fuerte contribución. Esto se repite*

*en la muestra 9*25 = 225 y en la muestra 11*25 = 275. Desde 0 hasta 300, Hay 300/25 = 12 múltiplos de 25, pero sólo cuatro de ellos contribuyen realmente a la estructura del espectro. En torno a los múltiplos restantes, las intensidades de frecuencia son mínimas, como la gráfica lo indica.*

2. *Como en la muestra 25 tenemos 25 x 36.7 = 917.5 hertz, entonces 917.5 es el tono, o frecuencia fundamental. Las frecuencias fundamentales para las 88 notas del piano van, desde 27.5 hasta 4096 hertz. Esto quiere decir que el tono de 917.5 hertz que logró el autor del* fonemaO *al decir* «Hola» *es muy similar a la nota del piano. Pero no es una nota pura. Hay cuatro múltiplos de la frecuencia fundamental que también contribuyen al timbre de voz de esa persona.*

3. *Observemos la simetría de la transformada discreta de Fourier. La amplitud de la muestra en la posición N - k debe coincidir con la de la posición k (ya que sus valores son complejos conjugados). La simetría ocurre a ambos lados del sexto armónico. Además, podemos apreciar cómo intervienen las intensidades de frecuencia: en el primero y onceavo armónico, se encuentran las máximas intensidades. En el tercero y noveno, disminuyen un poco. En el resto, no es apreciable. Esta es la distribución de la energía de la señal en un segmento de fonema.*

4. *A ambos lados de cada armónico significativo, se observan numerosas y complejas participaciones de frecuencias. Allí está la informacion relativa al timbre de la voz, ese registro único que caracteriza a cada emisor de voz humana. Si pudiéramos descifrarlas, podríamos extraer conclusiones sobre el emisor de la señal de voz, si es hombre o mujer, niño o adulto, la región geográfica que proviene y aún el estado de ánimo.*

5. *El gráfico nos sugiere que las bandas de frecuencia con bajísimas intensidades pueden ser eliminadas, sin que alteren mucho el contenido de información de la señal. Hemos encontrado el patrón que puede sostener –o modificar– sustancialmente una señal de voz: eliminar o resaltar determinadas bandas de frecuencia en el espectro de la señal. Esta es la regla de reconstrucción que estábamos buscando.*

Precisamente, esto es lo que hacen los *filtros*. El filtro, en general, depura los elementos de frecuencias que son imperceptibles, en el ancho de banda de la señal. En nuestro caso, como ilustración, estamos interesados en eliminar las frecuencias que no correspondan a las vecindades de los armónicos de la frecuencia fundamental. Filtrar equivale a colocar ceros en lugar de las pequeñas intensidades de las frecuencias fuera de las vecindades consideradas. Se produce así el fenómeno de *compresión*, que consiste en eliminar la redundancia en la señal.

## UN FILTRO DIGITAL PARA EL FONEMA /O/

Vamos a diseñar un filtro digital, o sea, un modo de colocar ceros en la lista deseada, en cada una de las posiciones de las frecuencias con pocas contribuciones. El diseño de un filtro se reduce a algo de lógica y de algebra. También, a un poco de programación. Supongamos que, en general, «lista» es una lista a la cual queremos removerle los elementos comprendidos entre las posiciones $n < m$, y colocar en su lugar $m$-$n$+1 ceros. La función que nos interesa definir la llamaremos **filtro[lista,n,m]**.

Por una parte, **Drop[lista,{n,m}]** remueve todos los elementos de la lista comprendidos entre n y m. Obtenemos la nueva lista «*filtrados*». Por otra parte, **Table [0,{i,m-n+1} ]** produce una lista de $m$ - $n$ + 1 ceros, que se llama la lista «*ceros*». Se trata de insertar la lista «*ceros*» en la lista «*filtrados*». Con **Module,** encapsulamos el programa, para que luego no haya confusión posible con algunas variables que tengan el mismo nombre.

El programa es

```
filtro[lista_List,n_,m_]:=
    Module[{filtrado,ceros},
        filtrado = Drop[lista,{n,m}];
        ceros = Table[0,{i,m-n+1}];
        Flatten[Insert[filtrado,ceros,n]
                ]
    ];
```

¿Cuál es la lista que debemos filtrar? No puede ser «espectroFonema», pues esta no es la transformada discreta de Fourier de la lista «*fonema*» sino la lista de sus valores absolutos. La lista que debe filtrarse es «*fourierFonema*». Tenemos aquí un problema teórico que resolver: aunque esta lista está constituída por valores complejos, su transformada discreta inversa tiene que producir valores reales. Pero si le modificamos algunos valores complejos colocando ceros, ya no podemos garantizar que la forma de onda que le corresponda sea de valores reales.

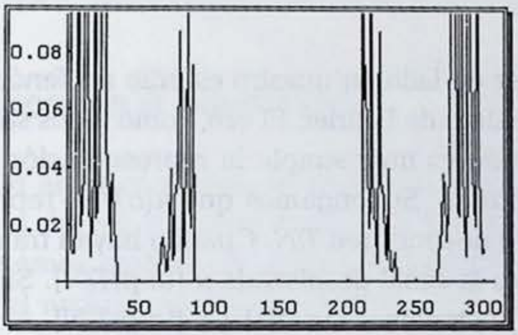
La regla de oro la provee la simetría de la transformada discreta de Fourier. Siempre que se modifique la posición $N - k$, debe modificarse la posición $k$ con el conjugado del valor modificado. O sea que si filtramos la posición $N - k$ colocando un cero, en la posición $k$ debemos colocar tambien un cero. Así, garantizaremos que la forma de onda original esté constituída de valores reales.

Pasemos ahora a filtrar la lista «*fourierFonema*». Fijémonos directamente en el espectro de frecuencias y señalemos, elemento a elemento, aquellos intervalos de frecuencia donde la intensidad es muy baja. Como ilustración, hemos seleccionado los siguientes intervalos: [ 20, 35 ], [ 65,85 ] y [ 115, 130]. Veamos como garantizar la regla de la simetría de la TDF. Calculando $N - k = 300 - k$, los otros intervalos que deben ser filtrados son necesariamente, los tres siguientes: [ 170,185], [ 215,235], [ 265,280]. En total, vamos a extraer 106 elementos y, a cambio, colocaremos 106 ceros. Paso a paso, como si fuera un filtrado manual, aplicamos la función **filtro [lista,n,m]** seis veces consecutivas, y a la lista final la llamamos «*espectroFiltrado*»

```
paso1 = filtro[fourierFonema,35,65];
paso2 = filtro[paso1,90,210];
paso3 = filtro[paso2,235,265];
espectroFiltrado = paso3;
```

La lista «*espectroFiltrado*» posee 300 valores complejos de los cuales hay 106 ceros insertados. Veamos nuestra nueva gráfica de «*espectroFiltrado*», con las tres bandas de frecuencias de amplitudes nulas.

```
ListPlot[Abs[espectroFiltrado],PlotJoined->True];
```




Espectro filtrado. Se han eliminado el 61% de las muestras

Aparentemente, hemos producido una severa modificación en la estructura del segmento de señal, eliminando 183 muestras (61% del total de las muestras). ¿Que forma de onda le corresponde a este nuevo espectro? Para descifrarlo, hacemos el proceso inverso, que consiste en convertir los espectros en formas de ondas, mediante la transformada inversa de Fourier. Verificamos que no haya ninguna muestra compleja en la nueva forma de onda

```
MemberQ [fonemaNuevo,Complex]
False
fonemaNuevo = InverseFourier[fourierFonema];
ListPlot[Chop[fonemaNuevo],PlotJoined->True];
```

Obsérvese que la forma de onda de «*fonemaNuevo*» es casi idéntica a la de «*fonemaO*». El análisis espectral nos ha permitido descifrar el problema planteado sobre los patrones de modificación de la señal.

En resumen, el proceso que hemos realizado, visto en su conjunto, ha sido la captura de una señal, su conversión en objeto sonoro, el estudio de su forma de onda y espectro de frecuencias, la modificación de sus componentes espectrales y su reconversión como forma de onda inicial. Este proceso general es lo que se denomina *procesamiento digital de la señal*. Aunque hemos estudiado un segmento de voz, el proceso anterior ocurre con toda señal que pueda ser muestreada, incluídas entre ellas, las imágenes y demás señales visuales, los textos, cualquier tipo de sonido y también, por supuesto, el ruido.

## EL ECO

No podemos dejar de lado en nuestro estudio un fenómeno físico denominado *eco,* y su análisis de Fourier. El eco, como todos sabemos, es de fácil percepción, y también es muy simple la representación de la correspondiente señal digitalizada. Supongamos que x[*nT/N*] representa una señal de voz, con intervalo de muestreo *T/N*. Cuando hayan transcurrido p microsegundos, tendremos la señal desplazada x [(*n-p*)*T/N*]. Si la debilitamos en un factor $0 < \lambda < 1$, obtenemos la señal λ x [(*n-p*)*T/N*]. Al superponerla con la señal inicial, se dice que *se ha introducido un eco*, cuyo modelo matemático es

$$eco\left[\frac{nT}{N}\right] = x\left[\frac{nT}{N}\right] + \lambda x\left[\frac{(n-p)T}{N}\right]$$

Si reiteramos el proceso varias veces, obtenemos lo que se denomina una *reverberación*. Para introducir eco en una señal de voz capturada en el computador, tenemos un doble problema: el primero es de tipo técnico, pues la percepción del fenómeno requiere de parámetros que cubran ciertos márgenes que garanticen la audición. Así por ejemplo, en comunicación telefónica, el eco entorpece la conversación si el desplazamiento *p* es mayor que 50 milisegundos. En cambio, si es menor, el oído es insensitivo al eco. Por ello, nosotros tenemos que producir, digamos, entre 100 y 200 milisegundos de retardo en la señal para que se perciba el eco. Esto corresponde aproximadamente a *p* entre 1000 y 2000 muestras. Vamos a probar con $T/N = 90.9$ microsegundos, $p = 2000$ muestras y un factor $\lambda = 0.5$.

El otro problema es de tipo sintáctico. Para sumar dos listas finitas, elemento a elemento, ellas deben tener el mismo tamaño. Si desplazamos una lista finita *p* posiciones, tendríamos que llenarla con *p* ceros desde el inicio, para mantener el tamaño de la lista desplazada. Simultáneamente, habría que colocar *p* ceros al final de la lista original, para que ambas puedan superponerse. Y tener en cuenta que la lista final debe disminuirse en una escala de $\lambda = 0.5$.

Ejemplo. Vamos a introducir *eco* en la lista {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k} con$p = 6$. Construímos dos listas, la *original* = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, 0, 0, 0, 0, 0, 0} y la *retrasada* = {0, 0, 0, 0, 0, 0, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k}. El eco será la superposición de la original con 0.5 veces la retrasada, así:

*eco* = {a, b, c, d, e, f, g+a/2, h+b/2, i+c/2, j+d/2, k+e/2, f/2, g/2, h/2, i/2, j/2, k/2}

## PRODUCIENDO ECOS EN EL COMPUTADOR

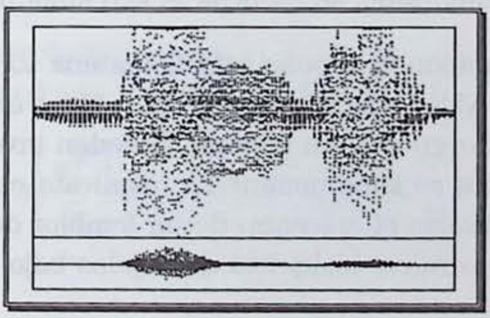
Naturalmente, lo anterior es una simplificación, porque nuestras listas representan señales de voz y tienen varios miles de elementos. Para cambiar de ejemplo, hemos grabado la expresión *«Bingo!»* y procedido como siempre, leyendo el archivo en *Mathematica*.

```
bingo=ReadList[«c:\wnmath22\bingo.dat»]+128;
Length[bingo]
5886
5886*90.9*10^(-6)
0.535037
```

La lista *bingo* tiene 5886 elementos. Como 2N = 5886, la resolución en frencuencia es11000/5886 ≈ 1.87, y la señal está representada en el par de dominios {90.9 n} <—> {1.87 k}, -2943 ≤ n, k < 2943.

Antes de introducirle eco a *bingo,* confirmamos que Mathematica la reproduzca fielmente

```
ListPlay[bingo];
```

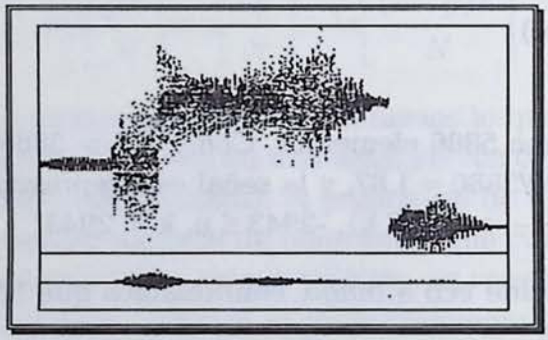


Gráfica de la expresión *«bingo!»*.

La operación matemática que haremos con la lista *bingo* es la siguiente: insertamos 2000 ceros al inicio de *bingo*, que es la lista *original*. Insertamos 2000 ceros al final de *bingo*, que es la lista *retrasada*. Ambas tienen 7886 elementos, por lo que podemos superponer *original* con 0.5 veces *retrasada*. La lista resultante se llama *eco.*

Las instrucciones son muy sencilla, y deben ejecutarse una a continuación de la otra,

```
Clear[ceros,original, retrasada,eco]
ceros = Table[0,{i,2000}];
original= Flatten[Insert[hola,ceros,Length[bingo]+1]];
retrasada = Flatten[Insert[bingo,ceros,1]];
eco = original + 0.5 retrasada];
Length[eco]
7886
ListPlay[eco];
```



Voz con eco

Como habíamos anunciado, se escucha el eco «bingo/go/o»...

El eco nos ha permitido manipular más la materia sonora, pero esta vez, como una totalidad. Vale la pena preguntarnos: una vez se ha introducido el eco ¿Podemos removerlo?. Y en general, ¿Pueden invertirse los procesos en que los fenómenos se superponen? La respuesta es positiva. Por ello, también puede localizarse el epicentro de un temblor de tierra, o calcularse distancias y reconstruirse imágenes de objetos bajo el agua, mediante ondas sonoras.

## EN EL FONDO DE LA PALABRA, EL CEPSTRUM

Hay un área del análisis de Fourier que se dedica a este importante problema. Se denomina *análisis cepstral.* Nuestra investigación finaliza con una referencia a esta área, aunque estrictamente en el campo de la voz humana.

El análisis cepstral es una invención original de los ingenieros, que reviste interés teórico y con interesantes resultados prácticos. En realidad, ha sido la necesidad práctica de develar el misterio encerrado en las series de tiempo[7] que proveen el sonido, la voz, las imágenes, los sismos, el sonar, e incluso las estadísticas económicas, la que ha llevado a diseñar un instrumento muy adecuado de análisis de series de tiempo, llamado el análisis cepstral[8].

A diferencia del análisis espectral sobre segmentos estacionarios de voz, el análisis cepstral es global. Para introducirnos en él, recordemos que hay una operación entre señales a la que dedicamos un capítulo y que tiene una gran importancia: la operación de *convolución*. Dados los pares de transformadas $x[nT/N] \Leftrightarrow X[k/2T]$, $y[nT/N] \Leftrightarrow Y[k/2T]$, hemos definido la convolución discreta entre ambas como

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] = x\left[\frac{nT}{N}\right] * y\left[\frac{nT}{N}\right] = \frac{1}{2N}\sum_{p=-N}^{N-1} x\left[\frac{(n-p)T}{N}\right] y\left[\frac{pT}{N}\right]$$

El teorema de convolución asegura que la transformada de Fourier de la convolución es el producto de las transformadas:

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] * y\left[\frac{nT}{N}\right] \Leftrightarrow X\left[\frac{k}{2T}\right] Y\left[\frac{k}{2T}\right]$$

7 B. P. Bogert, M. J. R. Healy, J. W. Tukey, «The Quefrency Alanysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudo-Autocovariance, Cross-Cepstrum and Saphe Cracking» *Proceedings of the Symposium on Time Series Analysis,* Brown University, June 11-14, 1962, edited by M. Rosenblatt.

8 D. G. Childers, *et al,* «The cepstrum: A Guide to Processing» *Proceedings of the IEEE,* vol. 65, No. 10, oct. 1977.

Vimos también que otro concepto esencial en el modelaje de la señal es el de *energía*. En todo modelo discreto asociado a una señal, se considera la *energía*

$$energía = \sum_{n=-N}^{N-1} \left\| x\left[\frac{nT}{N}\right] \right\|^2 = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} \left\| X\left[\frac{k}{2T}\right] \right\|^2$$

El análisis cepstral es, básicamente, el método para separar una señal de la cual sabemos que está constituída por dos señales que convolucionan.

Supongamos que x[$n$] representa una señal en el dominio discreto temporal, donde, para simplificar, hacemos $T/N = 1$, $T = N$. Se ha logrado encontrar que, siempre que podamos representar un segmento de voz humana como una señal x[$n$], élla es una convolución de dos señales distintas x[$n$] = $e[n]*h[n]$, donde $e[n]$ es una sucesión de impulsos de frecuencias relativamente altas, que imprime una modificación a la otra señal $h[n]$, cuyo contenido de frecuencias es mucho más bajo. En el espectro de x[$n$], ambas señales aparecen mezcladas, pero no tanto, por lo que es posible intentar separarlas.

Según la teoría a que nos referimos, la primera señal $e[n]$ corresponde a la emitida por las cuerdas vocales, mientras que la segunda $h[n]$, proviene de la intervención de impulsos semiperiódicos de la columna de aire sobre las cuerdas vocales, para la producción de la voz (hemos simplificado el modelo, pues también debe tenerse en cuenta la intervención del tracto bucal, que encubriría otra convolución).

Pensemos que el sistema de producción de voz responde con $e[n]$ ante los *imputs* $h[n]$. Si pudiésemos separar a $e[n]$, que actúa como la respuesta interna del sistema, podríamos conocer mejor los *outputs* x[$n$] = $e[n]*h[n]$. En señales como el *eco,* también podríamos intentar separar las componentes de eco para recuperar la señal inicial. Lo mismo, para las señales sísmicas, etc. La idea matemática, que sólo bosquejaremos, es la siguiente: sea

$$x[n] = e[n] * h[n] = \frac{1}{2N} \sum_{p=-N}^{N-1} e[(n-p)]\, h[p]$$

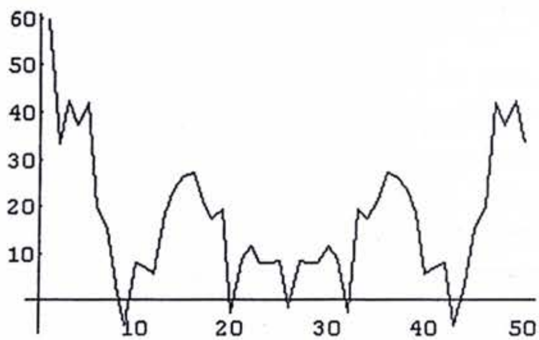
## ANALISIS CEPSTRAL DE UN FONEMA

Cuando estudiamos el fonema /o/ tantas veces citado, representado en la lista *fonemaO,* separamos la lista *particulaO* con 50 elementos, e hicimos su análisis espectral. ¿Podríamos penetrar más en su contenido? ¿Que podemos decir, mediante el análisis cepstral? Los 50 elementos son:

*particulaO* = {173, 186, 173, 151, 138, 119, 99, 89, 86, 91, 101, 106, 116, 126, 119, 109, 106, 91, 79, 71, 76, 89, 121, 153, 163, 206, 246, 216, 203, 211, 168, 111, 104, 101, 69, 69, 101, 116, 114, 133, 156, 136, 133, 138, 119, 121, 131, 136, 151, 176}

Calculamos el logaritmo del espectro de *particulaO* –el factor 20 en el logaritmo de base 10 es la medida del *decibel*–.

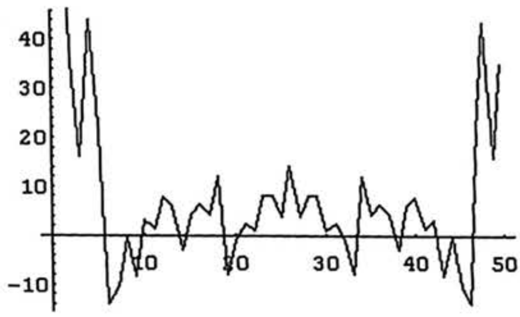
```
espectro = Abs[Fourier[N[particulaO]]];
logaritmo = 20 Log[10,espectro];
ListPlot[logaritmo,PlotJoined->True];
```




Logaritmo del espectro

Aunque sólo hay 50 valores, alcanzamos a notar una modulación en el espectro. Esto quiere decir que el espectro contiene dos señales, no una, como podría pensarse. En la gráfica, la simetría es obvia. Ello indica que la transformada inversa de Fourier, que es el cepstrum de la señal, contiene sólo valores reales:

```
cepstrum = InverseFourier[logaritmo];
ListPlot[Chop[cepstrum], PlotJoined->True];
```




Tres golpes de aire contra las cuerdas vocales

La gráfica es sugestiva: lo que caracterizamos inicialmente como una partícula «elemental» de un fonema, no lo es tanto. Su cepstrum indica que aún puede ser separada, ya que la gráfica insinúa tres impulsos –deltas de Dirac!– que participan en la forma de onda de la señal original.

Apéndice I

# Construcción de sistemas numéricos no arquimedianos

Exploraremos la posibilidad de familiarizarnos con los hiperenteros y los hiperracionales, diseñando modelos no arquimedianos de extensiones de los enteros y racionales. Tales estructuras no alcanzarán a cubrir la totalidad de los conjuntos hiperenteros e hiperracionales, pero arrojan luz sobre los sistemas numéricos con elementos infinitos e infinitesimales que a lo largo de todo el libro hemos utilizado.

## ¿QUÉ SON LOS NÚMEROS NATURALES?

Ya hemos mencionado que Thoralf Skolem, en 1934, demostró que el sistema de los números naturales, en cierta forma, no podía ser caracterizado por ningún conjunto que tuviese sus mismas propiedades aritméticas. Skolem alcanzó a construir una extensión propia de los números naturales que satisfacía todas las propiedades de los naturales expresables mediante las operaciones de adición y multiplicación. Como uno de los principales servicios que nos presta el conjunto de los naturales es el de contar, podemos preguntarnos sobre las diversas posibilidades de construcción de sistemas de números que sirvan para contar, esto es, por extensiones propias de los números naturales. ¿Se pueden construir tales conjuntos en el aula de clase? La respuesta es breve: sí, y para ello no se requieren herramientas teóricas especializadas. Lo único que necesitamos es remitirnos a los principios elementales con los que tradicionalmente se construyen los números naturales. Para todos es conocido el conjunto 0, 1, 2, 3, etc. de los números naturales *N*, que cumple con unos principios básicos, llamados *Axiomas de Peano*. Tales axiomas son los siguientes:

1. *0 pertenece a N*

2. *Si* n *pertenece a N, su sucesor n + 1 también pertenece a N*

3. *0 no es sucesor de ningún elemento de N*

4. *Si n* y *m en N tienen el mismo sucesor, entonces n = m*

5. *Si A(n) es una fórmula en los números naturales que es verdadera para 0* y *si, suponiendo A(n) demostramos A(n+1) entonces A(n) es verdadera para todo número natural.*

El axioma 5 se conoce como *principio de inducción*. Con base en estos cinco axiomas se definen en el aula de clase las operaciones de suma y producto de naturales así como la relación de orden lineal: dados dos naturales distintos, uno es menor o mayor que el otro; Así mismo, se demuestran las leyes y propiedades más útiles e interesantes de los números naturales. Hay una propiedad que nos interesa destacar, que es la *propiedad arquimedeana* de *N,* y que se enuncia de la manera siguiente: dado cualquier natural $n$, la unidad 1 puede sumarse un número $k$ de veces tal que $n < k$. En otras palabras, todo número natural puede ser alcanzado y sobrepasado por adiciones consecutivas de la unidad. El conjunto $N$ con sus operaciones de suma y producto y su relación de orden se extiende a los números enteros ordinarios $Z$, que son los naturales y sus negativos, obteniéndose así el *dominio entero Z,* con una estructura algebraica aditiva y multiplicativa y una relación de orden lineal.

Desde Peano, la construcción de los números enteros era aparentemente tal clara y obvia, que muchos consideraban innecesario insistir sobre élla en el aula de clase. El *análisis no estándar* ha convertido en imperiosa necesidad revisar las falsas apariencias y volver las páginas atrás, aún en lo que se refiere a la naturaleza de los números naturales. A continuación, siguiendo a Nelson[1], introduciremos una vía axiomática para operar un conjunto similar en algunos aspectos, al conjunto de los números naturales *N,* que va a arrojar luz sobre las nuevas entidades numéricas que la matemática tradicional ha sido incapaz de considerar.

1 E. Nelson, «Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis», *Bol. of the American Mathematical Soc.*, Vol. 83, Nov. 6, 1977.

## NÚMEROS NATURALES NO ARQUIMEDIANOS

Vamos a denominar «*fórmula tradicional*» a toda fórmula A*(n)* en *n*, mientras que llamaremos «*fórmula no tradicional*» a aquellas que expresamente se refieran a «*n finito*» y a «*n no finito*». Así, a nuestro conjunto de los números naturales *N* se le adicionan los siguientes presupuestos:

1. *0 es finito*
2. *Todo sucesor de un número natural finito es finito*
3. *Existe algún número natural no finito en N*
4. *Si A(n) es una fórmula cualquiera, tradicional o no tradicional, que es verdadera para 0* y *si, suponiendo A(n) demostramos A(n+1), donde es* n *natural finito, entonces A(n) es verdadera para todo número natural finito. Este es el* principio de inducción no tradicional.

Nótese que denominamos *número natural* a los elementos del nuevo conjunto que satisface los axiomas mencionados. Para evitar innecesarias polémicas, podemos pensar que esta alusión es una metáfora, y referirnos a los miembros del conjunto simplemente como elementos. Veamos como funciona este nuevo enfoque. Cuando la fórmula *A* es tradicional –o sea que no se mencionan los conceptos de finito y no finito– el principio de inducción anterior se reduce a la inducción ordinaria, y por tanto, se cumplen todas las reglas familiares de los números naturales, entre ellas, las que cumplen las operaciones de adición, multiplicación y la relación de orden. Ahora, para confirmar que el número 1 es finito, hay que apelar a (1) «0 es finito» y a (2) «el sucesor de 0 es finito» y como el sucesor de 0 es $0 + 1 = 1$ entonces 1 es finito. Y así, 0, 1, 2, 3, y en general, todos los naturales que nos son familiares, son finitos. Por supuesto, no todos los naturales son finitos, porque (3) nos garantiza que que existe un natural no finito. Sea m ese natural. Consideremos la fórmula *A*(*n*): «$\mu > n$, *n* finito». Esta es una fórmula no tradicional que dice: «un natural no finito es mayor que todo natural finito». Es obvio que se cumple para $n = 0$, porque 0 es finito y supuesta para *n* finito, como $n + 1$ también es finito, vale para $n + 1$. O sea que, aplicándo (4), vale para todo natural finito. Entonces, dado que todo natural no finito es mayor que todo natural finito, al natural no finito se le denomina natural *infinito*. Del mismo modo puede demostrarse que si μ es infinito y se suma con un natural finito obtenemos un natural infinito, que muestra que hay tantos naturales infinitos como se quieran.

Otras reglas pueden establecerse con extrema facilidad, por ejemplo, la suma de naturales finitos es un natural finito. En efecto, la fórmula no tradicional correspondiente será $B(n)$: «$n + m$ es finito». Para demostrar que el producto de naturales finitos es finito, se aplica (4) a la fórmula $C(n)$: «$n \times m$ es finito».

El conjunto de números naturales $N$ así considerado transgrede la propiedad arquimedeana ya que la suma $1+1+1+\cdots+1$ siempre es finita y por tanto, si $\mu$ es infinito, siempre tendremos $1+1+1+\cdots+1 < \mu$ o lo que es lo mismo, un natural infinito no puede ser alcanzado por adiciones sucesivas de la unidad.

El conjunto $N$, sus operaciones de suma y producto y su relación de orden se extiende a los nuevos enteros $Z$, que son los nuevos naturales y sus negativos, finitos e infinitos, obteniéndose así el *dominio entero* $Z$, con una estructura algebraica aditiva y multiplicativa, y una relación de orden lineal consistente con su estructura algebraica. Obviamente, surge la pregunta de si es posible la construcción de las anteriores estructuras de modo no axiomático, esto es, sin suponer previamente que existe un conjunto que satisface los axiomas de Peano y de Nelson. Esta es la nueva vía que vamos a explorar.

## ESTRUCTURAS CON ORDEN LINEAL

Recordemos que un conjunto en general se llama *linealmente ordenado* si existe una *relación binaria* < que sea *transitiva* e *irreflexiva*. Esto quiere decir, que se cumplan los siguientes tres requisitos: para todos sus elementos $x$, $y$, $z$,

$$x < y, \quad y < z \quad \rightarrow \quad x < z.$$

$$x < y \rightarrow \quad x \neq y.$$

$$x \neq y, \quad x < y \quad \vee \quad y < x.$$

La tercera condición hace que el orden sea lineal o total. En general, una estructura algebraica se denomina *grupo aditivo linealmente ordenado* si es un grupo conmutativo en el cual está definida la relación de orden < entre sus elementos, tales que se cumple $a + s < b + s$, para todo $s$. Un ejemplo familiar es el conjunto de los enteros ordinarios Z con las operación de suma y el orden lineal usual $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$. Dado que, como hemos visto, todo entero ordinario es alcanzado por sumas sucesivas de la unidad, Z se *denomina grupo arquimediano*. Es el momento de explorar la existencia de grupos aditivos linealmente ordenados que no sean arquimedianos.

## UN GRUPO ADITIVO NO ARQUIMEDIANO

En 1975, Robinson publicó un ensayo magistral[2], que resuelve el problema de existencia de estructuras no arquimedianas, y el cual nos servirá de inspiración para las construcciones que haremos de ahora en adelante. Consideremos el conjunto $Z_1(x)$ definido por los entes de la forma $a+bx$, donde $a$, $b$ son números enteros ordinarios Z y x es un símbolo que no asume valores en Z. Estos entes pueden pensarse como polinomios de grado 1, con coeficientes enteros. Cuando $b = 0$, haremos la identificación $a = a + 0x$, de modo que el conjunto de los enteros ordinarios Z se puede considerar subconjunto propiamente contenido en $Z_1(x)$, lo que se puede escribir como $Z \subset Z_1(x)$. Ahora definimos la operación *suma* del modo siguiente:

$$(a+bx)+(c+dx)=(a+c)+(b+d)x.$$

Como es tradicional, la adición finita $k$ veces de un elemento consigo mismo la denotaremos

$$(a+bx)+(a+bx)+\cdots+(a+bx)=ka+kbx=k(a+bx)$$

La operación de suma cumple la ley *conmutativa* y *asociativa*, y el entero 0 es el *neutro* de la suma; además, todo elemento $a + bx$ tiene *un inverso aditivo*: $-(a+bx)=-a-bx$, por lo que $Z_1(x)$ es un *grupo aditivo* que puede considerarse *extensión propia* del grupo aditivo de los enteros Z.

2 A. H. Lightstone, A. Robinson, *Nonarchimedean Fields and Asymtotic Expansions*, North Holland Pu., Co., Oxford, 1975.

La relación de orden en la definiremos de la manera siguiente. Dado dos elementos cualesquiera $a + bx$, $c + dx$, entonces diremos que

$$a+bx<c+dx \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b<d \\ b=d \rightarrow a<c \end{cases}$$

Esta es claramente una relación de orden lineal, pues dados dos elementos cualesquiera $a + bx$, $c + dx$, los enteros $b$ y $d$, o son distintos, luego necesariamente uno será menor que otro, o son idénticos. En el primer caso, suponiendo $b < d$, $a + bx < c + dx$; en el segundo caso, haciendo un razonamiento análogo, o los enteros $a$ y $c$ son idénticos, luego $a + bx = c + bx$, o uno es menor que otro; suponiendo $a < c$, entonces $a + bx < c + dx$. Así por ejemplo, es facil verificar que

$$3-5x<11-3x$$
$$4x<8+6x$$

También es fácil comprobar que dicha relación de orden preserva la operación de la suma: si tenemos $a + bx < c + dx$ y sumamos a ambos lados el elemento $p + qx$, obtenemos $(p + qx) + ( a + bx) < (c + dx) + (p + qx)$. Esto porque, suponiendo $b < d$, entonces $q + b < q + d$. El razonamiento para $b = d$ es similar.

Ahora bien, como los enteros Z están contenidos en $Z_1(x)$, los entes de la forma $a+0x$ los podemos llamar *enteros ordinarios* o *finitos,* dado que representan a los números enteros de Z. En cambio, dado $b > 0$, para todo entero finito $a$,

$$a<a+bx, \quad b>0.$$

La conclusión es sorprendente: ningún ente de la forma $a+bx$ puede obtenerse mediante adiciones sucesivas de la unidad. Cualquiera de éstos es nuestro candidato para denominarlo *infinito.* Nuestro conjunto $Z_1(x)$ es lo que se conoce como *grupo aditivo no arquimediano.*

Una descripción gráfica de $Z_1(x)$ es la siguiente: identificamos los elementos $a + bx$ con las parejas de números enteros $(a, b)$ en el plano $(x, y)$, con el orden siguiente: $(a, b) < (c, d) \Leftrightarrow b < d$, ó $b = d \rightarrow a < c$. Esta relación ordena linealmente todas las parejas de enteros en el plano, donde siempre cualquier pareja que esté abajo de otra es menor que aquella, mientras que si ambas están sobre la misma horizontal, la que está a la izquierda es menor que la de la derecha. De esta forma, todas las parejas *(a, 0)* que están sobre el eje de las x representan los enteros finitos, y cualquier otra, los enteros infinitos, positivos y negativos.

## CONSTRUCCIÓN DE HIPERENTEROS NUMERABLES

El conjunto $Z_1(x)$ es nuestro primer grupo aditivo no arquimediano, con elementos infinitos. Pero hay algo que puede pasar desapercibido: $Z_1(x)$ carece de estructura *multiplicativa,* y peor aún, no hay forma de dotarla de una multiplicación entre elementos que preserve la estructura aditiva y de orden lineal. identificarse con los hiperenteros. En efecto, si quisiéramos una multiplicación consistente con la suma, necesariamente tendríamos que definir

$$(a+bx)(c+dx)=ac+(ad+bc)x+bdxx$$

y esto nos obliga a introducir otro elemento externo al grupo que corresponda a xx. Definamos entonces $Z_2(x)$ como el conjunto de los entes de la forma $a+bx+cx^2$ donde los coeficientes *a, b, c* son números enteros, y la suma de ellos se hace sumando término a término. De la misma forma que en $Z_1(x)$, se puede verificar la siguiente relación de orden lineal:

$$a+bx+cx^2 < p+qx+rx^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c<r \\ c=r \to b<q \\ c=r, b=q \to a<p \end{cases}$$

Nuevamente, $Z_2(x)$ es un grupo aditivo no arquimediano, con elementos finitos e infinitos. Y aunque algunos elementos se pueden multiplicar entre sí, como por ejemplo,

$$(2-3x)x=2x-3x^2$$

no todos pueden multiplicarse entre sí, como es el caso de

$$x(2+x^2)$$

ya que no hay un elemento de $Z_2(x)$ que corresponda al producto $xx^2$. ¿Cómo podemos obtener un dominio entero linealmente ordenado, esto es, un grupo aditivo y multiplicativo sin divisores de cero, no arquimediano?. Hacemos $Z(x)$ el conjunto de todos los entes de la forma

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n .$$

donde cada coeficiente es un número entero, con la adición y multiplicación usual, como si fueran polinomios, y $n$ es cualquier entero positivo finito. Al primer coeficiente se le llama el coeficiente libre. Y al último que no es cero, se le llama el último coeficiente. Llamémosle *grado de p* al exponente donde está el último coeficiente. El polinomio de grado cero es precisamente, de la forma

$$a + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$$

Estos elementos se llaman *enteros finitos,* los identificamos con el entero $a$, y esto hace $\mathrm{Z} \subset Z(x)$.

Definimos la relación de orden como antes: comparamos los coeficientes de mayor grado; si uno es menor que otro, decimos que el primer ente es menor que el segundo ente. Y si son iguales, procedemos similarmente con los coeficientes del grado anterior, etc. La situación de la multiplicación en $Z(x)$ ha quedado resuelta, ya que un elemento de grado $n$ y otro de grado $m$ producen uno de grado $n + m$.

Se puede comprobar que la relación de orden es lineal, y preserva perfectamente las operaciones de adición y multiplicación mencionadas. En otras palabras, si $p_1 < p_2$, para cualquier elemento $p$ de $Z(x)$,

$$p_1 < p_2 \rightarrow p + p_1 < p + p_2$$
$$p > 0 \rightarrow pp_1 < pp_2$$

También es claro que no hay divisores de cero, o sea $Z(x)$ es un dominio entero no arquimediano. Particularmente, todo elemento de grado mayor que cero es un elemento infinito. ¿Podríamos afirmar que $Z(x)$ es el conjunto de los hiperenteros? Como hay elementos infinitos, podemos denominarlos hiperenteros. Pero no son todos los hiperenteros, porque $Z(x)$ es la unión numerable de conjuntos numerables y por consiguiente él mismo es numerable. Hemos construido un *modelo numerable* de hiperenteros. Y recordemos que el conjunto *Z, restricción de *R, es no numerable. No hay confusión alguna en denominar a $Z(x)$ como un *dominio entero de hipernaturales,* quieriendo decir con ello que $Z(x)$ es un subconjunto propio de los hipernaturales *Z.

Ejemplo

Utilizando el modelo construido, los siguientes son elementos infinitos:

$$N = 2 - 3x$$
$$M = x^2 + x^3$$
$$P = 1 - x^2$$

Si nos fijamos en los signos de sus coeficientes, concluimos que el primero de éllos $N$, es infinito negativo. Así mismo, $P$. En cambio, $M$ es infinito positivo. Estos elementos infinitos pueden operarse entre ellos mismos:

$$1 + P = 2 - x^2$$
$$N^2 = (2 - 3x)^2 = 4 - 12x + 9x^2$$
$$M - P = x^2 + x^3 - 1 + x^2 = -1 + 2x^2 + x^3$$

Hay otras propiedades interesantes que se cumplen en todo dominio entero no arquimediano, o sea, en todo modelo de hiperenteros que se construya, como el que aquí hemos hecho. Por ejemplo, Si $N$ es infinito, entonces $N+1$ es infinito, porque para todo $n$ finito, $n < N$ implica que $n < N + 1$. Sean $n$, $m$ finitos y $N$ infinito. Entonces $nN = mN$, implica que $(n - m)N = 0$, luego $n = m$, porque $N \neq 0$ y es válida la ley cancelativa de la multiplicación. Dado $N > 0$ elemento infinito, supongamos que es válido definir la cantidad $N!$, denominada *factorial* y definida como $N! = 1\times2\times3\times \dots N$. Entonces tal elemento es divisible por todo entero finito.

Ejemplo

La siguiente propiedad es inédita en los enteros finitos: dado $N > 0$ infinito, la sucesión decreciente $N - 1, N - 2, N - 3, \ldots$, es un subconjunto no vacío de elementos positivos que no tiene un primer elemento. En nuestro modelo la explicación del hecho anterior es muy sencilla, porque es obvio que si, por ejemplo, $N = 2\text{-}x$, se cumple el orden descendente de la sucesión

$$2-x>1-x>-x>-1-x>-2-x>\ldots$$

donde cada elemento es infinito pero la cadena no tiene un primer elemento.

## Factorización de elementos infinitos

En la aritmética elemental[3], se define como *compuesto* el entero que posee un factor o divisor distinto de él y de la unidad, mientras que se le llama *primo* a aquel entero que sólo tenga como divisores a sí mismo y a la unidad. ¿Existe un número primo infinito? No es obvia la respuesta. Entre los enteros finitos, es facil demostrar que todo entero compuesto tiene un factor primo. En general, no es nada claro que todo elemento infinito se pueda factorizar en sus factores irreducibles. Nuestro modelo $Z(x)$ tiene la ventaja de que podemos identificarlo como anillo de polinomios en la variable x, y éste es un *dominio de factorización única*[4]. Particularmente, pueden aplicarse los conceptos de números primos y números compuestos, usuales de la teoría elemental de números. Por ejemplo, los dos elementos $M = 1\text{-}x$, y $P = 1\text{+}x$, son *primos infinitos*, porque no pueden factorizarse. En cambio

$$N=1-x^2$$

es infinito compuesto, ya que

$$N=(1-x)(1+x)=MP$$

3 H. Griffin, *Elementary Theory of numbers,* Mc.Graw-Hill Book Company, Inc., 1954.

4 I. N. Herstein, *Topics in Algebra,* Blaisdell Publishing Company, 1964.

o sea, factorizable como producto de dos primos infinitos. Estos razonamientos tan simples, son impensables en la aritmética tradicional.

## ¿Donde están las potencias?

En algun momento hemos mostrado que $Z(x)$ es numerable y por ello es sólo un modelo aproximativo de los hiperenteros, tal y como se les conoce en el análisis no estándar. ¿En donde está fallando la construcción que hemos hecho que no se alcanza a cubrir a $^*Z$? La respuesta no se encuentra a primera vista. Sabemos que las potencias finitas de cualquier elemento de $Z(x)$, sea este finito o infinito, son nuevamente elementos de $Z(x)$. Pero si pretendemos realizar una operación de potenciación donde el exponente es infinito se produce una falla fatal. En efecto, tomemos un entero infinito $P$ e indaguemos sobre la existencia de un ente como

$$2^P$$

De acuerdo a las reglas de la aritmética, a tal expresión tiene que corresponderle otro número entero infinito. Pero esto es imposible, porque nuestros elementos son idénticos a las expresiones polinomiales y no hay ninguna de éllas, digamos $N$, que para un grado $n$ finito cumpla,

$$a_0 + a_1 N + a_2 N^2 + \cdots + a_n N^n = 2^P$$

La situación será peor aun si intentamos construir expresiones del tipo

$$N^N$$

o sea que nuestro $Z(x)$ es un conjunto mucho más grande que los enteros finitos, pero no tan grande.

## Un campo de hiperracionales

La enorme ventaja de tener un dominio entero como $Z(x)$ es la posibilidad de construir, como paso inmediato, el *campo de cocientes*, que como es usual estaría constituido por los elementos de la forma

$$\frac{n}{m},\frac{n}{N},\frac{M}{n},\frac{N}{M}$$

que son las diversas combinaciones de cocientes en los cuales los numeradores y denominadores son finitos o infinitos, respectivamente.

Recordemos que en los cursos de *Algebra*[5], dado un dominio entero cualquiera, se construye su campo de cocientes a partir del conjunto de parejas *(x,y)* donde $y \neq 0$, de elementos del dominio entero, con las operaciones

$$(x, y)+(u,v)=(xv+uy, yv)$$
$$(x, y)\cdot(u,v)=(xu, yv)$$

identificados con la *relación de equivalencia* $(x, y)\approx(u,v)\Leftrightarrow xv=uy$. Puede demostrarse que tal estructura constituye un *campo*, cuyos elementos son clases de equivalencia que se denotan

$$(x, y)\equiv\frac{x}{y},y\neq 0$$

y de allí el nombre de *campo de cocientes*. Apliquémosle ésto al dominio entero $Z(x)$. En otras palabras, definimos $Q(x)$ el conjunto de las entidades de la forma

$$Q(x)=\left\{\frac{p}{q}|\ p,q\in Z(x),\ q\neq 0\right\}$$

donde podemos identificar $Z(x)\subset Q(x)$ para los elementos cocientes cuyo denominador es la unidad. Las operaciones de adición y multiplicación usuales en el campo de cocientes serán,

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+qr}{qs},\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}$$

La relación de orden lineal es la usual:

5 I. N. Herstein, Op. Cit.

$$\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \Leftrightarrow ps \leq qr \,.$$

donde el primero se dice que está a la *izquierda* del otro. Como siempre se cumple la desigualdad $p \leq pq$, dado un racional $p/q$ cualquiera, a su *derecha* se encuentra algún elemento $Z(x)$, sea este entero finito o infinito. El campo $Q(x)$, constituido por parejas de elementos de un conjunto numerable, es así mismo numerable, y es un modelo aproximado del campo de los *hiperracionales* $^*Q$. No habrá confusión alguna si a $Q(x)$ le llamamos un *campo de hiperracionales*, queriendo decir con ello que es un subcampo propio de $^*Q$.

El campo $Q(x)$ es de una riqueza numérica inusitada. Ya sabemos que contiene a todos los enteros infinitos. Pero además, es un hecho notorio que existen elementos menores en valor absoluto que todo cociente de enteros positivos finitos. Sean $p$ y $q$ dos de tales enteros y $N$ entero infinito positivo. Entonces $pN$ es infinito, luego $q < pN$, por tanto, multiplicando a ambos lados por $q^{-1} N^{-1}$, obtenemos

$$0 < \frac{1}{N} < \frac{p}{q}$$

De acuerdo a nuestra nomenclatura inicial, el nombre de *racional ordinario* le corresponde a todo cociente de enteros finitos; el *racional finito* es todo aquel que sea menor que algún entero finito; así mismo, llamaremos *racional infinito* a aquellos que son mayores que todo entero finito. Y le llamaremos *infinitesimal* a todo aquel elemento de $Q(x)$ que posea la propiedad de ser menor en valor absoluto que todo racional ordinario positivo. Hemos mostrado que es posible construir en el aula de clase, de un modo extremadamente simple, campos con elementos finitos, infinitos e infinitesimales.

## Elementos finitos, infinitos e infinitesimales

Hemos construido un campo linealmente ordenado que contiene tres tipos de números, dos de las cuales son inéditos en el cálculo tradicional: los denominados infinitamente pequeños e infinitamente grandes. Ahora, no debemos confundir el *racional ordinario*, que es un cociente de enteros finitos, con los *racionales finitos*, que son aquellos menores que algún entero finito. Por ejemplo, si $N$ es entero infinito, o sea, una expresión polinomial no finita, digamos $N = 2x^2 + 5$, el número

$$2+\frac{3}{N}=2+\frac{3}{2x^2+5}$$

es un racional finito no ordinario. Los cocientes de hiperenteros que produzcan racionales finitos, infinitesimales o infinitos, no son obvios, como lo indican los ejemplos a continuación.

Ejemplo

Dado $N$ infinito, $2N$ es infinito, luego tanto $1/N$ como $1/2N$ son infinitesimales. Pero el cociente de ambos es $(1/N)(2N) = 2$ es racional ordinario.

Ejemplo

Si $N$ es infinito, $N^2$ es infinito y $1/N^2$ es infinitesimal, y el producto de $N$ por el infinitesimal $1/N^2$ es $N\ (1/N^2) = 1/N$ que es infinitesimal, mientras que el producto de $N^2$ por el infinitesimal $1/N$ es $N^2\ (1/N) = N$ que es infinito.

Ejemplo

Si $N$ es infinito, $N + 1$ es infinito, pero $N < N + 1$, luego

$$0<\frac{N}{N+1}<1$$

Este es un ejemplo de racional que no es cociente de enteros finitos. Para saber que tipo de racional tenemos, observemos que

$$\frac{N}{N+1}=1-\frac{1}{N+1}=1-\alpha$$

la cantidad $1 - \alpha$ es un racional finito no ordinario situado a la izquierda de la unidad.

Ejemplo

Sea N entero infinito. Los siguientes son racionales infinitos:

$$\frac{N^2+1}{N}, \quad \frac{2N^3-3N^2+1}{N^2-5}.$$

Los siguientes son infinitesimales:

$$\frac{1}{N}-\frac{1}{3N^4}, \quad \frac{N^3}{1+N^5}.$$

## OPERACIONES ENTRE INFINITESIMALES

Si tomamos un infinitesimal $\alpha > 0$, el inverso $\alpha^{-1}$ es infinito, y a su derecha se encuentra alguno entero infinito $N$. Por consiguiente,

$$0<\frac{1}{N}<\alpha .$$

Esto quiere decir que, dado cualquier infinitesimal, siempre podemos tomar a su izquierda a un infinitesimal de la forma $1/N$, $N$ entero.

Respecto a las operaciones de adición y producto, tenemos las siguientes propiedades. Si $p$ es un racional ordinario y a un infinitesimal, entonces $p$a es infinitesimal. Así mismo, la suma o el producto de dos infinitesimales es infinitesimal. Lo primero se demuestra así. Por brevedad, supongamos todos positivos. Sea $q$ cualquier racional ordinario. Entonces $q/p$ es racional ordinario, luego $\alpha < q/p$, y por consiguiente $p\alpha <$ q. Lo segundo se demuestra así. Sean $\alpha$ y $\beta$ dos infinitesimales. Tomemos $q$ cualquier racional ordinario. Como $q/2$ es racional ordinario, tenemos

$$\alpha<\frac{q}{2}, \beta<\frac{q}{2} \Rightarrow \alpha+\beta<q .$$

De la misma forma, si $q$ es racional ordinario, sea $p > 0$ racional ordinario tal que $p^2 < q$. Por consiguiente,

$$\alpha<p, \beta<p \Rightarrow \alpha\beta<p^2<q .$$

## Clasificación de racionales no ordinarios

¿Como saber si una operación produce siempre racionales infinitos o racionales infinitesimales? Ya vimos que, si tenemos un racional infinito, su inverso será infinitesimal. Cuando el racional es infinitesimal, su inverso es infinito. Con el modelo que construimos, podemos profundizar sobre la forma general de los hiperracionales y clasificarlos en su totoalidad.

Recordemos que siempre que fijemos un hiperentero $P$ de $Q(x)$ nos estamos refiriendo a una expresión de la forma

$$P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

donde todos los coeficientes son enteros ordinarios y el término libre no es cero. Cuando tenemos dos expresiones $P$, $Q$ como las anteriores, de grados $n$ y $m$ correspondientes, un hiperracional $q$ no es más que la clase de equivalencia del cociente respectivo

$$q = \frac{P}{Q} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$$

por consiguiente, es suficiente conocer las relaciones entre los grados $n$, $m$ para clasificar todos los hiperracionales. Sólo hay tres posibilidades. Si ocurre que $n = m$, al dividir el numerador y el denominador por x elevado al grado $n$,

$$q = \frac{\dfrac{a_0}{x^n} + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + a_n}{\dfrac{b_0}{x^n} + \dfrac{b_1}{x^{n-1}} + \cdots + b_m}$$

obteniéndose el racional finito

$$q = \frac{a_n + \alpha}{b_n + \beta}$$

donde $\alpha$ y $\beta$ son infinitesimales, porque son sumas de infinitesimales y productos de racionales ordinarios con infinitesimales. Los otros sumandos son los últimos coeficientes de los polinomios correspondientes.

Si uno de los dos grados es menor que el otro, dividimos cada término por x elevado al exponente que es el mayor de ambos grados. Supongamos que $n < m$. Realizando la división correspondiente, el cociente será de la forma

$$q = \frac{\alpha}{b_m + \beta}$$

que es infinitesimal. Si $n > m$, la división produce una expresión de la forma

$$q = \frac{a_n + \alpha}{\beta}$$

que es racional infinito. En resumen, dado un hiperracional como cociente de expresiones polinomiales, nos fijamos en las relaciones entre los grados respectivos. Si coinciden, dicho hiperreal es racional finito; si el grado del numerador es mayor, el hiperracional es infinito; y si el grado del numerador es menor, el hiperracional es infinitesimal.

## La distancia infinitesimal

Uno de los atributos fundamentales de cualquier espacio que se considere es su *métrica,* que en caso de que exista, está determinada por la *distancia* entre sus elementos. Como es de esperarse, se define la distancia entre dos elementos cualesquiersa de $Q(x)$ como *el valor absoluto de la diferencia* entre éllos. Pero aquí la situación difiere drásticamente que en la aritmética ordinaria, ya que esta distancia, que es nuevamente una número racional, puede ser finita, infinita o infinitesimal.

Cuando la distancia entre dos racionales $a$ y $b$ es infinita, se dice que $a$ y $b$ están infinitamente distantes o infinitamente lejanos. Mientras que si la distancia es infinitesimal, se dice que $a$ y $b$ están infinitamente próximos, o infinitamente cerca y se escribe $a \approx b$. Esto quiere decir que es equivalente el que a sea infinitesimal, a que $a \approx 0$.

La estructura métrica que se introduce con esta distancia es uno de los aspectos relievantes y sorprendentes de nuestro modelo de campo no arquimediano. Esto nos permitirá clasificar a aquellos elementos que, dados un racional ordinario, difieren de éste en un infinitesimal. Dado $a$ racional ordinario se define el *átomo* de $a$ como el conjunto de todos los hiperracionales que difieren de $a$ en un infinitesimal. En otras palabras,

$$A(a)=\{q\in Q(x)|\ q\approx a\}.$$

Particularmente, el átomo de cero *A(0)* está constituído por todos los elementos infinitesimales. Por consiguiente, para representar cualquier elemento del átomo de $a\neq 0$ es suficiente tomar un infinitesimal $\omega$ y sumárselo a $a$. Como $a$ es un racional ordinario, los elementos de su átomo son de la forma

$$q=a+\omega$$

Nuestro modelo *Q(x)* nos permite descifrar completamente el átomo de un elemento. Sabemos que la expresión general de todo hiperracional es

$$q=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}.$$

Supongamos que dicho hiperreal es finito, que corresponde al caso que nos ocupa. Necesariamente, se cumplirá que $n\leq m$. Sea $n = m$. Definamos el símbolo

$$^{\circ}q=\frac{a_n}{b_n}$$

que es el cociente de los últimos coeficientes y por consiguiente, es un racional ordinario. Si $n < m$, $q$ será infinitesimal, en cuyo caso definimos. Veamos que en ambos casos, se cumple la interesante relación

$$q\approx{}^{\circ}q\ .$$

Cuando $n < m$ no hay nada que demostrar, porque $q$ es infinitesimal y por tanto $q$ está infinitamente cerca de cero. Si $n = m$,

$$q=\frac{a_n+\alpha}{b_n+\beta}$$

por lo que podemos calcular la distancia entre éllos, así:

$$q - {}^{\circ}q = \frac{a_n + \alpha}{b_n + \beta} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{b_n\alpha - a_n\beta}{b_n{}^2 + b_n\beta} = \omega$$

que es claramente infinitesimal. Obviamente, si hiciéramos $a = {}^{\circ}q$, tendremos

$$q = {}^{\circ}q + \omega$$

La expresión anterior se puede leer de la manera siguiente: todo hiperracional finito se descompone en la suma de un racional ordinario –su parte estándar– y un infinitesimal. Ahora hemos descifrado el átomo de cualquier racional ordinario. Si el racional ordinario es cero, su átomo está constituído por todos los cocientes de polinomios cuyo denominador es de grado mayor que el numerador. Si el racional ordinario no es cero, su átomo está constituído por todos los cocientes de polinomios de igual grado, donde el racional ordinario coincide con el cociente de los últimos coeficientes.

Ejemplo

Para calcular la parte estándar del racional finito

$$\frac{a + bx}{c + dx}$$

tomamos su distancia al racional ordinario $b/d$ obteniendo

$$\frac{a + bx}{c + dx} - \frac{b}{d} = \frac{ad - bc}{cd + d^2x}$$

y este es claramente infinitesimal. Luego $b/d$ es su parte estándar.

## MODELOS NO NUMERABLES

Al inicio del capítulo, hemos ilustrado sobre la construcción clásica del campo de los hiperreales *R, en la era post-Robinson. Y también hemos construido modelos no arquimedianos que son extensiones de los enteros y los racionales, aunque no alcanzan a cubrir a los hiperenteros y a los hiperracionales, subconjuntos no numerables de *R. Como nuestros modelos son conjuntos numerables, vamos a explorar la posibilidad de ampliarlos a modelos no numerables que contienen a la totalidad de los reales ordinarios. Y aun así, veremos que no es posible que cubran a *R, porque este es un campo verdaderamente grande, mucho más grande de lo que podríamos imaginar[6].

Consideremos el conjunto de todos los entes de la forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n .$$

Donde el término libre es un entero ordinario y todos los otros coeficientes son números reales ordinarios. La exposición que haremos es idéntica a la que hasta ahora hemos hecho, o sea, tenemos elementos que son expresiones polinomiales, con la adición y multiplicación usual, como polinomios, y con la relación de orden lineal que surge de la comparación de los grados entre ellos. La único verdaderamente nuevo, y esto hace una diferencia radical con el dominio entero *Z(x)* es que ahora todos los coeficientes pueden ser reales ordinarios, salvo el primero, que es entero ordinario.

A todos los entes arriba considerados los denominaremos, sin distinción, *hiperenteros.* Dado cualquiera de estos hiperenteros, los elementos *positivos* son aquellos cuyo último coeficiente es positivo. Los siguientes son ejemplos de hiperenteros,

$$3, \quad \pi, \quad 1 + \sqrt{2}\,x$$

Los hiperenteros de la forma

$$a + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$$

los identificaremos con el entero ordinario $a$ y los llamaremos *enteros finitos.* Salvo los enteros finitos, todos los demás hiperenteros son infinitos. Así, nuestro conjunto es un dominio entero no arquimediano, o lo que es lo mismo, un anillo sin divisores de cero, con orden lineal, y con elementos infinitos. Está claro que es un conjunto *no numerable* porque, particularmente, contiene a todos los entes de la forma $ax$ donde $a$ es un número real ordinario.

6 R. Kosak, 'What are infinitesimals and why they cannot be seen', *The American Mathematical Monthly, Vol, 103, Number 10, Dec. 1996.*

El sistema numérico $K$ que proponemos será el *campo cociente,* o conjunto de todas las expresiones de la forma

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$$

La identificación $a=\dfrac{ax}{x}$ nos permite considerar al conjunto R de los reales ordinarios como subconjunto de $K$.

Ejemplo

Como el elemento $1+\sqrt{2}x$ es un hiperentero, tiene un sucesor. El entero que sigue a $1+\sqrt{2}x$ es $2+\sqrt{2}x$ y entre los dos no cabe ningun otro hiperentero, puesto que

$$1+\sqrt{2}x\leq a+bx\leq 2+\sqrt{2}x$$
$$b=\sqrt{2}$$
$$a=\begin{cases}1\\2\end{cases}$$

El sistema numérico $K$, pese a que contiene a R, no es *R, y le falta mucho para llegar a serlo. Podríamos decir que $K$ no contiene elementos infinitos muy grandes ni infinitesimales muy pequeños. Como ya vimos, no existe un elemento de $K$ que represente a $2^N$, donde $N$ es entero infinito. La situación será idéntica si nos preguntamos por la existencia de infinitesimales del tipo $\dfrac{1}{2^N}$. Obviamente, no hay infinitesimales tan pequeños en el sistema construido, por la misma razón arriba anotada. Nuestro sistema es grande, pero no tanto.

# Apéndice II

# Euler, maestro de maestros

*«Leed a Euler»*

La Place

No podríamos finalizar el libro sin hacer mención a uno de los grandes en la historia del cálculo infinitesimal: Leonardo Euler. Es el momento de hacer el reconocimiento al maestro de todos los maestros, y mostrar aquí como en una época se hacía verdaderamente análisis con los infinitos, como Euler mismo denominó su arte. También, es preciso que pongamos los puntos sobre las íes, para dejar en claro que un concepto fundamental de la matemática moderna, la función, inventada por Euler, no tiene nada que ver con lo que se ve hoy en el aula de clase. Aquellos que quieran prufundizar sobre la vida y obra de Euler pueden acudir a Truesdell[1], Horner[2] y Castro[3], entre tantos biógrafos.

Leonhard Euler nace en la ciudad de Basilea, Suiza el 15 de abril de 1707. Su padre, Paulus Euler, pastor calvinista, quiere que Leonhard sea pastor, y lo inscribe en la Universidad de Basilea en 1720. Allí conoce a Johann Bernoulli, el matemático más destacado del momento, quien se convierte en maestro de Leonhard, y lo convence para que se haga matemático. Daniel y Nicolás Bernoulli, quienes son sus amigos, invitan a Euler para que ingrese a la Academia de San Petersburgo, lo que hace el 17 de mayo de 1727. En 1738 pierde la vista de su ojo derecho. Durante sus 14 años de permanencia en San Petersburgo, Euler se convierte en uno de los matemáticos más brillantes de su época.

En 1741, Euler se aleja de Rusia y se vincula a la cátedra de ciencia de la Sociedad de Ciencia de Berlín, aunque acepta seguir colaborando con las publicaciones de la Academia Imperial. En 1744, Federico II funda oficial-

1 C. Truesdell, *Leonhard Euler, Supreme Geometer,* Unjiversity of Wisconsin Press, 1972.

2 Horner, *Extractos de la Memoria de la vida* y *carácter de Euler,* 1840.

3 I. C. Castro Ch., *Leonhard Euler*, Pontificia Universidad Javeriana, Colombia, 1988.

mente la Académie Royal de Sciences et des Belles Lettres, y nombra como su primer presidente a P. L. M. de Maupertuis. Euler permanece al servicio de Federico II durante 24 años. En 1766 Euler vuelve nuevamente a San Petersburgo, donde lo recibe Catalina II la Grande, quien le organiza una bienvenida digna de una monarca. Pocos años después, en 1771, pierde la vista de su ojo izquierdo, quedando totalmente ciego. En San Petersburgo reside 17 años, y aunque ciego, es la principal luz que ilumina la Academia de Ciencias, donde escribe y publica hasta el último día de su vida. Leonhard Euler muere el día 18 de septiembre de 1783.

Los grandes períodos en su vida científica son, el que va de 1727 a 1741, en San Petersburgo. El de 1741 a 1766 en Berlín, y el último, nuevamente en San Petersburgo, de 1766 hasta 1783. De las publicaciones de Euler en estas tres etapas, destacamos: *Mechanica* (1736); *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minive proprietate gaudentium sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* (1744); *Introductio in analysin infinitorum* (1748); *Institutiones Calculi Differentialis* (1755); *Elementa calculi variationum* (1764); *Theoria motus corporum solidorum* (1765); *Dioptrica* (1769); *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770); *Institutiones Calculi Integralis* (1770).

Hay un concenso en llamar a Euler el autor mas prolífico de todos los tiempos. Sólo para contener la lista de las publicaciones de Euler, se requiere editar un libro entero. Del total del cuerpo de investigación en matemática, física-matemática e ingeniería mecánica publicado en los últimos tres cuartos del siglo XIIX, un tercio se debe a Euler. Durante la primera etapa 1727-1741, en San Petersburgo, las publicaciones de Euler son más de la mitad de todas las publicaciones de la Academia. Así mismo, en la segunda etapa de 1741-1766 en Berlín, más de la mitad de las publicaciones de la Academia se deben a Euler.

La publicación de sus *Opera Omnia* se ha iniciado en 1911 y están programadas en 89 tomos, de los cuales se han publicado 74. Estos 89 tomos comprenden cuatro series. La primera serie contiene sus escritos matemáticos, y está totalmente publicada. Consiste en 30 tomos con un promedio de 470 páginas por tomo. La segunda serie comprende las obras de mecánica y astronomía. La tercera, las de física y miscelánea. La serie cuarta comprenderá sus cartas (8 tomos, 3 publicados ya) y sus manuscritos (7 volúmenes en preparación).

La contribución de Euler comprende, además de la matemática y la física, la mecánica, astronomía, óptica, elasticidad, hidrodinámica y ciencia naval. Es, sin duda alguna, el matemático que mayor influencia ha ejercido, debido a la publicación de numerosos y famosos textos docentes, que han estudiado con veneración los más importantes matemáticos y científicos del mundo, y que han servido y sirven, en la actualidad, como libros de texto, consulta y referencia en las universidades.

Es costumbre que en los textos que tratan el cálculo infinitesimal, se apele directamente a frases o párrafos literales de Euler sin mencionarlo expresamente. También se ha convertido en un odioso hábito ocultarle a los estudiantes que mucho de lo que está en los textos de cálculo fue creado, inventado o probado por Euler. Nosotros reseñaremos una de sus más conocidas proezas, la obtención del número $e$ y el desarrollo en serie de la exponencial, mediante el uso de enteros infinitos e infinitesimales. Luego, nos concentraremos en el tema central, el concepto de función, según Euler. Los comentarios nuestros se colocan entre corchetes, para distinguirlos de las cursivas, que siguen el texto original.

## *INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM. LIBER PRIMUS*

El libro *Introductio in Analysin Infinitorum. Liber Primus*, de Leonhard Euler, es editado en 1748. Contiene 18 capítulos y un Prefacio escrito por el propio autor. En dicho Prefacio, Euler afirma lo siguiente: «He dividido el Tratado en dos libros. El primero abarca lo que se llama análisis puro. En el segundo desarrollo varias cuestiones geométricas...». «Yo me he concentrado sobre todo en el primer libro, en las funciones de variables, porque ellas son el objeto del análisis infinitesimal». Esta última frase, arroja una gran luz sobre los Elementos del Cálculo, que en este libro hemos presentado. En el medio matemático, una obra sobre Análisis Infinitesimal da la impresión que contiene diferenciales, integrales, áreas, máximos y mínimos, entre otros temas. A muchos sorprenderá que en el Primer Tomo de Euler no haya nada, absolutamente nada que tenga que ver con diferenciales e integrales. Sólo hay lo que estrictamente Euler ha anunciado: el estudio de las funciones de variable, que son el objeto del análisis infinitesimal, la manera de componerlas, transformarlas, reducirlas a series infinitas, enumerarlas en especie, separarlas en algebráicas y trascendentes y estudiarlas por separado, particularmente, las exponenciales y logarítimicas. Y realizar cálculos, muchos cálculos. A continuación, presentamos el contenido del célebre Capítulo VII y remitimos a Pita[4] para aquellos que quieran una reseña de los otros capítulos del Libro Primero.

> Caput VII. De cuantitatum exponentialium ac logarithmorum per series explicatione. *Del desarrollo de cantidades exponenciales y logarítmicas en series.*

[El Capítulo cubre desde la Sección 114 hasta la Sección 125. Como lo dice su título, Euler se propone desarrollar en series de potencias la exponencial y el logaritmo. Vamos a ver, paso a paso, como lo logra. Los símbolos, (salvo el cambio de *lb* por log (*b*)), letras, cantidades y ejemplos, son literalmente del autor y están tomados directamente del texto en latín. La traducción del latín es del texto en inglés[5]. Todo lo que no esté en corchetes cuadrados es el texto original].

> Sección 114. *Puesto que* $a^0 = 1$, *cuando el exponente de* a *aumenta, la potencia así mismo aumenta, siempre que tomemos* a *mayor que 1. Se sigue que si el exponente es infinitamente pequeño y positivo, entonces la potencia también excede 1 por un número infinitamente pequeño. Sea* $\omega$ *un número infinitamente pequeño o una fracción tan pequeña que, aunque no sea igual a cero, aun* $a^{\omega} = 1 + \psi$ *donde* $\psi$ *es también un número infinitamente pequeño... hagamos* y = k$\omega$*. Entonces tenemos*
>
> $$a^{\omega} = 1 + k\omega$$
>
> *y con* a *como la base para los logaritmos, tenemos*
>
> $$\omega = \log(1 + k\omega)$$

[La idea es sencillamente genial. La expresión $a^{\omega} = 1 + \psi$ corresponde a un real mayor que 1 elevado a un infinitesimal, cuya potencia pertenecerá al átomo de la unidad. Se toman los dos infinitesimales del mismo orden, por lo que uno será un múltiplo finito del otro. La ecuación $\omega = \log(1 + k\omega)$ es típicamente euleriana (o sea, computable): nos dice cómo determinar expresamente un infinitesimal mediante un logaritmo. A continuación, Euler se propone calcular el valor de *k*]

4 C. Pita, *Los infinitésimos en el siglo XVIII,* Trabajos de Educación Matemática No. 3, Matemática Educativa, Cinvestav, México, 1983.

*Exemplum* [Euler calcula un valor aproximado de $k$ para la base logarítmica $a = 10$. Propone una cantidad cercana a un infinitesimal, $k\omega = 1/1000000$. De las tablas de logaritmos, verifica

$$k\omega = \frac{1}{1000000}$$
$$\log\left(1+\frac{1}{1000000}\right) = \log\frac{1000001}{1000000} = 0{,}0000004.3429 = \omega$$

por lo que

$$k\omega = 0{,}00000100000$$
$$\frac{1}{k} = \frac{43429}{100000}$$
$$k = 2{,}30258$$

Sección 115. *Puesto* $a^{\omega} = 1 + k\omega$ *que tenemos*

$$(a^{\omega})^{i} = (1+k\omega)^{i}$$

*cualquiera sea el valor que asignemos a i. De aquí sigue que*

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{(i-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 + \cdots$$

*Si ahora hacemos i = z/ω, donde z denota cualquier número finito, puesto que w es infinitamente pequeño, entonces i es infinitamente grande. Entonces tenemos ω = z/i donde ω está representada por una fracción con un denominador infinito, y así ω es infinitamente pequeño, como debe ser. Cuando substituimos z/i por w entonces*

$$a^{z} = \left(1+\frac{kz}{i}\right)^{ij} = 1 + kz + \frac{(i-1)}{1\cdot 2i}k^2z^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i}k^3z^3 + \cdots$$

*Esta ecuación es cierta siempre que un número infinitamente grande sea sustituido por i pero entonces k es un número finito que depende de a, como lo hemos visto.*

[Como hemos podido confirmar, para los desarrollos en serie, Euler usa los infinitesimales y los enteros infinitos, a gusto].

Sección 116. «*Cum autem i sit numerus infinite magnus*» *[Como i es un número infinitamente grande]*

$$\frac{i-1}{i}=1$$

*y entre mayor sea el número que substituyamos por i, el valor de la fracción estará más cerca de 1. Entonces, si i es mayor que cualquier número asignable,* $\frac{i-1}{i}$ *es igual a 1. Por la misma razón,* $\frac{i-2}{i}=1, \frac{i-3}{i}=1$ *, y así los demás. Se sigue que*

$$\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}, \frac{i-2}{3i}=\frac{1}{3}, \frac{i-3}{4i}=\frac{1}{4},$$

*y así los demás.*

[El razonamiento central, que es una inspiración del principio arquimediano, devela la insistencia de Euler en despejar el infinitesimal ω: desde Leibniz sabemos que todo número real z es un múltiplo entero $z = i\omega$ de un infinitesimal dado, donde *i* es un entero infinito]

*Cuando substituímos estos valores, obtenemos,*

$$a^z=1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

Esta ecuación expresa la relación entre los números *a* y *k*, puesto que cuando hacemos z = 1, tenemos,

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

*Cuando $a = 10$, entonces* k *es necesariamente, aproximadamente igual a 2.30258 como ya hemos visto.*

Sección 117. *Hagamos* $b = a^n$, y *sea* a *la base para los logaritmos, de modo que log(*b*) = n. Puesto que* $b^z = a^{nz}$, *tenemos la serie infinita,*

$$b^z = 1 + \frac{knz}{1} + \frac{k^2n^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3n^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

*ahora substituimos log(*b*) por n, de modo que*

$$b^z = 1 + (k\log_{10} b)\frac{z}{1} + (k\log_{10} b)^2\frac{z^2}{1\cdot 2} + (k\log_{10} b)^3\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

*Puesto que sabemos el valor de* k *de un valor dado de la base a, la exponencial general* $b^z$ *puede ser expresada en una serie infinita cuyos términos se corresponden con las potencias de* z. *Habiendo demostrado este hecho, vamos ahora a demostrar cómo los logaritmos pueden ser expresados por series infinitas.*

Sección 118. *Puesto que* $a^\omega = 1 + k\omega$ *donde* $\omega$ *es una fracción infinitamente pequeña* y *la relación entre a* y *k está dada por*

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

*si a se toma como la base de los logaritmos, entonces* $\omega = \log(1 + k\omega)$ y $i\omega = \log(1 + k\omega)^i$. *Es claro que entre más grande sea el número escogido para* i *más* $(1 + k\omega)^i$ *excederá a 1. Si hacemos* i *un número infinito, el valor de la potencia* $(1 + k\omega)^i$ *se hará más grande que cualquier número mayor que 1. Ahora si hacemos* $(1 + k\omega)^i = 1 + x$, *entonces* $\log(1 + x) = i\omega$. *Puesto que* $i\omega$ *es un número finito, precisamente el logaritmo de 1 +* x, *es claro que* i *debe ser un número infinitamente grande, de otra forma,* $i\omega$ *no podría tener valor finito.*

[Después de varios razonamientos, Euler establece a continuación un resultado histórico fundamental: la conquista del número e]

*Sección 122.* Puesto que estamos en libertad para escoger la base $a$ para el sistema de logaritmos, ahora escogemos $a$ de modo tal que $k = 1$. Supongamos ahora que $k = 1$, entonces la serie encontrada en la Sección 116,

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots$$

es igual a $a$. Si los términos son representados como fracciones decimales y sumados, obtenemos el valor de

$$a = 2.71828182845904523536028...$$

Cuando esta base es escogida, los logaritmos se llaman naturales o hiperbólicos. Este último nombre se usa puesto que la cuadratura de la hipérbola puede ser expresada mediante estos logaritmos. En aras de la brevedad para este número 2.71828182845904523536028... usaremos el símbolo $e$, el cual denotará la base para los logaritmos naturales o hiperbólicos, los cuales corresponden al valor de $k = 1$, y $e$ representa la suma de la serie infinita

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots$$

[Con estos cálculos, Euler desarrolla diversas series y obtiene inmediatamente los siguientes resultados:

$$e^z = 1+z+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+...+ \quad etc$$

$$\log(1+x) = \frac{1}{k}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...\right)$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-...$$

$$\operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-...$$

además establece la *fórmula de Moivre* y la célebre *fórmula de Euler*

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Es importante reiterar que Euler manipula, con toda naturalidad, *cantidades finitas, infinitamente grandes*, e *infinitesimales*. Así mismo, logra alcanzar las cantidades finitas mediantes multiplos infinitos de cantidades infinitesimales. Estas cantidades sometidas a ciertas reglas de cálculo son tratadas por Euler como poseedoras de un álgebra similar a la de los número reales].

## El concepto de función, según Euler

Debido a que este es el centro de atención de esta exposición, presentaremos el texto literal de las primeras 9 Secciones, en sus versiones conocidas –el original en latín y su traducción en inglés, francés y castellano–, que estamos seguros el lector acusioso sabrá agradecer. Aunque, es bueno recalcarlo, un estudio completo debería abarcar los Capítulos del I al V, que cubren desde la Sección 1 hasta la 113. Nuestro objetivo principal es mostrar qué entiende Euler por función y contrastar el sentido de la función euleriana con la acepción moderna que nos enseñan en el salón de clase. No está de más recalcar que todos los comentarios, que aparecen entre corchetes cuadrados, son de nuestra entera responsabilidad.

*Liber primus*

*Caput I*

*De functionibus in genere*

Chapter I. *On functions in General*. Chapitre Premier. *Des Fonctions en general*. Capítulo Primero. Las funciones en general.

1. *Quantitas constans est quantitas determinata perpetuo eundem valorem servans. 1.- A constant quantity is a determined quantity which always keeps the same value. 1.- Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujurs la meme valeur.*

   *[Una cantidad constante es una cantidad determinada, que conserva siempre el mismo valor].*

[La cantidad constante es la cantidad determinada, no el número. Euler propone las letras *a, b, c*, etc., para las cantidades constantes. Dada *a* constante, *a* conserva su valor para siempre, una vez lo ha obtenido. De todas formas, es interesante que Euler defina a la cantidad constante antes que cualquier otro concepto]

2. *Quantitas variabilis est quantitas indeterminata seu universalis, quae omnes omnino valores determinatos in se complectitur.2.- A variable quantity is one which is not determined or is universal, which can take on any value. 2.- Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.*

   *[Una cantidad variable es una cantidad indeterminada, o si se quiere, una cantidad universal que comprende todos los valores determinados.]*

[Mientras que el valor determinado se expresa como constante, la cantidad variable comprende todos los números de la naturaleza que sean. Euler precisa que la relación de la variable a la constante es la relación de género a especie; cuando se consideran los individuos; se la concibe abarcando todas las cantidades determinadas. Propone simbolizar las cantidades variables con las letras z, y, x, etc.

3. *Quantitas variabilis determinatur, dum ei valor quicunque determinatus tribuitur. 3.- A variable quantity is determined when some definite value is assigned to it. 3.- Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.*

   *[Una cantidad variable se hace determinada, una vez se le atribuye un valor definido cualquiera].*

[Este valor se le puede atribuir de infinitas maneras, porque puede sustituir a todos los números imaginables. Así, dice Euler, la cantidad variable comprende todos los números, tanto positivos como negativos, los números enteros, los fraccionarios, los racionales, los irracionales y los trascendentes; no debe excluirse el cero ni a los números imaginarios. Ya hemos anotado que Euler no se refiere a los posibles valores finitos, infinitos o infinitesimales que la variable puede recorrer. De lo que sólo hará uso mucho más más adelante.]

4. *Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus. 4.- A function of a variable quantity is an analytic expression composed in any way whatsoever of the variable quantity and numbers or constant quantities. 4.- Une fonction de quantite variable est une expressión analytique composée, de quelque maniere que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes*

*[Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, de la manera que sea, de dicha cantidad y de números o cantidades constantes.]*

[Aquí hay, sin duda, una cuestión fundamental. Nótese que Euler no dice «una función es ...» sino «una función de cantidad variable es...» lo que significa que la función es una cantidad variable, sólo que bajo condiciones determinadas. ¿Qué determina que una variable sea función? El texto lo dice: una «expresión analítica» cualquiera que sea el significado que se le de a «analítico».

La acepción más usual de «expresión analítica» es que sea completa, íntegra, total, redonda como un todo, de modo que pueda descomponerse o separarse en partes. Esta totalidad se compone de «variable y constantes». Y también de número, que confirma que Euler distingue claramente entre constante y número. Pone como ejemplos de funciones las siguientes: $a+3z$, $az-4z^2$, $az+b\sqrt{a^2-z^2}$, $c^z$. Así, por ejemplo, en la función $a + 3z$, z es variable, $a$ es constante y 3 es número.

Ante la pregunta: ¿La función «moderna» es una función para Euler? Debemos ser categóricos: Euler no la considera una función, si entendemos que función «moderna» quiere decir «asignación arbitraria» de valores. Una expresión analítica se refiere a una *ley*, que es lo contrario de asignación arbitraria.]

5. *Functio ergo quantitatis variabilis ipsa erit quantitas variabilis. 5.- Hence a function itself of a variable quantity will be a variable quantity. 5.- Une fonction de variable est donc aussi une quantité variable.*

*[Una función de cantidad variable también es una cantidad variable.]*

[Aunque antes ya lo habíamos afirmado, ahora no cabe la menor duda: para Euler, una función es una variable. En otras palabras, ¿Cual es la diferencia entre variable y función en Euler? Ninguna. Así, Euler coloca un ejemplo de función,

$$y = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

La expresión de la derecha es una «expresión analítica» o sea, una función.. Y como ella está identificada con el símbolo y, entonces y es variable y por tanto, función.

6. *Praecipuum functionum discrimen in modo compositionis, quo ex quantitate variabili et quantitatibus constantibus formantur, positum est. 6.- The principal distinction between functions, as to the method of combining the variable quantity and the constant quantities is here set down. 6.- La principale différence des fonctions consiste dans la combinaison de la variable et des quantités constantes, qui les forment.*

   *[La principal diferencia entre las funciones consiste en la combinación de la variable y de las cantidades constantes que la forman.]*

[En la función moderna, se distinguen las funciones tanto por los valores que designan, como por el dominio y el rango de la asignación. En Euler, se distinguen las funciones sólo por la expresión analítica que las define. La expresión analítica es una combinación compuesta de la variable y las constantes. Las operaciones se combinan y forman la expresión. Las operaciones son, la adición, la sustracción, la multiplicación, la división; la elevación a las potencias; la extracción de raices. Pero estas combinaciones no agotan las expresiones analíticas porque sólo generan funciones algebraicas. Por eso Euler incluye las operaciones con logaritmos, exponenciales; funciones trigonométricas y otras otras sin nombre, como bien lo aclara].

7. *Functiones dividuntur in algebraicas et transcendental; illae sunt, quae componuntur per operationes algebraicas solas; hae vero,*

*in quibus operationes transcendentes insunt. 7.- Functions are divided into algebraic and transcendents. The former are those made up from only algebraic operations, the latter are those which involve transcendental operations. 7.- Les fonctions se divisent en algébriques et en transcendantes; les premieres sont formées par des opérations algébriques seulement, et les dernieres suppossent pour leur formation des operations transeendantes.*

*[Las funciones se dividen en algebraicas y transcendentes. Las primeras están formadas por las peraciones algebraicas. Las segundas son aquellas que involucran operaciones transcendentes.]*

[Los múltiplos y las potencias de z son funciones algebraicas, asi como todas las expresiones que admiten operaciones algebraicas. Euler pone como ejemplo de ello la función

$$\frac{a+bz^n-c\sqrt{2z-zz}}{aaz-3bz^3}$$

Hay otras expresiones algebraicas que no pueden ser representadas ex plícitamente. Euler lo ilustra así: «tal será la función Z de z, expresada por la equación

$$Z^5=azzZ^3-bz^4Z^2+cz^3Z-1$$

...». Para obtener una expresión transcendente, es preciso que haya involucrada una operación transcendente. Si *c* es la circunferencia del círculo de radio = 1, «*c* es una cantidad transcendente», dice Euler.

Refiriéndose a las funciones exponenciales, Euler nos hace notar que ellas tienen exponente variable. En cambio las funciones algebraicas tienen exponentes constantes. Es evidente que las exponenciales no pueden ser reportadas como funciones algebraicas. De allí que haya varias especies de *cantidades exponenciales*, de acuerdo al modo como afecta el exponente variable. Euler coloca como ejemplo de diversas especies

$$a^z, y^z, a^{a^z}, a^{y^z}, y^{a^z}, x^{y^z}$$

aunque, aclara, sólo considerará a la primera de ellas, que es la primera especie.]

Para terminar, listamos los enunciados en los que Euler establece la naturaleza multivaluada de las funciones, las define, las distingue y las acepta a todas por igual, con el nombre de funciones.

> 10. *Finalmente, debemos hacer una distinción entre funciones univaluadas y multivaluadas.*
>
> 11. *Una función bivaluada de z es una que da un par de valores para cada valor determinado de z.*
>
> 16. *Si y es cualquier clase de función de z, entonces, así mismo, z será una función de y.*

[Es una lástima que este enfoque en el que «todo es función» se haya perdido. Nunca se le menciona en el salón de clase. Nosotros, en cierta forma, lo hemos retomado en nuestro libro].

# Bibliografía


A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev, *Mathematics, Its Content, Methods, and Meaning,* The MIT Press, 1989.

M. A. Alzate, *Sintetizador de Voz en Español,* Publicaciones Universidad Distrital «Francisco José de Caldas», Santafé de Bogotá, DC, 1993.

F. J. Arago, «*Eloge historique de Joseph Fourier,*» Mem. Acad. Roy. Sci., 14, 69-138.

J. Babini, *Historia de las ideas modernas en matemática*, Monografía 4, Serie de Matemática, OEA, 1970.

M. E. Baron, *The Origins of the Infinitesimal Calculus,* Dover Publications, Inc., New York, 1969.

E. T. Bell, *Historia de las matemáticas*, Fondo de Cultura Económica, México, 1949.

G. D. Bergland, «A guided tour of the Fast Fourier Transform» *IEEE Spectrum,* July 1969.

H. S. Black, *Modulation Theory,* New York: van Nostrand, 1953.

C. B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development,* Dover Publications, Inc., New York, 1959.

B. P. Bogert, M. J. R. Healy, J. W. Tukey, «The Quefrency Alanysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudo-Autocovariance, Cross-Cepstrum and Saphe Cracking», *Proceedings of the Symposium on Time Series Analysis,* Brown University, June 11-14, 1962, edited by M. Rosenblatt.

B. Bolzano, *Paradoxien Des Unendlichten,* 1851, *Las paradojas del Infinito,* Mathema, Facultad de Ciencias, UNAM, 1991.

E. Borel, «Sur la recherche de singularités d´une fonction définie par in développement de Taylor,» *C.R. Acad. Sci.* Paris 127, 1001-1003, 1898.

H. J. M. Bos, «Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus,» *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 14, 1974/75.

A. C. Bose, *Fourier,* «his life and work», *Bull. Calcutta math. Soc., 7,* 1915-1916.

C. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover, New York, 1959.

R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill Book Company, 1965.

O. E. Brigham, R. E. Morrow, «The Fast Fourier Transform» *IEEE Spectrum*, dec. 1967.

E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall,Inc. ,1974.

E. O.Brigham, *The Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice Hall, 1988.

G. Cantor, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, [1915], Dover Publications, Inc., New York, 1955.

D. S. L. Cardwell, «Los inicios de la termodinámica», *La Recherche*, Vol. 5, p.726-733, 1974.

S. Carnot, *Reflexiones sobre la Potencia Motriz del Fuego*, (París, 1824), Serie: Ciencia y Técnica, Instituto Politécnico Nacional, México, 1987.

M. Cartwright, *Fourier Methods for mathematicians, scientists and engineers*, Ellis Horwood, 1990.

I. C. Castro Ch., *Leonhard Euler*, Pontificia Universidad Javeriana, Colombia, 1988.

A. L. Cauchy, *Curso de Análisis*, [1821], Mathema, Facultad de Ciencias, UNAM, 1994.

Y. Chevallard, *La Transposition Didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1985.

D. G. Childers, *et al*, «The cepstrum: A Guide to Processing,» *Proceedings of the IEEE*, vol. 65, No. 10, oct. 1977.

R. V. Churchill, J. W. Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, (1963), McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. (3 ed.) 1978.

W. A. Coppel, «J. B. Fourier-On the Ocassion of his two hundredth birthday,» *The American Mathematical Monthly*, Vol.76,1969.

J. W. Cooley, John W. Tukey, «An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series», *Math. Computations*, 19, April 1965.

W. Cooley *et al.*«What is the Fast Fourier Transform?», *Proceedings os the IEEE*. Vol. 55, No. 10, Oct., 1967.

W. Cooley *et al.* «The Finite Fourier Transform», *IEEE Trans. on Audio and Electro-acoustics*. Vol. Au. 17, No. 2, 1969.

J. W. Cooley, *The Structure of FFT Algorithms*, Tutorial at IEEE International Conference on Acustics, Speech, and Signal Processing, 1990.

R. Courant, H. Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, 1941.

R. Courant, H. Robbins, *What is Mathematics?*, Revised by Y. Stewart, Oxford University Press, 1996.

N. Cutland, *Nonstandard Analysis and its Applications*, Cambridge University Press, 1988.

J. Daitith, R. D. Nelson, *Dictionary of Mathematics*, Penguin Books, 1989.

T. Dantzig, *Number, The Language of Science*, The Free Press, The Macmillan Pub., Co., Inc., New York, 1954.

J. W. Dauben, «*The Trigonometric Background to Georg Cantor's Theory of Sets*», Archive for History of Exact Sciences, Vol. 1, pp. 181-216, 1971.

J. W. Dauben, «Abraham Robinson: el hombre y sus matemáticas», *Mathesis*, Vol. VIII, No. I, febrero 1992.

J. W. Dauben, *Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysis, A personal and Mathematical* Odyssey, Princeton University Press, 1995.

H. F. Davis, *Fourier Series and Orthogonal Functions*, Dover Publications, Inc., 1963.

P. J. Davis, R. Hersh, *Experiencia Matemática,* Editorial Labor, S. A., 1988.

R. Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers,* Dover Publications, Inc. New York, [1901], 1963.

J. De Lorenzo, *Estudio Preliminar,* Prólogo al Análisis Infinitesimal, Tecnos, 1987.

P. A. M. Dirac, «The physical interpretation of the quantum dynamics», *Proc. of the Royal Society*, London, Sec. A 113, 1926-1927, pp. 621-641.

P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, (1934), Fourth Edition (Revised) Oxford at the Clarendon Press (1958).

H. Dym, H. P. McKean, *Fourier Series and Integrals,* Academic Press, N. York and London, 1972.

C. H. Edwards, Jr. *The Historical Develpment of the Calculus,* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1979.

C. H. Edwards, Jr., D. E. Penney, *Ecuaciones diferenciales Elementales con Aplicaciones,* Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., 1986.

D. F. Elliot, *Fast Transforms, Algorithms, Analysis, Application*, Academic Press, 1982.

EDM2, *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, Second Edition, Mathematical Society of Japan, MIT Press, 1993.

L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti,* Opera Omnia 1, 25, p. 234, *Método de máximos* y *mínimos*, Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, 1993.

L. Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum (1748),* Opera Omnia, Series Prima, Volumen Octavum, MCMXXII, Lipsiae et Berolini, 1922

L. Euler, *Introduction to Analysis of the Infinite,* Book I, Springer-Verlag, traducción inglesa, New York Inc., 1988

L. Euler, *Introduction a l'analyse infinitésimale,* (1748), Tome Premier, A Paris, L'Ecole Polytechnique, traducción francesa, 1835.

L. Euler, *Elements of Algebra,* (Reprinted from *Elements of Algebra,* Fifth Edition, by Leonard Euler. London: 1840), Springer-Verlag, 1984.

R. M. Farfán M., *Acerca de la representación de una función 'arbitraria' en serie trigonométrica,* Tesis de Maestría, Depto. de Matemática Educativa, Cinvestav, 1986.

E. Fisher, *Comptes Rendus*, 144 (1907), pag. 1022-1024

J. L. Flanagan, *Speech Analysis, Synthesis, and Perception,* 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1972

G. B. Folland, *Fourier Analysis and Its Applications*, Wadsworth & Brooks/Cole, Mathematics Series, 1992.

J. B. Fourier, «De la loi d'emission de la chaleur rayonnante», *Annales de la Chimie et de Physique*, VI, p.263, 1817.

J. B. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, 1822. Traducido por A. Freeman, Cambridge, 1878. *The Analytical Theory of Heat*, Dover Publications, Inc., New York, 1955.

L. Franks, *Signal Theory*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. Y., 1969.

I. M. Gel'fand, *et al.*, *Generalized Functions,* Tomos I, II, III, IV, V. Academic Press, New York and London, 1964.

W. M. Gentleman, G. Sande,«Fast Fourier Transforms for fun and profit», *Fall Joint Computer Conference*, AFIPS, Proc., Vol. 29,1966.

K. George, C. Imaz, «La Delta de Dirac como función», *Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica, Vol. 7 # 3, Dicembre 1995.

K. George, *De la transformada discreta a la transformada integral de Fourier, en un modelo de cálculo infinitesimal,* Memorias, IX Reunión Centroamericana y del Caribe, La Habana, Cuba, agosto de 1995.

S. Goldberg, *Introduction to Difference Equations,* Dover Publications, Inc., New York, 1958.

H. H. Golstine, *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century,* Sringer-Verlag, New York Inc., 1977

Y. Grattan-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann,* The MIT Press, 1970.

I. Grattan-Guinness, J.R. Ravetz, *Joseph Fourier, 1768-1830, a survey of his live and work.* Cambridge, Mass. and London, 1972.

H. Griffin, *Elementary Theory of numbers,* Mc.Graw-Hill Book Company, Inc., 1954.

P. R. Halmos, «How to write mathematics», *L'Enseignement Mathématique*, Vol. 16, 1970.

R. V. L. Hartley, «Transmission of Information», *Bell System Technical Journal*, July 1928, pp. 535

V. Havin, B. Jöricke, *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, 1994.

J. M. Henle, E.M.Kleinberg, *Infinitesimal Calculus,* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 1979.

J. Herivel, *Joseph Fourier, The man and the physicist*, Clarendon Press, Oxford, 1975.

I. N. Herstein, *Topics in Algebra,* Blaisdell Publishing Company, 1964.

J. R. Higgins, «Five short stories about the cardinal series», *Bull. (New Series) of the American Mathematical Society*, vol. 12, No. 1, 1985.

D. Hilbert, *Fundamentos de las Matemáticas*, Mathema, Facultad de Ciencias, UNAM, 1993.

D. Hilbert, *Foundations of Geometry,* Open Court Publishing Company, 1971.

F. Hitt E. 1994. «Educación matemática y uso de nuevas tecnologías», *Perspectivas en Educación Matemática*, DME, Cinvestav, IPN, pp. 21-42

F. Hitt E. 1994. «Estructurando un proyecto de investigación», *Perspectivas en Educación Matemática*, DME, Cinvestav, IPN, pp. 13-19

C. F. Hockett, *Curso de Lingüística Moderna*, Eudeba, 1971

J. N. Holmes, *Speech Synthesis*, Mills & Boon Limited, 1972.

H. P. Hsu, *Analisis de Fourier*, Fondo Educativo Interamericano,1970.

B. B. Hubbard, *The World According to Wavelets*, A K Peters, Wellesley, Mass. 1996.

A. E. Hurd, P.A.Loeb, *An Introduction to Nonstandard Real Analysis,* Academic Press, Inc. 1985.

C. Imaz, «Infinitesimal models for Calculus», *Bol.Sociedad Matemática Mexicana, Vol. 29, 2,1984.*

C. Imaz, «Infinitesimal models for real analysis», *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, Vol. 22, No. 2, 1991.

C. Imaz, *Una alternativa teórica al cálculo,* Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamérica, 1996

D. L. Jagerman, L. J. Fogel, «Some General Aspects of the Sampling Theorem», IRE *Transactions on Information Theory,* dic. 1956.

A. J. Jerri, «The Shannon Sampling Theorem-Its various Extensions and Applications: A Tutotial Review», *Proceedings of the IEEE*, vol. 65, No. 11, nov. 1977.

P. E. B. Jourdain, «The influence of Fourier's theory of the conduction of heat on the development of pure mathematics,» *Sciencia, 22, p. 245-254, 1917.*

H. J. Keisler, *Foundations of Infinitesimal Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Inc., 1976.

H. J. Keisler, *Elementary Calculus,* Prindle, Weber & Schmidt, Inc., 1976.

D. M. Keller, «Periodic Functions and the Discrete Fourier Transform: A Time-Domain View», *IEEE Transactions on Education*, Vol. 34, No. 1, February 1991.

M. Kline, *Mathematical Thought, from Ancient to Modern Times,* Tres Volúmenes, Oxford University Press, 1972.

R. Kosak, 'What are infinitesimals and why they cannot be seen', *The American Mathematical Monthly, Vol, 103, Number 10, Dec, 1996.*

T. W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988.

V. A. Kotel´nikov, «On the transmission capacity of 'ether' and wire in electrocomunications», *Izd. Red. Upr. Svyazi RKKA* (Moscow), 1933.

H. P. Kramer, «A generalized sampling theorem», *J. Math. Phys.*, vol. 38, p. 68-72, 1959.

Kreider, Kuller, Ostberg, *Ecuaciones Diferenciales,* Fondo Educativo Interamericano, S. A., 1970.

C.Lanczos, *Discourse on Fourier Series,* Hafner Pub.Co., 1966.

H. J. Landau, H.O. Pollak, «Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty», I, II, III, *The Bell System Technical Journal,* vol. 40, 1961-1962.

R. E. Langer, *Fourier Series. The Genesis and Evolution of a Theory,* Published as a supplement to the American Mathematical Monthly, Vol. 54, No. 7, 1947.

B. P. Lathi, *Introducción a la teoría y Sistemas de Comunicación*, Limusa, 1974.

H. Lebesque, *Leçons sur l'integration et la Recherche des fonctions primitives*, Paris, Gauthier Villars 1950.

J. Lifermann, *Theorie et Aplications de la transformation de Fourier Rapide*, Masson, 1977.

G. W. Leibniz, *Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (1684), Análisis Infinitesimal, Tecnos, 1987.

G. W. Leibniz, *De Geometria recondita et Analysi indivisibilium atque infinitorum*, (1686), Análisis Infinitesimal, Tecnos, 1987.

G. W. Leibniz, *Oeuvre concernant le Calcul Infinitésimal*, Diffusé par la librairie A. Blanchard –9 rue de Médicis–, Paris (6éme), 1983.

M. J. Lighthill, F. R. S., *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge, at the University Press, 1962.

A. H. Lightstone, A. Robinson, *Nonarchimedean Fields and Asymtotic Expansions,* North Holland Pu., Co., Oxford, 1975.

T. Lindstrom, *An Invitation to Nonstandard Analysis –Nonstandard Analysis and its Applications–,* Edited by N. Cutland, Cambridge University Press, 1988.

W. A. J. Luxemburg, *Non-standard Analysis. Lectures on A. Robinson's Theory of Infinitesimal and Infinitely Large Numbers*, California Institute of Technology, Pasadena, 1962.

J. G. Mikusínski, «Sur le méthode de géneralisation de Laurent Schwartz et sur la convergence faible» *Fundamenta Mathematicae*. vol. 35, 1948, pp. 235-239.

A. F. Monna, «The concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue», *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 9, No. 1-5, 1972/73.

J. Monforte, «The Digital Reproduction of Sound», *Scientific American,* 251 (6): 78, 1986.

L. E. Moreno A. 1994. «Matemáticas y educación: matemática educativa», *Perspectivas en Educación Matemática*, DME, Cinvestav, IPN, pp. 43-54

E. Nelson, «Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis», *Bol. of the American Mathematical Soc.*, Vol. 83, Nov.6, 1977.

E. Nelson, *Radically elementary probability theory*, Princeton University Press, Princeton, New Yersey, 1987.

H. Nyquist, «Certain Factors Affecting Telegraph Speed», *Bell System Technical Journal*, April 1924, pag.324

H. Nyquist, «Certain Topics in Telegraph Transmission Theory» *Transactions A. I. E. E.*, 1928.

A. V. Oppenheim, A.S. Willsky, *Signals ans Systems*, Prentice Hall International, Inc., 1983.

A. V. Oppenheim, R.W. Schafer, *Discrete Time Signal Processing*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1989.

REAC. Palais, N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Am. Math. Soc., 1934.

A. Papoulis, *Signal Analysis*, Mc Graw-Hill Book Co., 1977.

M. Plancherel, «Contribution a l'etude de la representation d'une fonction arbitraire par des integrales definies». *Rendiconti di Palermo*, 30 (1910), pag.289-335

M. L. Peltier, «Una visión general de la didáctica de las matemáticas en Francia,», *Educación Matemática*, Vol. 5, No. 2, 1993.

C. Pita, *Los infinitésimos en el siglo XVIII*, Trabajos de Educación Matemática No. 3, Matemática Educativa, Cinvestav, México, 1983.

G. Polya, *How to solve it* (2nd. ed.), New York, Dolbleday, 1957.

A. D. Poularikas, S. Seely, *Signals and Systems*, PWS Engineering, Boston, 1985.

W. M. Priestley, *Calculus: An Historical approach*, 1979, Springer-Verlag New York Inc.

R. W. Ramirez, *The FFT, Fundamentals and Concepts*, Prentice-Hall, Inc., 1985.

F. Riesz., *Comptes Rendus*, 144 (1907), pag. 615-619 y 734-736

A. Robert, *Analyse non standard (1985), Nonstandard Analysis*, John Wiley & Sons, 1988.

J. A. Robles, *Las ideas matemáticas de George Berkeley, obispo de Cloyne*, Universidad Nacional Autónoma de México, México 1993.

A. Robinson, *Non-Standard Analysis*, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1966, Revised edition, 1974.

A. H. Lightstone, A. Robinson, *Nonarchimedean Fields and Asymptotic Expansions*, North-Holland Publishing Company. Amsterdam. Oxford. Vol. 13, 1975.

B. Russell, *Los principios de la matemática* (3a.Ed.), Espasa-Calpe, Madrid, 1977

R. S. Salat F., *Cálculo Infinitesimal*, Lecturas de Cálculo para Docentes de Ingeniería No. 3, Depto. de Matemática Educativa, Cinvestav, 1993.

R. S. Salat F., *Elaboración, prueba y análisis de un modelo infinitesimal de cálculo,* Tesis Doctoral, Depto. de Matemática Educativa, Cinvestav, 1993

E. Sanchez, 1994. «La noción de programas de investigación», *Perspectivas en Educación Matemática*, DME, Cinvestav, IPN, pp. 1-11

M. Santos T. 1994. «Hacia una caracterización de la educación matemática y la investigación», *Perspectivas en Educación Matemática*, DME, Cinvestav, IPN, pp. 55-68

R. Seco, *Manual de Gramática Española* (1954), Aguliar, 1989.

A. H. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Inc., 1985.

L. Schwartz, «Théorie des distributions et transformation de Fourier» *Annales Univ.* Grenoble, 23, 1947-1948,, pp. 7-24.

L. Schwartz, *Théorie des distributions,* Tomo I, 1950. Tomo II, 1951. Paris: Hermann et Cie.

C. E. Shannon, *Mathematical theory of Comunication.*

C. E. Shannon, «Communication in the presence of noise», *Proceedings of the Institute of Radio Engeniers IRE*, vol. 37 #1, jan. 1949, pags. 10-21.

D. Slepian, «On Bandwidth», *Proceedings of the IRE*, Vol. 64, No. 3, March. 1976.

*Sound Blaster 16,* Creative Labs., Inc. 1993.

W. D. Stanley, *Digital Signal Processing,* Reston Pub. Co., Prentice-Hall Company, 1975.

S. K. Stein, *Cálculo y Geometría Analítica*, Mc. Graw Hill, tercera edición, 1984.

T. G. Stockham,«High-speed convolution and correlation», *Fall Joint Computer Conference*, AFIPS, Proc., Vol. 28, 1966.

D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, Dover Publications, Inc., 1948, 1967.

D. J. Struik, *A Source Book in Mathematics 1200-1800,* Princeton University Press, Princeton, New Yersey, 1969.

Y. Takeuchi, *Teoría de funciones no estandar*, Depto. de Matemática y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, 1983.

H. E. Taylor, T. L. Wade, *University Calculus,* John Wiley and Sons, Inc., 1962.

G. Temple, F. R. S. «The theory of generalized functions», *Proceedings of the Royal Society of London,* Vol., 228, March 1955.

G. P. Tolstov, *Fourier Series,* Dover Pub. Inc., New York, 1962.

C. Truesdell, *Leonhard Euler, Supreme Geometer,* Unjiversity of Wisconsin Press, 1972.

E. B. van Vleck, «The influence of Fourier's series upon the development of mathemathics», *Science,* 39, p.113-124, 1914.

J. S. Walker, *Fourier Analysis,* Oxford University Press, Oxford, 1988.

J. S. Walker, *Fast Fourier Transforms*, CRC Press, Inc., 1991.

H. Weyl, «Uber die Konvergenz von Reihen die nach Orthogonafunktionen tschreiten». *Math. Ann.* (1909), pag. 225-245

N. Wiener, *The Fourier Integral and certain of its applications*, Cambridge University Press, 1933. Dover Pub., Inc., S272.

E. T. Wittaker, «On the functions which are represented by the expansion of interpolating theory», *Proc. Roy. Soc. Edinburgh,* vol. 35, p. 181-194, 1915.

S. Wolfram, *The Mathematica Book*, Third Edition, Wolfram Media, Cambridge University Press, 1996.

R. M. Young, *Excursions in Calculus, An Interplay of th Continuous and the Discrete,* The Mathematical Association of America, 1992.

A. P. Youschkevitch, «The concept of Function up to the Middle of the 19th Century», *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 16, 1976/77.

A. Zygmund, *Trigonometrical series* (1935), Dover Pub. 1955.